41ème colloque COPIRELEM

des formateurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres

Quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire ?

Mont-de-Marsan

18, 19 et 20 juin 2014

ACTES

XXXXIème Colloque international des Professeurs et des Formateurs de Mathématiques chargés de la Formation des Maîtres

Quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire ?

Mont-de-Marsan

ESPE d'Aquitaine, site des Landes

18, 19 et 20 juin 2014

PRESENTATION DES ACTES

Ces actes se présentent sous la forme d'une brochure accompagnée d'un CD Rom.

La brochure contient les textes intégraux des trois conférences et les résumés des ateliers et des communications retenus pour une publication.

Les comptes-rendus complets des ateliers et des communications sont disponibles dans le CD.

SOMMAIRE

Liste des ateliers résumés. Les textes complets sont sur le CD

A11	**Exploration des ressources de la nouvelle calculatrice TI-Primaire Plus™**	Hubert COLOMBAT, Sophie SOURY-LAVERGNE
A12	**Quelles ressources pour la reconnaissance de formes à la maternelle ?**	Sylvia COUTAT Céline VENDEIRA,
A14	**Mallette de ressources mathématiques pour l'école maternelle (MS-GS)**	Sylvaine BESNIER Pierre EYSSERIC Typhaine LE MÉHAUTÉ,
A15	**Analyser une ressource de formation : exemple de la « situation des annuaires »**	Pierre DANOS Pascale MASSELOT Arnaud SIMARD Claire WINDER
A21	**Ressources en histoire des mathématiques : un exemple et des questions.**	Renaud CHORLAY
A22	**Des problèmes de reproduction aux problèmes de restauration de figures géométriques planes : quelles adaptations pour la classe ?**	Caroline BULF Valentina CELI
A23	**Mallette d'Outils Mathématiques, le boulier et la pascaline.**	Sophie SOURY-LAVERGNE, Hélène ZUCCHETTA, Gwenaelle RIOU-AZOU
A24	**De la ressource à la séance en classe : le cas de la proportionnalité en cycle 3.**	Cécile ALLARD Stéphane GINOUILLAC
A25	**L'analyse de manuels en formation : pour quoi faire ?**	Christine MANGIANTE-ORSOLA Edith PETITFOUR
A31	**Pourquoi utiliser des ressources en ligne ouvertes à tous? Étude de deux exemples.**	Richard CABASSUT Marc TRESTINI
A32	**Analyse comparée de séances de formation initiale en géométrie conçues collectivement.**	Thomas BARRIER, Jean-Philippe DALLE Bernard MONTUELLE
A33	**Penser une progression en géométrie en formation des enseignants.**	Alain KUZNIAK Assia NECHACHE
A34	**La règle à bords parallèles : un outil pertinent en formation initiale des professeurs des écoles ?**	Valentina CELI Françoise JORE
A35	**Analyse d'une ressource pour former à l'enseignement de la géométrie.**	Catherine TAVEAU
A36	**Une situation d'homologie-transposition : le solide caché.**	Jean-Claude AUBERTIN Yves GIRMENS

Liste des communications résumées. Les textes complets sont sur le CD.

C11	**Présentation du LéA Saint Charles. Mise en œuvre d'une ingénierie de la soustraction.**	Céline GIORDANO Karine MILLON-FAURÉ
C12	**Coopération entre professeurs d'école et chercheurs au sein d'une ingénierie didactique concernant les premiers apprentissages numériques.**	Mireille MORELLATO Dominique TRUANT
C13	**Étude des effets d'une formation d'initiation à la recherche sur la dynamique du développement des pratiques de professeurs des écoles stagiaires.**	Brigitte GRUGEON-ALLYS Julie HOROKS Monique CHARLES-PÉZARD Julia PILET
C14	**Penser le travail mathématique en formation des maîtres.**	Alain KUZNIAK
C15	**Une ressource à restaurer : un usage commun des mots grandeur, quantité, nombre, numéro, cardinal, ordinal, etc.**	Rémi BRISSIAUD
C16	**Une ressource pour enseigner la numération décimale de position. Des apports essentiels pour la formation des enseignants.**	Frédérick TEMPIER
C21	**Recherche collaborative : questions d'intégration d'une ingénierie didactique broussaldienne aux pratiques enseignantes.**	Michèle COUDERETTE Valérie MARROU Carine CONSTANT Anne ICHES
C22	**La narration d'un jeu de tâches : une ressource pour la formation des enseignants primaires ?**	Christine DEL NOTARO,
C23	**Quelles ressources les enseignants utilisent-ils afin de trouver des énoncés de problèmes ouverts en mathématiques au cycle 3 ?**	Christine CHOQUET
C24	**Enseigner les mathématiques avec des écoliers non ou peu francophones.**	Catherine MENDONÇA DIAS
C25	**Mallettes de ressources mathématiques pour l'école, cycle 1- cycle 2.**	Laetitia BUENO-RAVEL Pierre EYSSERIC Gwenaëlle RIOU-AZOU Sophie SOURY-LAVERGNE
C26	**Analyse de la programmation mathématique au CP de six professeurs d'école.**	Aline BLANCHOUIN
C27	**Quoi de neuf dans la numération au CP ? Une nouvelle ressource pour la classe.**	Eric MOUNIER Nathalie PFAFF,
C28	**Quels critères de validité, quelle appropriation par les enseignants de ressources issues de recherches en didactique ?**	Jacques DOUAIRE Fabien EMPRIN

LES COMITES

COMITE SCIENTIFIQUE

Richard CABASSUT

Maître de Conférences, Laboratoire Interuniversitaire de Sciences de l'Education (LISEC), Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), Université de Strasbourg,

COPIRELEM, IREM de Strasbourg, co-président du Comité Scientifique.

Cécile OUVRIER-BUFFET

Maître de Conférences, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), Université Paris Est Créteil - ESPE de Créteil

COPIRELEM, co-présidente du Comité Scientifique.

Anne BILGOT

Formatrice, ESPE de Paris - Université de Paris 4 - Paris Sorbonne,

COPIRELEM, IREM de Paris 7.

Laetitia BUENO-RAVEL

Maître de Conférences, Centre de Recherche sur l'Éducation, les Apprentissages et la Didactique (CREAD), ESPE de Bretagne, Université de Bretagne Occidentale,

COPIRELEM, IREM de Rennes.

Valentina CELI

Maître de Conférences, Laboratoire Cultures Education Sociétés (LACES), ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux.

Pierre EYSSERIC

Formateur, ESPE de l'Académie d'Aix-Marseille, Aix Marseille Université,

COPIRELEM. IREM de Marseille

Christine MANGIANTE

Maître de Conférences, Laboratoire de Mathématiques de Lens (LML), ESPE Nord-Pas de Calais, Université d'Artois,

COPIRELEM.

Patrick URRUTY

Formateur, ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux.

Catherine TAVEAU

Formatrice, ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux,

COPIRELEM

COMITE D'ORGANISATION

Catherine TAVEAU

Formatrice, ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux,

COPIRELEM

Nicole BERDET

Responsable du service financier de l'ESPE d'Aquitaine, site des Landes

BILAN DU COMITÉ SCIENTIFIQUE

Pour répondre à la question du thème du colloque « Quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire ? », les contributions à ce colloque se sont placées de différents points de vue : élève, enseignant, formateur, chercheur … Il faut bien comprendre la notion de ressource dans un sens large évoqué dans la conférence de Ghislaine Gueudet et de Lætitia Bueno-Ravel : « une « ressource » est tout ce qui peut ressourcer la pratique du professeur ».

Dans sa conférence, Eric Bruillard, montre à partir de l'exemple du boulier-calculatrice l'importance de penser l'intégration des ressources dans la scolarisation. Intégrer une ressource peut transformer ce qui sera appris, impactant ainsi l'apprentissage de l'élève et l'enseignement du maître.

La conférence à deux voix, de Sara Arditi et Joël Briand, évoque une ressource dominante de l'enseignement primaire : le manuel. Ils y étudient sur l'exemple du manuel Euromath, la double transposition, celle des auteurs qui transposent le savoir mathématique et didactique, notamment en prenant en compte les résultats de la recherche, et celle des enseignants qui mettent en œuvre en classe, avec une grande variabilité, les situations proposées par le manuel. Ils montrent les enjeux de cette double transposition, pour la formation et pour la recherche.

Dans ces deux conférences, l'importance des conditions institutionnelles est mise en évidence, que ce soit pour la prise en compte des instruments dans les programmes, ou pour les contraintes pesant sur la production d'une ressource (par exemple le manuel scolaire) et son utilisation.

La conférence de Ghislaine Gueudet et de Lætitia Bueno-Ravel étend les réflexions précédentes à un spectre plus large de ressources (ressources numériques, MOOC) et à des conditions institutionnelles variées (comparaison entre pays). Elles questionnent la conception et l'usage des ressources, leur diffusion et appropriation, et le rôle des ressources dans le développement professionnel des enseignants, en pointant de nombreux résultats de la recherche sur ces questions.

Les ateliers et les communications du colloque ont également contribué à la réflexion sur l'impact des ressources sur les pratiques d'enseignement ou l'apprentissage. Certains ont présenté des résultats de recherche et leurs utilisations comme ressources ; d'autres ont présenté des ressources à utiliser, à des niveaux ou dans des domaines variés, en préparation, en mise en œuvre ou en formation : mallette pour l'école maternelle (MS-GS), élèves allophones, ressources en histoire des mathématiques, en géométrie, sur les nombres, analyse de manuels, ressources de formation (situations, formation hybride, dispositifs institutionnels, initiation à la recherche), des outils (calculatrices, boulier, pascalines, ressources en ligne).

Ces ateliers et communications permettent les échanges d'expériences, le retour réflexif sur les pratiques et les mises en œuvre et la critique bienveillante de la procédure du comité scientifique.

Le prochain colloque approfondira la réflexion sur les ressources avec une ouverture internationale et l'étude de dispositifs institutionnels du type Neopass.

Que le comité d'organisation du site de Mont-de-Marsan soit remercié pour la qualité de l'accueil, avec une mention particulière pour Catherine Taveau qui a pris en charge la lourde tâche de publication matérielle des actes.

Pour terminer, que les membres du comité scientifique soient remerciés pour le travail d'étude des différentes contributions.

Richard Cabassut,

Maître de Conférences, Laboratoire Interuniversitaire de Sciences de l'Education (LISEC),
Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), Université de Strasbourg,
COPIRELEM, IREM de Strasbourg, co-président du Comité Scientifique.

BILAN DU COMITE D'ORGANISATION

Ce colloque organisé par la COPIRELEM (Commission permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire), l'IREM de Bordeaux et l'ESPE d'Aquitaine, s'est déroulé sur le site de l'ESPE des Landes et a bénéficié d'un excellent accueil local et de conditions de travail d'un très grand confort.

L'ensemble du personnel BIATSS et BIATOSS du site a œuvré à un véritable succès de ce colloque et je les en remercie encore personnellement et au nom de nombreux participants. Le beau temps a aussi contribué à embellir les conditions de travail et à faire oublier cette fâcheuse grève de la SNCF qui rend le site de Mont-de-Marsan difficile d'accès sans l'usage du train.

C'est près de 120 personnes intervenant dans la formation des professeurs des écoles, soit en mathématiques, soit en tant que PEMF, IEN qui ont participé au Colloque. En grande majorité ce sont des enseignants chercheurs et professeurs d'ESPE. Les autres sont des conseillers pédagogiques, des maitres formateurs, des inspecteurs du premier et second degré. A noter que cinq formateurs, PEMF des Landes ont participé et ont bénéficié de l'inscription gratuite comme le stipulait la convention signée.

Le programme du colloque a permis à chacun de participer à trois conférences, à trois ateliers sur les onze proposés en trois plages ainsi qu'à deux communications sur quatorze en deux plages. Le mercredi soir, nous avons été accueillis à la mairie, par la responsable éducation de la ville de Mont-de-marsan, pour un vin d'honneur. La soirée festive du jeudi a débuté par la représentation de très belles danses d'échassiers landais, par le groupe de Mont-de-Marsan, les Gouyats. Puis le buffet a accueilli plus de 80 participants. Buffet pris sous les étoiles accompagné du fameux groupe, Michel Macias Quartet, qui nous a tous fait rêver tard dans la soirée.

Un atelier a été annulé, lié aussi à des problèmes de transport et toutes les communications ont été assurées. Je remercie tous les responsables d'ateliers et de communications d'avoir fait tout leur possible pour assurer le bon déroulement de ce colloque, affrontant quelque fois des situations de locomotion bien complexes. L'évaluation écrite en fin de colloque fait ressortir un bilan très positif de cette organisation.

Pour permettre son bon fonctionnement, le colloque a reçu le soutien de l'ESPE d'Aquitaine, de l'IREM de Bordeaux, de la MGEN, la MAIF et la CASDEN.

Le bilan financier en cours d'affinement fait apparaitre un équilibre avec l'aide des soutiens.

Catherine Taveau
Formatrice à l'ESPE d'Aquitaine, Site des Landes
Membre de la COPIRELEM
Membre du comité d'organisation.

PRÉSENTATION DE LA COPIRELEM

copi relem
la commission permanente des IREM sur l'enseignement élémentaire
IREM de Paris 7, Université Denis Diderot
Case 7018
75 205 Paris Cedex 13
tel. : 01 44 27 53 83
fax : 01 44 27 56 08
resp.copirelem@univ-irem.fr

La COPIRELEM, Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire était constituée, en 2013-2014, de 22 membres issus de 17 académies différentes. La plupart d'entre eux étant chargés de la formation mathématique des professeurs d'école en ESPE.

1 Ses missions

Depuis sa création (en 1975), la COPIRELEM a pour double mission :

- d'une part, de regrouper et centraliser les travaux des différents groupes élémentaires des IREM sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et sur la formation initiale et continue en mathématiques des enseignants du premier degré ;
- d'autre part, d'impulser des recherches sur les points sensibles ou contingents liés aux changements institutionnels (programmes, organisation de l'école, formation initiale, etc.…)

2 Ses actions

Répondant à ses missions, elle s'intéresse simultanément à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et à la formation des professeurs d'école. Elle se réunit cinq fois par an pour mettre en œuvre et coordonner ses différentes actions :

- Un colloque annuel

Regroupant de 120 à 180 participants (professeurs d'école, formateurs et chercheurs), ces colloques permettent, depuis 1975, la diffusion des recherches en didactique des mathématiques, en France et à l'étranger.

Les derniers ont eu lieu à Mont-de-Marsan (2014), Nantes (2013), Quimper (2012), Dijon (2011), La Grande Motte (2010), Auch (2009), Bordeaux (2008), Troyes (2007), Dourdan (2006), Strasbourg (2005), Foix (2004), Avignon (2003). Le prochain se tiendra à Mont de Marsan en juin 2014.

Les actes en sont publiés chaque année par l'IREM de l'académie d'accueil.

- Des publications

La COPIRELEM publie, seule ou avec d'autres instances (Commission Premier Cycle des IREM, APMEP…) des documents destinés aux enseignants et/ou aux formateurs. En plus de la publication des Actes de son colloque (voir ci-dessus), elle publie chaque année les Annales du Concours Externe de Recrutement des Professeurs d'École, avec l'intégralité des sujets de l'année et des corrigés détaillés assortis de compléments utiles à la formation en mathématique et en didactique des futurs professeurs d'école.

En 2003, la COPIRELEM a publié « Concertum », ouvrage de référence pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques. Pour faciliter sa diffusion lors des colloques internationaux, une version réduite est parue en espagnol et en anglais.

En 2012, la commission a publié un ouvrage destiné à la formation autour du calcul mental à l'école primaire, proposant des ressources pour la formation.

En 2014, lors du colloque de Mont-de-marsan, des clés USB contenant des ressources pour organiser la formation en géométrie a été commercialisée.

- Des collaborations avec le Ministère de l'Éducation Nationale

Par la présence d'un de ses membres à la commission mathématique du CNP, la COPIRELEM a apporté sa contribution à l'élaboration des programmes 2002 de mathématiques pour l'école primaire ainsi qu'à la rédaction de leurs documents d'accompagnement.

Dès 2002, elle a été une force de proposition auprès du ministère pour la définition du contenu du programme national pour le concours de recrutement des professeurs d'école qui a été publié en mai 2005. La COPIRELEM a diffusé dès juillet 2005 des propositions d'exercices correspondant à ce nouveau programme et quatre de ses membres participent à la commission chargée d'élaborer les sujets nationaux du CRPE.

Depuis novembre 2008, elle s'est engagée dans une réflexion concernant les épreuves du nouveau concours pour le recrutement des professeurs d'école publié en septembre 2008.

La COPIRELEM a également travaillé avec l'Inspection Générale de l'Enseignement Primaire : quatre de ses membres ont été sollicités pour la préparation d'un séminaire national de pilotage sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et pour l'animation d'ateliers au cours de ce séminaire qui a eu lieu à Paris en novembre 2007.

La COPIRELEM est intervenue au SIEC, lors du séminaire national de formation des futurs jurys d'oraux du CRPE (octobre 2010) et à l'ESEN lors des stages nationaux de formation des IEN (octobre 2010, janvier 2011, octobre 2012 et mai 2013).

3 Ses autres travaux et projets

- La COPIRELEM collabore avec la revue « Grand N » publiée par l'IREM de Grenoble et destinée aux enseignants du primaire.
- La COPIRELEM, par ses discussions avec l'équipe Sésamath-Mathenpoche, participe au développement de ressources en ligne pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.
- La COPIRELEM poursuit sa réflexion générale sur la nature des mathématiques que l'on doit enseigner à l'école primaire et les moyens dont on dispose pour le faire. Son travail sur le calcul mental dans l'enseignement a conduit à la publication en juin 2012 d'un document destiné à faciliter la compréhension, l'appropriation et la mise en œuvre de ce domaine d'activités dans les classes. Une étude sur la mise en œuvre de scénarios en formation initiale sur les thèmes de la numération et de la géométrie est engagée.
- Sous la direction de la DGESCO, la COPIRELEM a engagé un travail d'élaboration de ressources pour des apprentissages mathématiques, destinées aux élèves de Grande Section de Maternelle.

Responsables : Christine MANGIANTE-ORSOLA et Pierre DANOS
resp.copirelem@univ-irem.fr

REMERCIEMENTS

Un grand merci aux nombreux acteurs, organismes et institutions qui ont permis que ce 41ème colloque se déroule dans les meilleures conditions possibles.

Un grand merci à Daniel LEPINE, responsable du site de l'ESPE des Landes, et à Nicole BERDET, responsable du service financier de l'ESPE, site des Landes, qui ont accueilli le projet du colloque très favorablement. Il était important pour la vie et le dynamisme de ce site périphérique de l'ESPE d'Aquitaine, que le colloque puisse se tenir sur Mont-de-Marsan.

Un grand merci aussi à tout le personnel du site de Mont-de-Marsan qui sans lui, le colloque n'aurait pas pu voir le jour. La bonne humeur landaise et les sourires de tous étaient constamment présents pendant ces trois jours.
Les excellentes conditions matérielles offertes ont permis le bon déroulement dans une ambiance sereine et très conviviale.

Un grand merci à Fabrice Vandebrouck, président de l'Adirem, qui a toujours soutenu le travail de la COPIRELEM, aussi bien au niveau du ministère qu'au niveau des autres commissions nationales des IREM. Sa confiance m'a permis d'organiser ce colloque sereinement.

Un grand merci aussi pour leur aide financière indispensable : l'ESPE d'Aquitaine, IREM de Bordeaux, la MAIF, la CASDEN et la MGEN.

Enfin, un grand merci à toute l'équipe de la COPIRELEM. Membre active depuis 20 ans et responsable par deux périodes de la COPIRELEM, je n'avais été jusque-là que participante aux différents colloques tenus à travers la France. Il me fallait en organiser un, c'était une façon de remercier l'ensemble de la commission, c'était aussi une façon de donner un peu en contrepartie de tout ce que j'avais reçu. Le travail et la réflexion au sein de la COPIRELEM, m'a beaucoup apporté intellectuellement, chaleureusement et m'a permis de passer les caps douloureux de l'évolution de la formation des enseignants.

Catherine Taveau

Liste des ateliers

A11	**Exploration des ressources de la nouvelle calculatrice TI-Primaire Plus™**	Hubert COLOMBAT, Sophie SOURY-LAVERGNE
A12	**Quelles ressources pour la reconnaissance de formes à la maternelle ?**	Sylvia COUTAT Céline VENDEIRA,
A14	**Mallette de ressources mathématiques pour l'école maternelle (MS-GS)**	Sylvaine BESNIER Pierre EYSSERIC Typhaine LE MÉHAUTÉ,
A15	**Analyser une ressource de formation : exemple de la « situation des annuaires »**	Pierre DANOS Pascale MASSELOT Arnaud SIMARD Claire WINDER
A21	**Ressources en histoire des mathématiques : un exemple et des questions.**	Renaud CHORLAY
A22	**Des problèmes de reproduction aux problèmes de restauration de figures géométriques planes : quelles adaptations pour la classe ?**	Caroline BULF Valentina CELI
A23	**Mallette d'Outils Mathématiques, le boulier et la pascaline.**	Sophie SOURY-LAVERGNE, Hélène ZUCCHETTA, Gwenaelle RIOU-AZOU
A24	**De la ressource à la séance en classe : le cas de la proportionnalité en cycle 3.**	Cécile ALLARD Stéphane GINOUILLAC
A25	**L'analyse de manuels en formation : pour quoi faire ?**	Christine MANGIANTE-ORSOLA Edith PETITFOUR
A31	**Pourquoi utiliser des ressources en ligne ouvertes à tous? Étude de deux exemples.**	Richard CABASSUT Marc TRESTINI
A32	**Analyse comparée de séances de formation initiale en géométrie conçues collectivement.**	Thomas BARRIER, Jean-Philippe DALLE Bernard MONTUELLE
A33	**Penser une progression en géométrie en formation des enseignants.**	Alain KUZNIAK Assia NECHACHE
A34	**La règle à bords parallèles : un outil pertinent en formation initiale des professeurs des écoles ?**	Valentina CELI Françoise JORE
A35	**Analyse d'une ressource pour former à l'enseignement de la géométrie.**	Catherine TAVEAU
A36	**Une situation d'homologie-transposition : le solide caché.**	Jean-Claude AUBERTIN Yves GIRMENS

EXPLORATION DES RESSOURCES DE LA NOUVELLE CALCULATRICE TI- Primaire Plus

Catherine Taveau,
ESPE d'Aquitaine
catherine.taveau@u-bordeaux.fr

Hubert Colombat,
Responsable-projet chez Texas Instruments
h-colombat@ti.com

Sophie Soury-Lavergne,
IFÉ
sophie.soury-lavergne@ens-lyon.fr

Résumé Les programmes 2002 avaient explicité les différents types de calculs, en donnant une réelle place au calcul instrumenté. Un document d'accompagnement lui avait été dédié « *utiliser les calculatrices en classe*». Les programmes 2008 ont rendu obsolète l'usage de la calculatrice en la limitant à un usage de simple vérification de calculs.

En 2014, Texas instruments fait le choix de proposer une calculatrice destinée aux élèves de cycle 3 et début collège.

Cet outil est le fruit d'une collaboration étroite entre une équipe d'enseignants français et des ingénieurs de Texas Instruments. Il permet d'aborder le sens des nombres entiers naturels, décimaux et fractionnaires, de calculer sur ces nombres et de travailler les diverses relations qui existent entre eux.

Grâce à son mode « ***exercice*** », elle permet d'enrichir les connaissances et compétences numériques qui ne se limitent pas à la connaissance des nombres et au calcul mais englobent également la résolution de problèmes (Del Notario- Floris 2011).

On pourra aussi envisager l'usage de cette calculatrice en formation des maîtres (Lajoie 2009).

Après une présentation des caractéristiques spécifiques de cette calculatrice, les participants à l'atelier ont expérimenté quelques activités proposées dans les ouvrages édités par Hatier.

Puis une présentation d'expérimentations déjà réalisées en CM1/CM2 dans les Landes a été exposée suivie d'un débat général sur cette nouvelle ressource.

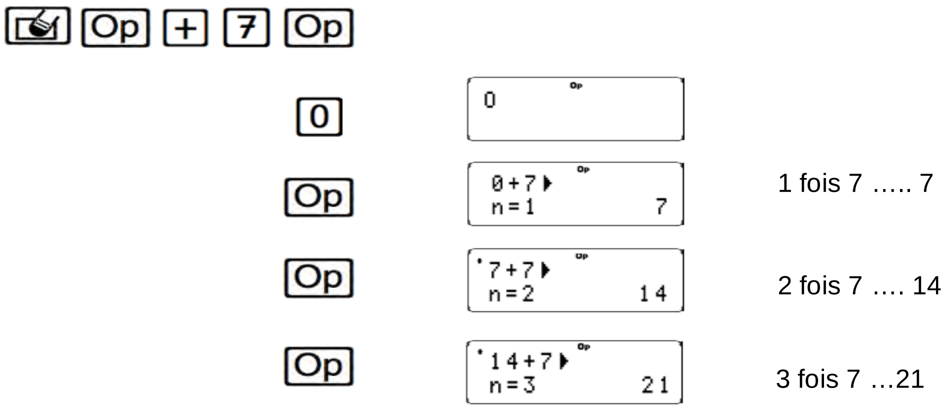
I - PRESENTATION DE LA CALCULATRICE

1.1 Les caractéristiques principales de cette calculatrice TI-Primaire PLUS

- « Tout en français » : touches, messages et symboles mathématiques en français, conçus avec des enseignants français ;
- Alimentation avec 2 piles et fonctionnement solaire ;
- Priorité algébrique (2 + 3 x 5 = 17) ;
- Manipulation pédagogique des fractions : des simplifications pas à pas, une conversion d'écritures (fraction/décimal), toutes les opérations classiques ;
- Touche « division euclidienne » : résultat avec quotient et reste ;
- Touche opérateur constant **Op** avec compteur du nombre d'itérations successives.

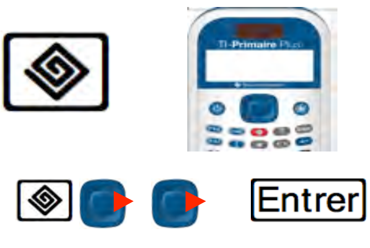
Figure 1. La calculatrice TI-Primaire PLUS

Exemple de l'utilisation de la touche $\boxed{\text{op}}$ pour la programmation de « ajouter 7 » à partir de zéro (table de multiplication par 7). A gauche est indiquée la suite des touches actionnées, au milieu l'affichage à l'écran de la calculatrice et à droite une écriture mathématique représentant le calcul effectué.

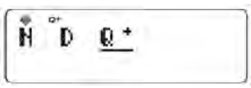


1.2 Le mode « exercice », une spécificité pour la résolution de problème.

La particularité de cette calculatrice est l'intégration d'un mode « **exercice** » pour travailler la résolution de problèmes arithmétiques avec les nombres **entiers**, les **décimaux** ou **les rationnels positifs.** Le mode « exercice » est accessible à partir de la touche  qui invite l'utilisateur à sélectionner l'ensemble de nombres voulu.



*Entrée dans le mode "**exercice**"*



Trois types de problèmes peuvent être proposés dans le mode exercice (déclinés pour **N**, **D** ou **Q+**) : vérification d'une égalité ou inégalité, résolution d'équations ou inéquations ou recherche d'opérations qui satisfont une égalité.

Pour les problèmes de recherche de valeurs inconnues ou d'opérations inconnues, les touches ? et * permettent d'indiquer les inconnues ou les opération inconnues.

Par exemple, après avoir sélectionné les nombres entiers **N**, l'élève peut vérifier l'égalité 13+7=20 :

1 3 + 7 = 2 0 Entrer

OUI
13+7=20

Pour les problèmes de recherche de solutions d'équations ou inéquations ou de recherche d'opérations, la calculatrice indique le nombre de solutions possibles. L'utilisateur peut ensuite soumettre des réponses et la calculatrice répond par oui ou non. En cas de réponse négative, la calculatrice affiche alors une inégalité vérifiée par les nombres ou opérations fournis par l'utilisateur.

5 + ? = 8 Entrer

5+?=8
1 SOL

3 * 4 * 2 = 5 Entrer

3*4*2=5
2 SOL

1.3 Un émulateur, l'outil complémentaire par la classe.

Cette calculatrice est accompagnée d'un logiciel, le **TI-SmartView ™**, utilisable avec un vidéoprojecteur ou un TNI/TB. Il permet de projeter une image dynamique de la calculatrice, un agrandissement de l'écran de la calculatrice ainsi que la succession des touches utilisées. Le TI-SmartView ™ propose :

- un véritable émulateur (pour PC et pour Mac) de la calculatrice en mode « calcul » ou « exercice » ;
- un grand écran pour une meilleure lisibilité en classe ;
- la possibilité d'afficher ou de masquer l'historique des touches utilisées.

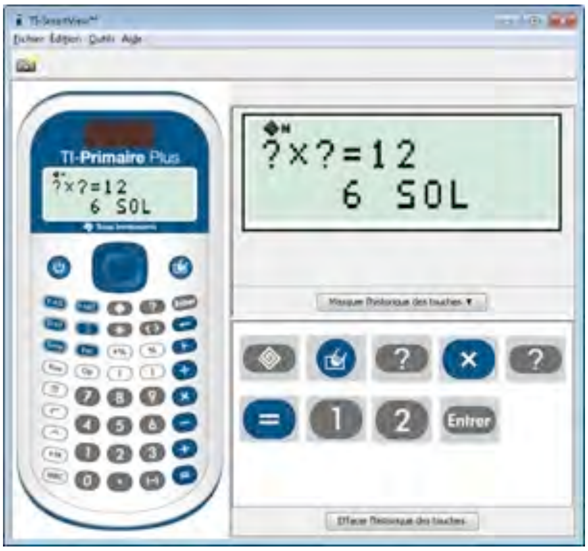
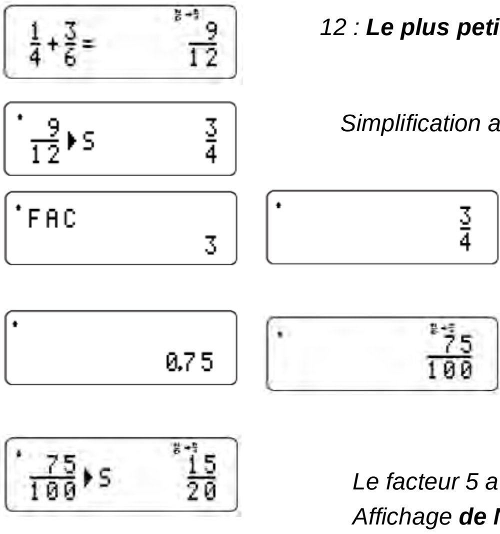


Figure 2. Emulateur de la TI-pour une utilisation avec un projecteur ou un TNI/TBI

1.4 Exemple de fonctionnalité de touches de la calculatrice pour le calcul

Addition de 2 fractions $\frac{1}{4} + \frac{3}{6}$



[1] [n/d] [4] [+] [3] [n/d] [6] [=]

*12 : **Le plus petit multiple commun** des dénominateurs 4 et 6*

[Simp] [=]

*Simplification automatique **avec le plus petit facteur***

[Fac] [Fac]

1er appui : facteur de simplification

2e appui : retour à la fraction

[F→D] [D→F]

Ecriture décimale de 3/4

Fraction décimale équivalente à 0,75

[Simp] [5] [=]

Le facteur 5 a été proposé, c'était un bon choix
*Affichage **de N/D->n/d** car la fraction 15/20 est **réductible***

II - DES ACTIVITES POUR LA CLASSE.

En lien avec la conception de cette nouvelle calculatrice, deux brochures éditées par Hatier ont été élaborées par Roland Charnay et Lydie Treffort pour les CM1/CM2 et par Bernard Anselmo et Georges Combier pour les 6e/5e.

Chaque brochure contient une cinquantaine de fiches proposant de nombreuses activités à mener en classe en particulier avec le mode exercice. Ces activités font appel à la calculatrice soit comme outil de validation (l'élève vérifie un calcul ou une écriture en utilisant les touches adaptées, par exemple il peut passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale d'un nombre), soit comme outil de résolution de problèmes (l'élève recherche toutes les solutions de ? x ? = 24).

Ces activités ont pour objectif principal de travailler deux domaines - la numération et le calcul - avec des nombres entiers ou les nombres décimaux. Les tâches de calcul proposées invitent le plus souvent à des procédures de calcul réfléchi.

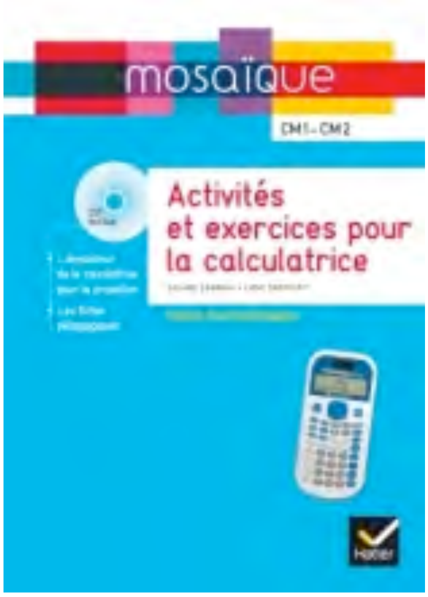


Figure 2. Brochure éditée par Hatier pour l'utilisation en classe de la calculatrice

Voici un exemple d'exercice extrait d'une fiche d'activité pour des élèves de cycle 3.

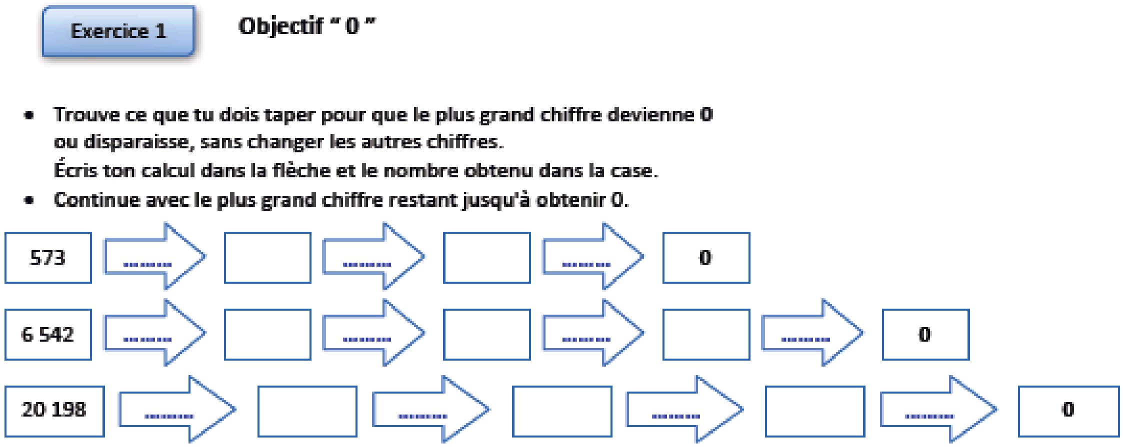


Figure 3. Exemple d'activité issue de la brochure Hatier.

III - ACTIVITES PROPOSEES LORS DE L'ATELIER

Lors de cet atelier, les participants ont pu découvrir les fonctionnalités de cette nouvelle calculatrice.

La reprise des documents d'accompagnement de 2002 concernant l'usage du calcul instrumenté leur a permis de mettre à l'épreuve certaines activités élaborées pour l'usage de cette calculatrice au cycle 3. Ils ont eu à analyser la pertinence de situations dites de résolution de problèmes prévues par le constructeur, en particulier avec le mode exercice. Ils ont également analysé quelques exercices proposés dans la brochure Hatier CM1/CM2 avec le questionnement suivant :

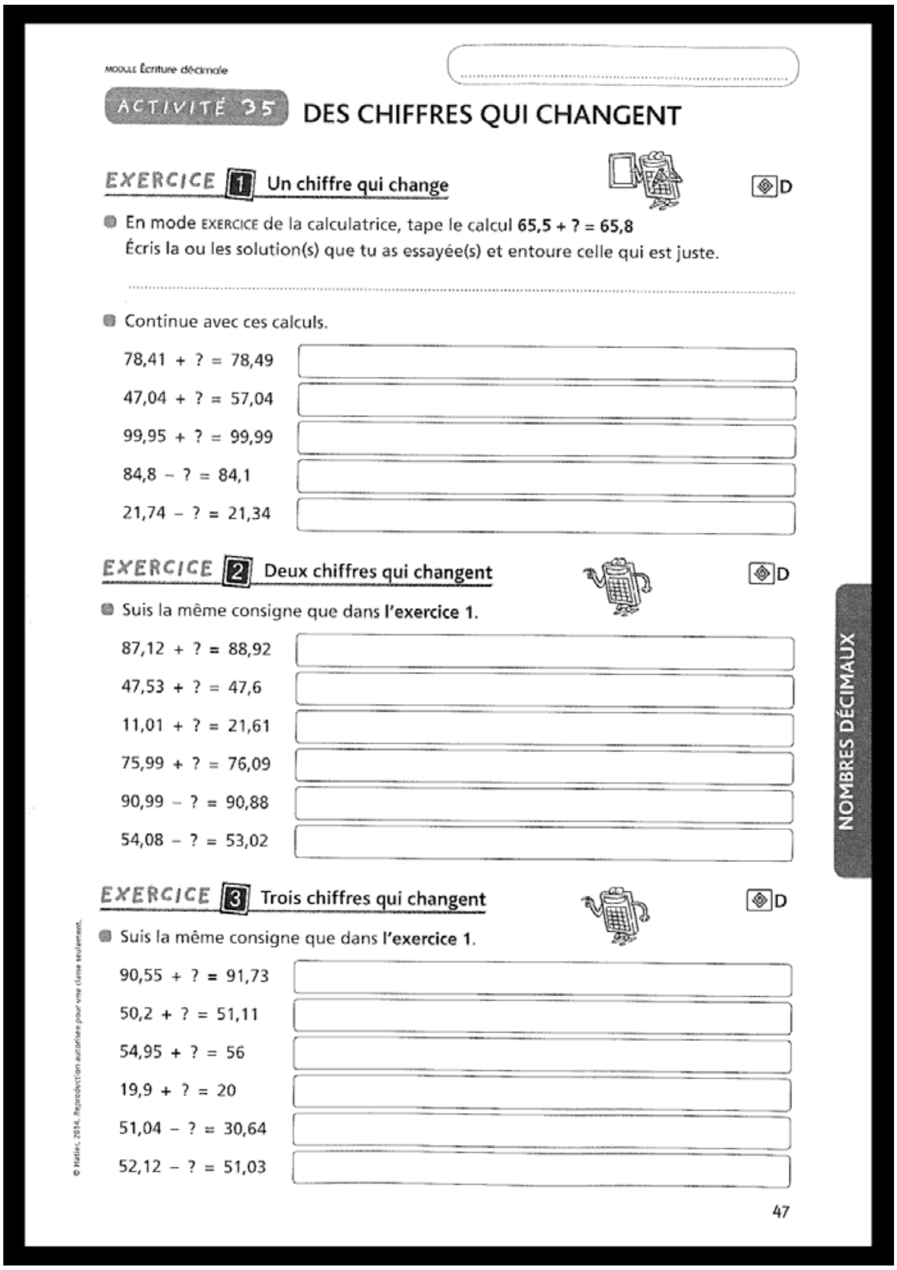
- quelles propriétés du nombre sont travaillées ?

- l'activité proposée engage-t-elle l'élève dans une démarche de résolution de problème ?

- en quoi la calculatrice permet-elle un travail différent de celui réalisable sans calculatrice ou avec un autre outil ?

Dans l'activité n°35 tirée de la brochure CM1/CM2 (voir Figure 3), la calculatrice est utilisée en mode exercice. On constate que l'on pourrait utiliser une autre calculatrice pour faire les calculs nécessaires mais alors l'aspect équation ne serait pas mis en avant. Avec la calculatrice TI-Primaire Plus, ce qui est travaillé plus particulièrement c'est l'égalité en tant que relation et pas en tant qu'opérateur. De plus, les essais des élèves sont facilités par le fait qu'il n'y a pas l'ensemble de l'égalité à saisir à chaque fois.

Enfin, ce type d'activité permet de faire un lien entre calcul et numération. L'élève observe et essaye de contrôler comment les calculs réalisés agissent sur les chiffres du nombre. Ce travail fondamental de lien entre numération et calcul résulte de la situation proposée (qui reste possible avec d'autres matériels) mais aussi de la calculatrice puisqu'elle permet d'afficher simultanément les nombres et le résultat du calcul.



MODULE Écriture décimale

ACTIVITÉ 35 DES CHIFFRES QUI CHANGENT

EXERCICE 1 Un chiffre qui change D

- En mode EXERCICE de la calculatrice, tape le calcul 65,5 + ? = 65,8
  Écris la ou les solution(s) que tu as essayée(s) et entoure celle qui est juste.

- Continue avec ces calculs.

78,41 + ? = 78,49
47,04 + ? = 57,04
99,95 + ? = 99,99
84,8 – ? = 84,1
21,74 – ? = 21,34

EXERCICE 2 Deux chiffres qui changent D

- Suis la même consigne que dans l'exercice 1.

87,12 + ? = 88,92
47,53 + ? = 47,6
11,01 + ? = 21,61
75,99 + ? = 76,09
90,99 – ? = 90,88
54,08 – ? = 53,02

EXERCICE 3 Trois chiffres qui changent D

- Suis la même consigne que dans l'exercice 1.

90,55 + ? = 91,73
50,2 + ? = 51,11
54,95 + ? = 56
19,9 + ? = 20
51,04 – ? = 30,64
52,12 – ? = 51,03

NOMBRES DÉCIMAUX

© Hatier, 2014. Reproduction autorisée pour une classe seulement.

47

Figure 3. Brochure Hatier CM1/CM2, exercice de numération avec les nombres décimaux

IV - RETOUR D'EXPERIMENTATIONS MENEES DANS DEUX CLASSES DES LANDES

Afin d'avoir les premiers retours du terrain sur les usages possibles de cette nouvelle calculatrice, nous avons demandé à deux collègues professeurs des écoles proches de Mont-de-Marsan, et déjà utilisateurs de calculatrices en classe, de bien vouloir mener quelques séances avec leurs élèves de CM1.

Par un travail collectif, ils ont conçu une petite séquence qui intègre des éléments de la brochure Hatier (bien que l'ouvrage ne soit pas encore paru officiellement au moment de l'expérimentation) et l'ont menée sur trois semaines.

Leur séquence intègre les séances suivantes :

SÉANCE 1 : appropriation de l'objet calculatrice – comparaison perceptive entre la TI Primaire Plus et d'autres calculatrices utilisées en classe.

SÉANCE 2 : appropriation du fonctionnement de la calculatrice – recherche des nouvelles fonctions à partir des explications sur l'emballage – entraînement sur une fiche d'activité.

SÉANCE 3 : utilisation du mode « exercice » : trouver l'opération

SÉANCE 4 : utilisation du mode « exercice » : trouver le nombre manquant.

Les commentaires des élèves et des enseignants sont plutôt encourageants. Ils attestent de l'intérêt produit chez les élèves par ce nouveau type de calculatrice. La première séance est très instructive du point de vue de la découverte technologique de la nouvelle calculatrice. Les élèves ont beaucoup d'idées.

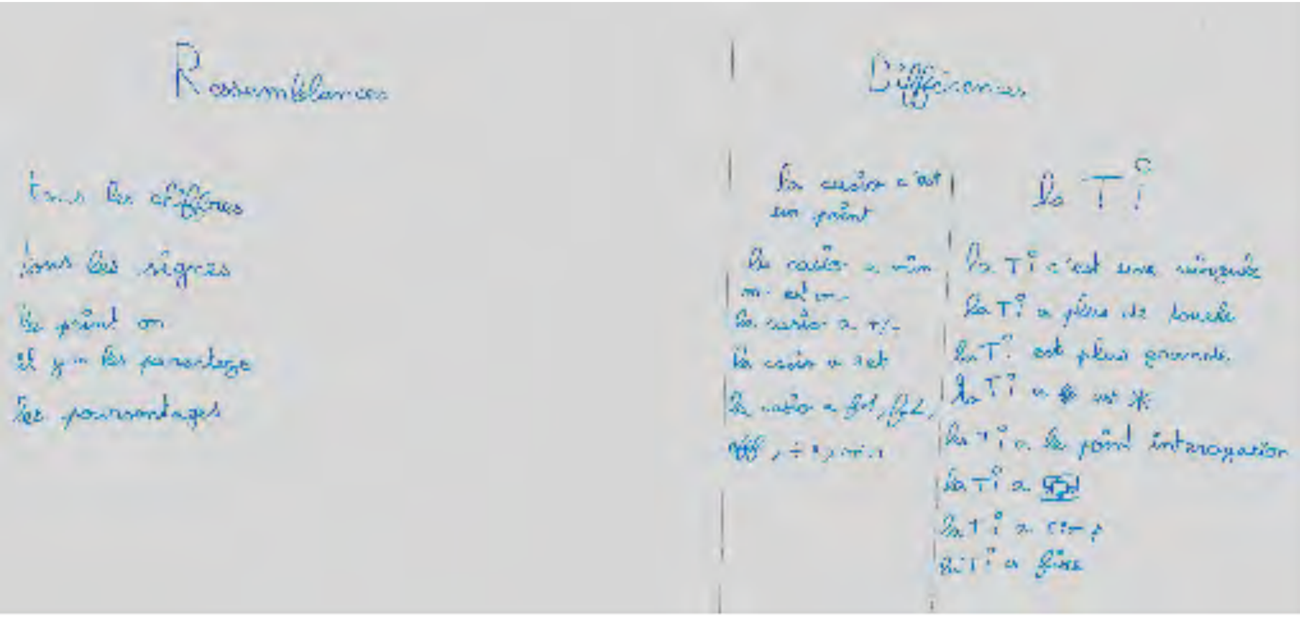


Figure 4. Description par un élève des ressemblances et différences entre la TI-Primaire Plus ™ et une autre calculatrice (séance 1)

Concernant la seconde séance, les élèves ont travaillé directement à partir d'une photo de la calculatrice pour repérer l'organisation des différentes touches et les légender (une activité de même type est incluse dans la brochure Hatier). L'usage d'un TBI a facilité la mise en commun des propositions des élèves.

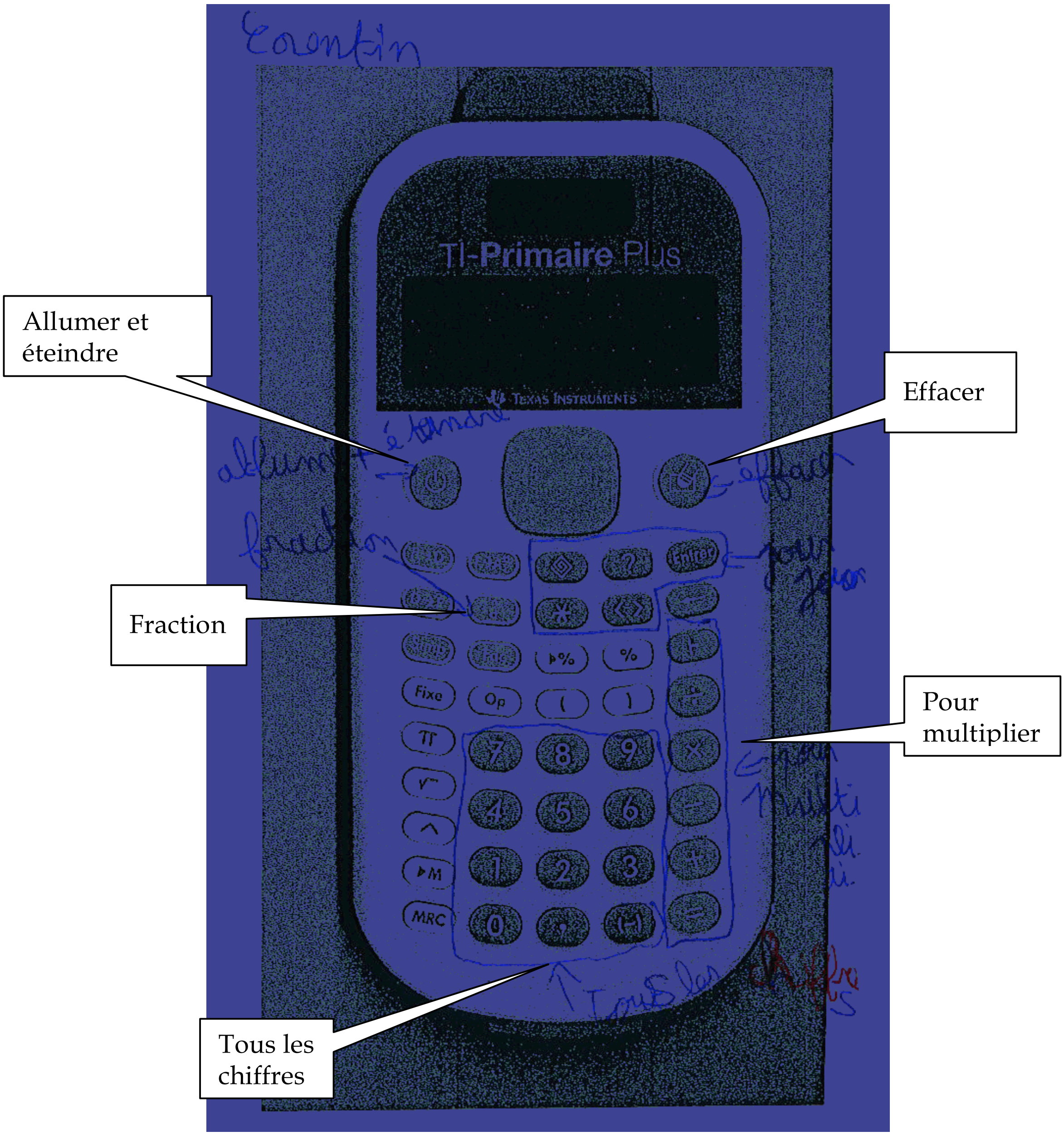


Figure 5. Photo de la calculatrice légendée par un élève.

Lors des séances suivantes, les élèves ont utilisé la fonctionnalité **Op** et comparé les résultats d'un calcul qu'ils faisaient eux-mêmes avec celui fourni par la calculatrice afin de prendre conscience de la priorité des opérations.

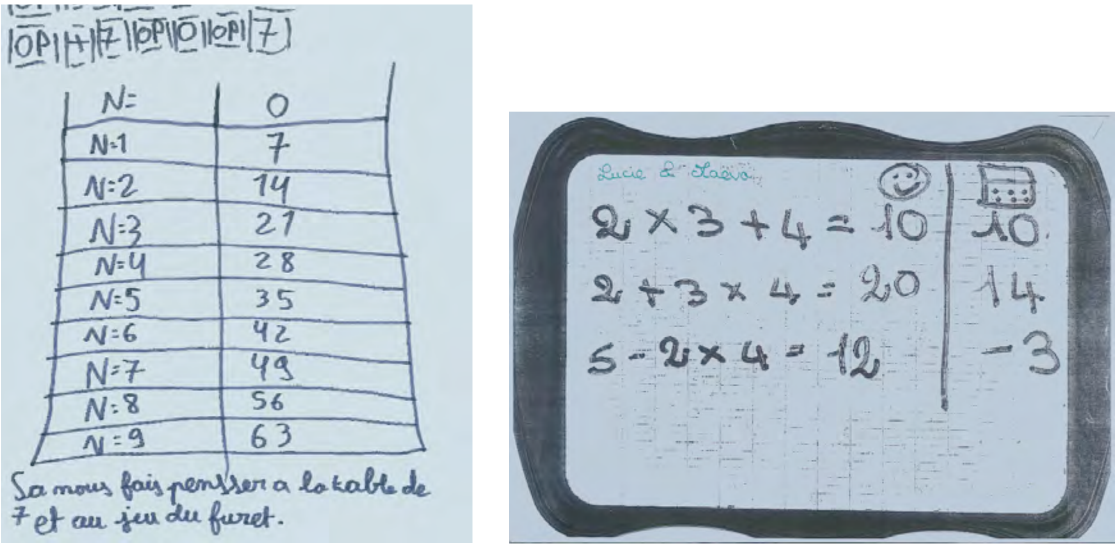


Figure 6. Travaux d'élèves avec l'opérateur 7 (à gauche) et comparaison du résultat d'un calcul effectué par les élèves ou par la calculatrice (à droite).

Les élèves ont ensuite découvert le mode exercice dans une tâche de recherche d'opérations dans les entiers. Voici deux exemples de travaux d'élèves :

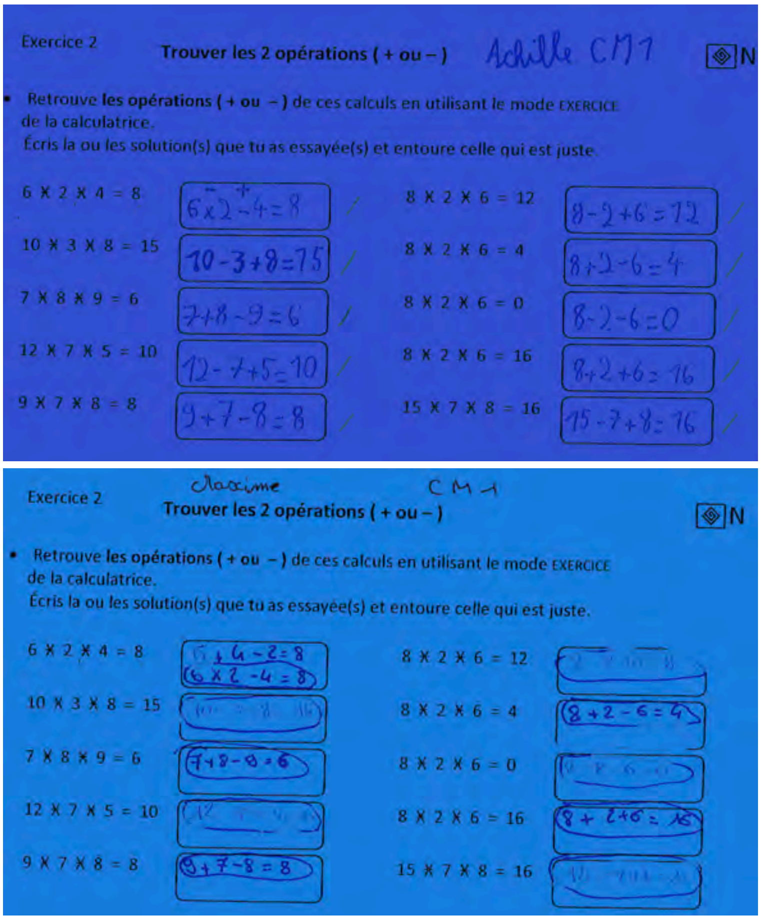
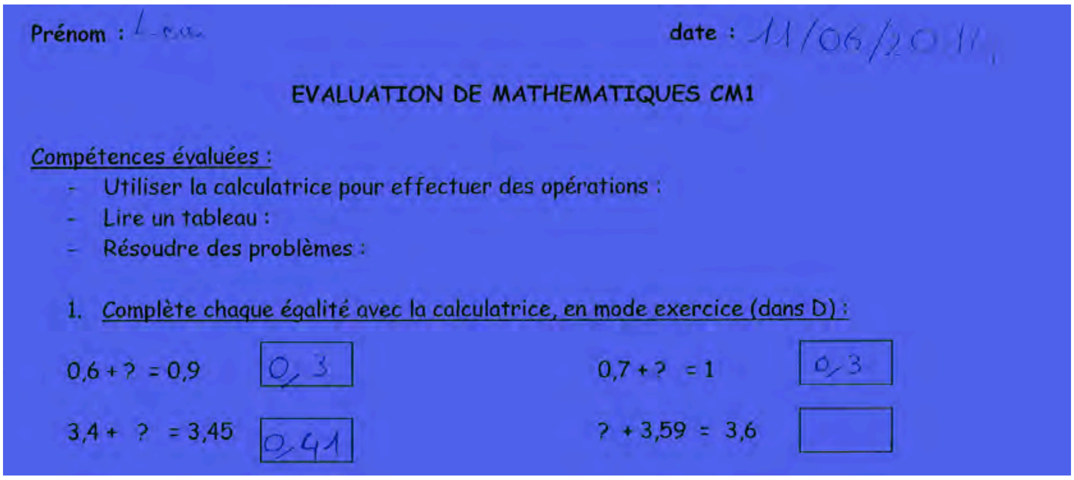


Figure 7. Travaux d'élèves sur la recherche d'opérations.

L'usage de la calculatrice a même été réinvesti dans le cadre d'une évaluation :


Prénom :

date : 11/06/2014

EVALUATION DE MATHEMATIQUES CM1

Compétences évaluées :
- Utiliser la calculatrice pour effectuer des opérations :
- Lire un tableau :
- Résoudre des problèmes :

1. Complète chaque égalité avec la calculatrice, en mode exercice (dans D) :

0,6 + ? = 0,9 $\boxed{0,3}$ 0,7 + ? = 1 $\boxed{0,3}$

3,4 + ? = 3,45 $\boxed{0,41}$? + 3,59 = 3,6 $\boxed{}$

Figure 8. Exemple de production d'élève lors d'une évaluation utilisant la calculatrice.

V - LE PROJET CAPRICO

Suite à l'atelier présenté pendant ce colloque, le projet CaPriCO « Calculatrice au Primaire et au Collège » a pris naissance pour accompagner une expérimentation plus importante dans les classes de primaire et de collège. Le projet qui se déroule sur l'année 2014-2015 est présenté à l'adresse suivante :

http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees-14-15/caprico/

« La calculatrice TI-Primaire Plus™ constitue un environnement propre à susciter l'exploration et l'investigation autour des nombres et des opérations. L'objectif de ce projet pour l'année 2014-2015 est de tester des activités existantes, d'en produire de nouvelles et d'en analyser les effets dans les classes sur l'apprentissage des mathématiques du CM1 à la 5e. L'ensemble des activités et leurs analyses est destiné à la publication. Le projet s'appuie sur le réseau des IREM et les ESPÉ et réunit plus de 1900 élèves et 73 enseignants dans toute la France. Le travail est réalisé au sein de groupes locaux réunissant enseignants et chercheurs sur des problématiques propres à chaque groupe. Une coordination du travail au niveau national est assurée par l'Institut Français de l'Education. »

Le colloque de la COPIRELEM de juin 2015, à Besançon, programme une communication de l'équipe du projet CaPriCo qui permettra de présenter les premiers résultats du projet et de poursuivre l'étude de la pertinence d'une ressource telle que la calculatrice TI Primaire Plus pour les apprentissages mathématiques dans les classes.

BIBLIOGRAPHIE

Document d'accompagnement des programmes 2002 : « *Utiliser les calculatrices en classe* »

DEL NOTARO L. & FLORIS R. (2011) Calculatrice et propriétés arithmétiques à l'école élémentaire, *Grand N n° 87*, 17-49

LAJOIE C. (2009) La calculatrice comme source et support de questions fécondes : quelques exemples pour la classe de mathématiques au primaire et pour la formation des maîtres, *Bulletin AMQ, Vol. XLIX, n° 1*, 65 à 75.

CHARNAY R ., TREFFORT L. (2014) *Activités et exercices pour la calculatrice* (CM1/CM2), Hatier, coll Mosaïques.

ANSELMO B ., COMBIER G. (2014) *Activités et exercices pour la calculatrice* (6e /5e), Hatier, coll Mosaïques.

QUELLES RESSOURCES POUR LA RECONNAISSANCE DE FORMES À L'ÉCOLE MATERNELLE ?

Sylvia COUTAT
Maitre assistante, UNIVERSITE DE GENÈVE
Equipe DiMaGe
Sylvia.Coutat@unige.ch

Céline VENDEIRA - MARÉCHAL
Chargée d'enseignement, UNIVERSITE DE GENÈVE
Equipe DiMaGe
Celine.Marechal@unige.ch

Résumé
Les figures géométriques sont introduites dès les premières classes de l'école élémentaire à travers des activités sur les formes où se mêlent connaissances spatiales et connaissances géométriques (Berthelot et Salin 1993 - 1994, 1999 - 2000). Ce texte présente une analyse de ressources (12 manuels français, 4 ressources pédagogiques et les moyens d'enseignement suisses romands) concernant la reconnaissance de formes à l'école maternelle. Cette analyse s'appuie sur une typologie des tâches (Bosch et Chevallard, 1999).

I - À L'ORIGINE DE CET ATELIER… UNE RECHERCHE PLUS GLOBALE

L'origine de cet atelier est liée au souhait de trois chercheurs en didactique des mathématiques de concevoir des activités ludiques autour de la reconnaissance de formes pour les élèves de 3 - 6 ans[1].

Pour l'un des chercheurs, Nicolas Pelay, ce souhait est lié à son activité au sein de l'association Plaisir Math[2] où l'aspect « ludique » est une nécessité. Quant aux deux autres chercheuses, Sylvia Coutat et Céline Vendeira-Maréchal, cet intérêt est davantage lié au contexte particulier genevois dans lequel elles évoluent, tant pour la recherche que dans la formation des futurs enseignants primaires genevois. En effet, une des particularités de la Suisse romande tient au fait qu'il y a des moyens d'enseignement mathématiques uniques qui sont distribués dans toutes les écoles et qui sont la ressource principale et quasi exclusive des enseignants. De ce fait, les activités géométriques des degrés 1P - 2P (4 - 6 ans) sont rapidement identifiables et analysables. Il se trouve qu'une comparaison « spontanée » de ces différentes activités avec celles proposées dans certains manuels français[3] amène à penser que ce qui est proposé en Suisse romande est plutôt sommaire, dans le sens où les activités autour de la reconnaissance de formes ne sont qu'au nombre de 5, complétées par 7 activités issues d'anciens ouvrages vaudois, soit un total de 12 activités de type « situation-problème » pour les deux premières années primaires.

Il importe peut-être de donner quelques informations supplémentaires sur la particularité des moyens d'enseignement suisses romands de l'école primaire (4 - 12 ans) en comparaison des manuels utilisés en France :

- Les moyens d'enseignement COROME sont la ressource principale et quasi unique des enseignants suisses romands ;

[1] Vous trouvez en annexe les compétences mathématiques que l'on peut travailler en maternelle selon le plan d'études suisse romand et le projet de programme pour l'école maternelle (2014).

[2] http://www.plaisir-maths.fr/

[3] Le terme générique de « manuel » est utilisé dans cet article pour évoquer les livres du maître et fichiers d'élèves disponibles dans certaines collections françaises pour la maternelle. Nous parlons donc de manuels pour la France et de moyens d'enseignement pour la Suisse romande.

- Pour chaque degré d'enseignement, les moyens d'enseignement comprennent un livre ou classeur du maître avec des indications pédagogiques et didactiques, un fichier ou un livre élève avec les activités et exercices directement adressés à l'élève ainsi que différents matériaux supplémentaires de type plans de jeu, cartes, fiches prédécoupées, etc. ;
- Les activités se présentent toutes sous forme de situations-problèmes[4] directement adressées à l'élève et aucun élément de « cours » n'est donné ;
- Les activités proposées sont voulues comme indépendantes les unes des autres et ne suivent aucun ordre chronologique ;
- Les moyens d'enseignement COROME sont considérés comme des ouvrages ressources et non comme des guides organisant une progression pas à pas. Les enseignants doivent ainsi effectuer des choix parmi l'ensemble des activités disponibles.

Dans les faits[5], nous observons effectivement que les douze activités recensées dans les moyens suisses romands sont rarement toutes utilisées pour aborder l'étude de la reconnaissance de formes en géométrie à la maternelle.

Avant d'aller de l'avant dans notre projet de concevoir des activités ludiques autour de la reconnaissance de formes pour les élèves de 3 - 6 ans, il était nécessaire de nous faire une idée plus précise de ce que proposent les ressources existantes dans le monde francophone afin de ne pas « réinventer la roue ». Nous avons, à cet effet, consulté les moyens d'enseignement suisses romands ainsi que douze manuels français (références des manuels données dans la bibliographie) afin de répertorier la variété des activités existantes et éventuellement de détecter un manque à combler.

Cet article et l'atelier que nous avons proposé lors du colloque de la Copirelem sont liés à cette étape de notre recherche. En effet, cette recension d'activités n'était pas possible sans se donner une méthodologie de classification. Nous avons ainsi réalisé une typologie de tâches relativement à la reconnaissance de formes à la maternelle que nous avons soumise à discussion lors de l'atelier. Cette typologie nous permet ainsi de classer les différentes activités des manuels analysés.

II - THÉORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE ET CONSTRUCTION D'UNE TYPOLOGIE DE TÂCHES

1 La Théorie Anthropologique du Didactique

Dans le cadre de notre recherche, nous avons principalement fait appel à la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) pour des raisons méthodologiques. Nous ne présenterons par conséquent que les aspects nécessaires à la compréhension de notre travail sans développer davantage le travail plus complet de Chevallard (1999).

Afin de construire une typologie de tâches relativement au genre de tâches *reconnaissance de formes* (à la maternelle), nous nous sommes référées à la TAD qui offre une méthode d'analyse des praxéologies. Une praxéologie se caractérise plus exactement à l'aide du quadruplet $[T/\tau/\theta/\Theta]$. Ce groupement définit un système de tâches (t) d'un certain type (T) à accomplir avec une technique (τ) devant être validée par une technologie (θ), qui elle-même requiert une justification par des théories (Θ). Le premier

[4] Dans les commentaires didactiques des moyens d'enseignement suisses romands, les auteurs définissent ce qu'est une situation-problème en se référant à différents didacticiens dont la définition de Douady dont nous proposons les caractéristiques ici : (1) l'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème ; (2) l'élève peut envisager ce qu'est une réponse possible du problème ; (3) les connaissances de l'élève sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve immédiatement le problème ; (4) la situation-problème doit permettre à l'élève de décider si une solution trouvée est convenable ou pas ; (5) la connaissance que l'on désire voir acquérir par l'élève doit être l'outil le plus adapté pour la résolution du problème au niveau de l'élève. (Gagnebin, Guignard & Jaquet, 1998, p. 48)

[5] Notre profession, impliquant la formation d'étudiants en formation enseignement primaire et les suivis de stages dans les écoles, nous permet de confirmer cette tendance.

bloc [T/τ] définit un savoir-faire relevant de la pratique (praxis), alors que le second bloc technologico-théorique [θ/Θ] relève d'un discours raisonné (logos). À l'origine de ce quadruplet se trouvent les notions de *tâches* (t), de *types de tâches* (T) et de *genre de tâches* que nous retrouvons dans notre recherche.

> Concrètement, un genre de tâches n'existe que sous la forme de différents types de tâches, dont le contenu est plus étroitement spécifié.
>
> *Calculer*… est, on l'a dit, un genre de tâches ; mais *calculer la valeur (exacte) d'une expression numérique contenant un radical* est un type de tâches, […] (Chevallard, 1999, p. 225).

Ainsi, le genre de tâches appelle un déterminatif (Ibid., p. 224) qui s'effectue par le biais de types de tâches. Nous pouvons donc schématiser les rapports entre ces trois notions ainsi : t ∊ T ∊ genre de tâches.

Dans le cadre de notre recherche, nous construisons une typologie des tâches relativement au genre de tâche *reconnaître des formes* (à la maternelle) que nous tentons de spécifier en types de tâches (T) à l'aide de l'analyse de différents manuels français. Pour chacun de ces types de tâches (T), nous mettrons alors en évidence toutes les tâches recensées dans les manuels parmi l'ensemble des tâches possibles. Nous verrons également que nous avons enrichi notre typologie de tâches à l'aide de la notion d'objets ostensifs présentée par Bosch et Chevallard (1999) que nous expliciterons plus en détails dans la partie suivante.

2 Méthodologie

La méthodologie de recherche adoptée s'inspire de celle utilisée dans la thèse de Maréchal (2010) qui propose une typologie de tâches relativement à l'addition au CP à partir de trois niveaux de spécification. Pour notre part, nous ne retenons que deux niveaux de spécification pertinents par rapport à notre objet d'étude :

1) le niveau mathématique (par le type de tâches et les sous-types de tâches) ;

2) les registres d'ostensifs (Bosch et Chevallard, 1999).

La typologie mise en discussion lors de l'atelier était en l'état non définitive et en partie arbitraire car liée à des choix influencés par le contexte de recherche des chercheuses[6] et leur insertion partielle sur le terrain scolaire[7]. La typologie de tâches est donc construite à partir de :

- la connaissance des différentes ressources suisses romandes ;
- la consultation du Plan d'Etude Romand (PER[8]) ;
- la connaissance du terrain scolaire suisse romand ;
- la consultation et l'analyse de douze manuels français (de la petite section (PS) au cours préparatoire (CP)) ;
- la consultation de quatre ressources pédagogiques et didactiques françaises (références des ressources données dans la bibliographie).

Ci-dessous, avant d'entrer dans les détails de notre typologie de tâches, nous donnons quelques éléments théoriques en lien avec nos deux niveaux de spécification : les types de tâches et les registres d'ostensifs.

2.1 Les types de tâches

Tout d'abord, nous dégageons les types de tâches mathématiques qui permettent de constituer une première typologie de tâches relative au genre de tâches étudié : *reconnaître des formes* (à la maternelle). Selon la TAD, nous sommes au niveau d'une organisation mathématique *locale* (Chevallard, 1999), où les

[6] Nous verrons, par exemple, que le contexte géographique a influencé la création d'un type de tâches peu représentatif de ce que l'on trouve dans les manuels français, mais a contrario surreprésenté dans les moyens suisses romands.

[7] L'une des deux chercheuses a été enseignante primaire dans le canton de Genève pendant 5 ans.

[8] http://www.plandetudes.ch/per

types de tâches définis sont centrés sur une technologie (θ) déterminée, c'est-à-dire qu'on aura plusieurs savoir-faire justifiés par le même savoir. Cette première étape nous amène à définir un complexe de techniques [τ] et un bloc technologico-théorique [θ/Θ] associés à chacun des types de tâches définis.

Ainsi, si nous avons défini deux types de tâches, mais qu'après vérification, il s'avère que leur complexe de techniques associés est le même, nous les regroupons en un seul et unique type de tâches. Nous ne détaillons pas ici les complexes des techniques, ni le bloc technologico-théorique [θ/Θ], mais nous nous concentrons uniquement sur les types de tâches.

C'est ainsi que nous catégorisons sept types de tâches distincts que nous avons dégagés de l'ensemble des ouvrages consultés (moyens d'enseignement suisses romands, manuels français et ressources pédagogiques). Nous verrons toutefois que cette catégorisation va fortement être remise en question que ce soit au niveau du lexique employé, mais aussi de son exhaustivité :

T1 Découverte (par manipulation, observation, construction)
T2 Reconnaissance de formes géométriques simples
T3 Appariement de deux formes (exemple : puzzle, encastrement)
T4 Classement de formes géométriques selon des critères imposés
T5 Construction géométriques avec contraintes
T6 Reproduction géométrique à partir d'un modèle
T7 Composition d'une surface à partir de formes simples

2.2 Les sous-types de tâches

Toutefois, nous constatons que ce premier grain d'analyse n'est de loin pas assez précis, car il regroupe un grand nombre d'activités très différentes sous le même type de tâches. Nous procédons ainsi à une spécification de nos types de tâches en sous-types de tâches afin d'affiner notre typologie.

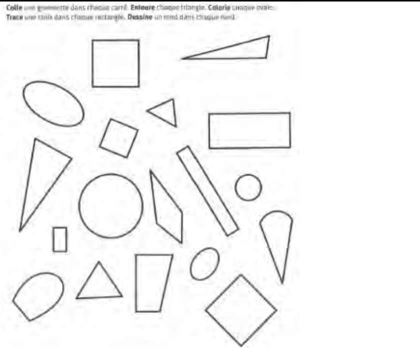
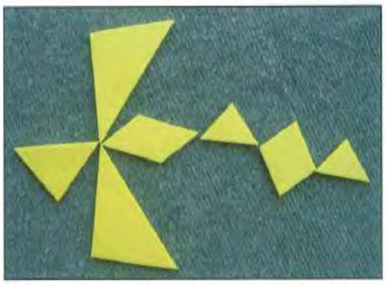
> Cette étape n'introduit pas de nouvelles techniques ; en revanche, elle nous permet de relier chacun des sous-types de tâches créés avec un complexe de techniques mobilisables associé. Ce point est primordial pour la construction de notre typologie, car il nous permet de décider quels sous-types de tâches il est pertinent de retenir ou non. Par exemple, deux sous-types de tâches appartenant au même type de tâches et impliquant le même complexe de techniques n'ont pas de raison d'être distingués l'un de l'autre et sont par conséquent regroupés dans le même sous-type de tâches. Ce procédé nous permet donc d'éviter une multiplication de cas qui alourdiraient inutilement notre typologie. (Maréchal, 2010, p. 86)

Nous réalisons cette nouvelle spécification en fonction des formes en présence « *s'agit-t-il d'une forme simple ou d'un assemblage de formes simples ?* » et est-ce que les assemblages sont « *avec des trous* » ou « *sans trous* » ?[9]

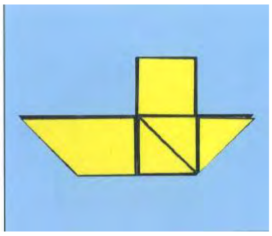
Il s'agit là d'une organisation mathématique *ponctuelle*, où chaque sous-type de tâches s'organise autour d'un complexe de techniques qui lui est propre.

Voici ci-dessous un exemple de ce que nous sommes amenées à distinguer grâce à ce niveau de spécification supplémentaire en sous-type de tâches :

[9] Cette formulation sera modifiée dans la nouvelle version de notre typologie que nous présentons en fin d'article.

Formes simples	Assemblage de formes simples	
	Avec trous	Sans trous
 Duprey, Duprey, Sautenet (2011-c) p.16	 Duprey, Duprey, Sautenet (2011-c) p.95	 Duprey, Duprey, Sautenet (2011-b) p.99

Les assemblages de formes simples « avec trous » sont donc celles pour lesquelles nous parvenons à distinguer clairement les différentes formes simples en présence sans devoir procéder à une décomposition d'un assemblage de formes simples en formes simples. Dans certains cas, nous rencontrons des assemblages de formes simples où se combinent « avec trous » et « sans trous ». Dans ces cas-là, nous classons l'activité dans « sans trous » qui implique des techniques spécifiques plus élaborées que celles « avec trous ». En voici deux exemples ci-dessous :

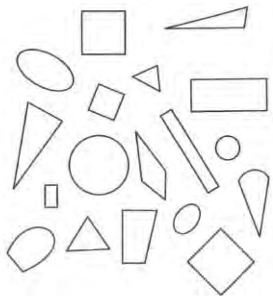
 

(Duprey, Duprey, Sautenet 2011-b, p.101-99)

2.3 Les ostensifs

Pour terminer, comme certaines activités encore bien distinctes se trouvent encore classées ensemble, nous ajoutons un dernier niveau de spécification en considérant les ostensifs.

Voici ci-dessous deux activités classées identiquement et pourtant distinctes :

Selon notre typologie, il s'agit de deux activités classées selon le code suivant T4,1[10]	
Consigne et référence	Consigne et référence
– Étape 2 Classer les formes de la collection. – Chercher tous les carrés et tous les rectangles dans une collection de formes proposée par l'enseignant. – Ranger les carrés dans une boite. Vérifier que les carrés ont tous 4 côtés égaux en les mesurant avec une bande de papier. – Ranger les rectangles dans une autres boite. Duprey, Duprey, Sautenet (2011-c) p.156	Colle une gommette dans chaque carré. Entoure chaque triangle. Colorie chaque ovale. Trace une croix dans chaque rectangle. Dessine un rond dans chaque rond.  Duprey, Duprey, Sautenet (2011-c) p.16

[10] Classement de formes géométriques selon des critères imposés (T4), Reconnaissance d'une forme simple parmi un ensemble de formes indépendantes (formes non assemblées) (T4,1)

Concrètement, alors que l'une demande de travailler sur un classement de formes représentées sur une feuille de papier (à droite), l'autre propose un matériel manipulable (à gauche).

C'est ainsi que nous constatons que notre typologie ne nous renseigne pas sur **les différents systèmes de signifiants accessibles et utilisables par les élèves**, c'est pourquoi nous enrichissons notre typologie avec **des registres d'ostensifs.**

Pointer à quel registre appartient tel exercice ou problème est important, car comme le mentionne Conne (1987) pour le calcul :

> Ce qui fait la distinction entre dénombrement, comptage et calcul, ce sont les objets que l'on traite (manipule) : des objets concrets, réels, pris pour eux-mêmes ou représentant une quantité […]. (p. 12)

Dans le cadre de la TAD, deux types d'objets sont distingués : les objets ostensifs et non ostensifs. Le terme « ostensif » provient du latin et signifie « montrer, présenter avec insistance » (Bosch & Chevallard, 1999, p. 90).

> Les objets ostensifs sont donc des objets manipulables, qui ont une réalité perceptible par le sujet humain. Ils ont une nature sensible, une certaine matérialité. Par exemple, les sons (mots de la langue), les graphismes (de la langue naturelle ou plus formels) ou encore des gestes. Les objets non ostensifs, à l'inverse, ne sont ni « vus », ni « dits », ni « entendus », ni même « perçus ». Ils ne peuvent donc qu'être évoqués ou invoqués à travers des manipulations d'objets ostensifs associés. Il s'agit donc d'idées, d'intuitions, de concepts, etc. (Maréchal, 2010, p. 87)

Dans le cadre de notre typologie de tâches, nous distinguons trois ostensifs que nous présentons ci-dessous :

1	2	3
Le premier ostensif s'appuie sur le **registre discursif** : il regroupe les tâches qui ne proposent aucune représentation des formes, celles-ci sont évoquées soit à l'oral, soit à l'écrit. Pour ce premier ostensif, les propriétés des figures doivent être construites mentalement, il n'y a pas de support visuel facilitant cette organisation. Ce cas est donc le plus complexe au niveau de l'abstraction qu'il requiert de la part des élèves. Les élèves agissent donc uniquement sur des opérations mentales.	Le deuxième ostensif s'appuie sur le **registre graphique** : il regroupe l'ensemble des tâches qui proposent des représentations visuelles de formes (à l'aide d'images, de dessins, de schémas) où les manipulations ne sont pas possibles. Les propriétés des figures doivent être construites mentalement, mais la représentation visuelle de la forme facilite cette organisation.	Le troisième ostensif regroupe les tâches qui mettent en jeu une situation où les élèves sont impliqués dans une **manipulation** afin de résoudre la tâche. Les propriétés des figures peuvent être directement déduites à partir du matériel, c'est-à-dire les formes manipulables.
Le mot «carré» à l'oral ou à l'écrit		

Pour conclure cette partie théorique et avant de discuter le détail de notre typologie, voici brièvement ce que les deux niveaux de spécification décrits permettent de définir pour chaque activité analysée :

- Chaque type de tâches est défini par un bloc de techniques.

- Les sous-types de tâches permettent de réduire les techniques possibles pour chaque activité.
- Les registres d'ostensifs permettent de définir la technique dominante de l'activité analysée.

3 Les sept types de tâches mathématiques

Voici les sept types de tâches dégagés à partir de l'analyse des manuels pour le genre de tâches *reconnaissance de formes* (à la maternelle). Ces types de tâches sont présentés avec leurs sous-types de tâches. Les exemples utilisés pour illustrer la typologie sont des extraits d'activités issues des manuels analysés. Il est très fréquent qu'une activité soit découpée en plusieurs tâches.

Pour la suite de l'article, nous avons fait le choix d'intégrer directement, au fil du texte, les discussions qui ont émergé lors de notre atelier au colloque de la Copirelem. En revanche, ce n'est que dans la partie conclusive que nous proposons une nouvelle typologie de tâches prenant en compte les débats qui ont eu lieu lors de l'atelier.

3.1 T1 – Découverte

Nous considérons, dans cette catégorie, les tâches qui apparaissent habituellement en début de séquences au cours desquelles les élèves doivent s'approprier un nouveau matériel ou une nouvelle consigne.

Exemple avec un extrait en CP de l'activité « Formes et tracés » :

> Répartir les enfants par groupes de quatre ou cinq et distribuer à chaque groupe deux géoplans et des élastiques. Laisser les enfants manipuler librement ce matériel pour en prendre connaissance. (Brégeon, Debout, Dossat & Vicens, 1995, p. 222 - 223).

Ce type de tâches étant relativement peu présent, mais surtout n'engageant que peu de connaissances relativement à la reconnaissance de forme, nous ne l'avons pas investigué davantage en termes de sous-tâches et ostensifs éventuels.

Lors des discussions avec les participants de l'atelier, il ressortira que ce type de tâches n'a effectivement pas d'intérêt particulier par rapport au genre de tâches étudié à savoir la *reconnaissance de formes*. Toutefois, cela ne signifie pas que, dans l'absolu, ce type de tâches ne soit pas nécessaire pour, par exemple dans le cas présenté, la sensibilisation à un matériel[11]. Ce point nous a toutefois permis d'avoir des échanges autour de l'importance du matériel utilisé pour les activités, notamment par rapport à son influence sur les techniques qu'utilisent les élèves.

3.2 T2 – Reconnaissance de formes géométriques simples

Dans ce type de tâches, nous considérons tout travail explicite autour de la reconnaissance de formes.

Lors de l'atelier, ce type de tâches a beaucoup été questionné. En effet, comment peut-on utiliser « reconnaissance de formes géométriques » pour ce type de tâches alors qu'il s'agit également de notre genre de tâches étudié (et des termes utilisés dans le titre de notre article !).

Certains ont également réagi sur des questions d'ordre lexical. Il a été mentionné que la reconnaissance suppose qu'il faille d'abord « connaître » pour ensuite « reconnaître ». Certains participants se sont également questionnés sur la possibilité de remplacer le terme « reconnaître » par « identifier ». Nous reviendrons sur ces points dans la dernière partie de notre article afin de pointer l'évolution de notre travail depuis notre atelier réalisé au colloque de la Copirelem.

En analysant ce type de tâches plus finement, nous obtenons deux sous-types de tâches. Un premier qui regroupe les tâches qui demandent de justifier l'identification d'une forme à partir de ses propriétés. Le deuxième sous-type de tâches ne concerne que les activités qui impliquent d'identifier une forme à partir de sa désignation orale.

[11] Nous pouvons ici faire le lien avec la genèse instrumentale de Rabardel (1999) où le matériel (ici le Géoplan) serait un artefact dans les activités de découverte (T1) alors que notre typologie ne s'intéresse qu'aux activités dans lesquelles l'artefact devient instrument.

Reconnaissance d'objets à partir de critères géométriques (T2,1)

Exemple avec un extrait de l'activité « Triangles » en Grande Section :

> Matériel : un sac opaque. Des triangles de type variés : triangles rectangles, isocèles, équilatéraux et quelconques. D'autres formes géométriques : carrés, rectangles, autres polygones, ronds et ovales.
>
> Déroulement : Étape 1 « Jeu de reconnaissance tactile »
>
> Les formes sont placées dans le sac.
>
> – Toucher les pièces contenues dans le sac pour trouver les triangles.
> – Dire ce qui permet de les identifier : côtés droits, 3 côtés, 3 sommets.
>
> (Duprey, Duprey & Sautenet, 2011-c, p. 158)

Dénomination d'une forme géométrique (T2,2)

Exemple avec un extrait de l'activité « Le jeu du toucher » en Grande Section :

> Matériel : des formes géométriques simples en bois, en plastique ou en carton.
>
> Déroulement : Cacher les yeux d'un enfant avec un bandeau et lui demander de reconnaître les formes et les blocs au toucher en les nommant.
>
> (Metenier & Brégeon, 1998-a, p. 69)

Pour le type de tâches **T2**, les objets avec lesquels les élèves travaillent sont toujours soit manipulables (ostensif 3), soit représentés (ostensif 2). Quant à l'ostensif 1 (évocation à l'oral ou à l'écrit), il n'est pas présent pour ce type de tâches T2 dans les manuels suisses romands et français analysés. Pour le sous type de tâches T2,1, nous n'avons pas rencontré d'activités où l'élève doit, à partir de l'évocation écrite ou orale d'une forme, dégager ses propriétés. Ce travail apparaît probablement plus tard dans la scolarité car il requiert un niveau d'abstraction bien plus élevé. Quant à la possibilité de rencontrer l'ostensif 1 dans le sous type de tâches T2,2, cela n'aurait aucun sens. Il n'y a en effet aucun intérêt mathématique à demander à un élève de nommer une forme dont on viendrait de leur énoncer le nom à l'oral ou à l'écrit. Dans le premier cas, il s'agirait pour l'élève de répéter ce que l'enseignant ou quelqu'un d'autre vient de dire ou dans le second cas, de procéder à un déchiffrage du mot, soit de la lecture.

D'une manière générale, nos analyses nous permettent d'ajouter que les activités impliquant le type de tâches T2,2 ne sont que rarement des activités en soit, mais une partie d'une activité plus globale dans laquelle il faut, à un moment donné, dénommer une forme.

3.3 T3 – Appariement de deux formes

Ce type de tâches regroupe les activités d'assemblage de deux formes par superposition d'une pièce sur un modèle. L'appariement se fait donc par couple, un à un. La décomposition en sous-type de tâches s'appuie sur le nombre de formes présentes. Les formes peuvent être simples ; dans ce cas, il s'agit du premier sous-type de tâches (T3,1), où il s'agit de travailler sur une seule forme à la fois. Le deuxième sous-type de tâches se distingue du premier du fait qu'il s'agisse cette fois d'un ensemble de formes. Il s'agit alors d'apparier une forme simple et isolée avec la même forme intégrée dans un ensemble complexe de formes (T3,2). Nous distinguons ensuite, au sein de ce sous-type de tâches, si l'ensemble complexe de formes comporte des « trous » (T3,2,1) ou non (T3,2,2). Nous entendons, avec l'expression « sans trous », un ensemble de formes qui s'assemblent en se comportant comme un pavage, c'est-à-dire en recouvrant un espace sans vide et sans empiétement. À l'inverse, lorsque l'assemblage comporte « des trous », des espaces vides sont présents, soit parce que les pièces ne s'agencent pas entre-elles, soit parce que l'assemblage se fait par les pointes. Ce qu'il importe surtout de retenir, c'est que lorsque l'assemblage n'a pas de trous (T3,2,2), cela implique pour l'élève d'abstraire une forme d'un ensemble complexe, ce qui n'est pas le cas lorsqu'il y a des trous (T3,2,1) où les formes restent visibles, car isolées les unes des autres.

Appariement d'une forme simple avec une autre forme simple (forme non assemblée à d'autres) (T3,1)

Exemple avec l'activité « Trouver l'objet » en Grande Section

Matériel : une bonne douzaine de formes découpées dans du carton ou du plastique (voir ci-dessous), ou des éléments de puzzles, de blocs logiques ou d'autres objets plats. Un jeu de feuilles sur chacune desquelles l'enseignant a reproduit les contours des objets (un seul contour par feuille).

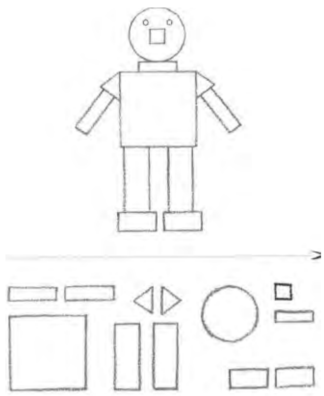
L'activité est prévue pour un atelier. Les objets sont disposés en désordre dans une corbeille. Les feuilles sont placées en tas, de sorte que l'on ne puisse pas voir leur dessin. Les enfants travaillent les uns après les autres sous le contrôle de leurs camarades. Le premier prend la première feuille, la retourne et montre à ses camarades le dessin qui y figure. Il doit chercher dans la corbeille l'objet dont le contour est représenté sur la feuille. En cas de difficulté, ses camarades peuvent l'aider et le conseiller. Une fois l'objet trouvé, l'enseignant fait poser ce dernier sur sa trace à titre de vérification, puis remet l'objet dans la corbeille et range la feuille à part pour qu'elle ne serve plus. Un deuxième enfant procède de la même façon, et ainsi de suite jusqu'au dernier.

(Debu, Peynichou & Truant, 2002-a, p. 51)

<u>Appariement d'une forme simple avec une autre forme simple intégrée dans un ensemble complexe (plusieurs formes assemblées) (T3,2)</u>

<u>L'ensemble complexe est un assemblage de formes (avec trous) (T3,2,1)</u>

Exemple avec un extrait en Grande Section de l'activité « Les masques » :



Matériel : fiche ci-contre, crayons de couleurs et ciseaux.

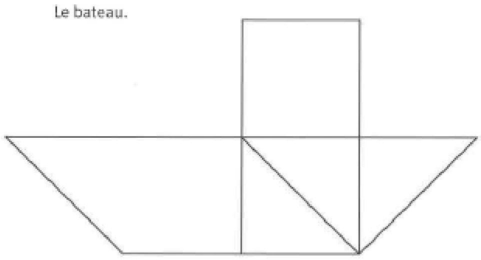
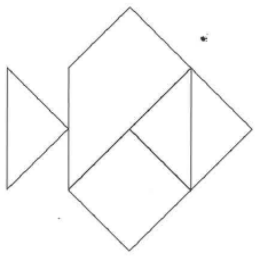
- Les enfants sont invités à colorier les 12 vignettes formes du bas de la page.
- Ils les découpent.
- **Ils collent chacune sur la forme qui lui correspond sur le dessin.**

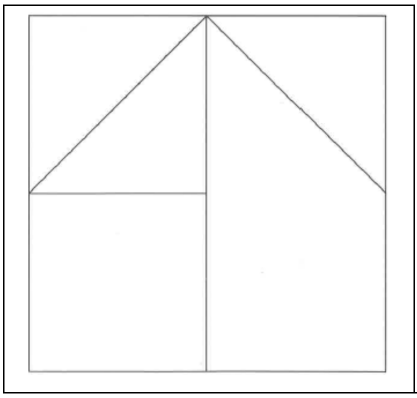
(Aragon-Dupont, Caron, Caron, Delhon & Wormser, 1998, p. 37)

<u>L'ensemble complexe est un assemblage de formes (sans trous) (T3,2,2)</u>

Exemple avec un extrait de l'activité « Puzzles géométriques » en Moyenne Section :

Matériel :

Un puzzle du Méli-Mélo par élève.	Des modèles du Méli-Mélo (matériel page 102) Le bateau.  Le poisson. 



Déroulement : Étape 1 « Reproduire un assemblage par superposition sur le modèle ».

Il s'agit de reproduire les modèles avec des formes qui se touchent par les côtés.

– Reproduire les modèles « le bateau » et « le poisson » en posant les pièces du Méli-Mélo sur les pièces dessinées (matériel page 102).

(Duprey, Duprey & Sautenet, 2011-b, p. 100)

Pour ce troisième type de tâches, nous avons observé une seule activité impliquant l'ostensif 1 (évocation à l'oral ou à l'écrit) où des élèves doivent retrouver un dessin complexe à partir de sa description. La majorité des activités implique des formes manipulables (ostensif 3) et des formes représentées (ostensif 2) à associer.

Les discussions qui ont suivi le travail autour de ce type de tâches en atelier ne remettaient pas tant en question le type de classification proposé, mais plutôt la difficulté à entrevoir facilement ce qui était derrière le terme « appariement » et ce qui était entendu par « avec » et « sans trous » sans explications de notre part.

3.4 T4 – Classement de formes géométriques selon des critères imposés

Ce type de tâches est très proche du type de tâches précédent (T3), cependant il n'est pas demandé de superposer les deux formes comme c'est le cas dans T3. Ainsi, alors que cela constitue une tâche dans T3, cela devient une technique éventuelle dans T4, bien que ce ne soit pas toujours possible selon les activités proposées (par exemple dans l'activité ci-dessous « flexo », l'appariement n'est pas possible car il n'y a pas de modèle). Comme dans le type de tâches T3, ce type de tâches est décomposé en fonction des formes à disposition : les formes sont indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas assemblées (T4,1) ou les formes sont assemblées (T4,2). Comme dans le type de tâches précédent, nous distinguons ensuite si l'assemblage présente des « trous » (T4,2,1) ou non (T4,2,2).

Reconnaissance d'une forme simple parmi un ensemble de formes indépendantes (formes non assemblées) (T4,1)

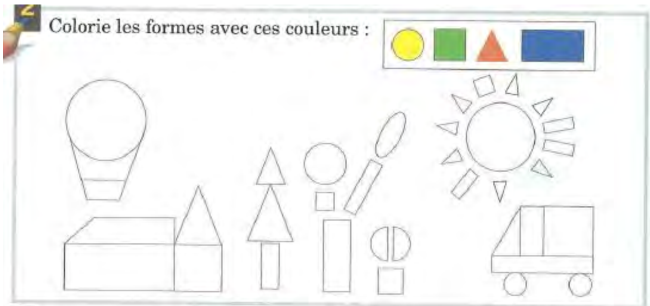
Exemple avec un extrait de l'activité « flexo » avec la fiche élève p.20.

(Duprey, Duprey & Sautenet, 2011-c, p. 16 et 20)

<u>Reconnaissance d'une forme simple dans un ensemble complexe (plusieurs formes assemblées) (T4,2)</u>

<u>L'ensemble complexe est un assemblage de formes avec trous. (T4,2,1)</u>

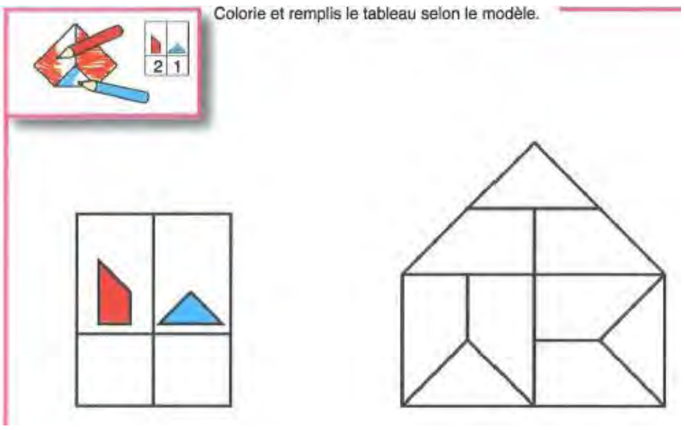
Exemple avec l'activité de CP « Reconnaître des formes »



(Brégeon, Debout, Dossat, Vicens, 1995-b, p.42)

<u>L'ensemble complexe est un assemblage de formes sans trous (T4,2,2)</u>

Exemple avec un extrait de l'activité « Puzzle » en Grande Section :



(Debu, Peynichou & Truant, 2002-b, p. 35)

Le complément d'analyse par les ostensifs fait ressortir sensiblement les mêmes éléments que pour T3. Dans les activités recensées, les formes sont toujours visibles, que ce soit des formes manipulables (ostensifs 2) ou représentées (ostensif 3), avec une majorité d'activités utilisant l'ostensif 2. Toutefois, bien que les formes à classer appartiennent toujours aux ostensifs 2 ou 3, le modèle sur lequel le classement va se réaliser appartient quant à lui parfois à l'ostensif 1, c'est-à-dire qu'il est écrit (comme dans le cas vu précédemment de la fiche « le flexo ») ou évoqué à l'oral par l'enseignant.

Les discussions lors de l'atelier au colloque de la Copirelem ont permis de mettre en évidence des incohérences par rapport à ce type de tâches. Le premier point concerne le terme « classement ». Il a en effet été pointé que ce terme n'était pas le plus adéquat. Étant donné que le classement implique plusieurs critères, le terme « trier » est plus précis dans notre cas. Nous cherchons en effet à savoir ce qui est rond ou non, ce qui est carré ou non, etc. Dans ce cas, c'est un tri impliquant 2 critères. Les participants de l'atelier ont également pointé que le terme « reconnaissance » apparaissait une nouvelle fois au niveau des sous-types de tâches T4,1 et T4,2, alors que c'est déjà l'appellation du type de tâches T2 et le genre de tâches de notre typologie générale. Suite à ces différents constats, nous ferons une proposition de modification en fin d'article.

3.5 T5 – Construction géométriques avec contraintes

Ce type de tâches regroupe toutes les activités de construction. Nous distinguons ce type de tâches du suivant (T6 *reproduction géométriques avec un modèle*) de par le fait que les constructions ne se réalisent pas à partir de modèles. Toutefois, les instruments disponibles pour résoudre les activités ont soulevé un certain nombre d'interrogations au moment de la construction de notre typologie. Nous reviendrons sur ce point plus tard afin d'indiquer notre nouvelle position. Nous avons opté pour continuer notre classification selon la logique utilisée jusque-là soit en distinguant : les formes isolées (T5,1), des formes qui s'assemblent en laissant des « trous » (T5,2,1) et sans en laisser (T5,2,2).

<u>Construction géométrique d'une forme simple (T5,1)</u>

Exemple avec un extrait de l'activité « Le tableau des formes » en Petite Section :

> Matériel : des feuilles à peindre. Des éponges de formes[12] ∆ et o, de la peinture.
>
> Déroulement : Faire réaliser des empreintes sur la feuille avec plusieurs couleurs.
>
> (Gerome, Metenier & Brégeon, 1995, p. 43)

<u>Construction géométrique d'un ensemble complexe (plusieurs formes simples assemblées) (T5,2)</u>

<u>L'ensemble complexe est un assemblage de formes simples avec trous (T5,2,1)</u>

Exemple avec un extrait de l'activité « Côtés et sommets » en Moyenne Section :

> Matériel : des puzzles du Méli-Mélo découpés dans de la cartoline et plastifiés (matériel page 96). Chaque élève joue avec un puzzle d'une couleur différente de ses camarades.

Page 95

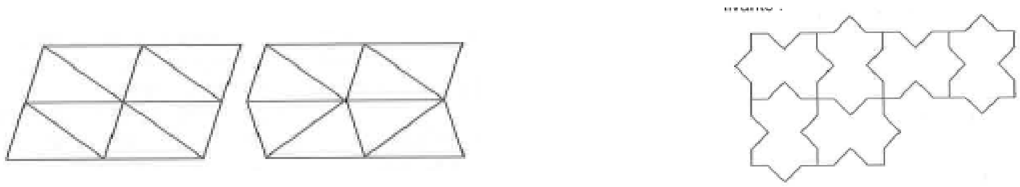
> Déroulement : Etape 2 Assembler les formes en respectant une contrainte « Assembler les formes par les sommets »
>
> Réaliser collectivement puis individuellement une figure où toutes les pièces se touchent par un sommet.
>
> (Duprey, Duprey & Sautenet 2011-b, p. 94)

[12] par exemple le matériel Nathan, réf. 387 024

<u>L'ensemble complexe est un assemblage de formes simples sans trous (T5,2,2)</u>

Exemple avec un extrait de l'activité « Jeux de pavages » en Grande Section :

> Matériel : des triangles tous identiques et de 2 couleurs. Une figure plus complexe à bords rectilignes permettant de réaliser des pavages.
>
> Déroulement : Présenter aux enfants des triangles tous identiques, découpés dans du carton rigide (ou de toute matière assez solide). Poser le problème « *Comment faire pour recouvrir toute la table avec ces triangles sans laisser d'espace entre eux ?* ». Reprendre la même activité avec la forme plus complexe proposée.



> (Metenier & Brégeon, 1998-a, p.83)

Dans nos analyses, on retrouve les trois ostensifs pour ce type de tâches. Bien que n'ayant pas analysé spécifiquement les instruments disponibles pour les constructions, on voit que les pochoirs, gabarits et tampons peuvent être considérés comme des formes manipulables relevant ainsi de l'ostensif 3. La majorité des constructions utilisent l'ostensif 3.

Au cours de l'atelier, nous avons brièvement discuté de la place et du rôle des instruments pour ce type de tâches qui vont avoir une influence directe sur les techniques disponibles.

3.6 T6 – Reproduction géométriques avec un modèle

Dans le type de tâches précédent, T5, les constructions sont faites sans modèles mais avec des contraintes liées au matériel ou à la consigne ; pour ce type de tâches, T6, un modèle est utilisé pour réaliser la tâche. On retrouve les deux classes de sous-type de tâches (T6,1 et T6,2) avec, pour la deuxième classe, la même nuance entre des assemblages avec trous (T6,2,1) ou sans trous (T6,2,2).

<u>Reproduction géométrique de formes simples (T6,1)</u>

Exemple avec un extrait de l'activité « Combien de côtés ? » en Grande Section

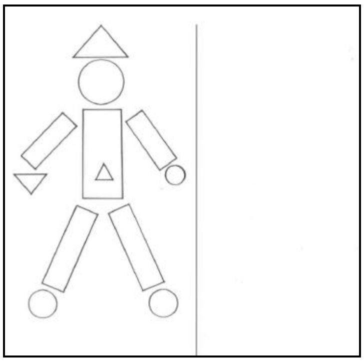
> Matériel : des crayons, des pinceaux, des règles, des feutres, des barres de meccano, des bâtonnets de glace.
>
> Déroulement : Dénombrer les côtés d'une forme complexe.
>
> L'enseignant présente les photographies des formes réalisées lors de l'étape précédente (des figures fermées avec 3, 4, 5, 6 et 7 objets de tailles identiques ou non). L'enseignant distribue à chacun une figure dessinée avec des objets. Reproduire la figure avec des objets en commandant le nombre d'objets nécessaire à un adulte.
>
> (Duprey, Duprey & Sautenet 2011-c, p. 18).

<u>Reproduction géométrique d'un ensemble complexe de formes simples (T6,2)</u>

<u>L'ensemble complexe est un assemblage de formes simples avec trous (T6,2,1)</u>

Exemple avec un extrait de l'activité « Reconnaitre des formes ? » en Moyenne Section

> Colle des gommettes pour refaire le même personnage.



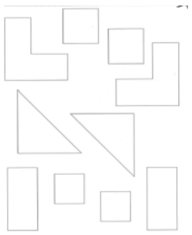
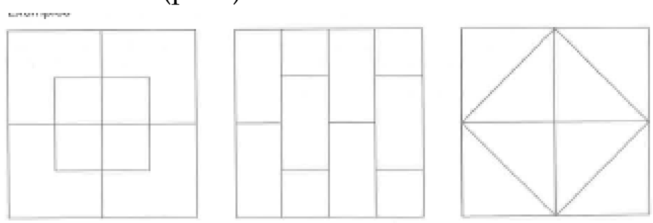
(Gerome, Metenier & Brégeon, 1994, p. 10)

<u>L'ensemble complexe est un assemblage de formes simples sans trous. (T6,2,2)</u>

Exemple avec un extrait de l'activité « Les pavages » en Grande Section

Matériel : fiche page 76 à photocopier, des feuilles de papier épais de différentes couleurs. Des fiches modèles telles que décrites ci-dessous préparées par l'enseignant sur papier bristol, des ciseaux, de la colle.

Déroulement du jeu : Les élèves choisissent un modèle de niveau 1, collent sur la feuille de papier des pièces organisées pour reproduire le modèle.

Les formes (p. 76)	Les modèles (p. 73)
	

(Aragon-Dupont, Caron, Caron, Delhon & Wormser, 1998, p. 73)

L'ostensif 1 est peu représenté dans ce type de tâche. En effet, il nous semble peu évident de travailler sur une reproduction où le modèle n'est ni représenté ni manipulable ; il faudrait qu'il soit donné sous la forme d'un programme de construction. On voit ici que la contrainte liée aux degrés scolaires concernés ne permet pas d'exploiter ce type de modèle.

Suite à notre atelier lors du colloque de la Copirelem et aux discussions qui ont suivi, nous avons décidé de déplacer dans T6 toute une série d'activités que nous avions mises dans T5 et qui n'y avaient pas leur place.

3.7 T7 – Composition d'une surface à partir de formes simples

Les tâches regroupées dans ce type de tâches impliquent un travail sur la composition de surface en utilisant des formes simples. Il ne s'agit pas de tâches d'appariement (T3) car plusieurs formes sont utilisées pour recouvrir une surface, qu'elle soit simple ou complexe. Les deux sous-types de tâche distingués pour T7 concernent la complexité de la forme à recouvrir, soit la forme est une forme élémentaire (triangle, quadrilatère, …) que l'on pourrait retrouver dans des blocs logiques classiques (T7,1), soit la forme est un assemblage de formes complexes (T7,2). Ces tâches de pavage se distinguent des tâches proches dans T4 et T3 car seules les silhouettes sont disponibles, les formes qui composent les assemblages ne sont pas visibles.

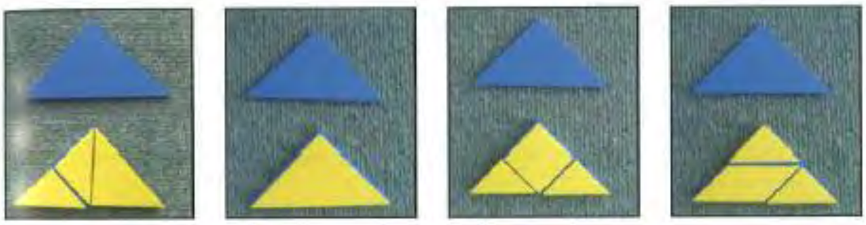
<u>Surface élémentaire (T7,1)</u>

Exemple avec un extrait de l'activité « Pavages » en Grande Section

Matériel : un puzzle du tangram par élève.

Déroulement : Résoudre le problème

Cherche plusieurs solutions pour recouvrir le grand triangle.



(Duprey, Duprey & Sautenet 2011-c, p. 104).

<u>Surface complexe (T7,2)</u>

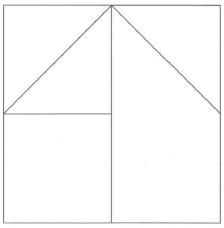
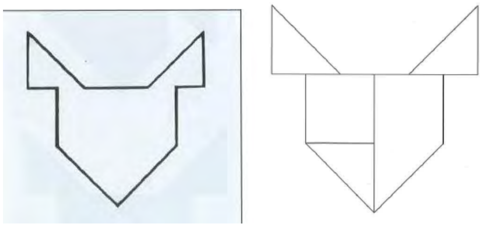
Exemple avec un extrait de l'activité « Puzzles géométriques » en Moyenne section

Matériel : un puzzle Méli-Mélo par élève (matériel page 96). Le modèle du Méli-Mélo page 102.

Déroulement : Reproduire un assemblage en posant les pièces dans une silhouette

Il s'agit de reproduire un modèle avec une aide.

– Reproduire le modèle « chien » (matériel page 102) en posant les pièces à l'intérieur d'une silhouette.

Un puzzle du Méli-Mélo par élève p. 96	Modèle « chien » et sa solution (matériel page 102)
	

(Duprey, Duprey & Sautenet 2011-b, p. 100).

Pour ce type de tâches, l'ostensif 1 ne peut pas être utilisé, les formes doivent nécessairement être visualisables, soit comme des formes représentées, soit comme des formes manipulables. À partir de nos analyses, nous remarquons que les formes utilisées pour recouvrir la surface sont des formes manipulables et imposées. Il ne s'agit jamais de décomposer librement une forme complexe en formes simples à l'intérieur du modèle.

Au cours de l'atelier, le terme « composition » a été remis en question. Certains participants ont expliqué que ce type de tâches laissait supposer une certaine créativité pour l'élève qui ne se retrouvait pas dans les activités classées dans ce type de tâches. En effet, dans les programmes français, le terme « composition » est utilisé en arts plastiques. Tout comme pour T3, les flous occasionnés par le vocabulaire utilisé pour la dénomination des types de tâches utilisée devraient être éclaircis par les définitions que nous avons ajoutées dans ce texte.

III - EXEMPLES D'APPLICATION

1 Analyse de ressources

La raison qui a motivé l'élaboration de cette typologie était le besoin d'analyser un grand nombre de ressources concernant la reconnaissance de formes chez des élèves de 3 - 6 ans. Toutefois, l'analyse des différents manuels français ont permis de mettre en évidence certains résultats plus généraux que nous avons présentés lors de l'atelier.

Pour les manuels français étudiés :

- Peu de tâches de composition de surfaces à partir de formes simples (T7).
- Équilibre entre les tâches d'appariements (T3), de classements (T4) et de constructions géométriques avec contraintes (T5).

- Dans toutes les tâches, beaucoup de manipulations à la maternelle.
- La réalisation des tâches T2 s'appuie fortement sur l'enseignant qui mène les échanges et l'explicitation des critères.
- Beaucoup d'activités qui mettent en correspondance des formes manipulables avec leur représentation sur papier (T3).
- Les Petites Sections sont peu concernées par les tâches de construction.

Nous avons aussi analysé les moyens d'enseignement romands. Voici un bref bilan sur le croisement des analyses des manuels français avec les moyens d'enseignement suisses romands. Le type de tâches le plus représenté dans l'ensemble des manuels français (T4) est absent des activités des moyens d'enseignement suisses romands. À l'inverse, alors que T7 est peu représenté dans les ouvrages français, il est très présent dans les moyens d'enseignement suisses romands. C'est sans doute ce qui nous a poussées à l'introduire dans notre typologie.

2 En formation des enseignants

Cette typologie permet d'analyser finement une activité ou une séquence, de comprendre ce qui est en jeu et permet d'engager des discussions entre étudiants. D'un point de vue plus global, en utilisant cette typologie sur une séquence ou un ensemble de séquences, les enseignants en formation peuvent identifier les différents types et sous-types de tâches abordés. Cela permet d'avoir conscience des éventuels tâches ou types de tâches non abordés et d'analyser si la séquence ou un ensemble de séquences ne prennent en compte qu'un nombre restreint de tâches. Aborder l'ensemble des tâches dans un enseignement ne peut pas être un objectif car nos travaux ne prouvent en aucun cas que la reconnaissance de formes est « assurée » par le parcours de toutes les tâches de notre typologie. Une remarque sur ce sujet est d'ailleurs apparue lors de l'atelier. On ne peut que supposer, en s'appuyant sur les travaux de Matheron et Noirfalise (2009), que les connaissances des élèves, relativement à la reconnaissance de formes à l'école maternelle, seront d'autant plus riches que les types de tâches seront variés.

IV - EFFET DE L'ATELIER AU COLLOQUE DE LA COPIRELEM SUR NOTRE RECHERCHE

Pour conclure, nous constatons, grâce à l'atelier proposé au colloque de la Copirelem, que notre typologie nécessite d'être revue, ce dont nous ne doutions pas. Ce réaménagement est relatif à deux aspects. Le premier concerne les types de tâches choisis ; certains regroupements entre différents types de tâches étant possibles et quelques réaménagements sont à faire. Le second concerne le lexique utilisé qui ne fait pas toujours consensus entre les participants. Des incohérences ont également été mises en évidence, notamment le fait que le terme « reconnaissance » apparaisse à différents niveaux de notre typologie de tâches entraînant ainsi une certaine confusion. Au regard de cela, il n'est pas surprenant que l'appropriation de notre typologie de tâches par les participants de l'atelier ne se soit pas faite aisément.

Un autre constat émerge, suite à notre atelier, par rapport à la compréhension des consignes des activités. En effet, comme nous ne les comprenons pas tous de la même manière, il arrive que nous ne les classions pas dans le même type de tâches. Ce point débouche sur une problématique plus large, à savoir la marge de manœuvre des enseignants lorsqu'ils proposent une activité en classe, malgré la présence de documents d'accompagnement pour certaines ressources. Cependant, le cadre de la TAD choisi n'avait pas pour ambition de regarder la mise en œuvre en classe des activités analysées, mais bien de se focaliser sur l'analyse de manuels.

Pour terminer, nous pensons que ce n'est pas que la typologie présentée qu'il importe de retenir de notre atelier, mais aussi le processus de construction par lequel nous sommes passées.

V - NOUVELLE TYPOLOGIE MAIS TOUJOURS PROVISOIRE

Afin de clore notre article, il est essentiel de revenir sur les différents aspects de notre typologie qui ont été questionnés afin de proposer une nouvelle mouture qui demeure toutefois encore provisoire. Si cette dernière reste provisoire, c'est tout simplement car il importe de l'éprouver une nouvelle fois en classant les activités recensées et en observant si les soucis que nous rencontrions auparavant disparaissent ou au moins s'atténuent.

T1 Identification de formes géométriques simples (anciennement T2)

- T1,1 à partir de critères géométriques (propriétés)
- T1,2 à partir de la perception globale de la forme (perceptif)

T2 Appariement de deux formes simples (superposition) (anciennement T3)

- T2,1 d'une forme simple avec une autre forme simple (non assemblée à d'autres)
- T2,2 d'une forme simple avec une autre forme simple intégrée dans un ensemble complexe (plusieurs formes assemblées)
  - T2,2,1 L'ensemble complexe est un assemblage des formes non pavées (recouvrement d'un espace avec vide et/ou empiètements)
  - T2,2,2 L'ensemble complexe est un assemblage de formes pavées (recouvrement d'un espace sans vide, ni empiètement)

T3 Recouvrement d'une surface (sans le contour des formes qui la compose = silhouette) à partir de formes simples (anciennement T7)

- T3,1 lorsque la surface est une forme simple
- T3,2 lorsque la surface est complexe

T4 Reproduction géométrique à partir d'un modèle (juxtaposition) (anciennement T6)

- T4,1 Reproduction géométriques de formes simples
- T4,2 Reproduction géométrique d'un ensemble complexe de formes simples
  - T4,2,1 L'ensemble complexe est un assemblage des formes non pavées (recouvrement d'un espace avec vide et/ou empiètements)
  - T4,2,2 L'ensemble complexe est un assemblage de formes pavées (recouvrement d'un espace sans vide, ni empiètement)

T5 Tri de formes géométriques simples (anciennement T4)

- T5,1 d'une forme simple parmi un ensemble de formes indépendantes (formes non assemblées)
- T5,2 d'une forme simple dans un ensemble complexe (plusieurs formes assemblées)
  - T5,2,1 L'ensemble complexe est un assemblage des formes non pavées (recouvrement d'un espace avec vide et/ou empiètements)
  - T5,2,2 L'ensemble complexe est un assemblage de formes pavées (recouvrement d'un espace sans vide, ni empiètement)

T6 Construction géométrique avec contraintes (anciennement T5)

- T6,1 d'une forme simple
- T6,2 d'un ensemble complexe de formes (plusieurs formes simples assemblées)
  - T6,2,1 L'ensemble complexe est un assemblage des formes non pavées (recouvrement d'un espace avec vide et/ou empiètements)
  - T6,2,2 L'ensemble complexe est un assemblage de formes pavées (recouvrement d'un espace sans vide, ni empiètement)

Plusieurs références ont été pointées lors de l'atelier afin de nous permettre d'approfondir notre questionnement : le document d'accompagnement 2003 rédigé, à la demande de la direction de l'enseignement scolaire, par la commission mathématique rattachée au groupe d'experts pour les programmes de l'école primaire (Dossat et *al*., 2005) ainsi que les travaux d'une participante qui a donné lieu à une publication « *Autour du repérage des compétences dans des domaines mathématiques en cycles 1 et 2* » (Vaultrin et *al*., 2011). Si l'on se réfère à ces deux documents, nous constatons déjà quelques divergences par rapport à notre nouvelle typologie de tâches. Par exemple, le premier document utilise les termes

« classement et rangement » alors que nous utilisons finalement celui de « tri ». Les auteurs du document utilisent également « différencier globalement des formes figuratives et des formes simples par la vue et le toucher ». Nous n'avons pas de type de tâches précisément sur la différenciation, toutefois cette formulation est représentative des activités classées dans le type de tâches T1 « Identification de formes géométriques simples » (qui sous-entend « parmi d'autres »). Quant au second, le lexique varie quelque peu par rapport au nôtre. Par exemple, le terme « représenter » est utilisé alors que nous employons « construire », et le terme « reconnaître » alors que nous avons opté pour « identifier ».

Pour terminer, ce qui manque actuellement dans notre typologie, mais que nous ne parvenons pas à intégrer, concerne les activités de désignation et de description (impliquant de l'oral) de formes géométriques. Cela pose un problème dans le sens où cela ne s'associe pas avec notre spécification en ostensifs, c'est pourquoi nous pensons actuellement considérer ce type de tâches comme transversal.

Bien que cette dernière version de notre typologie de tâches demeure provisoire, elle nous permet de nous faire une idée plus ou moins précise de ce qui existe autour de la reconnaissance de formes à la maternelle que ce soit en Suisse romande ou en France. Nous poursuivons donc actuellement notre projet initial, à savoir de concevoir des activités ludiques autour de la reconnaissance de formes pour les élèves de 3 - 6 ans. Nous espérons ainsi proposer un atelier dans ce sens lors du prochain colloque de la Copirelem.

VI - BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R. & SALIN M.-H. (1993 - 1994) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, **53**, 39-56.

BERTHELOT R. & SALIN M.-H. (1999 - 2000) L'enseignement de l'espace à l'école primaire, *Grand N*, **65**, 37-59.

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques,* ***19*(1)**, 77-123.

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques,* ***12*(1)**, 73-111.

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, **19(2),** 221-266.

CONNE F. (1987) Entre comptage et calcul, *Math Ecole*, **130**, 11-23.

DOSSAT L., FROMENTIN J., HOUDEMENT C., MATULIK N., PIGOT G. & PLANCHETTE P. (2005) *Mathématiques Ecole primaire. Document d'accompagnement des programmes*. Centre national de documentation pédagogique.

MARÉCHAL C. (2010) *Effet des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé. Une analyse didactique à partir du cas de l'introduction à l'addition*. Thèse de l'Université de Genève.

MATHERON Y. & NOIRFALISE A. (2009) *Enseigner les mathématiques à l'école primaire, les 4 opérations sur les nombres entiers*, Paris : Vuibert.

RABARDEL P. (1999) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de la X[ème] Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Houlgate, vol I, 203-213.

VAULTRIN M., LAURENÇOT-SORGIUS I., IMBERT J.-L., BILLY C. & BERGEAUT J.-F. (2011) *Autour du repérage des compétences dans des domaines mathématiques en cycles 1 et 2,* Rangueil : I.U.F.M. Midi-Pyrénées.

Conseil supérieur des programme (2014) Projet de programme et recommandations école maternelle, [page web]. Accès : http://cache.media.education.gouv.fr/file/Organismes/32/4/CSP-_Projet_de_programme-recommandations_337324.pdf

Références des manuels

ARAGON-DUPONT M., CARON C., CARON J.-L., DELHON V. & WORMSER M. (1998) *Collection Spirales, Maths GS*. Paris : Nathan.

BREGEON J.-L., DEBOUT C., DOSSAT L. & VICENS P.-Y. (1995-a) *Collection Diagonale Mathématiques CP, Livre du maître*, Paris : Nathan.

BREGEON J.-L., DEBOUT C., DOSSAT L. & VICENS P.-Y. (1995-b) *Collection Diagonale Mathématiques CP, Fichier d'activités,* Paris : Nathan.

CONFERENCE INTERCANTONALE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE DE LA SUISSE ROMANDE ET DU TESSIN (CIIP) (2010) *Plan d'études Romand,1[er] cycle, Mathématiques et Science de la nature – Sciences humaines et sociale*, CIIP.

DUPREY G., DUPREY S. & SAUTENET C. (2011-a) *Vers les maths Maternelle Petite Section,* Schiltigheim : ACCES.

DUPREY G., DUPREY S. & SAUTENET C. (2011-b) *Vers les maths Maternelle Moyenne Section,* Schiltigheim : ACCES.

DUPREY G., DUPREY S. & SAUTENET C. (2011-c) *Vers les maths Maternelle Grande Section,* Schiltigheim : ACCES.

DEBU P., PEYNICHOU D. & TRUANT D. (2002-a) *Collection Pour comprendre les mathématiques, découvrir le monde GS, Guide pédagogique,* Paris : Hachette.

DEBU P., PEYNICHOU D. & TRUANT D. (2002-b) *Collection Pour comprendre les mathématiques, découvrir le monde GS, Fichiers,* Paris : Hachette.

GAGNEBIN A., GUIGNARD N. & JAQUET F. (1998) *COROME : Apprentissage et enseignement des mathématiques : commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*, Bienne, Ediprim SA.

GEROME E., METENIER G. & BRÉGEON J.-L. (1995) *Collection Diagonale Math en pousse, PS Maternelle, Livre du maître,* Paris : Nathan.

GEROME E., METENIER G. & BRÉGEON J.-L. (1998) *Collection Diagonale Math en pousse, MS Maternelle, Livre du maître,* Paris : Nathan.

GEROME E., METENIER G. & BRÉGEON J.-L. (1994) *Collection Diagonale Math en pousse, MS Maternelle, Fichier d'activités,* Paris : Nathan.

METENIER G. & BRÉGEON J.-L. (1998-a) *Collection Diagonale Math en herbe, GS Maternelle, Livre du maître,* Paris : Nathan.

METENIER G. & BRÉGEON J.-L. (1998-b) *Collection Diagonale Math en herbe, GS Maternelle, Fichier d'activités*, Paris : Nathan.

Références des ressources pédagogiques

EMPRIN F. & EMPRIN-CHARLOTTE F. (2009) *Un rallye mathématique en maternelle ? Oui c'est possible !* Reims : CRDP de Champagne-Ardenne.

GOËTZ-GEORGES M. (2007) *Situations-jeux pour les apprentissages mathématiques en maternelle, PS-MS*. Paris : Retz.

GREFF E. & HELAYEL J. (2009) *Situations-jeux pour les apprentissages mathématiques en maternelle, GS*. Paris : Retz.

RAOUL-BELLANGER A. & BELLANGER F. (2010) *Construire les notions mathématiques. 50 activités de manipulation, Cycle 2*. Paris : Retz.

VII - ANNEXE

Compétences mathématiques en maternelle selon le plan d'études suisse romand (2011) et le projet de programme pour l'école maternelle en France (2014)

Connaissances et compétences dans l'axe thématique Espace pour le champ Figures et transformations géométriques qui doivent être abordées en classe dans les degrés 1P - 2P (4 - 6 ans) en suisse romande selon le PER (Plan d'Etude Romand) :

- Manipulation, observation et reconnaissance de formes géométriques simples ;
- Classement d'objet selon un critère (forme, taille, orientation…) ;
- Construction d'une forme plane ou d'un solide avec du matériel divers ;
- Reproduction et réalisation de formes planes (frises, pavages,…).

Projet de programme et recommandations école maternelle – Attendus de fin de cycle pour comparer, trier, identifier des formes et des grandeurs :

- Différencier et classer les objets en fonction des caractéristiques liées à leur forme ;
- Reconnaitre et nommer quelques solides : cube, pyramide, sphère, cylindre… ;
- Associer des solides à leurs empreintes et réciproquement ;
- Reconnaitre, classer et nommer les formes simples : carré, triangle, cercle, rectangle… ;
- Reproduire un assemblage d'objets, de formes simples à partir d'un modèle : puzzle, pavage, assemblage de solides ;
- Reproduire, dessiner des formes planes ;
- Comparer, classer et ranger des objets selon leur taille, leur masse ou leur contenance.

Mallette de ressources mathématiques pour l'école maternelle (MS-GS).

Sylvaine BESNIER
Doctorante en Sciences de l'éducation à l'UBO
CREAD (EA 3875)
sylvaine.besnier@univ-brest.fr

Pierre EYSSERIC
PRAG, ESPE d'Aix-Marseille
pierre.eysseric@univ-amu.fr

Typhaine LE MEHAUTE
PRAG, ESPE de Bretagne
typhaine.lemehaute@espe-bretagne.fr

Résumé
L'objectif de cet atelier était d'inviter les participants à découvrir les ressources proposées aux enseignants de la mallette « situations et logiciels pour le nombre en maternelle ». Les situations contenues dans cette mallette sont pour la plupart des situations connues des formateurs et/ou des enseignants, comme par exemple « le jeu des voyageurs » (Ermel GS). Ces situations ont été retravaillées à des fins de diffusion. Ainsi, les ressources de cette mallette sont de différents types (apports théoriques, descriptions de situations, logiciels, matériel tangible manipulable, etc.) et sont présentées sous différents formats (cartes mentales, extraits vidéos, etc.). Plusieurs axes de réflexion se dégagent et ont fait l'objet d'analyses et de débats dans l'atelier :

- Qu'est-ce que ce type de ressources peut apporter par rapport à ce qui est déjà vu dans les classes sur l'apprentissage du nombre ?
- En ce qui concerne la conception de ces ressources : quels manques identifiez-vous ? Quelles améliorations proposeriez-vous pour ces ressources ?
- Quelles appropriations possibles par les enseignants du contenu de cette mallette?
- Quelles diffusions et quelles formations associées ?

Notre atelier s'est organisé en trois temps. Tout d'abord, il s'agissait de présenter le contexte dans lequel s'est effectuée la conception des ressources de la Mallette. Ensuite, nous avons souhaité introduire l'exploration effective des ressources de la Mallette par une rapide familiarisation avec deux des situations proposées dans celle-ci: « voitures et garages » et « les ogres ». Pour « voitures et garages » il s'agissait de présenter rapidement les ressources ainsi que deux exemples d'appropriation de celles ci. Pour les ogres, il s'agissait de situer cette situation dans l'ensemble de la carte mentale sur le nombre. Enfin un troisième temps suivi de retours des participants a permis l'exploration effective des ressources guidées par les questions suivantes : 1. Les ressources présentées : intérêts ? Manques ? Améliorations ? 2. Les différents usages en classe et modes de diffusion que l'on peut anticiper : impact sur la formation ?

I - LE PROJET MALLETTE

Le projet est issu d'une demande de la DGESCO (juin 2011), renforcée depuis par les demandes de la « conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques » (mars 2012).

Il repose sur l'hypothèse, attestée par de nombreux travaux[1], de l'importance de la *manipulation directe d'objets tangibles*, dans un contexte de résolution de problèmes, pour soutenir les premiers apprentissages mathématiques, qui sont des apprentissages fondamentaux.

Le projet privilégie, à chaque fois que faire se peut, la manipulation conjointe de duos d'artefacts, ou *d'artefacts duaux*, « logiciel » et « matériel ». Dans un moment aussi de foisonnement de ressources, le projet vise le rassemblement en une même entité, une « mallette », d'un ensemble d'outils et de situations d'usage, accompagné de recommandations et d'illustrations soutenant l'appropriation par le professeur et la mise en œuvre dans le cadre de la classe.

Le projet repose sur la collaboration de l'IFÉ (rassemblant le pôle CREAD à Rennes et le pôle EducTice à Lyon) et de la COPIRELEM.

Les ressources du projet se sont développées dans trois contextes, en Rhône Alpes autour de l'équipe EducTICE de l'IFÉ, en Bretagne avec la contribution du CREAD et à la COPIRELEM avec des équipes de Bordeaux, Aix-Marseille et Toulouse.

Les travaux ont débouchés sur la production de deux mallettes :

- Une première autour de la construction du nombre en MS et GS qui :
  - reprend diverses situations de référence autour du nombre, les revisite pour favoriser leur appropriation par les enseignants;
  - propose des logiciels associés à certaines de ces situations ;
  - présente, pour certains aspects du nombre, quelques situations nouvelles mettant en avant l'utilisation du nombre dans les apprentissages, le lien entre les mathématiques et d'autres disciplines, la place d'une pédagogie de projet à l'école maternelle.
- Une deuxième centrée sur l'expérimentation de situations d'apprentissage utilisant des instruments mathématiques :
  - la pascaline avec des ressources articulant matériel et logiciel pour l'apprentissage de la numération décimale et du calcul au CP et au CE1 ;
  - le boulier chinois avec des ressources pour l'apprentissage du nombre en GS et de la numération décimale et du calcul au cycle 2.

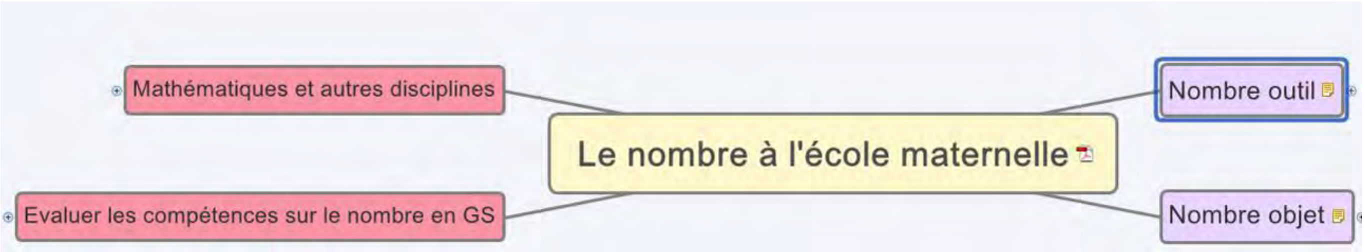
Nous nous intéressons dans cet atelier à la mallette relative au nombre en MS et GS.

Nous avons fait le choix du numérique pour présenter et diffuser ces ressources. D'une part, nous avons fait l'hypothèse que ce type de support faciliterait la diffusion. D'autre part ce choix nous a permis de structurer les activités pour les élèves à partir d'une organisation des apprentissages sur le nombre. Cette organisation est matérialisée par des cartes mentales qui donnent à l'utilisateur une vision claire et rapide de l'articulation entre les différentes connaissances à aborder à l'école maternelle.

Ces cartes mentales permettent d'accéder rapidement aux ressources nécessaires pour comprendre les situations d'apprentissage tout en exposant clairement le lien entre les connaissances mises en jeu. Elles permettent d'associer dans un même document des textes, du matériel à imprimer, des images fixes ou animées avec la possibilité pour chaque utilisateur d'appréhender la ressource en suivant des chemins différents dans la carte.

Elles fonctionnent avec le logiciel libre de droit, Xmind utilisable aussi bien sur PC (windows ou linux) que sur Mac.

[1] Pour les sciences cognitives on peut citer Lakoff et Nunes 2000, pour la psychologie du développement Kalénine, Pinet et Gentaz (2011), pour la didactique des mathématiques au niveau international Edwards, Radford et Arzarello (2009).



Carte mentale « Le nombre à l'école maternelle »

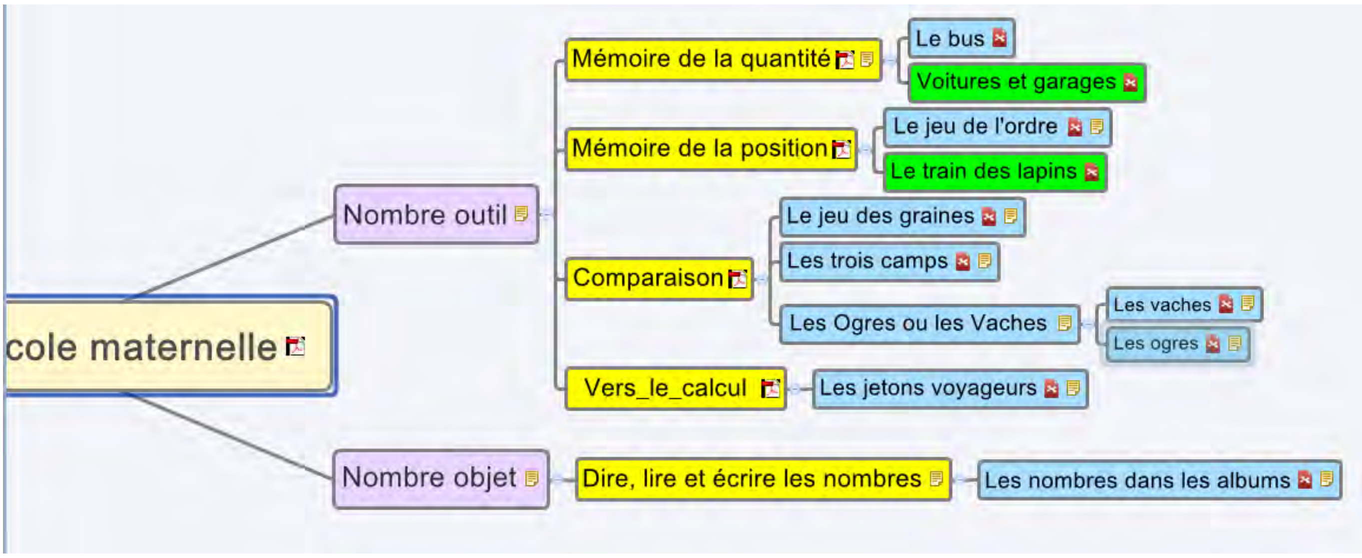
Nous renvoyions le lecteur à la communication C25 dans les actes de ce colloque pour une présentation plus complète de ces deux mallettes. La deuxième partie présente dans le détail deux des situations disponibles dans la mallette sur le nombre en MS et GS.

II - FAMILIARISATION AVEC LES SITUATIONS

1 Les ogres

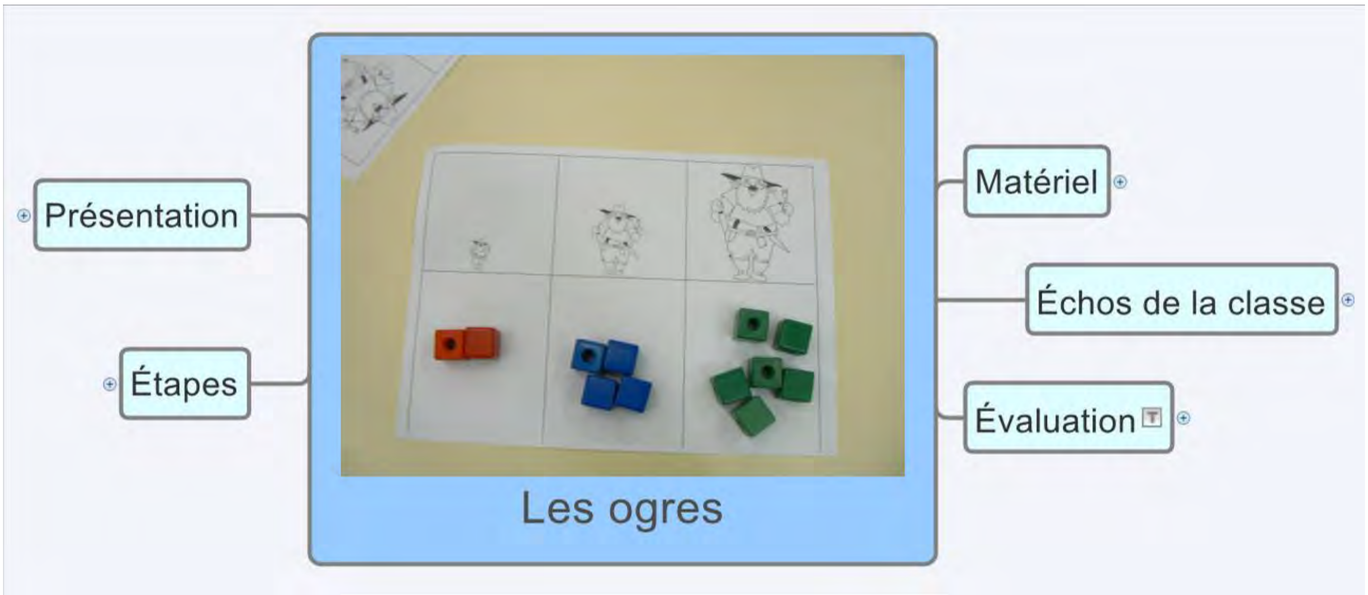
1.1 Place dans la carte « Le nombre à l'école maternelle »

Le jeu des ogres est une des situations nouvelles de cette mallette. On la trouve dans la branche « nombre outil » et elle fait partie des situations proposées pour travailler l'ensemble des types de tâches relatifs à l'ordre : comparer, ranger, encadrer, intercaler.



Cette situation a été imaginée par Xavier Ginas, PE à l'école La Clef des Champs, Entressen (13) et elle a été mise en œuvre avec les élèves de GS (et quelques élèves de MS) de cette école. La place dans la carte mentale indique, par l'intermédiaire des notes et par la lecture du document pdf « comparaison », d'une part que cette situation permet de travailler l'utilisation des nombres pour comparer, ranger, encadrer ou intercaler des collections, d'autre part qu'on retrouve cette même compétence dans la situation « Les vaches » (adaptation de Mow, jeu de société suisse) : dans une classe, on choisira donc l'une ou l'autre de ces situations pour aborder ces types de tâches.

1.2 La situation « le jeu des ogres »

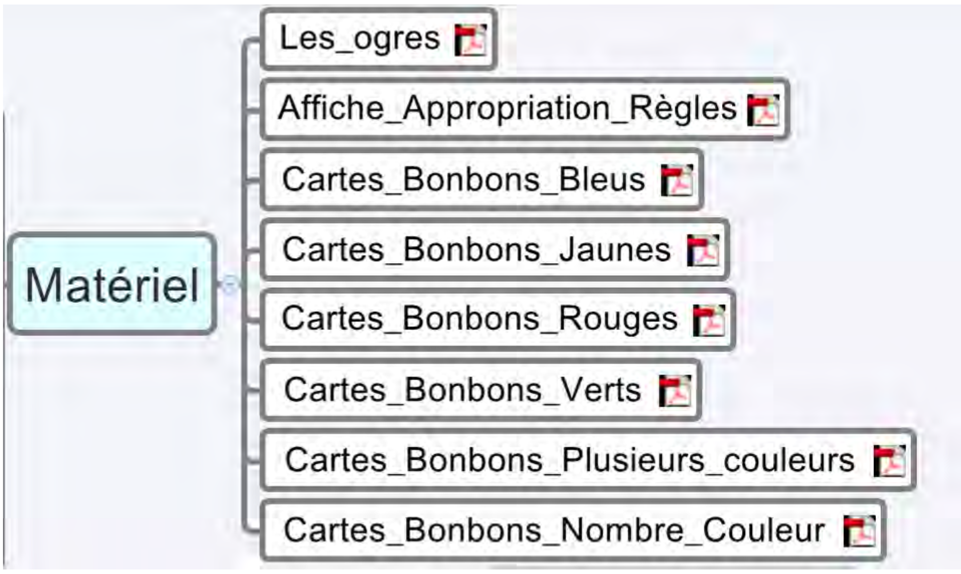


Carte mentale du « jeu des ogres »

Comme la plupart des situations proposées dans cette mallette, le jeu des ogres a été conçu pour vivre dans la classe pendant plusieurs semaines. Il permet d'aborder successivement comparaison, rangement de collections en utilisant le nombre, puis intercalation d'une collection entre deux collections et encadrement d'une collection par deux collections.

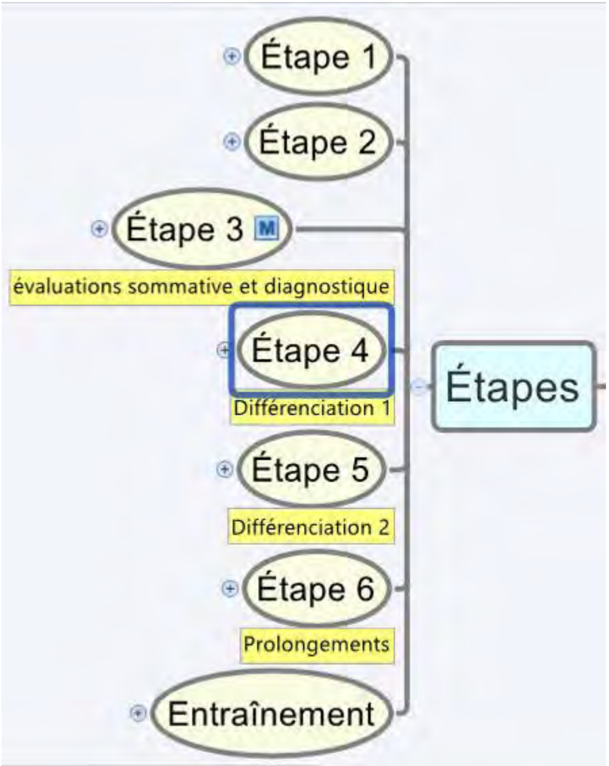
La branche « Présentation » de la carte permet d'accéder à une présentation rapide (voir annexe 1) du jeu et de la séquence proposée à partir de celui-ci : l'élève doit « donner à manger » à un groupe d'ogres en respectant certaines règles ; celles-ci vont évoluer au fil des séances et conduire l'élève à comparer, ranger, intercaler ou encadrer des collections en utilisant les nombres.

Dans la branche « Matériel », l'enseignant trouvera tout le matériel nécessaire pour mettre en œuvre la situation (cartes à imprimer, affichages, …).



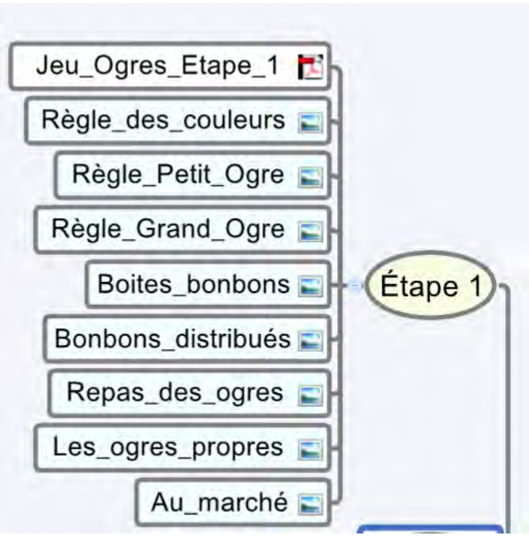
Branche « Matériel » de la carte

La branche « Étapes » présente les différents moments de l'étude proposée à partir de ce jeu. Nous avons délibérément choisi le terme « étape » plutôt que celui de « séance » afin de ne pas figer la temporalité de la séquence proposée ; en effet, le nombre de séances consacrées à telle ou telle étape pourra varier en fonction de la diversité des classes et des élèves. Si on veut que les enseignants prennent en compte cette diversité dans l'organisation des apprentissages, il faut donc éviter d'associer la ressource à une programmation trop rigide.



Branche « étape » de la carte

Chaque étape est présentée de façon détaillée par un document au format pdf et par des illustrations issues de la mise en œuvre dans des classes.



Étape 1 dans la carte *Photo « repas des ogres » issue de la carte*

Les documents « présentation » et « étape » sont conçus à partir d'une liste de questions que l'on va retrouver dans les cartes mentales de l'ensemble des situations proposées dans la mallette :

De quoi s'agit-il ?

De quoi a-t-on besoin (matériel,…) ?

Comment s'y prendre ?

Quelles sont les différentes phases ?

Quelle est la consigne ?
Quand programmer cette étape ?
Quelle organisation choisir ?
Que doit faire l'élève ?
Comment s'effectue la validation ?
Qu'apprend l'élève dans cette situation ? Dans cette étape ?
Que doit savoir l'élève avant de commencer ? (pré-requis)
À quoi le maître doit-il être vigilant ?
Quelles sont les erreurs repérées, les pistes d'aide ?
Que doit retenir l'élève ?

On trouve dans la branche « écho des classes » des témoignages sur la mise en œuvre dans les classes et les difficultés rencontrées par certains élèves (textes, copie de productions d'élèves, extraits de films, …

Enfin la branche « évaluation » revient sur l'évaluation des apprentissages au cours de cette séquence et fournit des exemples de documents utilisables pour celle-ci.

2 Voitures et garages

2.1 La situation et les ressources associées

On peut trouver cette situation dans la branche « nombre outil » de la carte mentale. Les différentes branches de la carte mentale « voitures et garages » permettent d'accéder à un ensemble de ressources associées pour la mise en œuvre de cette situation (document « présentation et déroulement », document « organiser son enseignement avec l'outil informatique », document « matériel à imprimer », logiciel, document « tutoriel du logiciel ».

Cette situation a pour objectif d'apprentissage le nombre mémoire de la quantité. Les élèves ont à disposition un lot de garages et doivent aller chercher en un seul trajet, dans un endroit éloigné (pour ne pas permettre un contrôle perceptif), juste ce qu'il faut de voitures pour que chaque garage ait une voiture et qu'il ne reste pas de voitures sans garage. Le matériel utilisé dans le groupe est fabriqué à partir de boîtes d'allumettes.

Matériel tangible « voitures et garages »

Nous avons conçu une mise en œuvre de cette situation comportant quatre phases :

- Phase 1 d'évaluation diagnostique des connaissances des élèves : l'enseignant identifie ainsi les élèves utilisant déjà le nombre pour résoudre le problème proposé.

- Phase 2 d'appropriation de la tâche pour que les élèves comprennent la tâche proposée : l'enseignant propose 3 à 4 garages alignés, les voitures étant situées dans un bac à proximité. Les élèves peuvent résoudre la tâche par correspondance terme à terme.

- Phase 3 d'apprentissage : le nombre devient nécessaire pour réussir. L'élève se trouve confronté à un obstacle : il a un nombre de garages supérieur ou égal à 6 et n'a droit qu'à un trajet pour aller chercher les voitures qui sont éloignées.

- Phase 4 d'institutionnalisation menée par l'enseignant pour identifier le savoir appris.

Ces choix de mise en œuvre ont servi de guide à la conception de diverses ressources associées à la situation et disponibles dans la carte mentale « voitures et garages ». Ces ressources sont les suivantes :

- un fichier « Présentation et déroulement » : ce document reprend les objectifs mathématiques visés. Il comporte une description de la situation en plusieurs phases.

- un fichier « Organiser son enseignement avec l'outil informatique » : ce document combine des scénarios d'usages selon l'équipement informatique dont on dispose et des retours d'expérimentation.

- un fichier « matériel à imprimer » : ce document regroupe les éléments nécessaires à la fabrication du matériel tangible.

- un logiciel : nous avons conçu à partir de la situation en environnement matériel tangible un logiciel[2]. Il s'agissait de transposer dans un environnement virtuel la situation décrite précédemment. Ainsi, le logiciel propose deux modes : le mode découverte qui correspond à la phase 2 (appropriation) et le mode apprentissage qui correspond à la situation telle que peut la vivre l'élève dans les phases 1 et 3 de la situation. Nous fournissons ci-après plusieurs copies d'écran correspondant aux deux modes disponibles dans ce logiciel.

Phase 2 : mode découverte. Garages et voitures sont sur un même écran.

Phase 3 : mode apprentissage. Seuls les garages sont visibles.

[2] Ce logiciel est disponible en ligne : http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=201

Phase 3 : mode apprentissage. Voitures « éloignées » visibles mais garages non disponibles.

Phase 3 : mode apprentissage. L'élève prend les voitures et les place dans la zone grise

Mode apprentissage. Les voitures se garent pour valider la tâche.

Mode apprentissage. L'élève doit compléter un tableau de score pour enregistrer son résultat et accéder à un autre essai.

Écran du maître

Le cahier des charges de la conception du logiciel a également pris en compte différents facteurs favorisant l'intégration d'une ressource numérique en mathématiques :

- la possibilité pour l'élève de faire un grand nombre d'essais, ce qui est plus fastidieux avec le matériel manipulable ;

- la prise en charge de la validation des réponses des élèves. L'enseignant peut donc laisser les élèves travailler en relative autonomie sur un ordinateur ;

- la personnalisation par le professeur du parcours des élèves. Certains éléments du logiciel sont paramétrables par l'enseignant via l'écran du maître. L'enseignant peut choisir le nombre de garages et la disposition des garages en ligne plutôt qu'en « vrac » pour faciliter l'énumération des garages.

Carte mentale de la situation « Voitures et garages »

Avant de demander aux participants d'explorer les cartes mentales, nous avons souhaité leur présenter deux comptes rendus d'une séquence menée par deux professeurs. Il s'agissait de montrer comment les professeurs s'étaient approprié la situation et les ressources associées. L'idée était de mettre en regard ces usages et appropriations contrastés avec l'exploration effective des mallettes lors de la troisième étape de notre atelier. Il nous a en effet semblé que remettre ces ressources dans le contexte de leurs usages en classe pouvait aider les participants à identifier les manques, leur intérêt et déterminer des pistes concernant leur utilisation en classe et en formation.

Nous présentons dans cette partie les séquences réalisées par deux professeurs (Didier et Mia) à partir de la situation « Voitures et garages » et de ses ressources associées. Les deux professeurs disposaient sur carte mentale et également sous forme de documents papier des ressources associées à la situation.

Didier exerce en double niveau (MS-GS) et travaille à l'année avec 2 groupes de MS et 3 groupes de GS (5 à 7 élèves par groupe). Il n'appartient pas au collectif qui a conçu les ressources et utilise celles-ci pour la première fois. Sa classe est équipée d'un poste informatique. Les élèves manipulent régulièrement l'ordinateur selon des modalités de « délestage ». Par exemple, lorsqu'un élève a terminé son travail, il a accès en autonomie à différents jeux installés par l'enseignant sur l'ordinateur. Didier a mené la séquence sur sept semaines, à raison d'une ou deux séances par semaine avec ses deux groupes de MS. Pour chacun de ses groupes, Didier a mené trois séances avec le matériel tangible:

- une séance de familiarisation au cours de laquelle les élèves manipulent librement le matériel tangible.

-deux séances regroupant les phases d'appropriation et d'apprentissage. La consigne donnée aux élèves lors de ces deux dernières séances ne présentait aucune contrainte en ce qui concerne le nombre de voyages autorisés. Certains élèves effectuaient ainsi un seul voyage, d'autres plusieurs. Dès lors, se servir du nombre pour résoudre la tâche n'était pas nécessaire. Didier ne s'est approprié qu'une des variables de la situation, l'éloignement des collections. Il n'a pas pris en compte l'une des variables contraignant l'élève à identifier le nombre comme moyen de résoudre la tâche : n'autoriser aux élèves qu'un seul voyage. Cette interprétation de la situation pose sans doute problème pour la suite de la séquence. Le milieu aménagé par le professeur n'est pas suffisamment contraignant pour que les élèves aient besoin du nombre pour réussir la tâche, le professeur ne peut donc pas identifier les élèves maîtrisant ou non cette compétence. Pour ce professeur, tous les élèves sont en situation de réussite. Dans les séances suivantes, le travail sur le logiciel arrive donc davantage en « bonus » pour découvrir un nouveau jeu, renforcer des compétences TIC que pour construire une nouvelle connaissance mathématique. Ainsi, les enjeux liés à chaque phase déclinée dans le logiciel ne sont pas forcément bien cernés, ce qui peut expliquer les types d'utilisations observées avec le logiciel. Une première séance avec le logiciel est consacrée au travail des élèves exclusivement sur le mode découverte, qui correspond à la phase appropriation de la situation en environnement matériel tangible. Lors de la deuxième séance sur le logiciel, les élèves travaillent par binôme sur l'ordinateur de la classe dans une relative autonomie ce qui correspond aux pratiques habituelles de Didier avec l'outil informatique. Nous avons pu relever que les binômes d'élèves travaillaient soit sur le mode découverte soit sur le mode apprentissage. Les configurations suivantes sont observées : soit les élèves découvrent tous seuls l'obstacle, soit Didier leur explique qu'ils vont faire un nouveau jeu où ils ne verront plus les garages en même temps que les voitures. Dans le cas d'une utilisation en autonomie, nous avons pu noter que fréquemment, les élèves travaillant sur le mode apprentissage échouaient à réussir la tâche et revenaient d'eux-mêmes au mode découverte en cliquant sur l'icône « A ». Ainsi lors de la deuxième séance sur le logiciel, nous retenons que Didier a finalement rapidement préféré laisser le choix aux élèves de travailler sur tel ou tel mode. Nous retenons de ce compte rendu de séquence plusieurs éléments. Les enjeux et les variables de la situation en elle-même, qu'elle soit mise en œuvre via le logiciel ou via le matériel manipulable, sont complexes à cerner. Nous pensons ici à la consigne donnée par Didier lors de la phase avec le matériel tangible et à la première séance menée à partir du logiciel exclusivement sur le mode découverte. Il manque sans doute pour cet enseignant des aides dans la prise en main des ressources et de la situation. Ainsi, Didier nous a expliqué avoir mis du temps à comprendre que le logiciel reprenait en fait les deux phases de la situation en environnement matériel tangible (phase d'appropriation et phase avec éloignement des collections).

En ce qui concerne le logiciel, nous avons noté que les élèves contournaient fréquemment l'obstacle. Ce contournement étant rendu possible par deux éléments : la commande « A », trop facilement accessible aux élèves car située dans le même espace que la commande de validation et le fait que les utilisations du logiciel se déroulaient le plus souvent en autonomie. L'utilisation d'un logiciel quel qu'il soit s'inscrit forcément dans le format d'activité général, le système de ressources et les habitudes de travail développées par l'enseignant lors d'utilisations d'autres logiciels (Ruthven, 2010). Dans le cas présenté ici, Didier a auparavant établi des routines concernant l'outil informatique : les élèves travaillent le plus souvent en autonomie avec des jeux qui ne font pas l'objet d'une introduction spécifique auprès des élèves. Comme nous le montrons dans l'exemple suivant, le cas de Mia, ce type d'usage en autonomie peut être un avantage dans la gestion de l'ensemble des élèves cependant, il apparaît avec le cas de Didier que l'ergonomie du logiciel ne prend pas suffisamment en compte les contournements possibles de l'obstacle par les élèves.

Nous présentons dans ce paragraphe le compte rendu de la séquence réalisée par Mia, une enseignante qui a participé à la conception et à l'évolution de ces ressources. Mia exerce en PS, elle accueille quotidiennement des élèves de MS et de GS dans le cadre d'un décloisonnement mis en place à l'année autour des mathématiques. Elle met en œuvre la situation « voitures et garages » avec les ressources associées pour la deuxième année. La séquence se déroule sur six semaines. Mia dispose de trois ou quatre ordinateurs selon les séances. Comme Didier, Mia a choisi de débuter la séquence avec le matériel tangible. Elle organise ainsi avec les boîtes plusieurs séances consacrées à l'appropriation et à l'évaluation diagnostique des élèves. Mia conduit ensuite plusieurs séances d'apprentissage organisées de la façon suivante. Lors de la première semaine, le logiciel est présenté collectivement aux groupes d'élèves (6 ou 7 élèves par groupe). Les élèves découvrent collectivement avec l'aide de l'enseignante l'environnement du logiciel et le problème qu'ils vont devoir résoudre. Ils commentent l'environnement, explorent celui-ci et formulent des hypothèses sur la tâche à réaliser. Chaque élève réalise à tour de rôle un premier essai en mode découverte devant l'ensemble du groupe. Puis les élèves découvrent collectivement le mode apprentissage et le problème est dévolu aux élèves. Ils sont alors répartis en binômes pour la suite de la séance et travaillent sur le mode apprentissage. Généralement deux binômes travaillent simultanément sur « voitures et garages », le troisième binôme travaillant à côté sur un autre logiciel[3]. Nous notons lors de cette première semaine et les suivantes que l'utilisation du logiciel « voitures et garages » se combine à l'utilisation d'un autre logiciel en parallèle pour renforcer les compétences des élèves en manipulation de souris. A la fin de la deuxième semaine d'apprentissage, à ce stade, les élèves ont vécu deux séances d'apprentissage sur le logiciel et Mia constate que certains élèves restent en échec devant la tâche malgré l'aide qu'elle peut leur fournir. Elle constate également que la collaboration entre les binômes d'élèves sur le logiciel ne fonctionne pas toujours. Elle estime alors qu'un

[3] Le logiciel employé est un logiciel permettant notamment de travailler sur les compétences liées à la manipulation de la souris. Il est utilisé depuis 5 ans par cette enseignante.

changement de support peut être utile et choisit de combiner sur la suite de la séquence l'utilisation du logiciel et celle du matériel tangible. Au cours de ces séances, Mia fait ainsi travailler des élèves sur le logiciel en relative autonomie (en binôme ou en individuel) pendant qu'elle prend en charge plus spécifiquement certains élèves avec le matériel (réalisation de la tâche en individuel puis en binôme). Des phases de mises en commun sont régulièrement menées à partir d'un matériel créé pour l'occasion par Mia lors de l'année précédente et modifié cette année (système d'étiquettes déplaçables au tableau reprenant l'environnement du logiciel).

Système d'étiquettes déplaçables

En fin de séquence, elle fait évoluer le scénario proposé dans la mallette et met ainsi en place pour les élèves qui n'ont pas encore franchi l'obstacle une situation de communication (un élève devant commander oralement à un autre des voitures pour son lot de garages). Enfin, la situation est déclinée sous la forme d'une fiche activité servant de trace du travail réalisé.

Fiche activité année 1

Fiche activité année 2

Nous pouvons retenir de cette mise en œuvre les éléments suivants :

Mia a exploité les possibilités du logiciel (paramétrage possible du niveau de difficulté, trace des résultats des élèves via le tableau des scores) pour mettre en place des séances où l'ensemble des élèves du groupe travaillent simultanément sur la situation. Pour Mia, l'intérêt sur logiciel est différent selon la phase de la situation dans laquelle les élèves se trouvent. Dans une première phase d'apprentissage, l'utilisation du logiciel lui paraît intéressante car elle autorise de multiples essais aux élèves. Nous pouvons penser que le tableau des scores peut faciliter le regard de l'enseignant sur ces multiples essais. Selon Mia, l'outil informatique favorise, pour certains élèves la collaboration. Pour cette enseignante, la collaboration est un élément moteur de l'apprentissage. Dans une deuxième phase, Mia estime que le logiciel lui permet de faire travailler les 6 ou 7 élèves de son groupe simultanément, d'ajuster le niveau de difficulté et de se libérer du temps pour travailler plus spécifiquement avec les élèves plus fragiles.

Les différentes ressources ne sont pas utilisées de façon isolée mais combinées : pour Mia, il s'agit de différencier en variant les supports à disposition des élèves au cours de la séquence (boîtes, logiciel, système d'étiquettes au tableau) et les modalités de travail à partir de ces supports.

III - LES RESSOURCES DE LA MALLETTE SONT REINTERPRETEES PAR MIA. AINSI, IL Y A UNE APPROPRIATION DE LA SITUATION QUI PASSE PAR L'AJOUT D'UNE PHASE SUPPLEMENTAIRE AU SCENARIO INITIAL (AJOUT D'UNE SITUATION DE COMMUNICATION), LA CREATION DE NOUVELLES RESSOURCES (SYSTEME D'ETIQUETTES DEPLAÇABLES ET FICHE ACTIVITE) DONT CERTAINES ENTRETIENNENT DES PARENTES AVEC D'AUTRES RESSOURCES CREES PAR MIA POUR TRAVAILLER AVEC SES ELEVES DE PETITE SECTION (SYSTEME D'ETIQUETTES DEPLAÇABLES).MISE AU TRAVAIL DES PARTICIPANTS : EXPLORATION ET RETOURS

Les participants disposaient d'une heure pour explorer les cartes mentales liées aux situations « Le jeu des ogres » et « Voitures et garages ». Le choix avait été fait lors de l'étape de présentation rapide des ressources de ne pas rentrer précisément dans la manipulation de ces cartes mentales et de laisser les participants les explorer seuls (*il s'agissait de les placer dans une situation proche de celle des professeurs lorsqu'ils découvrent le contenu de la mallette)*. Cette exploration a été guidée par les questions suivantes :

1. Les ressources présentées : intérêts ? Manques ? Améliorations ?

2. On peut anticiper différents usages en classe – et différents modes de diffusion. Quel impact sur la formation ?

Par rapport à ces questions, plusieurs aspects ont été développés lors de la phase de retours des participants : la prise en main des ressources, l'utilisation des ressources par les enseignants, les implications en termes de diffusion des ressources et de formation.

1 Comment améliorer la prise en main de ces ressources par les enseignants ?

Concernant le logiciel « voitures et garages », les participants ont soulevé différents problèmes en termes de navigation dans celui-ci. Ainsi, les commandes élèves professeurs sont dans la même zone ce qui peut, comme on l'a vu dans la présentation de la séquence de Didier, entraîner les élèves à contourner assez facilement l'obstacle. L'accès à l'écran du maître et la navigation dans cet espace manquent de fluidité. Ce qui est dommage car la possibilité de faire varier différents paramètres est pour les participants un élément très intéressant du logiciel. Comment aider l'utilisateur à naviguer de façon plus aisée dans le logiciel et dans les ressources proposées généralement ? Cette nécessité a amené les participants à formuler des propositions concernant les documents qui accompagnent les situations « Voitures et garages » et « Le jeu des ogres ».

2 Quels documents fournir aux utilisateurs pour faciliter l'appropriation des situations ? Comment rendre ces documents accessibles ?

À propos de la situation des ogres, les participants ont souligné sa richesse, mais la longueur des documents décrivant cette situation qui compte 12 étapes peut présenter un obstacle. Comment garantir que l'enseignant qui s'y engage ne la morcelle pas, et passe peut-être à côté des objectifs ? Il manque peut être dans les documents associés à cette situation une vision d'ensemble de type tableau synoptique reprenant les objectifs et l'avancée de l'étude sur chaque étape ; la carte mentale de la situation devrait être enrichie pour jouer ce rôle. Dans le cas d'un logiciel, le tutoriel peut aider l'utilisateur dans la prise en main de celui ci, cependant, les participants se sont accordés pour dire qu'un tel support, séparé du logiciel lui même risque de ne pas être consulté. Il conviendrait alors en termes d'amélioration des ressources proposées aux professeurs de repenser une mise à disposition du tutoriel au sein même du logiciel.

Pour les deux situations, l'intérêt de leur inscription dans une carte mentale « le nombre en maternelle » est que le professeur peut les situer dans un travail d'ensemble sur le nombre en maternelle.

3 L'habillage et l'attrait des logiciels mais aussi plus largement des situations disponibles pour les enseignants.

Les participants ont constaté que parfois, l'aspect plus ou moins attractif de l'habillage des ressources rentre en jeu dans la décision du professeur d'utiliser telle ou telle ressource. Les participants ont considéré qu'il pouvait exister une concurrence entre de nombreux jeux informatiques très attrayants du point de vue graphique mais très pauvres didactiquement, avec de nombreux éléments susceptibles de parasiter la recherche de l'élève. Le côté épuré d'une ressource de type logiciel peut donc certes constituer un obstacle dans une certaine mesure mais il peut aussi être pensé didactiquement : les situations présentent une certaine robustesse, le choix est fait par les concepteurs de ne pas parasiter les recherches des élèves avec des informations qui ne seraient pas justifiées didactiquement. Pour la conception de ressources, il importe donc de réfléchir à la valeur ajoutée apportée ou non par l'habillage choisi. Par exemple, dans le cas des manuels scolaire, passer du noir et blanc à la couleur est sans doute un plus du côté de l'attractivité de la ressource. Mais il convient avant tout pour les concepteurs et utilisateurs de se demander ce que l'on gagne en terme didactique. Les participants ont ainsi fait le parallèle avec le cas de situations mises en place en maternelle, et souligné le temps important chez certains professeurs passé à penser et réaliser des habillages pour leurs situations alors que celles ci ne présentent pas forcément un grand intérêt didactique.

Dans le cas du logiciel présenté ici, les choix de conception assument donc un certain dépouillement, c'est également le choix fait pour une autre ressource de la mallette, « les jetons voyageurs ». Le problème de l'habillage des ressources, de ce qui peut décider un enseignant à utiliser telle ou telle ressource permet de faire le lien avec la diffusion des ressources et la formation des professeurs.

4 Les vidéos

Dans les cartes mentales des différentes situations, nous avons choisi de mettre à disposition des extraits vidéo courts ; ceux-ci sont pensés comme des illustrations qui donnent une idée de comment les situations « vivent » concrètement en classe (souvent des temps très courts comme par exemple une vidéo qui montre le PE en train d'installer le matériel). En effet les montages réalisés pour présenter l'ensemble d'une séquence sont souvent perçus en formation comme un "montage idéal de la situation parfaite".

Mais cet usage de la vidéo n'est pas systématique pour toutes les situations de la carte mentale : pour « voitures et garages » par exemple, on a des illustrations d'une « vie » en classe de ces ressources par la rubrique écho de la classe, sous forme de texte.

Pour les participants à l'atelier, les vidéos sont utiles pour montrer comment une situation peut se vivre concrètement ; elles peuvent aussi aider à convaincre les professeurs d'utiliser les ressources. Montrer comment les élèves travaillent par une vidéo plutôt que par un texte très précis peut être plus proche du mode de fonctionnement habituel des PE qui ont souvent besoin de prendre quelque chose, de le tester en classe, et de le conserver ou de le modifier en fonction des retours des élèves. L'utilisation de vidéos serait ainsi plus proche de leur mode spontané de développement professionnel et d'appropriation des ressources.

5 Comment former les professeurs à exercer cette vigilance didactique sur les ressources variées qui leurs sont proposées ? Quel mode de diffusion des ressources ?

Un point important a été mis en avant au cours des échanges lors de l'atelier : contrairement à ce qu'imagine parfois l'institution, il ne suffit pas de mettre de « bonnes » ressources à disposition des enseignants (par exemple sur le site Eduscol) pour faire évoluer significativement les pratiques professionnelles. D'une part l'existence de ces ressources n'est pas une condition suffisante pour que les enseignants aillent les regarder pour se former sur leur temps libre ou pour préparer leur classe, d'autre part cette mise à disposition n'assure pas la bonne compréhension pour tous des objectifs mathématiques.

Par exemple, le jeu des ogres est reconnu par les participants comme une situation avec un très fort potentiel : de nombreuses étapes au cours desquelles la situation évolue en jouant sur la présentation des bonbons pour nourrir les ogres (collections de jetons représentant les bonbons, collections de bonbons dessinés désorganisées ou organisées dans un cadre 5x2 à la manière des cartes à points) ; des outils proposés pour la différenciation ; des jeux pour aller plus loin avec le même matériel ; … Mais ne faut-il pas craindre que certains, trouvant l'ensemble trop volumineux, s'en emparent par morceaux au risque de passer à côté des objectifs essentiels.

IV - PERSPECTIVES

Proposer des écrits qui accompagnent les situations, qui précisent les intentions didactiques est donc d'une importance cruciale pour favoriser l'appropriation des ressources. Mais quelle que soit la précision, l'exhaustivité des écrits proposés, cela ne sera pas toujours suffisant. Il faut aussi envisager diverses formes d'accompagnement des enseignants dans la prise en main des ressources : formation présentielle, mais aussi accompagnement à distance avec des regroupements d'équipes afin d'éviter que les collègues accompagnés ne se retrouvent isolés pour découvrir et s'approprier de nouvelles ressources. C'est dans cette direction que nous travaillons depuis trois ans dans l'académie d'Aix-Marseille avec des parcours de formation continue par l'accompagnement d'équipes conçus sur une année : des sessions de présentation de ressources, des mises en œuvre avec visites en classe par le formateur-accompagnateur, échanges à distance sur les situations, compléments de ressources proposés à distance (voir http://www.cahiers-pedagogiques.com/Les-mathematiques-en-formation-continue supplément en ligne au n° 517 des Cahiers Pédagogiques de décembre 2014).

Au delà de l'accompagnement, il convient aussi de penser l'enrôlement des collègues : les ressources ne doivent pas arriver comme réponse à une question que l'on ne s'est jamais posée. Il faut que la ressource réponde à une préoccupation. La démarche est sans doute plus évidente quand on intervient en formation avec des professionnels qui ont déjà une classe (formation continue). Mais utilisée en formation initiale avec des PE stagiaires, la carte mentale générale a été perçue comme une vision d'ensemble de l'apprentissage du nombre à l'école maternelle : on ne propose plus de rentrer dans une collection de situations juxtaposées, isolées les unes des autres mais plutôt dans une vision d'ensemble de l'apprentissage du nombre à l'école maternelle.

On parle souvent de donner du sens à l'apprentissage du nombre pour des élèves ; cette entrée permet de donner d'abord du sens à cet apprentissage pour les enseignants. L'appropriation des situations sera plus facile si on a compris à quoi elles peuvent servir. L'organisation de formations de formateurs autour de ces ressources devrait permettre d'avancer dans cette direction. C'est pourquoi, dans le prolongement de la production de cette mallette de ressource, nous envisageons maintenant la réalisation de parcours de formation, dont certains à distance par le biais de la plate-forme Magistère.

V - BIBLIOGRAPHIE

BESNIER, S., BUENO-RAVEL, L. (2014) Usage des technologies en mathématiques à l'école maternelle : le travail documentaire des enseignants, *Review of Science, Mathematics and ICT Education,* **8**(1), 63-80.

BESNIER, S., BUENO-RAVEL, L., GUEUDET, G. POISARD, C. (A paraître) Conception et diffusion de ressources pour la classe issues de la recherche. L'exemple des apprentissages numériques à l'école, *Actes de la XVIIe école d'été de didactique des mathématiques, Nantes, 19-26 Août 2013.*

BUENO-RAVEL, L., EYSSERIC, P., RIOU-AZOU, G., SOURY-LAVERGNE, S. (2015) Mallette de ressources mathématiques pour l'école, cycle 1 –cycle 2 – Communication C25, *Actes du 41ème colloque COPIRELEM, Mont de Marsan 18-20 Juin 2014.*

BUENO-RAVEL, L. GUEUDET, G. (2009) Online resources in mathematics: teachers' geneses and didactical techniques. *International Journal of Computer and Mathematic Learning,* **14/1**, 1-20.

BUENO-RAVEL, L., GUEUDET, G. (2011) Comprendre l'intégration de ressources technologiques en mathématiques par des professeurs des écoles. *Recherches en didactique des mathématiques*. **31**(2), 151-189.

EYSSERIC, P. (2014) Mettre au centre la résolution de problèmes. *Cahiers pédagogiques,* **517**, 48-50.

GUEUDET, G., BUENO-RAVEL, L. POISARD, C. (2014) Teaching mathematics with technology at kindergarten: resources and orchestrations. In CLARK-WILSON, A., ROBUTTI, O., SINCLAIR, N. (Eds.) *The mathematics teacher in the digital era,* (pp. 213-240). New York: Springer.

KALÉNINE, S. PINET, L. & GENTAZ, E. (2011). The visuo-haptic and haptic exploration of geometrical shapes increases their recognition in preschoolers. *International Journal of Behavioral Development,* 35, 18-26.

LAKOFF, G., NUÑEZ, R.E., POISARD, C., Where Mathematics Comes From : How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being. New York : Basic Books.

RADFORD, L., EDWARDS & ARZARELLO (2009). Introduction: beyond words. *Educational Studies in Mathematics* (2009) 70: 91-95.

RUTHVEN, K. (2010) Constituer les outils et les supports numériques en ressources pour la classe, in GUEUDET, G. TROUCHE, L. (Eds) *Ressources vives, la documentation des professeurs en mathématiques*. (pp. 183-199). PUR, Rennes et INRP.

ANALYSER UNE RESSOURCE DE FORMATION : EXEMPLE DE LA « SITUATION DES ANNUAIRES »

Pierre DANOS
ESPE Toulouse Midi-Pyrénées
Pierre.danos@univ-tlse2.fr

Pascale MASSELOT
UCP – Institut de l'éducation
Laboratoire de Didactique André Revuz
pascale.masselot@u-cergy.fr

Arnaud SIMARD
ESPE Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques de Besançon
arnaud.simard@univ-fcomte.fr

Claire WINDER
ESPE Nice
claire.winder@free.fr

Résumé
Dans un premier temps, l'atelier a permis aux participants de s'approprier une situation de formation éprouvée (Houdement C., Peltier M-L, 2003), dans le cadre d'une stratégie basée sur l'homologie (Kuzniak, 1995). Ensuite, un questionnement a visé à faire émerger les potentialités de la situation (Imbert J-L., Masselot P., Ouvrier-Buffet C., Simard A., 2011). Enfin il s'est agi de définir différents indicateurs en vue de construire un modèle d'analyse de situations de formation. Ce travail devrait permettre d'enrichir la réflexion sur l'appropriation et la conception de ressources mises à la disposition des formateurs.

I - INTRODUCTION

Les réflexions menées, notamment par la COPIRELEM depuis plus de trente ans, dans le domaine de la formation en mathématiques des enseignants du premier degré, alliées à la nécessité de leur diffusion, ont conduit à la production d'un grand nombre de documents à destination des enseignants du premier degré ainsi qu'à l'intention de leurs formateurs[1]. Cette profusion de documents nous semble nécessiter la création de nouveaux outils qui permettront, aux utilisateurs de ces ressources, de mieux appréhender et de s'approprier de manière plus fidèle aux intentions des concepteurs, les enjeux de formation sous-jacents.

Par ailleurs, la plus grande partie de ces documents ont été produits dans des contextes institutionnels, des conditions et des formats de formations différents de ceux que nous connaissons aujourd'hui. En

[1] On peut citer plus particulièrement :

- *Documents pour la Formation des Professeurs des Écoles en Didactique des Mathématiques* (de 1991 à 1997) ;
- *Cahiers pour le Formateur* (1999 à 2005), rédigés suite à des stages de formation des formateurs organisés par la COPIRELEM avec le soutien des IUFM ;
- *Concertum* (2003) présentant une sélection d'articles déjà publiés dans différentes brochures issues de manifestations organisées par la COPIRELEM et qui rend compte de l'évolution des questions soulevées par l'enseignement des mathématiques à l'école ;
- *Actes des Colloques* (rédigés tous les ans à partir de 1974) ;
- *Annales des sujets de mathématiques des concours de recrutement* (avec corrigés et compléments didactiques) à partir de 1992 ;
- *Calcul mental à l'école primaire* (2012) ainsi qu'une *clé « Géométrie »* (2014), dont la diffusion est assurée par l'ARPEME.

IUFM, la formation s'effectuait sur deux ans avec un nombre d'heures relativement conséquent. La stabilité des groupes d'étudiants permettait de garantir la cohérence de l'ensemble et une possible adaptation du formateur aux spécificités de son public. « La mastérisation a assujetti la formation professionnelle au moule des maquettes de master, imposées par chaque université. (…) [Elle] semble avoir transformé une logique de formation à un métier unique (si on occulte la diversité des terrains sur lesquels il s'exerce et qui engage d'autres spécificités : maternelle ou élémentaire, milieux reconnus difficiles….) qui prévalait dans les instituts en une logique de certification. » (Houdement ; 2014 ; p. 23).

Ainsi, en ESPE, la formation universitaire avec des cours magistraux, des TD et des TP, l'alternance avec une affectation dans une ou deux classes en deuxième année, des groupes à géométrie variable selon le type d'intervention, voire des groupes « dématérialisés » lors de formations à distance… amènent des formateurs à renoncer à certaines stratégies de formation qu'ils pouvaient privilégier auparavant. Ces derniers se retrouvent alors dans l'obligation d' « apprêter» les anciennes situations de formation au risque d'en perdre la pertinence et la richesse, de faire des choix en faisant le « pari » d'un certain transfert…

Cet atelier est le premier d'une série de trois ateliers connectés présentant des situations de formation et proposés par la COPIRELEM lors de ce colloque. Il vise à rendre compte de l'état d'une réflexion sur l'élaboration d'un « modèle » permettant d'éclairer le travail du formateur lors de la conception d'un module de formation, à travers un exemple permettant d'illustrer notre démarche. Les comptes-rendus des deux autres ateliers (A25 et A36), auxquels les participants de cet atelier étaient conviés, complètent ce travail.

Le scénario de l'atelier visait à amener les participants à envisager successivement différents niveaux de lecture des activités proposées. Dans un premier temps, il s'agissait de faire vivre une activité qui a déjà plusieurs fois été mise à l'épreuve, aussi bien en formation que dans le cadre de la formation de formateurs, pour permettre aux participants de se l'approprier. Cette activité n'est pas l'objet principal de l'atelier donc le nombre de phases de cette situation de formation a été réduit.

Dans un deuxième temps, en s'appuyant sur ce premier travail, les participants ont été amenés à identifier « à chaud » les potentialités de cette activité particulière proposée dans le cadre d'une formation de professeurs d'école.

La réflexion s'est ensuite prolongée par l'analyse de situations de formation de ce type, dans le but de se donner des indicateurs pour éclairer les choix qu'il est possible de faire en tant que formateur parmi des ressources existantes ou lors de la conception de nouvelles ressources.

Nous considérons que cette activité ne constitue qu'un prétexte, une amorce, un « déclencheur », pour aider les enseignants (ou les futurs enseignants) à s'approprier des savoirs de différentes natures. Pour le formateur, il nous semble nécessaire d'éclairer d'une part, ce qu'il pourra « institutionnaliser » à différents niveaux à la suite de la mise en œuvre de ce scénario, et d'autre part, la manière de penser son intégration dans un processus plus large de formation. Pour cela nous avons cherché à ne pas en rester à l'analyse de l'activité elle-même en proposant un modèle pour analyser toute « situation de formation ».

Nous utilisons ici le mot « situation » au sens de Brousseau (2010) :

« Une situation est caractérisée dans une institution par un ensemble de relations et de rôles réciproques d'un ou de plusieurs sujets (élève, professeur, etc.) avec un milieu, visant la transformation de ce milieu selon un projet. Le milieu est constitué des objets (physiques, culturels, sociaux, humains) avec lesquels le sujet interagit dans une situation. Le sujet détermine une certaine évolution parmi des états possibles et autorisés de ce milieu, vers un état terminal qu'il juge conforme à son projet. (…) . La situation permet de « comprendre » les décisions du professeur et des élèves, erreurs ou appropriées. ».

Ainsi une « situation de formation » est pour nous une situation impliquant des étudiants ou stagiaires et des formateurs au sein d'une institution de formation (ESPE par exemple). Elle consiste en un ensemble d'activités proposées par le formateur et construites autour d'une activité « amorce ». Un « module de formation » peut intégrer plusieurs situations de formation.

II - PRESENTATION GENERALE DE L'ATELIER

1 Organisation de l'atelier

L'atelier prend appui sur une situation de formation emblématique que nous nommons « situation des annuaires », qui a été présentée à plusieurs reprises dans des stages de formation de formateurs de professeurs des écoles, en didactique des mathématiques organisés par la COPIRELEM (Séminaire de formation des nouveaux formateurs Pau 1992, Maxéville 2001, Istres 2006), et qui a fait l'objet de plusieurs publications (Houdement & Peltier, 2002, 2003 ; Houdement, 2006). Un tour de table permet de constater que 12 des 15 participants ne connaissent pas cette situation. Nous proposons aux trois participants connaissant la situation (un seul l'ayant déjà mise en œuvre) de devenir observateurs de l'activité des autres participants d'une part, de la structuration de l'atelier d'autre part.

L'atelier comporte quatre phases. Dans un premier temps, les participants sont répartis par groupes de quatre ou cinq personnes, l'animateur leur propose une suite de consignes directement reprises de la « situation des annuaires ». Ensuite chaque groupe est amené à prendre du recul sur cette activité en l'analysant d'un point de vue formateur, à partir d'un questionnement. Les participants, répartis par groupe, cherchent alors des prolongements à cette situation de formation. La dernière phase consiste en la présentation d'un modèle, encore en cours de construction, d'analyse des potentialités d'une situation de formation. Le but est de discuter ce modèle d'analyse, sa pertinence et de le faire évoluer.

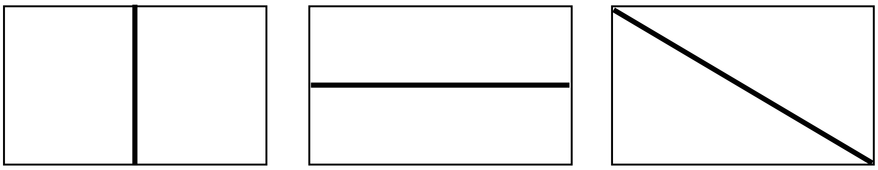
2 Première phase : mise en situation, l'activité des annuaires

Le déroulement de cette première phase prend appui sur les écrits déjà existants de la « situation des annuaires » initialement à destination des professeurs des écoles en formation initiale ou continue. Le déroulement qui figure en annexe 1 est extrait de (Houdement & Peltier, 2002). Les adaptations spécifiques à l'atelier sont précisées dans ce qui suit.

Activité 1

Les participants, placés en îlots de quatre personnes, doivent partager des feuilles rectangulaires en deux parties exactement superposables sans perte et sans recollement. Ils sont invités à trouver le maximum de partages différents.

La consigne est explicitée à la fois oralement et en présentant les trois solutions immédiatement envisageables par des adultes (adaptation au public) :



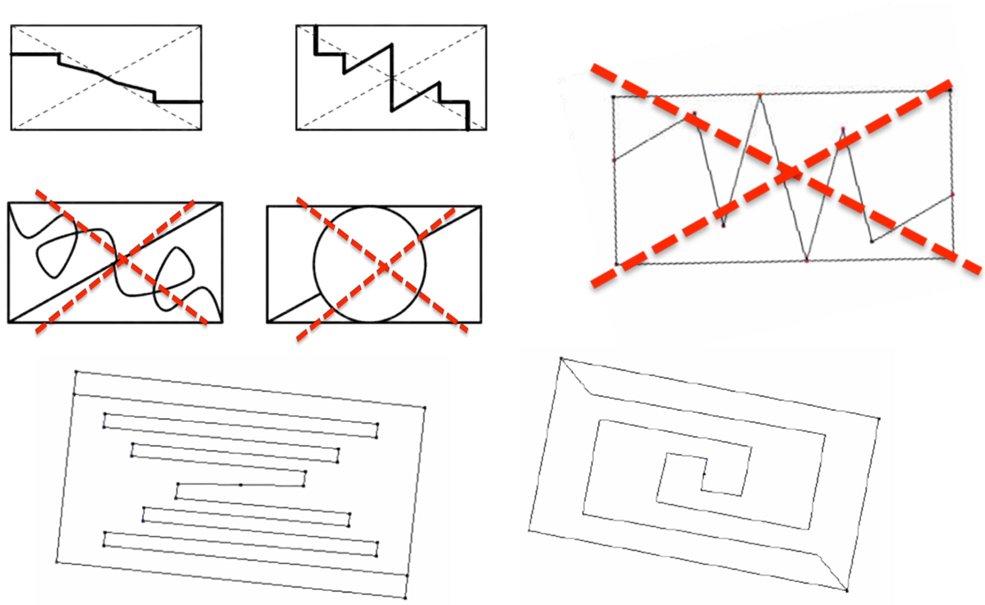
Le travail est individuel, mais la présence du groupe permet les échanges. Les productions sont affichées au fur et à mesure sur une grande feuille.

Activité 2

Lorsque tous les groupes ont produit quelques partages, les participants sont invités à formuler par écrit une condition (ou plusieurs) sur la ligne de partage pour qu'elle « marche ». Une mise en commun suit ce travail de groupe et met immédiatement en évidence que la ligne de partage est symétrique par rapport au centre de la feuille. Les autres conditions sur la ligne de partage sont énoncées à la suite de la présentation des différentes propositions ci-dessous :

- la ligne de partage passe par le centre ;
- la ligne de partage part d'un bord pour rejoindre le bord opposé ;

- la ligne de partage ne se recoupe pas.



À l'issue de la mise en commun, les participants à l'atelier peuvent constater que les productions des différents groupes sont semblables à celles d'étudiants de Master MEEF Première Année confrontés à la même activité. Ces productions sont présentées en annexe 2.

Lien avec une mise en œuvre en formation (initiale ou continue) de professeurs des écoles

La durée de l'atelier étant limitée, nous avons choisi de seulement évoquer l'exploitation mathématique de cette activité à destination des professeurs des écoles. Elle prend tout d'abord la forme de constats à réaliser à l'issue des deux activités. Puis la suite de l'activité mise en œuvre en Master MEEF Première Année à Draguignan (ESPE de Nice) en 2013/2014 est partiellement présentée (son déroulement effectif complet, réalisé à partir de l'analyse d'une vidéo, fait l'objet de l'annexe 2 ; la partie présentée correspond aux temps 1 à 17). Des productions d'étudiants permettent de l'illustrer.

3 - Deuxième phase : analyse du déroulement de l'activité

Il s'agit maintenant de prendre du recul face à l'activité vécue. Le but de cette phase est d'analyser, d'un point de vue mathématique, ergonomique et didactique les différentes phases de la situation. Pour cela, un tableau est projeté et les participants sont invités à proposer en quelques mots des éléments pour compléter chaque case du tableau :

Timing	Chronologie de l'activité (identification des phases)	Description rapide	Rôle de l'enseignant	Rôle du participant	Analyse didactique	Savoirs mathématiques en jeu

Les participants-observateurs ont un rôle particulièrement important dans cette phase. Ils peuvent clarifier la chronologie et formuler des remarques pertinentes, car plus distanciées, sur l'activité des groupes. Les discussions permettent de commencer à remplir ce tableau sur les premières phases de la situation. Le tableau suivant recense quelques réponses formulées pour les trois premières phases de l'activité :

Timing	Chronologie de l'activité (identification des phases)	Description rapide	Rôle de l'enseignant	Rôle du participant	Analyse didactique	Savoirs mathématiques en jeu
3 min	Présentation et explicitation de la consigne 1.	Phase collective. Méthode de partage (sans recollement ni chevauchement).	Explique la consigne. Illustre la consigne. Organise le travail.	Ecoute. Demande de clarifier.	Dévolution, appropriation	Surfaces superposables
7 min	Recherche. Mise en activité. Action.	Travail individuel puis en groupe. Essai-erreur.	Observe et affiche les productions des groupes.	Cherche des partages « qui marchent ». Teste. Valide.	Action. Validation par rétroaction du milieu.	Symétrie centrale. Symétrie axiale. Pavage.
3 min	Mise en commun.	Exemple et contre-exemple.	Distribue la parole. Questionne pour faire émerger les conditions. Reformule. Gère le débat.	Formule, explicite, essaie de comprendre les enjeux. Cherche à comprendre les productions des autres.	Formulation, validation.	Conditions nécessaires et suffisantes.

Le tableau ainsi rempli apporte une vue d'ensemble du déroulement de l'activité. L'idée première des organisateurs de l'atelier était de confronter ce tableau avec la fiche de préparation élaborée lors d'une analyse *a priori* (voir annexe 2). Par manque de temps, cette confrontation n'a pas eu lieu. Notons déjà que cette phase proposée aux participants dans le cadre de l'atelier, peut aussi être proposée dans le cadre de la situation de formation, en formation initiale. Procéder à une discussion sur la préparation de séquence d'enseignement du formateur au moyen d'un tel tableau peut permettre de sensibiliser à des notions de didactique, voire de les aborder dans le cadre de cette activité particulière (dévolution, validation, institutionnalisation, …).

4 - Troisième phase : analyse du potentiel de formation

Les participants travaillent de nouveau par groupe et sont invités à répondre à la consigne suivante : « Dégagez les potentiels de cette situation pour une formation d'enseignants (initiale ou continue) ». Il s'agit de dire pourquoi, en tant que formateur d'enseignants, le participant choisirait cette situation et de préciser les objectifs visés. Chaque groupe présente ses choix dans le cadre imposé (une feuille A4 maximum).

Les différents potentiels peuvent être regroupés en trois catégories :

- Potentiels notionnels :

En formation initiale particulièrement mais aussi en formation continue, les notions mathématiques visées par cette situation peuvent être non seulement la définition de la notion d'aire et ses propriétés (additivité, conservation), mais également un usage des transformations (symétries centrale et axiale comme outil pour repérer des points communs aux lignes de partages adaptées) et un travail sur les fractions dans le cadre de la grandeur aire. Des notions plus fines sont en jeu comme la distinction entre grandeur et mesure, les grandeurs repérables, les grandeurs mesurables, le choix de l'unité dans la notion de mesure, les notions de relation d'équivalence et de classes d'équivalence.

- Potentiels pédagogiques et didactiques :

En formation initiale et en formation continue, une situation, telle que celle proposée, peut permettre d'engager une discussion sur les notions d'enjeux et d'objectifs. Elle peut également servir de base à l'introduction de concepts de base en didactique des mathématiques (variables didactiques, rôle des différentes phases, validation, dialectique outil objet, …). Plus finement, on peut s'intéresser :

- aux consignes : présentation d'une consigne, vocabulaire employé, reformulation, choix et rôle des exemples ;
- au choix des contraintes (ici pliage, tracé des lignes de partage, découpage…) ;
- aux moyens de validation en lien avec la possibilité de travail par essai-erreur ;
- à la répartition des tâches dans le temps (précision, impact d'un changement…) ;
- à la gestion des productions ;
- à l'institutionnalisation (contenu ? quand ? comment ? quel vocabulaire ?...).

Le lien avec les programmes est également mis en évidence et les thèmes de « résolution de problèmes », « recherche en groupe », « manipulation » sont mis en avant. Le travail sur la nécessité d'une analyse *a priori* approfondie et sur la création d'une fiche de préparation ressort également.

- Autres potentiels :

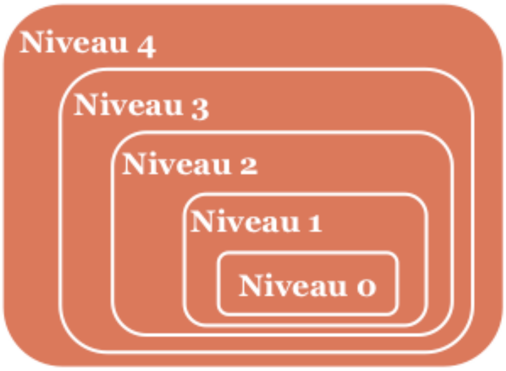
Un groupe propose de prolonger cette situation par une analyse de manuel concernant la notion d'aire. Un autre groupe propose de réfléchir à l'adaptation de cette situation en classe.

3 Quatrième phase : présentation d'un outil d'analyse des potentiels d'une « situation de formation »

Lors de cette phase, les animateurs de l'atelier présentent un outil en cours de développement qui sera également illustré dans les ateliers A25 et A36. Cet outil va être présenté et commenté dans le paragraphe suivant.

III - DIFFERENTS NIVEAUX D'ANALYSE DES POTENTIALITES D'UNE SITUATION DE FORMATION

À cette étape de notre réflexion et pour cette situation de formation spécifique, nous avons retenu pour notre analyse une structure sous forme de niveaux emboîtés : chaque niveau correspond à une prise de recul (mettant en jeu des connaissances mathématiques et didactiques) à partir de l'analyse du niveau précédent, c'est-à-dire à une mise à distance s'accompagnant d'un changement de posture : de l'élève-étudiant à l'étudiant-professeur… ainsi que des aller-retour entre les aspects outil et objet des différentes connaissances (notionnelles, didactiques et pédagogiques) mises en évidence par le formateur… Ainsi selon les niveaux, les institutionnalisations portent sur des concepts de plus en plus généraux, ou de moins en moins contextualisés.



Le niveau 0

Ce niveau correspond à ce que nous avons désigné par « activité » : les différentes consignes et leur enchaînement, les mises en commun successives, les synthèses locales… À ce niveau, le formé a une posture élève ; il « joue le jeu » et se focalise sur ce que les différentes consignes données lui demandent de travailler. Il n'est pas sollicité pour s'interroger sur ce que le formateur « cherche à lui faire apprendre » ; même si, comme pour tout élève, cette question peut être en arrière-plan de ses actions. À cette étape, il ne lui sera rien demandé explicitement à ce sujet.

Lors de la phase 1, la mise en activité des participants, ainsi que l'évocation partielle de la poursuite des activités en Master MEEF Première Année (temps 1 à 17 de l'annexe 2) correspondent à ce niveau.

Le niveau 1

La nécessité pour le formateur de dévoiler ce qu'il a voulu « enseigner » en faisant vivre cette activité aux étudiants (car cela ne peut être laissé à la charge de « l'étudiant ») conduit à un nouveau degré d'analyse qui englobe l'activité, envisagée à ce niveau comme un « outil pour faire apprendre », utilisé sciemment par l'enseignant qui a proposé cette « activité ».

Le niveau 1 correspond donc à une prise de recul réflexive par :

- la mise en évidence des aspects mathématiques et didactiques qu'il est possible d'aborder avec cette activité,
- l'explicitation des obstacles rencontrés (attendus, voire provoqués),
- la mise en perspective des apprentissages susceptibles d'être provoqués (côté élèves).

La posture de l'étudiant qui apprend à devenir enseignant nécessite ainsi un changement de regard.

Dans la « situation des annuaires », le niveau 1 correspond d'une part à l'analyse mathématique réalisée, lorsque les enjeux mathématiques sont explicités (temps 18 de l'annexe 2) qui fait émerger la notion de grandeur et de mesure, et d'autre part à l'analyse didactique à un niveau local, présentée dans la colonne « analyse didactique » de cette même annexe 2.

Le niveau 2

La nécessité pour le formateur de dévoiler « comment il s'y est pris » (comment il a en quelque sorte « manipulé » les étudiants) et de faire apparaître des « régularités » dans la pratique conduit à se situer à un nouveau niveau d'analyse incluant les niveaux précédents. Il s'agit tout d'abord de mettre en évidence des gestes professionnels (pédagogiques et didactiques) par la reprise à travers l'analyse des choix effectués par le formateur (voire en explicitant des alternatives possibles) des aspects de la pratique :

- analyse *a priori* de l'activité, avec :
    - choix des valeurs des variables (par exemple contraintes, consignes successives, ordre des consignes) ;
    - explicitation de ce qui est mis en évidence et de ce qui est « laissé de côté » ;
    - prise en compte des obstacles (difficultés prévisibles) ;
    - aides éventuelles (lesquelles, pour qui, à quel moment) ;
    - organisation (ici intérêt d'un travail en groupes, composition des groupes, rôles dans les groupes) ;
    - modes de validation retenus (et aussi qui a la charge de la validation) ;
- analyse *a posteriori* de l'activité :
    - les décalages éventuels ;
    - les prises de décisions à chaud ;
    - l'enchaînement des consignes et les effets produits ;
    - la gestion des mises en commun (choix des productions, ordre des interventions) ;
    - ce que l'enseignant dit, fait dire, laisse dire… ce qu'il retient, oublie, met en valeur… ;

- comment l'enseignant organise la prise de parole, en fonction de quels critères…

D'autres activités peuvent être également proposées pour renforcer ou conforter l'acquisition des connaissances mises en jeu et éclairer leur usage (aspect outil) dans le cadre d'autres activités. Ainsi il s'agit également de proposer des prolongements possibles en formation :

- organiser un jeu de rôle pour cette même situation ;
- élaborer une séance/séquence intégrant l'activité vécue ;
- analyser des ressources ;
- analyser des séances filmées ;
- analyser des productions d'élèves … (cela permet également au formateur d'évaluer…) ;
- comparer des scénarii.

Cette analyse correspond à une mise en perspective, et à un glissement vers une posture enseignant qui n'est pas encore effective, mais qui s'acquiert ici via le travail de l'enseignant hors la classe. Cette posture sera effective si une possible mise en actes dans une classe se présente.

À l'issue de la « situation des annuaires », l'analyse de productions d'élèves donnée par exemple en annexe 3 permet de mettre en évidence, pour des étudiants de master MEEF Première Année, les difficultés des élèves à dissocier aire et périmètre.

En formation initiale et continue des professeurs des écoles, on peut, en s'appuyant sur les analyses précédentes, présenter la proposition du manuel Euromaths CM1 (Hatier) de mise en œuvre de l'activité des annuaires en classe de CM1 ainsi que des séances suivantes.

Le niveau 3

Ce niveau correspond à une généralisation des niveaux précédents par une reprise de certains concepts mis en évidence dans d'autres contextes plus ou moins proches :

- proposition de progression ;
- enjeux des programmes ;
- variables didactiques spécifiques au champ concerné ;
- procédures spécifiques…

La « situation des annuaires » est un point de départ permettant de mettre en évidence les grandes lignes de la progression concernant l'enseignement des grandeurs et des mesures à l'école élémentaire en s'appuyant par exemple sur le document d'accompagnement des programmes 2002 « Grandeurs et mesures à l'école élémentaire » pour analyser les régularités et les spécificités dans l'enseignement et l'apprentissage d'autres grandeurs introduites à l'école.

Le niveau 4

Il s'agit au niveau de la formation, d'un accompagnement dans le cadre d'une initiation à la recherche :

- envisager des lectures complémentaires (textes issus de la recherche ou de vulgarisation) qui pourront être « mieux compris » car la curiosité, l'envie d'en savoir plus aura été éveillée ;
- s'engager dans un mémoire sur le thème abordé (ou l'un des thèmes mathématiques et/ou didactiques abordés).

IV - CONCLUSION

La situation des annuaires est exemplaire pour la formation initiale et continue des enseignants. La richesse de cette situation vient de sa conception précise et surtout des nombreuses exploitations qu'il est possible d'en faire en s'adaptant au public, au moment et à la durée de la formation. Que ce soit au niveau mathématique, didactique ou pédagogique le formateur peut utiliser la situation des annuaires comme situation de référence pour illustrer différents concepts. En opposition, la richesse de cette situation peut aussi être un inconvénient pour le formateur. En effet, trop de possibilités peut créer un certain flou dans l'utilisation de la ressource et si seul le niveau de l'activité est exploré, l'étudiant peut la vivre de manière un peu « anecdotique » sans percevoir les intentions du formateur. L'idée de l'atelier est de proposer un modèle d'analyse des activités pour permettre à l'utilisateur de faire des choix éclairés. Ce modèle est exemplifié sur la situation des annuaires. Les participants vivent succinctement cette situation avant de l'analyser avec de plus en plus de recul.

Le modèle d'analyse élaboré a tout d'abord permis de mettre en évidence les différents degrés d'exploitation possibles, du point de vue des savoirs mathématiques, didactiques et pédagogiques, de la situation des annuaires. Les stagiaires ont pu alors constater la richesse de cette situation de formation. Ce modèle d'analyse semble être adapté aux situations s'inscrivant dans le cadre d'une stratégie de formation par homologie-transposition, comme le confirme le compte-rendu de l'atelier A36.

Par ailleurs, l'utilisation du modèle d'analyse a conduit les participants de l'atelier à des échanges plus pointus sur l'identification des potentialités de la situation au regard des besoins supposés des futurs professeurs d'école. Ceci semble confirmer que les indicateurs retenus dans le modèle proposé pourraient être reconnus par le formateur comme pertinents pour choisir sciemment la ressource étudiée. Le travail d'analyse de situations de formation initié lors des ateliers A15, A25 et A36 est encore à poursuivre (ou à mettre à l'épreuve…) au regard d'autres situations de formation.

V - BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU G. (2010) G*lossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998)*. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf.

HOUDEMENT C. (2006) Mathématique, didactique et découpages, 43-51, in *Actes du colloque Mathématiques et résolution de problèmes : un point de vue didactique*, IREM de Montpellier.

HOUDEMENT C. (2014) *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques*, Note de synthèse, LDAR Paris Diderot.

HOUDEMENT C. & PELTIER M-L. (2002) Aires de formation, 64-108, in *Les Cahiers du Formateur*, **5**, ARPEME.

HOUDEMENT C. & PELTIER M-L. (2003) Aires de surfaces planes, *Concertum Les carnets de route de la COPIRELEM*, ARPEME, 199-221.

IMBERT J-L., MASSELOT P., OUVRIER-BUFFET C., SIMARD A. (2011) Quelles modalités de contrôle des connaissances dans la formation en mathématiques des professeurs d'école ?, in *Actes du XXXVIIème Colloque COPIRELEM, La Grande Motte 2010*, IREM de Montpellier.

KUZNIAK A. (1995) Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, in *Actes du XXIème Colloque COPIRELEM, Chantilly 1994*.

M.E.N (2005) Grandeurs et mesure à l'école élémentaire. *Documents d'accompagnements des programmes : Mathématiques*, Scréren-CRDP, 78-88.

PELTIER M-L., BRIAND J., NGONO B., VERGNES D. (2009) *Euromaths CM1 (Livre de l'élève et livre du maître)*, Hatier.

VI - ANNEXE 1

Aires de surfaces planes, Houdement Catherine., Peltier Marie-Lise (2003).

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.

Cet article propose un dispositif destiné à la formation initiale et continue prévu pour deux séances de trois heures. Il s'appuie sur un problème très simple : chercher un maximum de façons de partager une feuille de papier rectangulaire en deux parties superposables.

Les auteurs décrivent le déroulement en plusieurs phases distinctes dont les objectifs sont clairement identifiés au départ. En fin d'article, le dispositif est analysé à la fois sur le plan mathématique et sur le plan didactique.

1 Objectifs

1.1 Objectifs mathématiques

- Indépendamment, dans un premier temps, du dénombrement sur quadrillage, du calcul numérique et de l'utilisation de formules :
    - Construire le concept d'aire,
    - Construire la notion de mesure,
    - Faire fonctionner l'additivité des mesures d'aire.
- Distinguer aire, périmètre et forme d'une surface.
- Utiliser la symétrie centrale comme outil de résolution de problème et en déduire quelques propriétés.
- Introduire les fractions, produire des égalités entre fractions, les comparer, les ranger.

1.2 Objectifs didactiques

La situation présentée illustre les notions d'outil et d'objet puisqu'elle permet de mettre en jeu deux concepts mathématiques : l'aire en tant qu'objet, la symétrie centrale en tant qu'outil implicite de résolution du problème posé. Cette situation permet en outre d'introduire les fractions comme des codages nécessités par l'insuffisance des entiers pour des classes de surfaces de même aire.

2 Activité

2.1 Première phase

Objectif

Construire des surfaces de même aire, mais de formes différentes et définir la notion d'aire (hors contexte numérique).

Matériel

- Feuilles d'annuaires téléphoniques (format A4) en grand nombre.
- Ciseaux, instruments usuels de géométrie.

Organisation

Travail individuel

Consigne 1

« Vous devez partager chaque feuille en deux parties exactement superposables sans perte et sans recollage (c'est-à-dire qu'avec les deux parties il sera possible de reconstituer la feuille initiale) : vous devez chercher un maximum de partages différents répondant à cette consigne de partage que nous désignerons par (P) ».

Procédures observées

- Les étudiants commencent par plier en deux suivant les médianes, puis les diagonales du rectangle. En général à ce moment, certains pensent qu'ils ont trouvé tous les partages possibles, il est alors nécessaire de redonner la consigne en précisant qu'ils doivent essayer d'en trouver d'autres.

- La procédure suivante consiste à plier la feuille de telle sorte que deux sommets opposés se superposent. Ce partage permet généralement à l'idée qu'il existe un nombre infini de solutions de se répandre.

Les autres procédures que l'on rencontre sont les suivantes :

- Des pliages en 8 ou 16 suivis de dépliages et découpages en suivant certaines lignes de pliages plus ou moins bien choisies (d'où des réussites ou des échecs !).
- Des recherches en construisant des segments de même longueur en partant de deux sommets diamétralement opposés.
- Des procédures consistant à construire une ligne de partage symétrique par rapport à une médiane, puis en raison de l'échec, évolution de cette procédure vers la construction d'une ligne de partage symétrique par rapport au centre de la feuille.

Remarque

On peut constater de très nombreux essais qui n'aboutissent pas, mais ces essais permettent à leurs auteurs de faire de nouvelles hypothèses sur les propriétés de la ligne de partage. De nombreux étudiants trouvent assez vite comment construire une ligne de partage polygonale qui permet de résoudre le problème en faisant des tracés symétriques de part et d'autre du centre de la feuille, puis certains cherchent des lignes de partage curvilignes à main levée ou en traçant des cercles.

Synthèse

Les étudiants viennent afficher un certain nombre de partages réalisés. Ils vérifient à chaque fois la superposition exacte des deux parties et la reconstitution possible de la feuille initiale avec les deux parties, ils expliquent à leurs camarades le procédé utilisé pour obtenir la ligne de partage.

2.2 Apport du professeur et première institutionnalisation

Sur l'aire

- Les deux parties issues d'un même partage (P) sont superposables, elles ont donc même forme et même périmètre.
- Deux parties issues de deux partages (P) différents ne sont pas directement superposables, pourtant elles vérifient toutes les deux la propriété : « avec deux parties analogues à chacune d'elles on peut reconstituer la feuille entière ». Elles sont donc aussi « étendues » l'une que l'autre, elles contiennent toujours la même quantité de papier, elles correspondent toujours à une « demi feuille », on dit qu'elles ont même aire.
- Constats
    - Deux surfaces de même aire n'ont pas nécessairement la même forme.
    - Deux surfaces de même aire n'ont pas nécessairement le même périmètre.
    - Deux surfaces superposables ont même aire, même forme, même périmètre.
    - À partir d'une partie quelconque issue d'un partage (P), on peut, par découpage et recollement, sans chevauchement et sans perte de papier, construire n'importe quelle autre partie issue d'un autre partage (P).

On conviendra d'appeler momentanément famille G, la famille des parties obtenues.

Sur la symétrie

La propriété vérifiée par la ligne de partage pour répondre à la consigne est la suivante : cette ligne est symétrique par rapport au centre du rectangle.

2.3 Deuxième phase

Objectifs mathématiques

- Réinvestir la notion d'aire et celle de symétrie centrale.
- Constituer un stock de formes d'aires différentes mais facilement comparables.
- Introduire un codage fractionnaire et le faire fonctionner.

Enjeu

Permettre à tous de créer des surfaces de formes originales et tarabiscotées.

Organisation

Travail individuel ou par groupes de deux.

Matériel

Le même que précédemment.

Consigne 2

« Vous devez recommencer l'activité de la consigne précédente mais avec des rectangles ayant même aire que les formes précédentes, c'est-à-dire avec des demi-feuilles rectangulaires ».

Remarques

Les étudiants peuvent ainsi réinvestir ce qu'ils ont fait, ou ce qu'ils ont vu faire par d'autres, lors de la phase 1. On note, à ce stade, qu'ils prennent plaisir à laisser libre cours à leur imagination et qu'ils prennent conscience que l'on peut augmenter à loisir le périmètre de la surface sans en augmenter l'aire.

On constitue ainsi une seconde classe de surfaces de même aire que l'on désigne par H. On matérialise les deux classes déjà obtenues par des grandes feuilles de papier (type paper board) sur lesquelles on colle plusieurs surfaces de la classe.

Lorsqu'il s'agit d'introduire un codage des classes ainsi construites, rendant compte des surfaces qu'elles contiennent, l'ensemble du groupe s'accorde généralement pour désigner la classe G par ½, car elle contient des demi-feuilles et la classe H par ¼, car elle contient des quarts de feuilles. Ce codage est retenu et noté sur les grandes feuilles qui matérialisent les classes.

Consigne 3

« Vous allez construire, par groupe de deux (ou de quatre), des surfaces ayant même aire que la feuille d'annuaire, mais de formes différentes ».

Procédures observées

Les étudiants placent côte à côte de diverses façons :

- Deux surfaces de la famille ½, issues d'un partage (P), c'est-à-dire exactement superposables.
- Ou deux surfaces de la famille ½, issues de deux partages (P) différents, donc de même aire mais de formes différentes.
- Ou une surface de la famille ½ et deux surfaces de la famille ¼.
- Ou quatre surfaces de la famille ¼.

Synthèse

Les différentes propositions sont présentées et discutées. En cas de désaccord, on reconstitue par découpage et recollement la feuille d'annuaire à partir de la feuille proposée.

Les surfaces retenues constituent une nouvelle classe de surfaces de même aire que l'on décide de coder par 1, puisqu'il s'agit de surfaces ayant même aire qu'une feuille d'annuaire.

La description des différentes procédures donne lieu à leur traduction en terme de codage fractionnaire :

- Les deux premières procédures citées se traduisent par ½ + ½ = 1 ou par 2 x ½ = 1 (lu comme « deux fois un demi »)
- La troisième par ½ + ¼ + ¼ = 1 ; ou par ½ + 2 x ¼ = 1.
- La dernière par ¼ + ¼ + ¼ + ¼ = 1 ; ou par 4 x ¼ = 1.

Consigne 4

« Vous allez travailler par groupes de quatre, construire de nouvelles classes de surfaces de même aire ».

Procédures observées

- Partage en deux parties superposables de rectangles correspondant au quart de la feuille d'annuaire.
- Assemblage de surfaces de différentes classes obtenues.

Mise en commun

Les différentes classes proposées sont comparées, des surfaces de chaque classe sont collées sur de grandes feuilles, chaque classe est codée en fonction des surfaces qu'elle contient et l'on donne des écritures variées rendant compte des différentes procédures utilisées pour construire les surfaces de la classe.

Lors de cette mise en commun, on obtient généralement de très nombreuses classes et donc de très nombreuses écritures, par exemple :

1/8 + 1/4 = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3 x 1/8 = 3/8

1/2 + 1/4 = 3/4 ; 1 + 1/4 = 5/4 ; 1 + 1/2 = 3/2 = 6/4 ;

1 + 1/2 + 1/4 = 7/4 ; etc.

Consigne 5

« Vous allez mettre en ordre les différentes classes obtenues : pour cela, vous pouvez construire pour chaque classe, un rectangle de la famille dont une des dimensions est fixée, par exemple, la largeur de la feuille d'annuaire ».

Mise en commun

Le rangement des classes en fonction de la relation « … est moins étendue que… » est matérialisé par la mise en ordre des grandes feuilles représentant les classes, elle est justifiée par la superposition des rectangles des différentes classes qui ont une dimension commune, elle donne lieu à une série d'écritures du type : 1/8 < 1/4 < 3/8 < 1/2 < 3/4 < 1 < 3/2 < 7/4 < 2

Un réinvestissement individuel de ces différentes phases peut être proposé à partir de surfaces planes distribuées (cf. annexe). Lors de la mise en commun de ce travail individuel, on constate qu'il est possible de choisir n'importe quelle classe comme unité et que les codages qui s'en déduisent sont proportionnels aux codages de départ.

3 Analyse de l'activité

Analyse mathématique

Cette série d'activités est un exemple d'une progression sur une grandeur et la mesure liée à cette grandeur.

Le professeur reprend avec les étudiants l'explicitation du rôle des différentes étapes :

1. Pour définir la grandeur aire :

- Définition d'une relation d'équivalence sur un ensemble de surfaces, ici la relation « avoir même aire ».
- Construction de l'ensemble quotient, ici les classes des surfaces ayant même aire.

- Caractérisation des classes, ici par un codage fractionnaire et par le choix d'un représentant « rectangle » de chaque classe.
- Construction d'une relation d'ordre sur l'ensemble quotient.

2. Pour construire un codage numérique qui est une mesure : construction d'une application de l'ensemble quotient dans l'ensemble des nombres réels :

- Positive
- Additive
- Monotone
- Parfaitement déterminée par le choix d'une unité, ici la feuille A 4.
- Vérifiant les propriétés suivantes : l'inégalité triangulaire, les surfaces vides ont une aire nulle, il existe des surfaces non vides d'aire nulle.

Remarque

Cette situation permet de distinguer naturellement objet mathématique, grandeur mesurable, mesure.

D'autre part, elle apparaît comme une introduction pertinente de la nécessité des nombres non entiers, et plus précisément des fractions. En effet, elle permet de donner du sens à des écritures fractionnaires :

- Définition de $1/n$ par $1/n + 1/n + \ldots + 1/n = 1$ et par $n \times 1/n = 1/n \times n = 1$;
- Production d'égalités variées sur ces nombres ;
- Comparaison et rangement de fractions et d'écritures fractionnaires.

Enfin elle permet de faire des rappels sur la symétrie centrale qui est apparue comme un outil de résolution du problème de partage.

Analyse didactique

Cette situation permet de pointer :

- L'aspect auto-validant de la première consigne de la première phase : c'est l'étudiant lui-même, sans intervention de quiconque, qui décide si le partage qu'il vient de réaliser convient ou s'il est à rejeter ;
- Le rôle de l'hypothèse erronée dans cette phase : en effet c'est très souvent à partir d'une ligne de partage qui ne convient pas que l'étudiant réussit à trouver les propriétés que doit vérifier cette ligne pour répondre à la consigne ;
- L'aspect outil de la notion de symétrie centrale qui est utilisée par tous les étudiants après un certain temps de recherche, bien qu'elle n'ait pas fait l'objet d'un apprentissage antérieur : la notion de symétrie centrale n'est donc pas abordée par sa définition, elle est perçue par son aspect fonctionnel ; il est possible ici de faire le choix d'institutionnaliser (ou non) cette notion pour dégager son aspect objet de savoir et d'étudier les propriétés utilisées pour construire la ligne de partage ;
- L'aspect objet du concept d'aire, qui est ici mis en évidence non pas par une définition, mais par une relation d'équivalence ;
- L'aspect outil de la notion de fraction, qui apparaît ici comme un codage rendant compte de manipulations finalisées avant de devenir objet de savoir institutionnalisé et d'être réinvesti dans d'autres contextes.

4 Prolongements

4.1 Sur l'aire

Au niveau mathématique

Transfert des notions étudiées sur d'autres matériaux.

Activités de réinvestissement.

Au niveau didactique

Étude de manuels à partir d'un questionnement du type :

- Comment est introduite dans les manuels scolaires la notion d'aire ?
    - Aspect dénombrement ;
    - Aspect encadrement ;
    - Rôle des quadrillages ;
    - Introduction de l'unité ;
    - Formules.
- Quels sont la part et le type des manipulations proposées aux élèves ?
- Comment le manuel prend-il en compte les distinctions :
    - Aire / dénombrement ;
    - Aire / nombre ;
    - Aire / surface ;
    - Aire / périmètre ?

4.2 Sur les rationnels

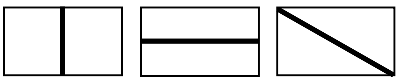
Cette situation est l'une des situations phares pour travailler l'extension de la notion de nombre entier. Elle fait partie à ce titre de la progression sur l'introduction des rationnels.

VII - ANNEXE 2

Déroulement effectif de la « situation des annuaires » en Master MEEF Première Année – (C. Winder, Draguignan, ESPE de Nice, novembre 2013)

Le déroulement présenté ci-après a été établi suite à l'analyse de la vidéo prise au cours de la séance avec les étudiants.

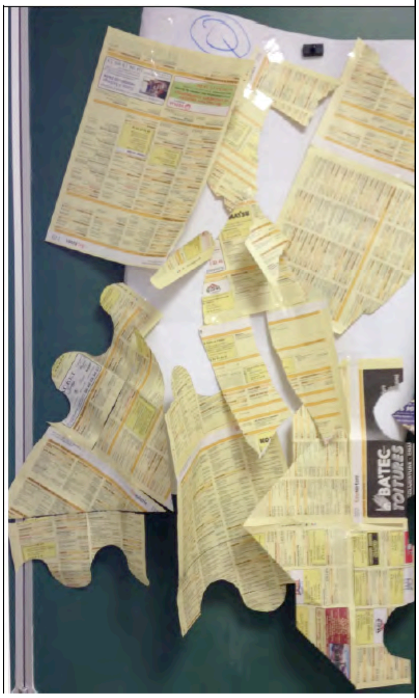
Ce document permet de montrer comment le dispositif initial a été repris ou aménagé. Les adaptations, qui font partie intégrante du travail du formateur mais aussi de tout enseignant qui s'appuie sur des ressources, peuvent ainsi être mises en évidence.

Durée et identification des phases	***Description***	***Rôle de l'enseignant***	***Analyse didactique***	***Savoirs mathématiques***
3 min **1** Présentation et explicitation de la consigne 1.	Phase collective. Consigne1 : « *Vous devez partager une feuille en deux parties exactement superposables sans perte et sans recollement, (c'est-à-dire qu'avec les deux parties, il sera possible de reconstituer la feuille initiale). Vous devez chercher un maximum de partages différents répondant à cette consigne de partage, que nous désignerons par (P).* » La méthode de partage est illustrée à l'aide de trois exemples :  *Exemple 1 Exemple 2 Exemple 3* - exemples 1 et 2 : selon les médianes du rectangle ; - exemple 3 : selon l'une des deux diagonales. Dans ce dernier cas, le retournement de l'une des deux parties, nécessaire pour vérifier la superposabilité des deux surfaces, est exhibé. La fin de la consigne est donnée : « *Il faut trouver le maximum de partages différents.* »	• Expliciter la méthode de partage en mettant en évidence les critères de réussite : - partage en deux parties ; - parties superposables ; - reconstitution de la feuille d'annuaire à l'aide des deux parties. • Donner la consigne. • Organiser la classe : tables de 4 mais travail individuel	Peut résumer la phase de dévolution du problème (formation d'adultes)	Notion de « superposabilité » et méthode pour s'en assurer.

10 min **2** Recherche	Travail individuel en groupe. Recherche des partages « qui marchent » par essais/erreurs.  *Productions obtenues*	Afficher les productions des étudiants au fur et à mesure sur une affiche.	• Phase d’action : émission d'hypothèses sur la ligne de partage, invalidation, contrôle des productions. • Validation par rétroaction du milieu : l’élève décide, sans intervention de quiconque, si le partage qu'il vient de réaliser convient ou pas. • Rôle de l'hypothèse erronée : c'est à partir d'une ligne de partage qui ne convient pas que l’élève réussit à trouver les propriétés que doit vérifier cette ligne pour répondre à la consigne. • Statut des savoirs : Prise en compte en acte de la symétrie de la ligne de partage → aspect outil de la symétrie centrale.	Symétrie centrale de la ligne de découpage.

9 min **3** Mise en commun	Phase collective. Les productions sont validées, puis les conditions permettant de conduire à la réussite de la tâche (donc portant sur les méthodes de partage « qui marchent ») sont explicitées au cours d'une discussion. La ligne de partage doit : - être symétrique par rapport au centre du rectangle ; - passer par le centre du rectangle ; - partir d'un côté du rectangle pour rejoindre le côté opposé.	• Faire valider les productions • Gérer la discussion. • Mettre en évidence certains savoirs (la symétrie est rendue explicite, centre du rectangle). • Régler certaines erreurs (symétrie centrale et non axiale).	• Phase de formulation : caractérisation de la ligne de partage. • Statut des savoirs : Aspect outil de la symétrie centrale.	Symétrie axiale et symétrie centrale. Axes de symétrie du rectangle.
1 min **4** Consigne 2	Phase collective. Consigne 2 : « *Vous devez recommencer l'activité de la consigne précédente, mais avec des demi-feuilles rectangulaires (A5)* »	Donner la consigne.	Une « nouvelle » consigne permet la relance de l'activité.	
3 min **5** Recherche	Travail individuel en groupe. Réalisation de partages qui « marchent » pour constituer une deuxième famille appelée (R).  *Productions obtenues*	Afficher les productions des étudiants au fur et à mesure sur une deuxième affiche.	Deuxième phase d'action qui permet à tous de recommencer l'activité et donc de réinvestir les connaissances ou propriétés découvertes dans la phase 2. Cette phase évite la mise en échec car conduit à la réussite de la tâche pour tous.	Symétrie centrale de la ligne de découpage.
6 min	Phase collective.	• Gérer la discussion.	• Phase de	Relation « avoir

6 Synthèse	Emission de constats sur les feuilles obtenues. Les points communs et les différences entre les productions obtenues sont explicités : - Les 2 parties issues d'un partage (P) sont superposables, elles ont donc même forme et même périmètre ; - deux parties issues de 2 partages (P) différents ne sont pas directement superposables. Elles vérifient toutes deux la propriété : « Avec 2 parties analogues à chacune d'elles, on peut reconstituer la feuille entière ». - deux parties (moitiés) issues de deux partages différents sont aussi étendues l'une que l'autre, elles contiennent la même quantité de papier, elles ont même aire.	• Régler certaines erreurs : certaines surfaces qui ont même aire n'ont pas le même périmètre (à vérifier par report de longueur ou par comparaison directe).	formulation. • Statut de savoirs : aspect objet de la grandeur aire.	même aire ». Dissociation Aire / Périmètre / Forme
1 min 7 Institutionnali-sation	Phase collective. Généralisation : - deux feuilles superposables ont même forme, même aire, même périmètre. - deux formes issues de deux partages différents de la feuille d'annuaire ont même aire. - deux surfaces qui ont même aire n'ont pas forcément même périmètre ou même forme.	• Expliciter des savoirs portant sur aire et périmètre.	Phase d'institutionna-lisation locale.	Relation « avoir même aire ». Dissociation Aire / Périmètre / Forme
25 s 8 Consigne 3	Phase collective. Consigne 3 : « *Construire des surfaces de même aire que la feuille d'annuaire, mais de forme différente* ».	Expliciter la consigne. Souligner qu'il n'y a plus de partage.	• Nouvelle activité.	
4 min	Travail individuel en groupe.	Afficher les	• Phase	Additivité et

9 Recherche	Réalisation de la famille appelée « Q ».  *Productions obtenues*	productions des étudiants au fur et à mesure sur une troisième affiche.	d’action. • Utilisation en acte des propriétés d’additivité des aires et de conservation des aires.	conservation des aires.
5 min **10** Mise en commun	Phase collective. Justification de la validité des productions.	• Mettre en évidence les deux procédures envisageables : - par découpage et recollement sans perte ni superposition d’une feuille d’annuaire ; - ou par assemblage de deux demi-feuilles ou de quatre quarts de feuilles, ou d’une demi-feuille et de deux quarts de feuille. • Faire discuter de la validité de ces deux procédures.	Phase de formulation : mise en évidence des propriétés de l’aire.	

2 min 30 s	Phase collective.	• Expliciter les savoirs	• Phase	

11 Institutionna-lisation	Constats : - À partir d'une feuille d'annuaire, on peut par découpage et recollement, sans chevauchement et sans perte de papier, construire une autre surface de même aire. - Plus généralement, à partir d'une partie quelconque issue d'un partage (P), on peut par découpage et recollement, sans chevauchement et sans perte de papier, construire n'importe quelle autre partie issue d'un autre partage (P). *C'est la propriété de conservation des aires.* - À partir de deux parties quelconques issues d'un partage (P), on peut par recollement, sans chevauchement et sans perte de papier, construire une surface d'aire égale à celle de la feuille d'annuaire. *C'est la propriété d'additivité des aires.*	sous-jacents (propriétés de l'aire) aux deux procédures utilisées : - conservation de l'aire ; - additivité de l'aire. • Illustrer le principe de conservation des aires en choisissant deux surfaces de la famille (P) et en transformant l'une en l'autre par découpage et recollement sans perte ni superposition.	d'institutionnalisation sur les propriétés de l'aire.	
20 s **12** Consigne 4	Phase collective. Consigne 4 : « *Réaliser par groupe une famille de 2 ou 3 surfaces ayant même aire, mais qui ne peuvent pas s'intégrer aux familles précédentes.* »	Expliciter la consigne.		
2 min	Travail individuel en groupe.	Afficher les	• Phase d'action	Propriétés de l'aire

13 Réalisation		productions des étudiants sur des affiches distinctes par groupe.	• Réinvestissement des propriétés de l'aire.	
7 min 14 Réflexion	Phase collective. Questionnement : - Comment savoir si les différentes familles sont bien distinctes ? - Comment ranger ces différentes familles de surfaces ?	• Gérer la discussion. • Faire émerger la nécessité d'exhiber des surfaces-témoins pour comparer des surfaces par superposition.		Notion de classe d'équivalence. Comparaison d'aires.
3 min 15 Réalisation	Travail par groupe. Consigne 4 : « *Par groupes, vous pouvez construire un rectangle ayant même aire que les surfaces que vous venez de construire, et dont une de ses dimensions correspond à la largeur de la feuille d'annuaire* ».	• Faire construire une surface-témoin pour la famille de chaque groupe.		
3 min 16 Mise en commun	Phase collective. Constat : L'aire est une grandeur repérable et mesurable	• Expliciter la relation d'ordre portant sur l'aire à partir de la comparaison de deux surfaces issues de familles différentes. • Réaliser le rangement des familles de surface (des affiches) selon la relation d'ordre liée à l'aire.	• Phase d'institutionnalisation locale sur le fait que grandeur aire est repérable et mesurable.	Relation d'ordre « avoir une plus grande aire que » .
3 min 30 s 17 Réflexion	Phase collective. Donner les mesures des aires de différentes surfaces selon différentes unités de mesure. La présentation se fait sous forme de tableau.	• Expliciter la mesure de certaines aires. • Régler certaines erreurs : lorsqu'on change d'unité, la mesure change mais pas l'aire.	• Statut des savoirs : aspect outil des fractions.	Mesure d'une grandeur, l'unité étant choisie.
7 min	Phase collective.	• Des grandeurs	•	Grandeurs et

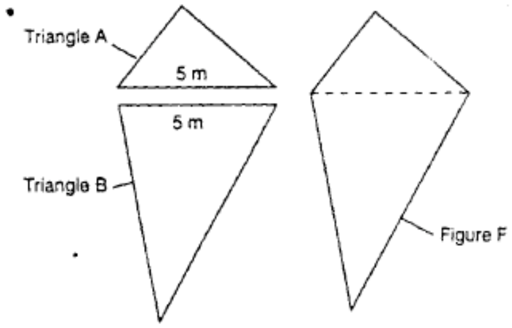
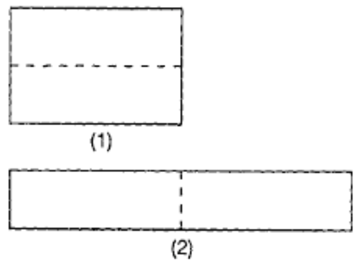
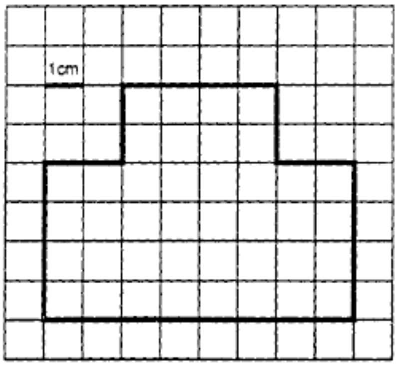
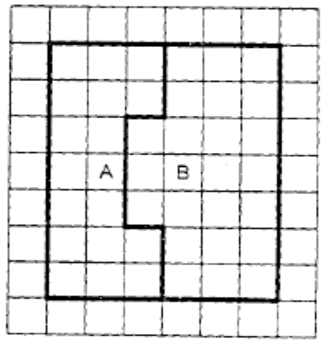
18 Institution-nalisation	Notion de grandeur : • Comparaison de deux objets physiques : définir selon quel aspect ainsi qu'un procédé de comparaison • Différents procédés doivent conduire à la même classification • On obtient des classes d'objets équivalents. Chaque classe d'équivalence définit une grandeur. • ***Une grandeur est le caractère commun aux objets d'une même classe***. Une grandeur est ***repérable*** lorsqu'il est possible de définir une relation d'ordre, qui permet de comparer et ranger des objets selon cette grandeur. Une grandeur repérable pour laquelle il est possible de définir une addition et donc une multiplication par un réel positif est une ***grandeur mesurable***. Mesure : • Pour mesurer une grandeur, on la compare à une grandeur particulière appelée étalon, choisie comme unité, et on cherche à savoir combien de fois cette grandeur étalon est contenue dans la grandeur. ***Mesurer c'est associer un nombre à une grandeur.*** • La mesure d'une grandeur dépend de l'unité choisie. Le changement d'unités entraîne donc un changement de la mesure mais PAS de la grandeur ! • À partir du moment où l'on a introduit les nombres, on se trouve en présence de trois catégories : - des objets → les surfaces - des grandeurs → les aires (classes d'équivalences) - des mesures → les mesures (nombres) d'aires	physiques à leur mesure : aspects mathématiques • Quelques remarques d'ordre didactique : • Une grandeur se définit à partir d'activités de comparaisons d'objets (permettant de les classer), indépendamment des nombres. Les activités de comparaison (directe ou indirectes) sont donc essentielles. • Remplacer une grandeur par un nombre représente un grand intérêt pour communiquer sur la grandeur, fabriquer un objet de grandeur donnée, comparer des objets selon une grandeur.	institutionnalisation dans le cadre plus général des grandeurs.	mesures.

La durée totale de la séance est de 1 heure 10 minutes.

VIII - ANNEXE 3

Analyse de réponses d'élèves à différentes évaluations

(Document donné en Master MEEF Première Année, C. Winder, Draguignan - ESPE de Nice)

•  Le périmètre du triangle A est 12 m. Le périmètre du triangle B est 17 m. La figure F est formée à l'aide des deux triangles, comme indiqué sur le dessin. Quel est le périmètre de la figure F ? (extrait évaluation 6e - 1991) *Réponse : 29 cm*	• La figure (2) a été obtenue en découpant la figure (1). Ces deux figures ont-elles même aire ?  *Réponse : Non, la figure (2) est la plus grande*
• Quel est le périmètre de la figure ?  (extrait évaluation 6e - 1995 - La figure ci-dessus a été réduite) *Réponse Elève 1 : 26* *Réponse Elève 2 : 22* *Réponse Elève 3 : 40*	• : Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-dessous :  Entoure dans chaque cas la réponse qui convient. Cas 1 a) L'aire de la parcelle A est la plus grande. b) Les deux parcelles ont la même aire. c) L'aire de la parcelle B est la plus grande. Explique ton choix . . . . Cas 2 a) Le périmètre de la parcelle A est le plus grand. b) Les deux parcelles ont le même périmètre. c) Le périmètre de la parcelle B est le plus grand. Explique ton choix . . . . (extrait évaluation 6e - 1990) *Cas 1 : L'élève a entouré la réponse c) avec comme explication : « car il y a plus de carreaux ».* *Cas 2 : l'élève a entouré la réponse c) avec comme explication : « car B a une plus grande aire ».*

RESSOURCES EN HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES : UN EXEMPLE ET DES PISTES

Renaud CHORLAY
Formateur, ESPE de l'Académie de Paris
LDAR (Paris Diderot) et SPHERE (UMR 7219 – Paris Diderot)
Renaud.chorlay@espe-paris.fr

Résumé
Cet atelier est consacré à l'étude de cinq documents historiques ayant trait à la multiplication. Ces documents permettent de faire rencontrer différentes techniques opératoires, de souligner les propriétés mathématiques sous-jacentes à chacun des algorithmes, d'illustrer la dépendance de la technique envers le système de numération et le dispositif matériel (table à baguettes ou à poussière, papier-crayon). L'ensemble ne constitue pas un cours sur l'histoire de la multiplication, mais un scénario d'atelier de formation, avec une proposition de déroulement et de questionnement. La ressource historique y est un support pour la formation en mathématiques et la réflexion sur les mathématiques, pas directement pour l'enseignement de l'histoire.
Sont également présentées un petit nombre de ressources (sur papier et en ligne), de natures diverses : documents historiques, travaux de recherche en histoire mis en forme pour un public non-spécialiste, matériaux historiques pour la formation des enseignants, activités pour les classes s'appuyant sur l'histoire.

Les ressources en histoire des mathématiques pour la formation des enseignants posent des questions d'accessibilité, de nature des sources et d'usage.

C'est principalement ce dernier point qui est travaillé dans cet atelier, où sont étudiés cinq documents historiques ayant trait à la multiplication[1]. Ces derniers permettent de faire rencontrer différentes techniques opératoires, de souligner les propriétés mathématiques sous-jacentes à chacun des algorithmes, d'illustrer la dépendance de la technique envers le système de numération et envers le dispositif matériel (table à baguettes ou à poussière, papier-crayon[2]). L'ensemble ne constitue nullement un cours sur l'histoire de la multiplication (dont on se demande d'ailleurs à quoi il pourrait ressembler), mais un scénario d'atelier de formation, avec une proposition de déroulement et de questionnement. Pour l'instant, ce dispositif a été rodé en formation de formateurs ou en formation continue d'enseignants du primaire.

Nous finirons par quelques points plus généraux relatifs au développement récent des sources en histoire des mathématiques, en particulier des sources en ligne. Cette (relative) abondance nouvelle pose plus que jamais la double question (1) du travail permettant de faire d'une *source* une *ressource* pour la formation ou l'enseignement, (2) de l'usage et de l'appropriation des sources et ressources par les formateurs et enseignants. Sur ces deux points, notre expérience porte essentiellement sur le niveau secondaire, nous n'indiquerons donc pour l'heure que quelques pistes de lecture pour le primaire.

Le scénario est le suivant : chaque petit groupe se voit confier l'un des cinq documents, avec pour charge de le présenter à l'ensemble du groupe après une demi-heure de travail autonome. Dans leurs présentations, les participants peuvent faire état de simples conjectures ou de questions ouvertes ; cela dépendra du document. Certains documents sont accompagnés de questions (Voir II. *À partir du papyrus*

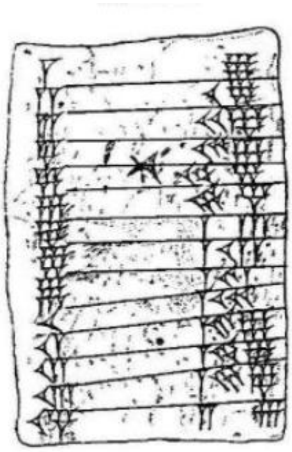
[1] Sur ce même thème, les enseignants et formateurs du primaire connaissent sans doute déjà les articles de Raymond Guinet (Guinet 1978a, 1978b, 1979, 1995) publiés dans la revue Grand N.

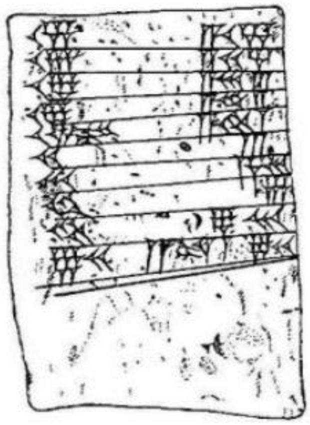
[2] Nous aurions pu inclure des abaques.

de Rhind) ou d'explications historiques (Voir III. *En Chine ancienne, avant le boulier*), alors que d'autres sont bruts et invitent à une démarche d'investigation du type « petit archéologue » (face à un document inconnu, l'examiner progressivement pour formuler des observations, des conjectures, etc.). Dans le moment collectif, des compléments d'information sont apportés par l'animateur, qui explicite aussi les choix de mise en forme des documents. Pour chaque complément, ce dernier indique quelques éléments de bibliographie/sitographie. Ces compléments ont deux fonctions : permettre aux participants de poursuivre le travail de manière autonome s'ils le souhaitent, et montrer que le rôle de l'animateur est un rôle de médiation entre un savoir de type universitaire (de recherche en histoire des sciences) et un public d'enseignants et de formateurs.

I - UNE TABLETTE BABYLONIENNE

Le premier groupe se voit distribuer le document le plus brut :





Une consigne du type : « au cours de fouilles dans le désert en Irak, vous mettez au jour ce qui ressemble à une petite brique, dont voici le recto (à gauche) et le verso (à droite) ; pouvez-vous formuler des conjectures sur son contenu ? » est formulée. Dans l'idéal, ne sera pas mentionné le fait que les documents ont un lien avec la multiplication.

Le bilan fait émerger les points suivants. Les marques graphiques sont organisées spatialement de deux manières : une organisation en lignes, matérialisée par des traits horizontaux ; et une organisation en deux colonnes. Il semble que seuls deux signes graphiques soient utilisés. L'animateur peut donner leurs noms : le clou et le chevron .

Sur le recto (image de gauche), on conjecture rapidement que la colonne de gauche représente la suite des premiers nombres entiers : 1, 2, 3, … ce qui conduit à supposer que le clou représente 1 et le chevron 10. Le système semble être additif, avec des conventions d'usage (remplacement de 10 clous par 1 chevron) et des conventions graphiques (les clous sont regroupés par 3).

Fort de cette première conjecture, on peut chercher à rendre compte des lignes : en face de 1, on lit 9 ; en face de 2, on lit 18 ; en face de 3, on lit 27 ; en face de 4, on lit 36… Il semble que l'on a affaire à une table de 9. Si le système de numération est bien additif avec groupement à 10 (comme le système égyptien du document suivant), on s'attend à trouver un nouveau signe graphique pour 100, et rien de spécial avant. Ce n'est pas le cas : en face de 12 l'écriture de 118 n'utilise pas de nouveau signe ; en face de 7, l'écriture de 63 est . On conjecture que cela représente 60 + 3, soit une soixantaine et trois unités. Le système de numération serait donc mixte : un système additif avec groupement à 10 pour écrire les nombres de 1 à 59 ; un système positionnel avec groupement à 60 au-delà (système sexagésimal).

Cette conjecture se voit confirmée par la suite du recto de la tablette : en face de 10, on lit bien 90 (écrit : une soixantaine, trois dizaines) ; en face de 11, on lit 99 (une soixantaine, trois dizaines, neuf unités), en face de 14, on lit 126 (deux soixantaines, six unités). Cette conjecture n'est malheureusement pas compatible avec le verso ! En particulier, en face de 20, on devrait lire 180, qu'on penserait codé avec trois clous (pour trois soixantaines) et un marqueur de place vide (pour l'absence d'unités) ; peut-être le point qui semble suivre les trois clous est-il ce marqueur de place vide. L'examen de la ligne « 40… 360 » ne le confirme pas : 360 est représenté par 6 clous (pour six soixantaines), sans que la place vide des unités semble marquée par un vide, un point ou un petit rond. On peut se demander s'il s'agit d'une erreur de celui ou celle qui a écrit la tablette.

Au-delà de ce point, des compléments d'information sont nécessaires. Nous ne donnons ici que quelques grandes lignes, en renvoyant aux sources secondaires d'appui.

Le document présenté est une tablette paléo-babylonienne (- 2000 / - 1700), retrouvée sur le site de Nippur et conservée à l'université d'Iéna (cote HS 0217a). Nous nous sommes appuyés sur le dossier consacré aux mathématiques babyloniennes sur le site *Culturemath*[3]. Sous l'impulsion de l'inspection générale de mathématiques, ce site ressource propose des documents issus de la recherche (en mathématiques ou en histoire des mathématiques) et mis à disposition des enseignants, principalement du secondaire. Pour ce qui est de la très riche partie consacrée à l'histoire des mathématiques, les ressources proposées (articles, cartes, vidéos) sont d'une teneur scientifique contrôlée par les critères universitaires usuels : auteurs spécialistes du domaine, passage par un comité de lecture, présence systématique de bibliographie/sitographie. Le dossier sur les mathématiques babyloniennes est particulièrement riche : il a été préparé par Christine Proust, aujourd'hui directrice de recherche (équipe SPHERE, UMR 7219 CNRS – Paris Diderot) après avoir longtemps été enseignante au collège.

La tablette présentée est bien une table de multiplication par 9, et illustre bien un système de numération mixte : système additif jusqu'à 59 (avec groupement à 10), enchâssé dans un système positionnel en base soixante ; comme tout système positionnel, un marqueur est nécessaire pour indiquer les places vides, ici un espace vide (non utilisé dans cette tablette). La spécificité de ce système positionnel est qu'il est à « virgule flottante » : seule la valuation relative des différents groupes est non-ambigüe ; en revanche, la valuation absolue (par exemple du groupe le plus à droite) n'est pas connue. Ainsi  (que les assyriologues transcrivent par 1 ; 11) peut désigner 1 soixantaine et 11 unités ; ou 1 trois-milles-six-cents-aine et 11 soixantaines ; ou 1 unité et 11 soixantièmes. On voit dans ce dernier exemple que ce système permet de représenter les nombres en deçà de l'unité sans avoir recours à des entités de type fraction.

On peut s'interroger sur l'usage d'un système de notations intrinsèquement ambigües. Dans certains cas, c'est le contexte qui permet de lever l'ambiguïté : dans la table de 9, en face de 7, on s'attend à lire 63 et non 3780 (1 x 3600 + 3 x 60) ou 1,05 (1 x 1 + 3 x 1/60). Mais cette interprétation (possible) ne tient pas sérieusement compte de la virgule flottante ; en effet, les sept clous de la colonne de gauche peuvent aussi bien désigner 7 (c'est-à-dire 7 unités) que 420 (7 x 60) ou 7/60, auquel cas les produits par 9 sont bien 3780 et 1,05 (respectivement) ! Tant que l'on reste au niveau des nombres abstraits et des multiplications, le système est parfaitement cohérent. On retrouvera cet aspect dans la multiplication des décimaux : on peut faire abstraction de la « position de la virgule » (i.e. de la valuation absolue, en base 10), on obtient quand même la bonne suite de chiffres du produit. Cette propriété n'est pas partagée par l'addition : si les unités des deux termes sont décalées, on n'obtient en général pas la bonne suite de chiffres si l'on applique l'algorithme usuel.

Ce système à virgule flottante pose toutefois problème s'il s'agit de compter ou de mesurer : il n'est sans doute pas indifférent d'avoir 1 plutôt que 3 600 moutons dans son pré ; d'avoir 1 kg ou 1/3600 kg d'or dans son bas-de-laine. En fait, *plusieurs* systèmes d'écriture des nombres étaient utilisés dans la période paléo-babylonienne, et c'est un système purement additif qui servait à compter et à mesurer[4]. Le système

[3] http://culturemath.ens.fr/histoire%20des%20maths/chrono/Mesopotamie/index_mesop.htm

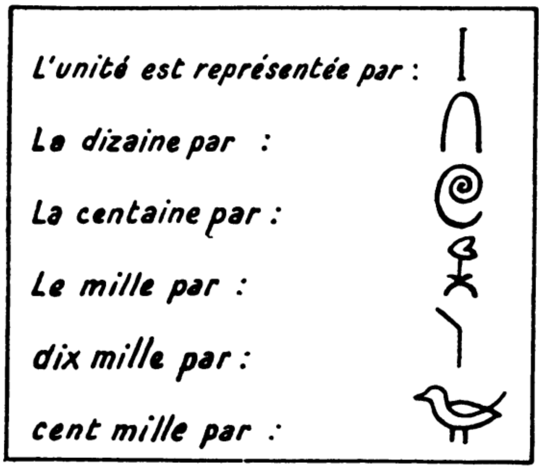
[4] Les systèmes d'unités étant eux-mêmes à pas différents. Ainsi pour les unités de longueurs :

danna ←30~ UŠ ←60~ ninda ←12~ $kuš_3$ ←30~ šu-si

sexagésimal positionnel à virgule flottante était un système savant, adapté aux calculs multiplicatifs (produits, inverses, division par multiplication par les inverses, carrés et racines)[5].

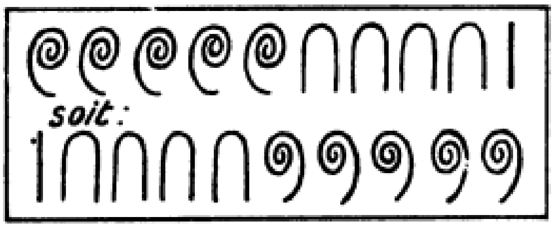
II - À PARTIR DU PAPYRUS DE RHIND

Le second document soumis à la sagacité des participants est de nature bien différente. Loin d'être un document primaire (i.e. un document historique) donné brut, il s'agit d'une source secondaire (un extrait d'un ouvrage d'histoire des mathématiques), accompagné de questions. Nous nous sommes appuyés sur le très classique *Mathématiques et mathématiciens* (Dedron & Itard 1959, 271-272) (texte reproduit en italiques)

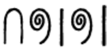


Les unités de chaque ordre sont indiquées par répétition du signe.

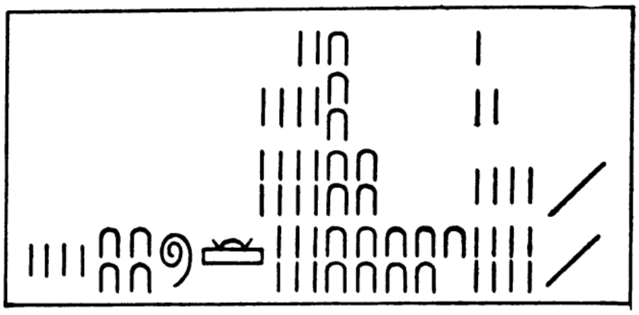
Les nombres peuvent être écrits de gauche à droite ou de droite à gauche. Dans ce cas leurs symboles sont tournés dans l'autre sens. Ainsi 541 pourra s'écrire soit



Question : dans ce système, comment multiplie-t-on par 10 ?

Ce document fournit l'occasion de rencontrer un système additif bien connu, avec groupement à 10. Le groupe est *de jure* facultatif (un groupe de onze bâtons représente 11 de manière non ambigüe) mais *de facto* systématique ; de même qu'est facultatif l'arrangement linéaire selon l'ordre progressif des groupements (ainsi  représenterait sans ambiguïté deux centaines, une dizaine et deux unités). Ici la multiplication par 10 ne passe pas par l'écriture d'un zéro à droite – typique d'une notation positionnelle en base 10, interprétable comme un décalage dans le tableau de numération – mais par la substitution à chaque signe du signe de rang immédiatement supérieur.

La deuxième partie du document est :



C'est ainsi que, dans le papyrus Rhind (²) on trouve pour le carré de douze le calcul ci-contre où il faut lire :

1	12	
2	24	
/4	48	
/8	96	somme 144

Questions :

[5] Pour une reconstitution des mathématiques du cursus scolaire avancé de formation des scribes : http://culturemath.ens.fr/histoire%20des%20maths/htm/calcul%20sexagesimal/calcul%20sexagesimal.htm.

Pour les mathématiques utilisées par les marchands assyriens : http://culturemath.ens.fr/histoire%20des%20maths/htm/Michel06/Michel_marchands.htm#système

- Ici, la multiplication par 12 passe par une série de duplications (multiplication par 2), puis par des additions ; les termes à additionner sont indiqués par les encoches /. En utilisant le même procédé, calculer le produit de 42 par 23. On pourra utiliser notre écriture chiffrée.
- Peut-on, par ce procédé, multiplier par tout nombre entier ?

Ici, le produit de 12 par 12 est donc obtenu comme la somme de 4 x 12 et de 8 x 12. En s'inspirant du procédé, pour calculer le produit de 42 par 23, on calcule des doubles en partant de 42, et l'on reconstitue 23 comme 16 + 4 + 2 + 1.

42	1	/
84	2	/
168	4	/
336	8	
672	16	/
	23	

Cet algorithme repose donc, comme le nôtre, sur la distributivité de la multiplication sur l'addition :

$$42 \times 23 = 42 \times (16 + 4 + 2 + 1) = 42 \times 16 + 42 \times 4 + 42 \times 2 + 42 \times 1$$

Si la validité de l'algorithme est ainsi justifiée, la question de sa généralité demeure : est-il toujours possible de recomposer l'un des facteurs en une somme de nombres choisis parmi 1, 2, 4, 8, 16 … ? La question permet de revenir sur l'écriture positionnelle dans une base autre que 10, en l'occurrence la base 2 : tout nombre entier est décomposable en une somme de puissances de 2, chaque puissance étant utilisée au plus une fois (c'est la spécificité du binaire, où seuls deux chiffres sont nécessaires et codent pour « je prends » / « je ne prends pas »).

Pour une utilisation dans l'enseignement secondaire, on peut mettre en œuvre l'algorithme sous un tableur ou dans un langage de programmation. On peut aussi aller du côté de l'algorithme d'exponentiation rapide : par exemple, pour élever 3 à la puissance 23, élever successivement au carré pour obtenir 3^2, 3^4, 3^8, 3^{16} puis calculer $3 \times 3^2 \times 3^4 \times 3^{16}$; le tout ne prend que 7 multiplications, au lieu de 22 si l'on calcule 3 x 3 x 3… (avec 23 facteurs).

Signalons que le document original, le papyrus de Rhind, est disponible en ligne sur le site du *British Museum*[6]. Quelle que soit l'émotion que puisse donner la contemplation du document original, il ne nous a pas semblé exploitable directement. Il est en effet rédigé en hiératique (système d'écriture abrégé utilisé pour l'écriture manuscrite) et non en hiéroglyphique (rapidement réservé aux inscriptions monumentales). Dans leur ouvrage, Dedron et Itard (1959) ont suivi la pratique des égyptologues consistant à retranscrire en hiéroglyphique pour plus de lisibilité[7].

III - EN CHINE ANCIENNE, AVANT LE BOULIER

Le troisième « document » est une ressource en ligne :

http://mathschine.univ-lille1.fr/index.html?%22pages/intro.htm%22

[6] http://www.britishmuseum.org/explore/highlights/highlight_objects/aes/r/rhind_mathematical_papyrus.aspx

[7] Pour aller plus loin : http://culturemath.ens.fr/content/breve-chronologie-de-lhistoire-des-mathematiques-en-egypte-2098. Sur papier : Selin (2000), Katz (2007).

Sur ce site, l'historienne des mathématiques chinoises Andréa Bréard[8] met à disposition un applet JAVA permettant d'apprendre à utiliser un instrument de calcul ancien, la table à baguettes. On demande aux participants de lire la brève introduction historique, et d'apprendre à utiliser la table pour (1) écrire des nombres, (2) poser et effectuer des multiplications (les plus courageux peuvent tenter la division).

La table à baguettes (*suan*) est un dispositif quadrillé sur lequel on pose et déplace des baguettes : un chiffre par case, un nombre par ligne (on lit de gauche à droite). En voici une représentation tardive[9] :

D'un usage attesté depuis la période des royaumes combattants (481 – 221 av. JC), elle ne sera remplacée par le boulier (*suanpan*) que bien plus tard (dynastie Ming 1368 – 1644), d'abord dans les milieux marchands. Le système est positionnel décimal (avec une case vide plutôt qu'un zéro écrit), mais diffère du système d'écriture chiffrée dans un texte. Ainsi, le codage des chiffres sur la table est donné par :

Série	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
A		𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
B		𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

La série A est utilisée dans les cases de rang impair (unités, centaines …) et la B dans les cases de rang pair (dizaines, milliers …), pour une question de lisibilité. Le nombre 126 se code donc par 𝍠𝍪𝍥 ; on remarquera le groupement à 5, que l'on retrouve dans le boulier. Dans un texte en sinogrammes, le même 126 s'écrirait 一百二十六 (un cent deux dix six).
On pose une multiplication en utilisant trois lignes : celle du haut pour le multiplicande (par exemple 62), celle du bas pour le multiplicateur (par exemple 48) ; la ligne du milieu accueille les étapes de calcul et montre le résultat final.

[8] Equipe SPHERE (Sciences Philosophie Histoire), UMR 7219 CNRS – Paris Diderot.

[9] Source : http://en.wikipedia.org, *Counting Rods*, consulté le 04/01/2014. Planche tirée d'un ouvrage japonais de 1795.

		6	2
	4	8	

On commence par placer le chiffre des unités du multiplicateur sous le chiffre de plus haut poids du multiplicande.

		6	2
2	4		
	4	8	

On procède de la gauche vers la droite. Pour la première étape, les deux cellules actives sont en gras dans la figure ci-contre : 4 x 6 = 24, que l'on dispose sur la ligne centrale, le chiffre des unités du 24 au dessus du chiffre actif du multiplicateur.

		6	2
2	8	8	
	4	**8**	

Les deux cellules actives sont ensuite 6 et 8. On a 6 x 8 = 48, que l'on place dans la ligne centrale avec la même convention de positionnement, en faisant l'addition.

			2
2	8	8	
		4	8

Toutes les opérations portant sur le 6 du multiplicande ayant été réalisées, on l'efface. Le multiplicateur est décalé d'un cran vers la droite.

			2
2	9	7	6
		4	8

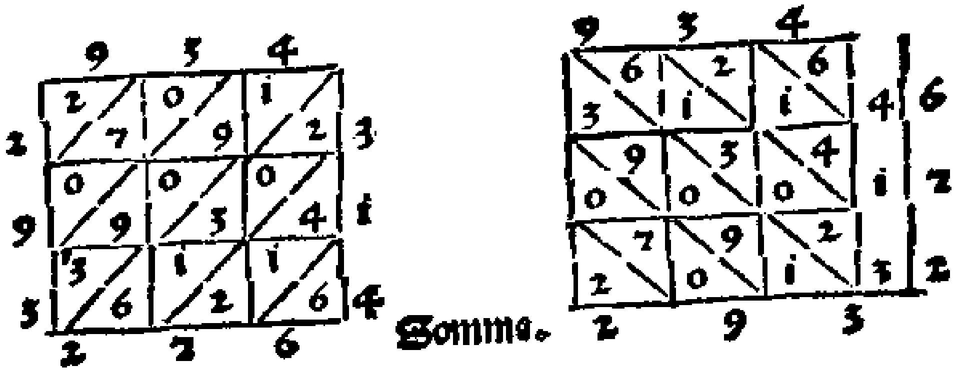
On recommence : 4 x 2 = 8, que l'on ajoute au 8 au-dessus du 4 ; la ligne centrale affiche donc 2960. Enfin 8 x 2 = 16, que l'on reporte dans la ligne centrale en effectuant l'addition.

Les ressorts mathématiques de cette procédure sont les mêmes que ceux de la nôtre : utilisation, dans un système positionnel de base 10, d'un registre mémorisé des produits des nombres de 1 à 9 (les tables de multiplication) ; utilisation implicite de la distributivité de la multiplication sur l'addition et des règles de bon positionnement des chiffres dans le tableau de numération (ainsi pour la première étape : 6 dizaines x 4 dizaines donnent 24 centaines).
L'algorithme diffère du nôtre sur quelques points : on procède de la gauche vers la droite, c'est-à-dire des chiffres de plus haut poids vers ceux de moindre poids ; cela à l'avantage de faire apparaître rapidement l'ordre de grandeur du résultat, mais l'inconvénient de faire modifier plusieurs fois de suite une même cellule de la ligne centrale. De plus, contrairement à la technique écrite en papier-crayon, les valeurs intermédiaires sont effacées au fur et à mesure. Ces aspects sont communs à toute la famille des dispositifs de calcul avec effacement et décalage (table à baguettes, table à poussière ou *takht*, calcul sur le sable), courants dans les mondes chinois, indiens et arabo-persans.
En quittant les contenus de l'école primaire, on peut voir ce dispositif de calcul utilisé dans des contextes plus avancés, par exemple dans les *Neuf chapitres* (Chemla & Shuchun 2004), rédigés sous la dynastie Han (-206 / 220) : extraction chiffre-à-chiffre de racines carrées et cubiques (chapitre 4), résolution de systèmes d'équations linéaires par l'algorithme *fangcheng* (que nous appelons *pivot de Gauss*, chapitre 8). À l'occasion du *fangcheng* on observe les règles de calculs portant sur des coefficients négatifs.
Pour aller plus loin, un très riche dossier sur les mathématiques de la Chine ancienne a été préparé par Karine Chemla sur culturemath à l'occasion de la parution de l'édition critique des *Neuf Chapitres*[10]. Outre les articles et les liens, des vidéos permettent une introduction rigoureuse et accessible aux mathématiques de la Chine ancienne, discutent de leurs liens avec les mathématiques indiennes, comparent les formes de systématisme propres aux *Neuf chapitres* et aux *Eléments* d'Euclide.

[10] http://culturemath.ens.fr/content/breve-chronologie-de-lhistoire-des-sciences-en-chine-2097

IV - PAR JALOUSIE

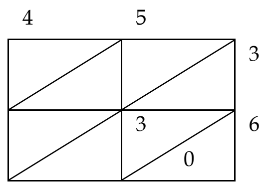
Le quatrième groupe reçoit un groupement de trois documents, dont le plus important est le premier :



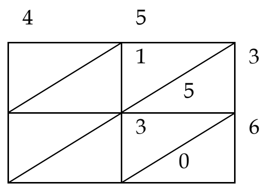
Il est demandé, sans explication, de chercher à comprendre le contenu du document. D'expérience, les participants sont assez désarçonnés, surtout s'ils ne savent pas qu'il s'agit d'une multiplication : les nombres en présence sont difficiles à identifier (est-ce 934 ? ou plutôt 934314 ?), et le seul mot qui apparaît est « somme » … mais c'est une fausse piste !

En autorisant la calculatrice et en conseillant de n'étudier que la grille de gauche, on finit quand même par repérer que 934 x 314 = 293 226, ce qui permet d'identifier la nature de l'opération, la position des deux facteurs et du produit. On repère assez vite que les cellules du quadrillage (abstraction faite des diagonales) représentent des produits : ainsi en bas à droite on lit 4 x 4 = 16. Le produit de deux nombres à un chiffre a au plus deux chiffres, la position par rapport à la diagonale de chaque cellule distingue ces deux positions, faisant régulièrement apparaître des zéros (ainsi dans 3 x 3 = 09). Si l'on a bien affaire à une multiplication, on sait qu'après avoir calculé les produits partiels, il faut encore les disposer convenablement et procéder à des additions. C'est ici que les diagonales interviennent : la diagonale en bas à droite ne contient que 6, qui est reporté en bas de la diagonale, à l'extérieur de la grille ; la diagonale suivante contient 2, 1 et 4, la somme est 7, reportée en bas de cette diagonale, à l'extérieur de la grille ; la diagonale suivante contient 6, 1, 3, 0 et 2, de somme 12, on pose le deux et on retient le 1 pour la somme de la diagonale suivante, etc.

Après avoir compris « comment on fait », on peut se demander « pourquoi ça marche ». Illustrons-le sur un cas plus simple, en multipliant 45 par 36.



5 unités x 6 unités donnent 30 unités, c'est-à-dire 3 dizaines et 0 unités : dans la cellule correspondante, le 3 est placé au-dessus de la diagonale et le 0 en dessous.



5 u x 3 d = 15 d = 1 c + 5 d, on voit pourquoi la troisième diagonale (en partant du bas) contient des nombres de centaines.

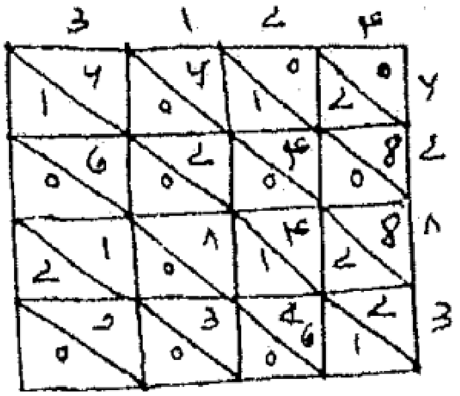
Etc.

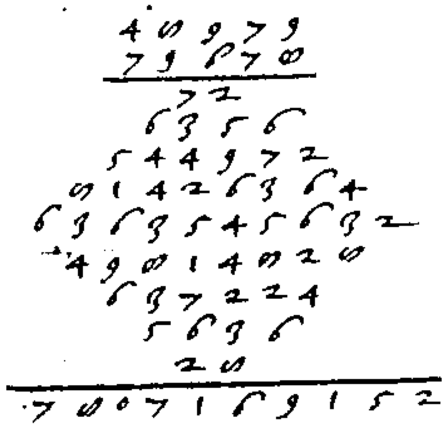
La technique est très proche de la technique posée enseignée usuellement dans nos écoles primaires, elle y est parfois utilisée comme technique intermédiaire. Elle est plus simple en ceci que les phases multiplicatives et additives sont complètement séparées : en particulier, aucune retenue n'intervient dans la première phase.

Dans le document, la grille de droite présente la même opération 934 x 314 = 293 226, avec une variante de disposition. On remarque que les diagonales y sont tracées dans l'autre sens ; en fait, le second facteur « 314 » doit être écrit du bas vers le haut pour que tout soit cohérent !

Cette technique de calcul papier-crayon (ou sur le sable, mais sans effacements) est courante dans le monde arabo-persan médiéval, et se répand en Europe sous le nom italien de multiplication *per gelosia*, faisant allusion au quadrillage du moucharabié ; on l'appelle aussi multiplication par tableau. Le document est tiré de la plus ancienne arithmétique imprimée en Europe, l'arithmétique de Trévise (1478, l'introduction par Gutenberg de l'imprimerie à caractères mobiles datant des années 1450) ; nous le reproduisons depuis l'indispensable *Histoire d'algorithmes* (Chabert, 1994), dont le premier chapitre est consacré aux opérations arithmétiques.

À titre d'énigmes, pour les plus rapides, on peut donner en complément les deux documents suivants :





Le document de gauche présente la multiplication par jalousie de 3124 par 3725 dans un traité d'arithmétique $Al-Qalas\bar{a}d\bar{i}$ (1426-1486)[11], utilisant les chiffres arabes d'occident (Maghreb et Andalousie). Le document de droite présente la variante « en diamant », dans laquelle la grille subit un huitième de tour pour passer de l'orientation « carré » à l'orientation « losange » ; les additions finales ont donc lieu en colonne et non en diagonale. Dans les deux cas, c'est la variante avec renversement de l'écriture d'un des facteurs qui est présentée : ainsi le document de droite présente-t-il le produit 97 984 x 79 678. Ce document manuscrit provient d'un cahier intitulé *Opérations et problèmes d'arithmétique*, d'un certain J. Nicolay et rédigé en 1602. Nous l'empruntons à *Faire des mathématiques avec des images et des manuscrits historiques, du cours moyen au collège* (Cerquetti-Aberkane & Rodriguez 2002, chapitre IV). Soulignons l'intérêt de cet ouvrage, ainsi que de *Les maths ont une histoire, activités pour le cycle 3* (Cerquetti-Aberkane, Rodriguez & Johan 1997), qui proposent des activités s'appuyant sur des sources historiques primaires ayant été réellement pensées et mises en œuvre dans des classes de cycle 3.

Du point de vue historique, on doit souligner que la sélection de documents de cet atelier fait complètement l'impasse sur le rôle des mathématiques indiennes dans la diffusion de la numération de position et d'un certain nombre de techniques opératoires écrites ou sur table à poussière. Signalons l'achèvement prochain de la thèse de Catherine Singh sur ce thème, dont il faudra surveiller les publications.

[11] Fac-simile du $Sharh\ al-talkh\bar{i}s$ d'$Al-Qalas\bar{a}d\bar{i}$ (folio 29r du manuscrit n°1477 Orient, Bibliothèque de Gotha, Allemagne). Reproduit dans Abdeljaouad (2005, p.61).

V - AU-DELÀ DES ENTIERS, MAIS COMME AVEC LES ENTIERS !

Le cinquième groupe reçoit un document formé de deux extraits de *La Disme* (Stevin 1634[12]). Une fois passée la petite étrangeté due au français du 16ème siècle (*cyffres* pour *chiffres*) et à la typographie (avec ses *s* qui ressemblent aux *f*, sans toutefois se confondre avec eux), la lecture ne pose pas de problèmes de compréhension majeurs.

Le premier extrait présente le système d'écriture :

DEFINITION I.

DISME est une espece d'Arithmetique, inventée par la Dixiesme progression, consistente es characteres des ciffres, par lesquels se descript quelque nombre, & par laquelle l'on depesche par nombres entiers sans rompuz, tous comptes se rencontrans aux affaires des hommes.

EXPLICATION.

Soit quelque nombre de mille cent & onze, descript par characteres des cyffres en ceste sorte 1111, ausquels appert que chasque 1 est la dixiesme part de son prochain charactere precedent. Semblablement en 2378, chasque unité du 8, est la dixiesme de chasque unité du 7. Et ainsi de tous les autres. Mais parce qu'il est convenable que les choses desquelles on veut traicter, ayent des noms, & que ceste maniere de computation est trouvée par consideration de telle dixiesme ou disme progression, voire qu'elle consiste entierement en icelle, comme apparoistra cy apres, nous nommons ce traicté proprement & convenablement la DISME, par la mesme on peut operer avec nombres entiers sans rompuz en tous les comptes se rencontrans en nos affaires, comme sera demonstré au suyvant.

DEFINITION II.

Tout nombre entier proposé se dict COMMENCEMENT, *son signe est tel* ⓪.

EXPLICATION.

Par exemple quelque nombre proposé de trois cens soixantequatre, nous le nommons trois cens soixantequatre COMMENCEMENS, les descrivant en ceste sorte 364 ⓪. Et ainsi de tous autres semblables.

DEFINITION III.

Et chasque dixiesme partie de l'unité de commencement nous la nommons PRIME, *son signe est tel* ①; *& chasque dixiesme partie de l'unité de prime nous la nommons* SECONDE, *son signe est tel* ②. *Et ainsi des autres chasque dixiesme partie, de l'unité de son signe precedent, tousiours en l'ordre un d'avantage.*

EXPLICATION.

Comme 3 ① 7 ② 5 ③ 9 ④, c'est à dire 3 *Primes* 7 *Secondes* 5 *Tierces* 9 *Quartes*; & ainsi se pourroit proceder en infini. Mais pour dire de leur valeur, il est notoire, que selon ceste definition, lesdicts nombres font $\frac{3}{10}$ $\frac{7}{100}$ $\frac{5}{1000}$ $\frac{9}{10000}$, ensemble $\frac{3759}{10000}$. Semblablement 8 ⓪ 9 ① 3 ② 7 ③ vallent 8 $\frac{9}{10}$ $\frac{3}{100}$ $\frac{7}{1000}$, ensemble 8 $\frac{937}{1000}$. Et ainsi d'autres semblables. Il faut aussi sçavoir que nous n'usons en la DISME d'aucuns nombres rompuz, aussi que le nombre de multitude des signes, excepté ⓪, n'excede jamais le 9. Par exemple nous n'escrivons pas 7 ① 12 ②, mais en leur lieu 8 ① 2 ②, car ils vallent autant.

DEFINITION IV.

Les nombres de la precedente seconde & troisiesme Definition se disent en general NOMBRES DE DISME.

Fin des Definitions.

Les participants sont invités à réfléchir aux points suivants : quel est l'avantage du nouveau système selon son auteur ? Il est de permettre de calculer sur des nombres « se rencontrant aux affaires des hommes » sans devoir apprendre à calculer sur les fractions (ou nombres « rompus ») ; les règles de calculs sur les entiers sont les seules à connaître. Quelles connaissances Stevin suppose-t-il familières de son lecteur ? Il suppose connues les règles de calcul sur les fractions, du moins sur les fractions décimales (représentées sans symbole d'addition, comme il a toujours été d'usage pour les nombres mixtes[13]). Stevin affirme-t-il pouvoir représenter dans son système tous les nombres rationnels ? Stevin se contente d'évoquer « tous les comptes se rencontrant en nos affaires », sans se lancer dans des considérations plus théoriques sur les liens entre décimaux et rationnels. Commenter l'affirmation : « Par exemple nous n'écrivons pas 7 ① 12 ② en leur lieu 8 ① 2 ③ car ils valent autant » ; Stevin a raison de dire

[12] Disponible en ligne : http://architectura.cesr.univ-tours.fr/Traite/Images/B250566101_11463Index.asp

[13] En reprenant le terme anglais (*mixed numbers*), nous appelons nombres mixtes les nombres rationnels (positifs) décomposés en partie entière + fraction inférieure à l'unité. Le symbole d'addition peut être considéré comme facultatif, selon les conventions d'usage : on écrira 2 2/3 plutôt que 2 + 2/3.

qu'ils valent autant, comme le montre un petit calcul avec des fractions décimales. On voit là une différence entre son système et le nôtre pour noter les décimaux. Dans notre un système, il ne peut y avoir qu'un chiffre par place, et l'indication de la valeur d'un des chiffres cale tous les autres ; alors que dans le système de Stevin l'écriture 7①12③ est possible et non ambigüe, quoiqu'à éviter si l'on veut éviter qu'un même nombre ait plusieurs écritures, ou pour étendre aux décimaux les techniques opératoires des entiers.

Puisque l'atelier est centré sur le thème de la multiplication, nous ne donnons pas les passages sur l'addition et la soustraction. Le document 2 est donc :

PROPOSITION III, DE LA MVLTIPLICATION.

Estant donné nombre de Diſme à multiplier, & multiplicateur : Trouver leur produict.

Explication du donné. Soit le nombre à multiplier 32⓪ 5① 7②, & multiplicateur 89⓪ 4① 6②. *Explication du requis.* Il faut trouver leur produict. *Conſtruction.* On mettra les nombres donnez en ordre comme cy joignant, multipliant ſelon la vulgaire maniere de multiplication par nombres entiers, en ceſte ſorte :

```
        ⓪①②
       3 2 5 7
       8 9 4 6
   -----------
     1 9 5 4 2
   1 3 0 2 8
 2 9 3 1 3
2 6 0 5 6
---------------
2 9 1 3 7 1 2 2
        ⓪①②③④
```

Donne produict (par le 3 probleme de l'Arithmetique) 29137122. Or pour ſçavoir que ce ſont, on adjouſtera les deux derniers ſignes donnez, l'un ②, & l'autre auſſi

(…)

NOTA.

Si le dernier ſigne du nombre à multiplier fuſt inegal au dernier ſigne du multiplicateur ; par exemple l'un 3④ 7⑤ 8⑥, l'autre 5① 4②, l'on fera comme deſſus, & la diſpoſition des characteres de l'operation ſera telle :

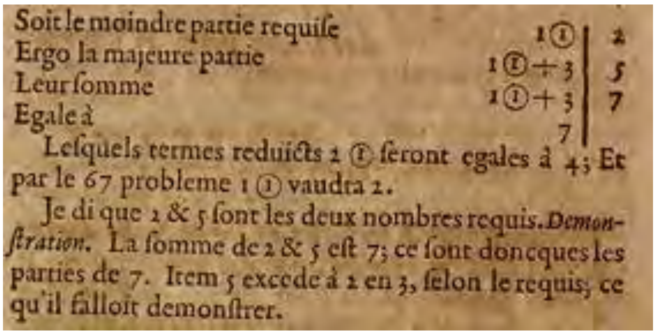
```
  ④⑤⑥
  3 7 8
    5 4 ②
 ---------
  1 5 1 2
1 8 9 0
---------
2 0 4 1 2
④⑤⑥⑦⑧
```

Stevin propose ici deux dispositions, l'une dans le cas particulier où le chiffre de plus faible valuation est de même valuation dans les deux nombres (7 centièmes et 6 centièmes, dans le premier exemple), l'autre lorsqu'ils diffèrent. Dans les deux cas, on effectue la multiplication « comme si l'on travaillait avec des entiers » ; on détermine ensuite le poids du chiffre de droite du résultat en additionnant les valuations des chiffres de droite des facteurs, indiquées dans les petits ronds : ici le produit de 8 millionièmes (10^{-6}) par 4 centièmes (10^{-2}) donne 32 cent millionièmes (10^{-8}). On retrouve le phénomène remarqué à propos de la notation sexagésimale à virgule flottante des scribes paléo-babyloniens : dans un système positionnel, on n'a pas besoin de connaître les valuations absolues pour obtenir la suite correcte des chiffres du produit. Pour la détermination absolue du résultat, Stevin propose une alternative à notre « règle des signes », en préférant déterminer la valuation du chiffre de plus faible poids. Sa méthode ne semble pas moins pratique ; elle traduit en outre plus directement la propriété mathématique sous-jacente d'addition des exposants lors du produit de puissances d'un même nombre, ici le nombre « un dixième ».

Si l'on souhaite aller au-delà de ce document, au moins trois possibilités sont ouvertes.

Premièrement, on peut faire remarquer que Stevin n'est pas le premier à proposer de faire jouer un rôle particulier aux décimaux pour éviter les calculs sur les fractions et représenter (éventuellement de manière approchée) tous les rationnels, voire toutes les mesures. Al-Kashi l'avait déjà proposé au XV^e^ siècle ; au XIV^e^ siècle, Jean de Murs approchait des racines carrées en passant des unités aux dixièmes, puis aux centièmes, etc. (mais dans un contexte astronomique, il préférait convertir ensuite la partie non-entière en sexagésimal). Cet opuscule, qu'est *La Disme*, s'accompagne d'un appendice dans lequel Stevin entreprend de montrer son usage et utilité dans les « affaires des hommes » : dans l'arpentage, dans les « comptes des mesures de tapisseries », dans les « comptes servans à la gavierie et aux mesures de tous tonneaux », dans les « comptes de la stéréométrie[14] en général », dans les « computations astronomiques », enfin dans les « comptes des maistres des monnoies, marchans & de tous estats en général ». L'utilité du calcul sur les décimaux, qu'il soit posé ou « à gettons »[15] (Stevin 1634, p. 212), est toutefois limitée dans la pratique tant que les systèmes métrologies en usage ne sont pas à pas régulier de 10 ; *La Disme* se conclut d'ailleurs sur un appel à la mise en place de tels systèmes.

Deuxième prolongement possible : en feuilletant les *Œuvres mathématiques* de Stevin (Stevin 1634), on peut remarquer que la notation en petits ronds n'est pas réservée à la *Disme*. Ainsi, dans son adaptation (très personnelle) des premiers livres des *Arithmétiques* de Diophante, Stevin utilise les symboles ①, ②, … pour désigner les puissances de l'inconnue[16]. Ainsi pour traiter le premier problème : « partons[17] 7 en deux parties telles, que la majeure excède la moindre en 3 », il dispose la résolution comme suit[18] :



Soit le moindre partie requiſe	1 ①	2
Ergo la majeure partie	1 ① + 3	5
Leur ſomme	1 ① + 3	7
Egale à	7	

Leſquels termes reduicts 2 ① ſeront egales à 4 ; Et par le 67 probleme 1 ① vaudra 2.

Je di que 2 & 5 ſont les deux nombres requis. *Demonſtration.* La ſomme de 2 & 5 eſt 7 ; ce ſont doncques les parties de 7. Item 5 excede à 2 en 3, ſelon le requis ; ce qu'il falloit demonſtrer.

On notera la « mise en équation » progressive, et erronée (la somme devant faire $2x + 3$ et non $1x + 3$). La résolution est ensuite purement rhétorique (« lesquels termes (…) »). On remarquera aussi que Stevin ne procède pas par équivalence : il distingue au contraire une première partie d'*analyse*, et une seconde partie qu'il nomme « démonstration », qu'on peut qualifier de *synthèse* ou de vérification.

Cette désignation des puissances de l'inconnue est à la même époque aussi utilisée par Bombelli dans son *Algebra* (Bombelli 1579[19]).

Un troisième prolongement serait plus historique, et demanderait une recherche documentaire sur la figure de Stevin, érudit et figure publique, engagé dans la lutte d'indépendance des flamands contre l'empire des Habsbourg.

---

[14] L'étude des solides, ici de leurs volumes.

[15] Lire « à jetons », c'est-à-dire sur abaque à jetons.

[16] On voit qu'ici, ce sont des innovations notationnelles dans le domaine de l'algèbre qui se répercutent dans un second temps dans le domaine numérique. Ainsi, la règle de multiplication utilisée dans la Disme (du type : un dixième fois un centième donne un millième car 1 + 2 = 3) n'est bien qu'un cas particulier de la règle générale sur les produits de puissances d'un même nombre, connu ou inconnu.

[17] C'est-à-dire « partageons ».

[18] Source : Stevin (1634, p.103).

[19] Disponible en ligne : http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1230877

VI - PISTES

Pour aborder la question des sources en histoire des mathématiques, on ne peut que commencer par souligner le changement fondamental représenté par la multiplication des ressources en ligne. Commençons par ce que les historiens appellent les sources primaires (i.e. les documents historiques), par opposition aux sources secondaires (travaux d'histoire). Il y a une dizaine d'années encore, pour consulter un ouvrage mathématique ancien, il fallait se rendre dans une bibliothèque. Pour peu que l'ouvrage soit un peu ancien ou rare, il n'était disponible que dans quelques bibliothèques dans le monde, éventuellement en accès réservé aux chercheurs. Depuis une quinzaine d'années, bibliothèques nationales ou autres organismes ont mis en œuvre des programmes massifs de rétrodigitalisation, rendant accessibles immédiatement, gratuitement, et souvent sous forme téléchargeable (pdf) ce qui demandait avant un voyage et des consultations de catalogues savants.

Signalons quelques points d'entrée utiles :

- La *Digital Mathematics Library* est un méta-catalogue de textes mathématiques anciens digitalisés. http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~rehmann/DML/dml_links.html Toujours utile, il n'est en revanche pas à jour, et ne pourra jamais l'être tant les vagues de digitalisation sont importantes.

- *Internet archive* (http://archive.org/advancedsearch.php) est un serveur généraliste mais qui répertorie aussi des fonds mathématiques. Pour se lancer, n'hésitez pas à consulter l'édition « pictoriale » des six premiers livres des *Eléments* d'Euclide par Oliver Byrne (taper « *Title : Euclid* » « *Creator : Byrne* »). Je recommande aussi le classique (déjà ancien) *History of Mathematical Notations* de Florian Cajori.

- *Googlebooks* contient aussi un bon nombre de textes mathématiques anciens, souvent consultables en ligne seulement : http://books.google.com/advanced_book_search?hl=fr. Ne pas se priver de Google images, en particulier pour les instruments anciens.

- Le site de la Bibiothèque nationale de France contient, outre la digitalisation de ses propres fonds, des liens vers d'autres ressources dans des bibliothèques nationales ou universitaires : http://gallica.bnf.fr/advancedsearch?lang=FR.

Pour ce qui est de la littérature secondaire, l'offre est vaste mais non centralisée. Je ne peux ici que souligner l'intérêt du site *Culturemath*, qui joue – entre autres – un rôle d'interface entre la communauté des chercheurs en histoire des mathématiques et un public (visé) d'enseignants. Il a entre autres avantages de satisfaire aux critères de scientificité en vigueur dans le monde universitaire (rédacteurs spécialistes, comité de lecture, bibliographies récentes) tout en assumant une ligne éditoriale de diffusion de résultats de recherche à un public non-spécialiste quoique formé aux mathématiques. Avec des sites comme *Culturemath*, on n'est plus dans la mise à disposition de *sources* mais déjà dans des *ressources*. Il s'agit cependant de ressources pour la formation ou l'auto-formation des enseignants ; le site n'est pas pensé pour un usage direct par des élèves, et ne propose globalement pas de pistes pédagogiques ou didactiques.

Un rôle d'interface entre chercheurs, formateurs et enseignants est aussi assuré par les IREM. Signalons, à titre d'exemple, deux publications qui nous semblent importantes :

- *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce* (Chabert, 1994) présente des sélections de textes historiques commentés, sur des thèmes algorithmiques au sens large : opérations arithmétiques, résolution de problèmes numériques, utilisations de la division euclidienne, approximations (de racines carrées, de π), résolutions approchées d'équations numériques ou différentielles.

- Deux ouvrages récents issus de la commission inter-IREM *Histoire et Epistémologie des mathématiques* offrent une autre perspective Barbin (2010) (2012). Ici l'objectif pédagogique est premier, puisqu'il s'agit de recueils d'activités pour la classe s'appuyant sur l'histoire des mathématiques. Par delà la variété des thèmes (de la proportionnalité à la loi de Gauss), un choix de forme commun aux différents chapitres vise à illustrer de *bonnes pratiques* : des comptes rendus d'expériences (avec leurs motivations, leur travail préliminaire de documentation, leurs choix pédagogiques, leurs erreurs, …) plutôt que des fiches à photocopier ; un travail sur des sources historiques dans lequel l'histoire est un *moyen* au service de l'enseignement des mathématiques et non une *fin*[20] ; des bibliographies/sitographies commentées, permettant à la fois de faire entendre le rôle d'interface joué par l'auteur du chapitre et invitant le lecteur intéressé à poursuivre sa formation personnelle. On reconnaît, je l'espère, *mutatis mutandis*, les éléments structurant du scénario d'atelier présenté ici.

Dans les productions de la commission inter-IREM *Epistémologie et Histoire des mathématiques*, c'est d'enseignement secondaire qu'il est très majoritairement question[21]. Pour leur rareté comme pour leur qualité, on doit signaler les recueils d'activités pour le cycle 3 de l'école primaire préparés par les collègues de l'académie de Créteil (Cerquetti-Aberkane, Rodriguez & Johan, 1997) et (Cerquetti-Aberkane & Rodriguez, 2002), sous l'impulsion d'Evelyne Barbin. Dans un esprit proche de celui de la commission inter-IREM *Epistémologie et Histoire des mathématiques* – quoique reflétant une culture professionnelle différente – les auteurs y proposent des activités proprement mathématiques s'appuyant sur des sources primaires.

[20] Cette remarque ne constitue en rien une condamnation de l'idée d'un *objectif* d'enseignement de l'histoire des mathématiques, nous soulignons simplement que ce n'est pas de cela dont il est question ici.

[21] C'est aussi largement le cas pour l'ensemble des membres du réseau HPM (*History and Pedagogy of Mathematics*). Voir (Fauvel & Van Maanen 2000), ainsi que le site http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/

BIBLIOGRAPHIE

ABDELJAOUAD, M. (2005). *Les arithmétiques arabes (9^e-15^e siècles)*. Tunis : Ibn Zeidoun.

BARBIN, E. (dir.) (2010). *De grands défis mathématiques, d'Euclide à Condorcet*. Paris : Vuibert-Adapt.

BARBIN, E. (dir.) (2012). *Les mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs*. Paris : Vuibert-Adapt.

BOMBELLI, R. (1579). *L'algebra* (2ème édition). Bologne : Giovanni Rossi.

CERQUETTI-ABERKANE, F., RODRIGUEZ, A. & JOHAN, P. (1997). *Les maths ont une histoire. Activités pour le cycle 3*. Paris : Hachette Education.

CERQUETTI-ABERKANE, F. & RODRIGUEZ, A. (2002). *Faire des mathématiques avec des images et des manuscrits historiques du cours moyen au collège*. Champigny-sur-Marne : CRDP de l'académie de Créteil.

CHABERT, J.-L. (dir.) (1994) *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*. Paris : Belin.

CHEMLA, K. & SHUCHUN, G. (2004). *Les neuf chapitres. Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris : Dunod.

DEDRON, P. & ITARD, J. (1959). *Mathématiques et mathématiciens*. Paris : Magnard.

FAUVEL, J., & VAN MAANEN, J. (DIR.) (2000). *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic.

GUINET, R. (1978a). Histoire des techniques opératoires. *Grand N*, *14*, 53-68.

GUINET, R. (1978b). Histoire des techniques opératoires : la multiplication. *Grand N*, *15*, 27-41.

GUINET, R. (1979). Histoire des techniques opératoires : la division. *Grand N*, *17*, 21-36.

GUINET, R. (1995). Une petite histoire de la division : de ses origines jusqu'à la méthode « Galley ». *Grand N*, *57*, 33-54.

KATZ, V. (Ed.) (2007). *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: A Sourcebook*. Princeton: Princeton University Press.

SELIN, E. (Ed.) (2000). *Mathematics across Cultures: The History of Non-Western Mathematics*. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic.

STEVIN, S. (1634). *Les Œuvres de mathématiques de Simon Stevin, augmentées par Albert Girard*. Leyde : Bonaventure & Elsevier.

DES PROBLEMES DE REPRODUCTION AUX PROBLEMES DE RESTAURATION DE FIGURES PLANES : QUELLES ADAPTATIONS POUR LA CLASSE ?

Caroline BULF
ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux
E3D – LACES
caroline.bulf@espe-aquitaine.fr

Valentina CELI
ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux
E3D – LACES
valentina.celi@espe-aquitaine.fr

Résumé
Nous présentons ici un travail permettant de prendre en compte les résultats récents de la recherche en didactique de la géométrie afin d'interroger les raisons d'être des problèmes de reproduction de figures planes présents dans différentes ressources pédagogiques. L'objectif de ce travail est pour nous d'outiller efficacement les enseignants pour donner plus de consistance à de « simples » problèmes de reproduction de figures à moindre coût et à partir de l'existant. Nous nous appuyons en particulier sur une analyse croisée des instructions officielles, de certaines ressources pour enseignant et de résultats de la recherche à propos de la reproduction de figures géométriques au cycle 3 de l'école primaire, pour proposer des pistes d'adaptations pour la classe. En outre, ce travail propose des pistes pour la formation des enseignants du premier degré à travers l'étude de ressources existantes.

Ces trente dernières années, la réflexion sur les *problèmes*[1] *de reproduction* de figures[2] a beaucoup évolué du point de vue de la recherche et a permis de faire avancer les réflexions didactiques à propos de l'enseignement de la géométrie (Ducel & Peltier, 1986 ; Duval, 1994 ; Duval, Godin & Perrin-Glorian, 2005 ; Godin & Perrin, 2009 ; Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013).

Nous proposons ici de dégager des pistes d'analyse de différentes ressources pédagogiques existantes telles que les textes officiels et les manuels scolaires[3] dans le but de questionner leur articulation avec les résultats de la recherche en didactique des mathématiques dans le cadre des problèmes de reproduction particuliers, à savoir les *problèmes de restauration* (Godin & Perrin-Glorian 2009), dont nous fournirons plus loin les caractéristiques.

Sans perdre de vue les tensions relatives à l'élaboration d'un manuel scolaire (Peltier & Briand, 2010), nous chercherons en particulier à identifier des leviers permettant une éventuelle transposition à faible « coût » des résultats de la recherche à partir de documents existants.

Ce texte se compose de quatre parties.

Dans la première partie, nous présentons les constats qui nous ont amenées à approfondir notre sujet. Ici, nous cherchons aussi à caractériser les problèmes de reproduction de figures planes. C'est pourquoi nous intégrons les résultats d'un premier travail proposé aux participants à l'atelier.

---

[1] Nous utilisons ici le terme de *problème* au sens de Polya (1967, p. 131) : « Poser un problème signifie donc : rechercher de manière consciente une certaine ligne d'action en vue d'atteindre un but clairement conçu, mais non immédiatement accessible. Résoudre un problème, c'est trouver cette ligne d'action ».

[2] Notre travail portant sur les problèmes de reproduction, nous utilisons le terme *figure* au sens de *figure matérielle* (Celi & Perrin-Glorian, 2014).

[3] Nous considérons ici les manuels comme une ressource pouvant être proche des habitudes et des pratiques des enseignants.

Dans la deuxième partie, nous fournissons les outils théoriques qui nous semblent nécessaires pour pouvoir interroger les raisons d'être de problèmes de reproduction présents dans différentes ressources pédagogiques.

C'est dans la troisième partie que nous présentons les analyses de quelques problèmes extraits de manuels scolaires. À cette occasion, nous prendrons aussi en compte les résultats d'un deuxième travail proposé aux participants.

La dernière partie portera sur quelques conclusions de ce travail ainsi que les perspectives qui s'ouvrent à nous à l'issue de nos analyses.

I - LE POINT DE DEPART : DES CONSTATS

1 Des premiers constats « naïfs » de formateurs

Notre travail sur les problèmes de reproduction de figures planes part du constat que ces problèmes sont très présents dans les manuels sans pour autant que leurs *raisons d'être*[4] (Chevallard, 1998, p. 115) soient explicites (aux yeux des enseignants et *a fortiori* aux yeux des élèves). A titre d'exemple, nous proposons l'extrait reproduit à la figure 1. Celui-ci est donné en l'état dans le livre de l'élève et aucun élément d'analyse n'est fourni dans le livre du maître.

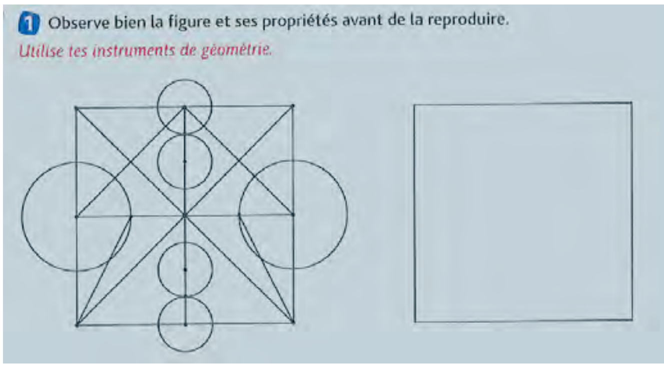


Figure 1. - Extrait[5] de la *Tribu des maths*, CM2, 2010.

Cet extrait[6] nous semble être représentatif du type de problèmes de reproduction proposés dans bon nombre de manuels scolaires : la consigne est très ouverte, peut-être trop pour que l'élève puisse s'engager correctement dans le travail proposé ; on fournit une amorce qui est à la même échelle que le modèle et simplement translatée par rapport à celui-ci. Aussi, comme nous le verrons plus loin, ce problème, ne nous semble pas, en l'état, exploiter au mieux son potentiel didactique, notamment à propos du cercle.

Notre propre expérience de formateurs (formation initiale et continue, visites de classe, etc.), nous permet de faire le constat que les problèmes de reproduction de figures planes sont pourtant très présents en classe. Toutefois, il nous semble que le potentiel d'apprentissage de ces problèmes est souvent sous-estimé par les enseignants car leur finalité se trouve souvent réduite à la reproduction graphique finale obtenue ou aux maniements des instruments de géométrie.

A la lecture des évaluations nationales (2009-2013), ce constat se trouve être renforcé. En effet, à propos des exercices de reproduction, les enseignants sont sollicités à repérer les imprécisions des tracés dues à une dextérité insuffisante ou à des manipulations incorrectes des instruments. Or l'habileté dans le maniement des instruments est-elle une compétence indispensable pour les apprentissages géométriques ?

[4] Nous empruntons cette locution à Chevallard (1998) : nous évaluons ici si la présence du type de tâche « reproduire » est motivée ou non, ses *raisons d'être*, dans une organisation mathématique qui pourrait être celle définie implicitement par les textes officiels ou alors celle adoptée par les auteurs d'un manuel scolaire.

[5] Tous les extraits des ressources citées ne sont pas reproduits à l'échelle.

[6] Le même extrait sera repris plus loin pour illustrer ce qu'on entend par *leviers d'adaptation pour la classe à faible coût*.

Forts de ces constats, certes peut-être naïfs, l'objectif de notre travail repose sur la volonté d'outiller efficacement les enseignants pour qu'ils donnent plus de consistance à de « simples » problèmes de reproduction de figures, à moindre coût et à partir de l'existant. En effet, notre objectif premier réside plus dans le fait de chercher à ce que les enseignants s'approprient des outils d'analyse que dans l'idée de leur donner « clés en main » une progression ou séquence (issue de la recherche), nous y reviendrons.

Une fois ces premiers constats et objectifs présentés lors de l'atelier, nous avons soulevé nos premières questions qui portent sur l'origine des problèmes de reproduction et qui sont l'objet du paragraphe suivant :

- Quelles sont leurs raisons d'être ?
- Pourquoi sont-elles apparues dans les Instructions Officielles ? À quelle époque et pourquoi ?
- Quelle légitimité ?

2 Et pourtant …

Dans les programmes de mathématiques de l'école primaire, les problèmes de reproduction font leur première apparition à la fin des années 1970[7] (cycle élémentaire), avant cette date ils relevaient du domaine du dessin (Bouleau, 2001). Leurs caractéristiques et leurs raisons d'être se précisent ainsi au fil du temps.

En 1980 (cycle moyen), on indique que l'élève doit savoir reproduire « différents objets géométriques (solides, surfaces ou lignes) ». Un paragraphe est consacré à l'explicitation des objectifs des activités géométriques : ici, on précise entre autres que « les activités géométriques peuvent concerner la **reproduction**, la description, la représentation ou la construction d'un objet » et que « reproduire un objet dont les élèves disposent, c'est en réaliser une copie conforme ». On distingue la reproduction de la construction « car les élèves partent alors d'une représentation ou d'une description et non de l'objet lui-même ». Les problèmes de reproduction étant liés aux techniques et aux instruments de dessin, on souligne que ces derniers ne doivent pas seulement servir pour réaliser correctement les tracés mais « l'élève doit apprendre à choisir l'instrument adéquat à la tâche envisagée et donc à analyser l'instrument et l'objet d'étude ».

Dans les compléments aux programmes et instructions du 15 mai 1985, un intérêt particulier est attribué à l'enseignement de la géométrie. Les activités de reproduction sont davantage caractérisées : on peut reproduire des objets plus ou moins usuels (solides ou de figures planes, simples ou complexes), à l'échelle 1 ou à une autre échelle ; on peut recourir à des matériaux divers, ce qui peut, entre autres, suggérer la reproduction à l'aide de gabarit, ainsi qu'à des outils variés (moulages, calques, instruments géométriques usuels). À travers la reproduction d'une figure, l'élève doit apprendre à se servir des procédés d'analyse et de synthèse qui sont propres aux activités géométriques. L'appel aux outils de géométrie afin de vérifier les propriétés d'une figure demeure toutefois implicite. On les évoque explicitement seulement à propos des compétences de tracé et, dans ce cas, on indique que le choix des outils est une adaptation qui doit être de plus en plus à la charge de l'élève.

En 2002, les textes officiels des programmes scolaires sont rédigés séparément pour le cycle 2 et pour le cycle 3 et comportent chacun un volet sur la géométrie ; les documents qui accompagnent ces programmes consacrent un chapitre à la géométrie au cycle 2.

Dès le cycle 2, la reproduction d'objets réels, de figures simples ou d'assemblages de figures permet de donner du sens aux propriétés géométriques étudiées. Reproduire une figure veut dire la « tracer (sur papier uni, quadrillé ou pointé) à partir de la donnée d'un modèle », l'emploi des instruments peut être précisé ou bien laissé à la charge de l'élève (cycle 3). Des compétences étroitement liées à la reproduction de figures, notamment dans la phase d'analyse du modèle, sont évoquées dans ces textes :
- identifier, de manière perceptive ou en ayant recours aux propriétés et aux instruments, une figure simple dans une configuration plus complexe ;
- décomposer une figure en figures plus simples.

[7] Cf. http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes.htm pour retrouver l'intégralité des textes officiels évoqués dans cet article.

Dans le document accompagnant les programmes de 2002, à propos des problèmes de reproduction de figures sur papier uni, on souligne ainsi qu'ils permettent, certes, d'apprendre à utiliser correctement un instrument de tracé mais surtout à analyser une figure : ces problèmes nécessitent en effet « l'analyse préalable de la figure à reproduire pour en repérer certaines propriétés et, lorsque la reproduction est amorcée[8], pour identifier les éléments communs aux deux figures ».

3 Les représentations des participants à l'atelier

En guise d'introduction au travail de l'atelier, nous avons demandé aux participants de répondre aux questions suivantes, par écrit en cinq minutes : *À l'école primaire, qu'est-ce qu'un problème de reproduction de figures ? Comment le caractériser ? Quelles sont leurs raisons d'être ?*

Ce premier travail a permis de mettre en évidence diverses représentations des participants concernant les enjeux de ce type de problème en classe. Parmi les réponses écrites des participants, base de nos premiers échanges collectifs, une idée semble être partagée, à savoir que l'*on reproduit un modèle, à l'identique ou avec agrandissement*, dans le but de dégager des *relations*, des *propriétés,* via l'utilisation des instruments. Si les éléments essentiels repérés dans les textes officiels apparaissent spontanément dans les réponses des participants, la notion d'*amorce* demeure absente lors de cette première mise en commun ainsi qu'au cours du débat qui s'en est suivi.

Par ailleurs, certains participants ont remarqué que, de manière générale, le contrat didactique oriente les procédures attendues car si l'on adopte un point de vue historique ou si l'on se place dans une *problématique pratique* (au sens de Berthelot & Salin, 1993), la reproduction de figures n'implique pas nécessairement le recours aux propriétés géométriques car les procédures d'essai-erreur (ou d'ajustement) peuvent aussi permettre d'obtenir un résultat, le plus fidèle possible par rapport à la figure d'origine.

Qu'avons-nous appris en orientant nos lectures vers la littérature spécialisée et les recherches développées en didactique des mathématiques ? Dans la partie qui suit nous allons exposer les éléments clé de notre enquête, éléments qui nous serviront à atteindre les objectifs de notre travail.

II - LES APPORTS DE LA RECHERCHE POUR LES PROBLEMES DE REPRODUCTION DE FIGURES PLANES

1 Les travaux de l'Irem de Rouen (Ducel & Peltier, 1986)

Les travaux de recherche portant sur les problèmes de reproduction de figure les plus anciens que nous avons découverts se trouvent être dans une brochure de l'Irem de Rouen remontant aux années 1980 (Ducel & Peltier, 1986). Nous avons présenté aux participants de l'atelier les objectifs généraux annoncés de cette recherche (dont les expérimentations ont eu lieu en classe de CM2 et 6e) et qui sont : « développer des aptitudes d'analyse, de recherche, de validation chez les enfants et pour ce faire mettre les enfants dans des situations telles qu'ils soient actifs face aux problèmes de géométrie, c'est à dire qu'ils aient à analyser des figures, émettre des hypothèses, les tester, les vérifier et communiquer de telle sorte qu'ils se construisent un langage géométrique efficace et fonctionnel » (p.3). La maîtrise des instruments de géométrie et les propriétés géométriques des figures sont au cœur des ambitions de ces problèmes : « savoir utiliser correctement et à bon escient les instruments de dessins géométriques […] savoir construire un certain nombre de figures classiques […] et quelques propriétés géométriques de certaines figures » (p.3). Nous avons détaillé avec les participants l'analyse de plusieurs des problèmes retenus pour répondre à ces desseins et qui sont « des situations dans lesquelles l'élève doit observer et reproduire individuellement un modèle de dessin géométrique à même échelle ou à échelle différente » (op. cité). A titre d'exemple nous reprenons ici le problème dit de la « mosaïque » (figure 2).

[8] La notion d'*amorce* d'une figure à reproduire est cruciale dans les recherches que nous évoquerons et, par conséquent, dans nos analyses : on entend par là le fait que, avec le modèle, on fournit le début de la figure à reproduire.

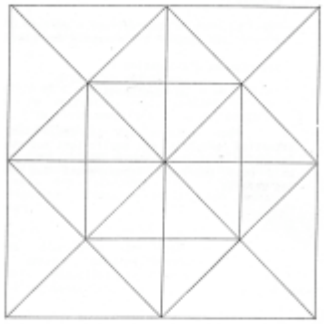


Figure 2. Extrait p.6 de Ducel et Peltier (1986).

Il s'agit d'un carré de 10 cm de côté, dans lequel sont tracés ses diagonales, ses médianes et deux carrés concentriques. Si certains traits sont gommés ou si certaines zones sont coloriées, la nouvelle figure donne à voir des sortes de « puzzles non découpés » (p.6). Les auteurs proposent 13 modèles différents (figure 3).

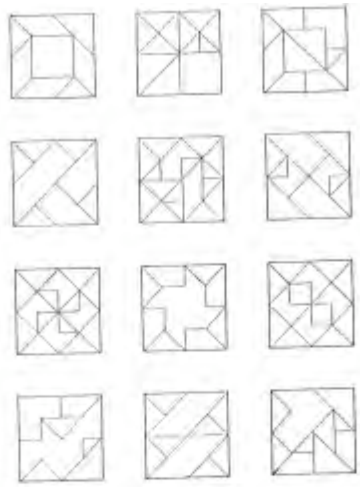


Figure 3. Extrait p.7 de Ducel et Peltier (1986).

Les consignes successives données aux élèves sont :

a) Après avoir reçu un modèle, chaque enfant doit individuellement le reproduire à même échelle sur papier blanc en ayant à sa disposition règle, équerre, compas, puis l'intégrer à la mosaïque collective.

b) Chaque enfant doit reproduire le modèle dans un carré dont la longueur du côté est donnée à l'aide d'une bandelette de papier, puis il devra, là encore, intégrer son dessin à la mosaïque collective (la longueur choisie pour la bande de papier est 13 cm).

Les objectifs d'apprentissage sont les suivants : « Mettre en évidence des régularités dans les dessins permettant de pointer certains concepts et notions : orthogonalité, parallélisme, isométrie des côtés d'un carré, milieu d'un segment. D'aboutir au constat d'un certain nombre de propriétés géométriques de cette configuration qui pourront faire l'objet d'une institutionnalisation. En particulier, dégager des méthodes : de report de longueur au compas [et] de construction d'un carré en connaissant la mesure soit du côté, soit de la diagonale » (p. 9). Parmi les variables didactiques retenues, on notera celles portant sur le choix du type de reproduction demandée (même échelle ou échelle différente) en particulier dans l'idée de « bloquer la procédure de report de longueur » (Op.cité) ; le matériel proposé (feuille blanche, bande de papier) permettant également d'orienter vers les procédures attendues[9].

Les auteurs analysent dans la brochure d'autres problèmes répondant aux mêmes objectifs en jouant sur des propriétés géométriques différentes. Le problème dit de la « rosace » (largement repris par la suite dans différentes ressources publiées par les auteurs de la brochure, nous y reviendrons) exploite plutôt

[9] Voir aussi (Barrier, Hache, Mathé 2014) qui analyse ce problème en classe de CM2.

les relations entre les propriétés du cercle et celles du carré (voir annexe 1) dans l'intérêt de mobiliser les propriétés du carré qui ont pu être travaillées dans le problème précédent (fig.2 et 3 précédentes). Là encore les variables didactiques retenues (nombre de pétales, choix et disposition des couleurs, l'accessibilité du modèle, le choix du support papier, etc.) sont autant de variables qui cherchent à favoriser des procédures d'analyse de la figure (contrairement à celle de la rosace à 6 branches que les élèves vont spontanément d'abord essayer de construire car plus facile à obtenir en reportant directement le rayon du cercle). Le recours aux amorces dans lesquelles les carrés sont apparents (voir annexe 1) a un rôle ici d'aide à l'analyse notamment pour formuler des hypothèses sur la position des centres des demi-cercles (point d'intersection d'un côté d'un carré et d'une diagonale de l'autre).

Outre les variables didactiques qui orientent les actions des élèves et le choix des instruments quant à la résolution du problème, on peut jouer sur une disposition variable de zones colorées : en effet, que ce soit dans le problème de la *mosaïque*, celui de la *rosace* ou celui des *losanges* (cf. annexes 1, 2), ce jeu sur les couleurs amène les élèves à reconnaître différentes formes et surfaces dont les enjeux ont été rappelés aux participants de l'atelier et qui sont l'objet de la partie suivante.

2 Les différents types d'appréhension d'une figure selon Duval

Comme nous l'avons déjà lu dans les textes officiels de différentes époques, les problèmes de reproduction nécessitent un travail d'analyse de la figure à reproduire. C'est pour cela que le travail de Duval (1994) sur les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique nous semble être tout à fait pertinent pour nous aider notamment à mettre en évidence quelques difficultés que les élèves pourraient rencontrer.

Selon Duval (1994, p. 122), dans une démarche géométrique, il y a quatre types d'appréhension possibles d'une figure, pouvant intervenir simultanément ou alternativement : les appréhensions *perceptive, discursive, séquentielle et opératoire*. Un apprentissage véritable de la manière mathématique de regarder une figure doit prendre en compte chacun de ces quatre types d'appréhension.

On parle d'appréhension perceptive en cas d'identification et de reconnaissance immédiate d'une forme et de ses propriétés visuelles. Dans ce cas, on privilégie la forme globale de la figure autrement dit sous formes de surface (dimension 2D). C'est la première manière de regarder une figure pour un enfant, autrement dit celle qui est la plus directe, au premier coup d'œil.

Lorsque l'on regarde un assemblage de figures, l'appréhension perceptive nous conduit à repérer les différentes parties par *juxtaposition* ou bien par *superposition* (Duval & Godin, 2005, p. 9). Il est difficile de changer de regard lorsque le premier regard s'impose : le coloriage et la manipulation vont favoriser l'appréhension *opératoire*. Ces différentes manières de *voir* la figure sont importantes à signaler dans notre propos car elles vont être l'origine de procédures différentes chez les élèves dans une tâche de reproduction. En particulier, un assemblage par superposition nécessite la prise en compte d'éléments 1D (lignes) à travers des prolongements possibles ou des alignements. Nous reviendrons sur ces aspects là plus en avant dans le texte.

On parle d'appréhension discursive lorsque d'autres propriétés mathématiques d'une figure, autres que celles indiquées par les codages ou par les hypothèses, sont explicitées. Pour que les propriétés géométriques l'emportent sur les évidences visuelles, il faut apprendre à réorganiser la perception des formes 2D en la perception d'un ensemble d'unités visuelles 1D, cela suppose une appréhension opératoire. C'est pourquoi Duval & Godin (2005) affirment que l'analyse d'une figure en fonction de la connaissance des propriétés géométriques présuppose la *déconstruction dimensionnelle* des représentations visuelles que l'on veut articuler aux propriétés géométriques.

L'appréhension séquentielle est mise en œuvre lorsque l'on organise les étapes de réalisation d'une figure en tenant compte de ses propriétés et des contraintes techniques des instruments utilisés. C'est le cas, par exemple, dans un problème où l'on analyse le modèle avant de le reproduire.

Analysons la Figure 4 ci-dessous.

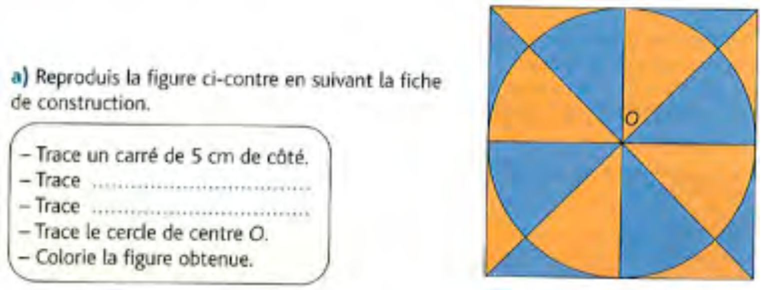


Figure 4. Extrait de Thévenet CM2 (2009).

Ici, toutes les appréhensions ci-dessus citées sont convoquées simultanément. En effet, la figure proposée est coloriée, ce qui va influencer notre premier regard : juxtaposition ou superposition ? Il s'agit de la reproduire mais, pour se faire, on demande de suivre des indications : pour mener à bien l'activité, l'appréhension discursive devra nécessiter une articulation avec l'appréhension perceptive. L'appréhension opératoire jouera aussi un rôle décisif car, dans la manière d'appréhender la figure selon la séquence imposée (la *fiche de construction* fournie), il faudra être capable de repérer les sous-figures suggérées et ensuite déconstruire la figure en éléments 1D et 0D.

Pour faire passer les élèves d'un regard centré sur les surfaces et leurs contours à un regard qui fait apparaître le réseau de droites et de points sous-jacents aux différentes figures étudiées à l'école, il faut mettre les élèves en condition de développer des capacités d'analyse visuelle des figures. Sans une telle transformation de la manière spontanée et prédominante de voir, toutes les formulations de propriétés géométriques risquent d'être des formulations qui tournent à vide.

Dans la phase de déconstruction dimensionnelle, les instruments dont on dispose jouent un rôle crucial car ils commandent la manière de regarder la figure et réciproquement. Certains instruments permettent de transporter des informations 2D, d'autres seulement des informations 1D. C'est l'utilisation d'instruments différents qui va permettre d'entrer progressivement dans la déconstruction dimensionnelle des formes 2D qui est, à son tour, une condition pour l'explicitation des connaissances géométriques.

C'est le problème du rapport aux figures dans l'enseignement de la géométrie et celui des moyens de le faire évoluer que Duval et al. (2004)[10] ont étudié en introduisant alors des problèmes qu'ils ont nommés *restauration de figures*.

3 Les problèmes de *restauration* de figures planes

Comment analyser une figure pour être capable de voir ce qu'il faut géométriquement y voir ? Quels types de tâche et quelles figures pour ces problèmes pour faire changer la manière de voir des élèves ? Comment organiser des activités centrées sur l'analyse des figures ? Ces questions sont au cœur des recherches menées par le groupe de Lille. Et ces questions les ont conduits à introduire des problèmes de reproduction particuliers, à savoir la restauration de figures planes dont voici ci-dessous les caractéristiques (Perrin-Glorian et Godin, 2008) :

- elle consiste à reproduire une figure modèle à partir d'une amorce à l'aide d'instruments ;
- le modèle est une figure complexe demandant un véritable travail d'exploration pour repérer des éléments qui ne figurent pas explicitement ;
- elle dépend du choix de la figure modèle, de l'amorce et de la différence entre les deux ;
- elle dépend des instruments disponibles et de leur coût ;
- la *règle graduée* n'est pas disponible ou alors elle a un coût très important ;
- aucune mesure n'est donnée.

Le travail sur les grandeurs géométriques sans recours à la mesure conduit à conceptualiser les objets géométriques ainsi que les opérations sur les grandeurs.

[10] De par leur appartenance institutionnelle, nous désignerons par la suite ce groupe de chercheurs comme étant le *groupe de Lille*. Rappelons néanmoins les membres qui en ont fait ou en font partie : Frédéric Brechenmacher, Régis Leclercq, Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Gaudeul, Marc Godin, Bachir Keskessa, Joël Jore, Christine Mangiante, Anne-Cécile Mathé, Bernard Offre, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Odile Verbaere.

Dans la restauration de figure, on vise à travailler l'appréhension opératoire. Les autres appréhensions sont présentes aussi : la perceptive, elle, est toujours là ; il s'agit justement de la contrôler pour la rendre opératoire ; il faut mettre en œuvre l'appréhension séquentielle pour choisir un ordre dans les tracés, ce qui fait intervenir les instruments dont on dispose et sollicite simultanément l'appréhension opératoire. Cette articulation peut faire intervenir le discours (donc l'appréhension discursive) par le passage par des propriétés que mettent en œuvre les instruments[11].

La façon dont les élèves utilisent les instruments pour leurs actions sur les figures est étroitement liée à leur mode d'appréhension en termes de surfaces, de lignes ou de points. En leur donnant accès à des instruments de type 2D, on prend en compte leur perception spontanée de la figure en termes de surfaces (juxtapostion ou superpositon). Les encourager en même temps à utiliser des instruments de type 1D ou permettant d'établir des relations entre des éléments 1D (lignes) ou 0D (points) est nécessaire pour les accompagner vers la déconstruction de la figure en un réseau de lignes et de points (Perrin, Mathé, Leclercq, 2013).

Analysons brièvement l'exemple suivant comportant une figure complexe qui peut être analysée soit comme juxtaposition (comme un assemblage de pièces d'un puzzle par exemple) soit comme superposition de figures simples (un des deux triangles rectangles isocèles pouvant être perçu comme étant superposé au carré)[12] :

La présence de l'amorce encourage à la regarder comme assemblage de figures par superposition et à se centrer sur les éléments 1D (prolongement des traits et alignements de certains éléments) et 0D (intersection de lignes). De plus, l'amorce est agrandie et a subi une rotation par rapport au modèle : cela empêche de faire appel aux mesures ou de compléter l'amorce par simple translation de certains éléments de la figure à reproduire.

4 Conclusion intermédiaire

A travers ces apports théoriques que nous avons partagés avec les participants de l'atelier, nous avons pu mettre en évidence les origines des ambitions des problèmes de restauration telles qu'on peut les connaître dans les dernières publications du groupe de Lille (Duval et Al., 2004) (Duval, Godin 2005) (Perrin et al. 2013). Les travaux de Ducel et Peltier (1986) nous semblent pionniers quant à l'exploitation du potentiel didactique des problèmes de reproduction. En effet, ils décrivent des objectifs ambitieux concernant l'analyse de la figure modèle pour construire des compétences et savoir-faire géométriques à travers notamment un jeu réfléchi de différentes variables didactiques (juxtaposition d'éléments de la figure, changement d'échelles, matériel à disposition, support du papier, etc.). Les travaux de Duval puis plus généralement ceux du groupe de Lille ont permis d'analyser plus finement ce type de problème dans le but de faire *changer le regard géométrique des élèves* en instituant notamment un système de contraintes sur les instruments (nous renvoyons le lecteur aux différentes publications du groupe de Lille pour d'autres exemples de problèmes de restauration) et en jouant sur l'amorce et la figure-

[11] À ce sujet, nous renvoyons le lecteur au texte de Barrier, Hache et Mathé (2014) dans lequel les auteurs traitent de l'articulation entre visualisation, instruments et langage dans des problèmes de restauration de figures planes.

[12] Cf. http://www.lille.iufm.fr/IMG/pdf/Geometrie_au_cycle_2.pdf

différence. Pour autant, malgré ces trente années de réflexions et avancées dans la recherche concernant ces problèmes – qui ont pourtant perduré dans les ressources (par exemple, le problème de la rosace, voir annexes 1 et 3) –, nous avons déjà constaté plus haut que, dans la réalité de la classe ou dans les ressources pédagogiques, on est encore loin de considérer ces problèmes comme cruciaux dans les apprentissages géométriques. C'est pourquoi nous cherchons à communiquer auprès des enseignants un outillage (c'est à dire un ensemble de leviers, dont des modalités de travail et des variables didactiques sur lesquelles l'enseignant peut facilement jouer) facilitant l'exploitation du potentiel de ces problèmes d'apprentissage.

III - ANALYSE D'EXTRAITS DE MANUELS SCOLAIRES: QUELLES ADAPTATIONS POUR LA CLASSE ?

1 Analyse d'extraits choisis de manuels scolaires

Le travail des participants de l'atelier a consisté en l'analyse, par groupe, de différents extraits de ressources pédagogiques (constituant ce que nous avons appelé un *album de problèmes de reproduction*) en deux temps donnés. Dans un premier temps, au début de l'atelier, les participants devaient choisir quels problèmes de reproduction de figure ils retiendraient pour la classe et comment ils l'exploiteraient, en explicitant les modifications éventuelles qu'ils apporteraient. Dans un deuxième temps qui se situait après les apports théoriques de la partie précédente, les participants devaient à nouveau analyser les extraits de l'album en revoyant éventuellement leurs précédents choix à la lumière des apports théoriques présentés. Nous ne développerons pas ici l'analyse de tous les problèmes de l'album (qui comportaient dix extraits) ; nous avons choisi de commenter trois extraits en lien avec certains points évoqués précédemment.

1.1 Un extrait tiré d'un ouvrage publié à une époque où les problèmes de reproduction étaient rares

Une étude de quelques manuels scolaires édités entre la fin des années 1970 et le début des années 1990 montre que, malgré les prescriptions officielles, les problèmes de reproduction sont rarissimes. L'extrait de la figure 5 est tiré d'un manuel de 1980, le seul où deux problèmes de ce type sont proposés.

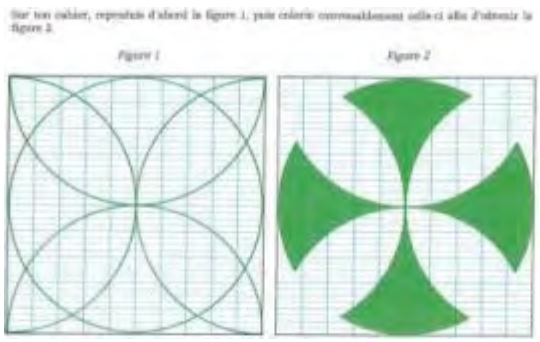


Figure 5. Extrait de Eiller CM2, 1980.

La discussion a principalement porté sur le rôle du support en fonction des objectifs visés. Si l'on conserve le quadrillage, l'enjeu ne réside pas dans la construction du carré car les angles droits sont supportés par le quadrillage. En outre, un tel support permet de reproduire la figure sans convoquer des propriétés autres que le dénombrement de carreaux pour repérer les différents centres du cercle et demi-cercles. Si l'on reproduit la figure à la même échelle, une opération de visée peut d'ailleurs suffire pour repérer les centres en question sans nécessairement considérer qu'ils sont les milieux des côtés du carré. Les participants ont beaucoup échangé sur les différents objectifs potentiels de ce problème. L'un des groupes a notamment proposé qu'on ne donne que la figure 2 afin de rendre moins explicites les tracés. Un autre groupe proposait de présenter cet extrait en guise de préparation à l'étude du problème de la rosace à huit branches (cf. Annexes 1 et 3) permettant de mettre en évidence les milieux des côtés du carré comme centres des demi-cercles. Les participants se sont donc mis d'accord sur certaines variables didactiques à exploiter en fonction des objectifs visés : le support papier (quadrillé ou blanc), l'échelle, les instruments mis à disposition, la relation entre les objets géométriques qui composent la figure modèle (relations d'alignements, de milieux, de perpendicularité, etc.).

1.2 Un exemple extrait d'un ouvrage récent comportant une progression basée sur des fondements théoriques didactiques partagés (Euromaths 2009)

Notre album de problèmes de reproduction comportait, selon nous, des problèmes très contrastés. En effet, nous proposons ici (figure 6) un autre exemple d'analyse à partir d'un extrait de *Euromaths* CM1 (2009). Cet exemple nous paraît intéressant dans la mesure où les choix opérés par les auteurs de ces manuels pour les progressions sur l'enseignement de la géométrie sont basés sur des fondements théoriques proches de ceux développés précédemment. Et pour cause, l'un des auteurs d'*Euromaths* n'est autre qu'un des auteurs de la brochure de l'Irem de Rouen. Et si l'on procède à un examen large des problèmes de reproduction présents dans les manuels de la collection *Euromaths* (ce que nous ne pouvons développer ici), on constate que les objectifs visés du CP au CM2 sont en effet proches de ceux présentés précédemment. A titre d'illustration, on peut citer les objectifs annoncés dans le livre du maître relativement à l'extrait de la figure 6 : « Pour reproduire une figure en plus grand, ou en plus petit, il faut l'analyser, c'est-à-dire repérer des alignements, des milieux, etc. Pour cela, il faut souvent intervenir sur la figure : joindre des points, prolonger des segments […] faire des hypothèses sur les positions de certains points, sur les éventuelles égalités de longueur, […] noter les résultats de cette observation fine non instrumentée – ce qui permet d'utiliser le vocabulaire adapté – puis […] vérifier leurs hypothèses avec les instruments. […] Une fois l'analyse bien menée, il est possible de *restaurer* la figure agrandie, c'est-à-dire la compléter avec les éléments manquants » (p.62 du Livre du maître).

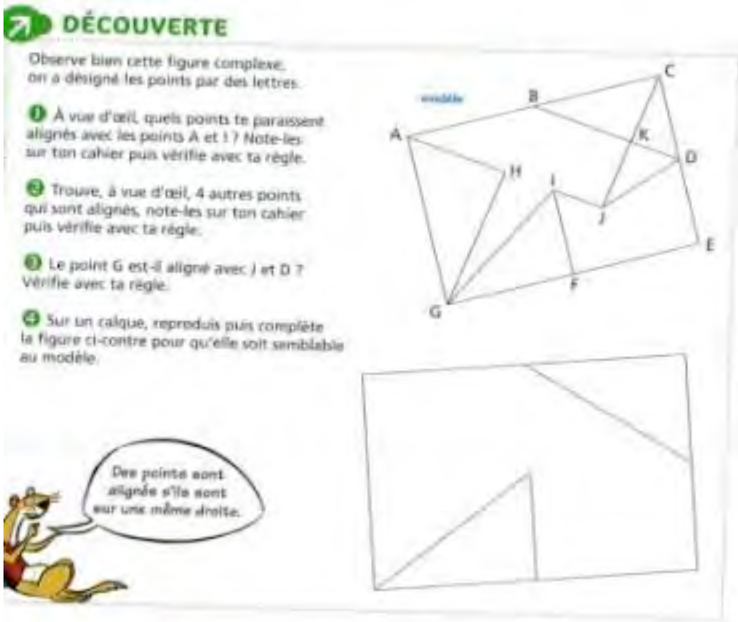


Figure 6. Extrait de *Euromaths* CM1, 2009.

Nous pourrions même aller jusqu'à dire que tout se passe comme si les auteurs cherchaient à instaurer un *contrat* spécifique de ce type de problème. En effet, si l'on mène une brève analyse *a priori* du problème de la figure 6, on relève un découpage en sous-tâches très guidées qui prennent en charge l'analyse de la figure. Les consignes sont fermées pendant la phase d'analyse mais ouvertes pendant la phase de construction. De la même façon, les instruments sont suggérés pendant la phase d'analyse mais non suggérés pour la phase de reproduction. Nous pourrions également remarquer que le codage de la figure n'est pas non plus à la charge de l'élève et nous pourrions faire l'hypothèse que cela est sans doute fait pour faciliter l'intervention de l'enseignant.

Tout se passe comme si les auteurs visaient une décomposition stratégique de tous les « passages obligés » pour mettre en œuvre une déconstruction/reconstruction dimensionnelle afin de, au fil des étapes du manuel (et des années) *éduquer* le regard géométrique des élèves. Les variables didactiques exploitées pour y parvenir sont principalement les mêmes que celles décrites dans la partie théorique précédente (l'agrandissement des figures à reproduire pour évacuer le recours à la mesure, l'orientation non prototypique pour éviter les stratégies de visée, un jeu sur la juxtaposition/superposition de figures, etc.). Aussi, dans le cadre de cet extrait, nous pourrions discuter de la pertinence de certaines de ces variables. Par exemple, nous pourrions discuter du choix de l'amorce afin d'exploiter les différentes caractéristiques de la figure-modèle (ici en fonction du choix de l'amorce, on peut choisir de porter l'attention des élèves sur les propriétés du rectangle ou celles des autres figures juxtaposées, ou encore sur les propriétés d'égalités de longueurs ou celles de milieux, de perpendicularité, d'alignements, etc.).

1.3 Un extrait d'un ouvrage récent : un problème de restauration modifié à moindre coût

Nous revenons ici sur l'extrait présenté plus haut en figure 1 (reproposée ci-après dans une version codée, figure 7), extrait qui n'a pas été sélectionné par les participants à l'atelier mais qui nous semble toutefois pertinent afin de montrer que l'on peut effectivement, à moindre coût, le modifier pour le rendre porteur d'apprentissages potentiels.

Contrairement à l'extrait précédent, la consigne accompagnant cette figure est ouverte : on suggère juste de bien l'observer avant de la reproduire en utilisant des instruments dont le choix est laissé à la charge de l'élève ; à la même échelle que le modèle, on propose une amorce (un carré) simplement translatée par rapport à celui-ci (voir figure 1).

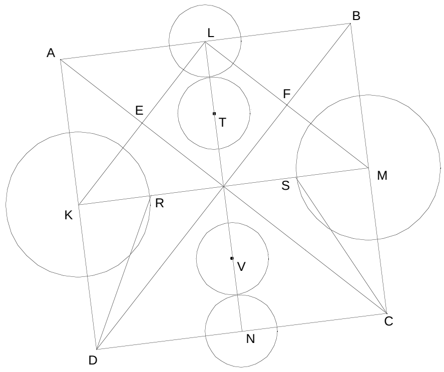


Figure 7. Extrait de *La tribu des Maths*, CM2, 2010 (figure codée).

Le compas serait utile pour comparer et puis reporter des longueurs afin de tracer les six cercles par la donnée de leurs centres et leurs rayons. La règle non graduée pourrait alors servir pour tracer les diagonales du carré et puis, après avoir placé les milieux de ses côtés (qui sont aussi les centres respectifs de quatre des six cercles présents dans la figure), pour tracer ses médianes et puis les segments [KL], [ML], [DR] et [CS].

Le compas pourrait toutefois n'être utilisé que pour tracer les cercles, la règle graduée permettant de repérer tous les autres éléments de la figure qui sont nécessaires pour compéter l'amorce donnée. L'élève se limiterait ainsi à *copier* la figure modèle en prenant des mesures sans vraiment étudier la relation qui existe entre les diverses parties de celle-ci.

Dans cette figure, nous avons toutefois apprécié le fait que R pourrait être tracé comme point d'intersection de (KM) et de (DL), S comme point d'intersection de (KM) et (CL) et T comme point d'intersection de (NL) et (EF). Ce qui conduit à introduire des tracés supplémentaires ou à prolonger des segments déjà présents dans le modèle.

Pour obliger l'élève à recourir à de telles stratégies, on pourra alors modifier l'amorce ainsi que sa position et sa taille par rapport au modèle. La figure attendue tracée sur papier calque permettra de valider ou invalider le travail de l'élève. Nous proposons par exemple l'amorce suivante :

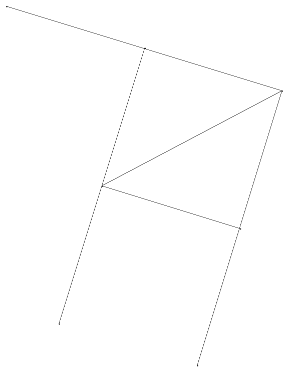
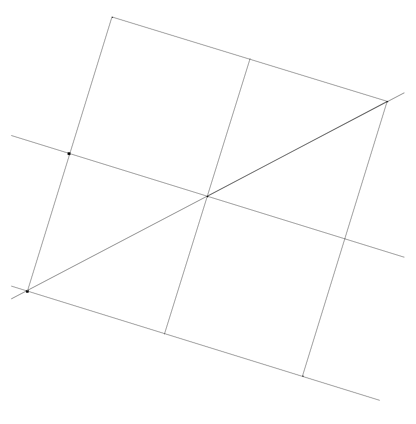
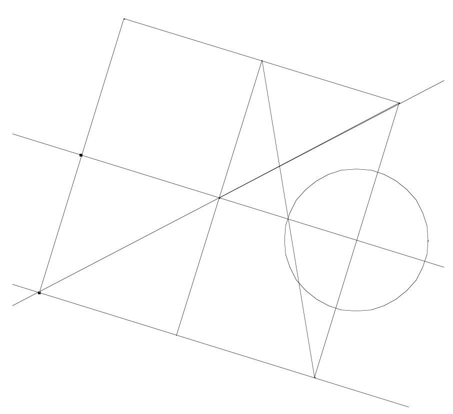
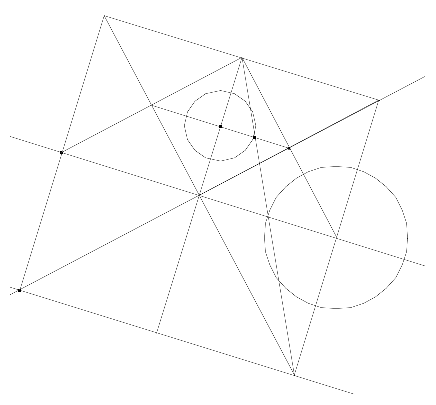


Figure 8. Un exemple d'amorce pour reproduire la figure 7.

On imposera de se servir de la règle non graduée et du compas ou bien on donnera une liste incluant aussi d'autres instruments dont les coûts encourageront l'élève à se servir plutôt de ces deux-là. Ces modifications conduisent ainsi à déterminer le quatrième sommet du carré et les centres des cercles comme intersections de droites et à prendre conscience que, pour tracer un cercle, outre son centre, il suffit d'identifier un point lui appartenant ou bien d'avoir la longueur de son rayon. Après avoir complété le carré, nous montrons ci-dessous une procédure possible pour tracer les cercles de centres M et T, les autres cercles pouvant alors être tracés à partir du centre et du rayon.

		
En prolongeant convenablement des segments déjà tracés, on trace le sommet manquant du carré ABCD	En traçant le segment [LC], on repère un point du cercle de centre M	Après avoir tracé les segments [AC], [LK], [LM], on joint les points E et F ainsi obtenus : le point d'intersection de (LC) et (EF) est un point du cercle de centre T, ce dernier étant le point d'intersection de (LN) et (EF).

Le problème ainsi modifié demeure encore ouvert mais évite le recours à la mesure, encourage l'élève à analyser les différents éléments de la figure-modèle, à ajouter des éléments supplémentaires et l'aide à prendre conscience de la nécessité de disposer de certains savoirs géométriques pour pouvoir aboutir.

Dans le guide du maître de la collection de manuels où l'on trouve la figure analysée, on peut saisir que des problèmes de reproduction sont proposés ici pour que l'élève apprenne à analyser une figure complexe en repérant les éléments essentiels, à choisir et à bien utiliser les instruments qui conviennent. Dans le manuel de CM2, la reproduction de figures est notamment proposée afin de *problématiser les tâches confiées aux élèves* (guide du maître CM2, p. 245) ; en tant que problème de recherche, elle permet aussi de réactiver et mettre en œuvre des connaissances et compétences géométriques abordées les années précédentes.

Moyennant quelques modifications à moindre coût, les activités proposées peuvent ainsi devenir des véritables problèmes de recherche pour l'élève : demander de reproduire à une autre échelle en fournissant une amorce avec une autre orientation que le modèle ; imposer des instruments de dessin (et non pas de mesure) ou bien leur attribuer des coûts permettant à l'élève de bien réfléchir sur le choix à effectuer. En outre, si des adaptations (au sens de Robert, 2004) sont utiles pour que l'élève s'engage dans la tâche à accomplir, il faut aussi fournir à l'enseignant des pistes d'analyse pour qu'il puisse effectivement saisir l'intérêt de ce type de problèmes pour les apprentissages géométriques, à court et à long terme.

2 Synthèse des adaptations pour la classe

Suite à ces différents apports et analyses qui ont rythmé le déroulement de l'atelier, il convient maintenant de proposer une synthèse des différents leviers pour la classe. Rappelons que notre objectif réside dans le fait que l'on cherche à outiller les enseignants pour les aider à adapter, à moindre coût, certains problèmes de reproduction de figures. Autrement dit, nous ne cherchons pas à leur donner des problèmes « clés en main » ou « des progressions prédéterminées » mais nous cherchons plutôt à ce qu'ils adaptent leur propre progression ou séquence à travers un jeu de variables didactiques éprouvées par la recherche (à Lille ou à Rouen) et qui renvoient à des ambitions plus générales sur la façon de penser (voir) et d'agir sur les objets de la géométrie euclidienne. Nous pouvons répertorier les leviers (ici principalement des variables didactiques) qui ont été évoqués durant l'atelier :

- la nature des figures et leur complexité (juxtaposition, superposition, etc.),
- les adaptations ou intermédiaires à la charge de l'élève (au sens de Robert (2004), comme par exemple l'ajout de points intermédiaires),
- l'agrandissement-réduction,
- le choix de l'amorce (et sa complexité),
- le support (feuille blanche, quadrillée, pointée, etc.),
- les contraintes sur les instruments mis à disposition,
- le recours à la mesure,
- les positions relatives de la figure-modèle et de la figure-amorce,
- etc.

IV - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Créer les conditions favorables pour provoquer la nécessité d'analyser la figure modèle en termes de déconstruction dimensionnelle et de propriétés de la figure (perpendicularité, alignement, milieux, parallèles, propriété d'incidence, etc.) nous semble être la clé de voûte des travaux de recherche menés depuis 1986 sur les problèmes de reproduction de figures planes. Durant l'atelier nous avons retenu un certain nombre de leviers (dont ici surtout des variables didactiques) avec lesquels l'enseignant peut jouer pour accompagner les élèves dans le changement de regard des élèves sur les figures : système de malus-bonus évolutif pour pénaliser le recours à la règle graduée, changement d'échelle, complexité des figures-modèles, etc. Nous retiendrons en particulier l'idée fondamentale que « ce n'est tant pas la tâche de reproduction qui est importante que le type d'instrument choisi pour la reproduction » (Duval, Godin, 2005, p.13) car selon l'instrument choisi, on sollicite telle ou telle vision (et réciproquement).

Notre objectif, à terme, est d'améliorer et de faire vivre cet atelier dans le cadre de la formation continue des enseignants. Proposer des adaptations à partir de ressources existantes nous paraît un moyen de familiariser les enseignants avec les ambitions développées par la recherche sur l'enseignement de la géométrie depuis presque trente ans en limitant des adaptations galvaudées (Mangiante, 2013). Sans ignorer certaines tensions liées à la diffusion de résultats de recherche dans les manuels scolaires (Peltier et Briand, 2010) et la variabilité des pratiques (Arditi 2011 ; Arditi et Briand, dans ce volume), nous proposons d'essayer d'injecter des outils didactiques d'analyse permettant d'être ambitieux quant aux objets d'apprentissage des problèmes de reproduction, de façon plus diffuse car à partir de l'existant. Ainsi, selon nous, ce que nous avons proposé durant l'atelier et que nous souhaitons maintenant faire vivre dans la formation continue est une sorte de transposition « à faible coût » des outils de la recherche en didactique car ces derniers permettent d'analyser des problèmes géométriques déjà existants, ce qui constitue selon nous un premier pas pour s'emparer des travaux issus de la recherche.

BIBLIOGRAPHIE

ARDITI S. (2011) *Variabilité des pratiques effectives des professeurs des écoles utilisant un même manuel écrit par des didacticiens*, thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

ARDITI S., BRIAND J. (dans ce volume) Regards croisés de chercheurs, auteurs de manuels et formateurs. Utilisation effective d'un manuel scolaire par des professeurs des écoles. Pistes pour la formation, *Actes du 41e colloque de la Copirelem*, Mont de Marsan 2014.

BARRIER T., HACHE C., MATHE A.-C. (2014) Décrire l'activité géométrique des élèves : instrument, regard, langage, *Actes du 40e colloque de la Copirelem*, Nantes 2013.

BERTHELOT R., SALIN M.-H. (1993), L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, 53, IREM de Grenoble, 39-56.

BOULEAU N. (2001), Reproduction et géométrie en cycle 1 et 2, *Grand N*, 67, 15-32

BRIAND J., PELTIER M.L. (2010) Le manuel scolaire : carrefour de tensions mais aussi outil privilégié de vulgarisation des recherches en didactique des mathématiques, *Actes du 36ème colloque de la Copirelem*, *Auch 2009*

CELI V., PERRIN-GLORIAN M.-J. (2014), Articulation entre langage et traitement des figures dans la résolution d'un problème de construction en géométrie, *Spirale – Revue de Recherches en Éducation*, 54, 151-174

CHEVALLARD Y. (1998), Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique, *Actes de l'Université d'été, La Rochelle – Charente-Maritime*, pp.91-118

DUCEL Y., PELTIER M.-L. (1986) Géométrie. Une approche par le dessin géométrique au CM2, *Brochure IREM de Rouen* (Université de Rouen).

DUVAL R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM*, 17, 121-138.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5-53.

DUVAL R., GODIN M., PERRIN GLORIAN M.-J. (2004) Reproduction de figures à l'école élémentaire, *Actes du séminaire national de Didactique des Mathématiques de l'ARDM*, Ed. Irem de Paris 7
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/actes_seminaire_national_de_didactique/Actes%20du%20S%C3%A9minaire%20National%20de%20Didactique%202004.pdf

DUVAL R., GODIN M. (2005), Les changements de regards nécessaires sur les figures, *Grand N*, 76, 7-27.

GODIN M., PERRIN M.-J. (2009) De la restauration de figure à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître. *Actes du 35ème colloque la Copirelem*, Bordeaux –Bombannes, 2008.

KESKESSA B. ET ALII (2007), Géométrie plane et figures au cycle 3. Démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N*, 79, 33-60.

MANGIANTE C. (2013) Une étude du processus d'appropriation par des enseignants de situations produites par la recherche pour l'enseignement de la géométrie, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM*, Irem Paris 7. En ligne : http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/97/26/56/PDF/actes_sem_2013.pdf

PERRIN GLORIAN M.-J., MATHE A.C, LECLERCQ R. (2013) Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ?, *Repères IREM*, 90, 5-41.

POLYA G. (1967), *La découverte des mathématiques*, Tome 2, DUNOD, Paris.

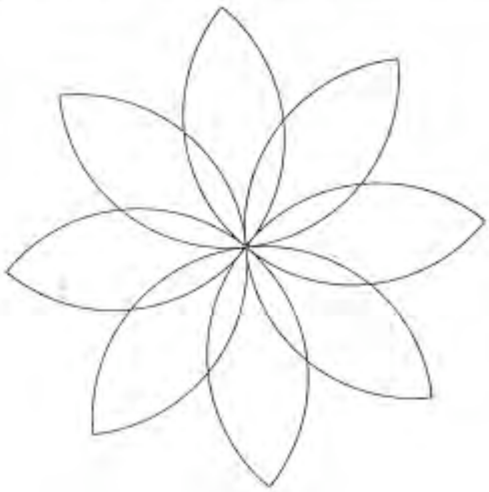
ROBERT A. (2004) Une analyse de séance de mathématiques au collège, à partir d’une vidéo filmée en classe. La question des alternatives dans les pratiques d’enseignants. Perspectives en formation d’enseignants. *Petit x*, 65, 52-79.

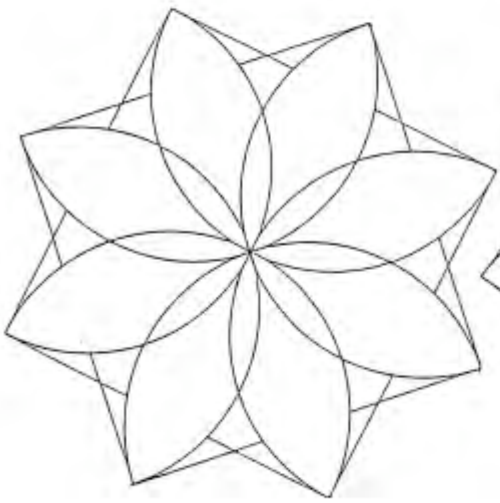
ANNEXE 1. LE PROBLEME DE LA ROSACE (DUCEL, PELTIER 1986)

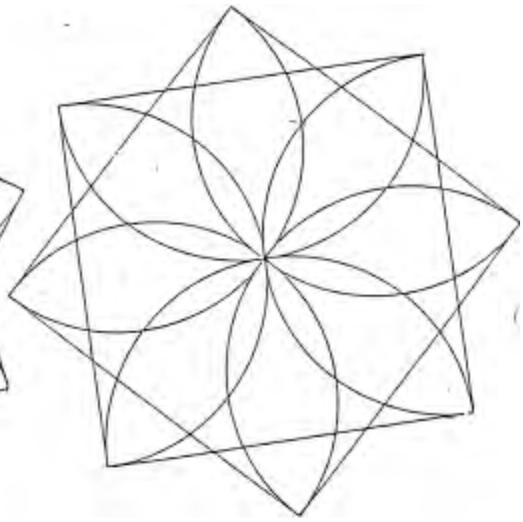
Les contenus mathématiques visés, dans cette situation sont :

- le cercle
- la division d'un cercle en huit arcs isométriques
- les symétries axiales et les rotations.

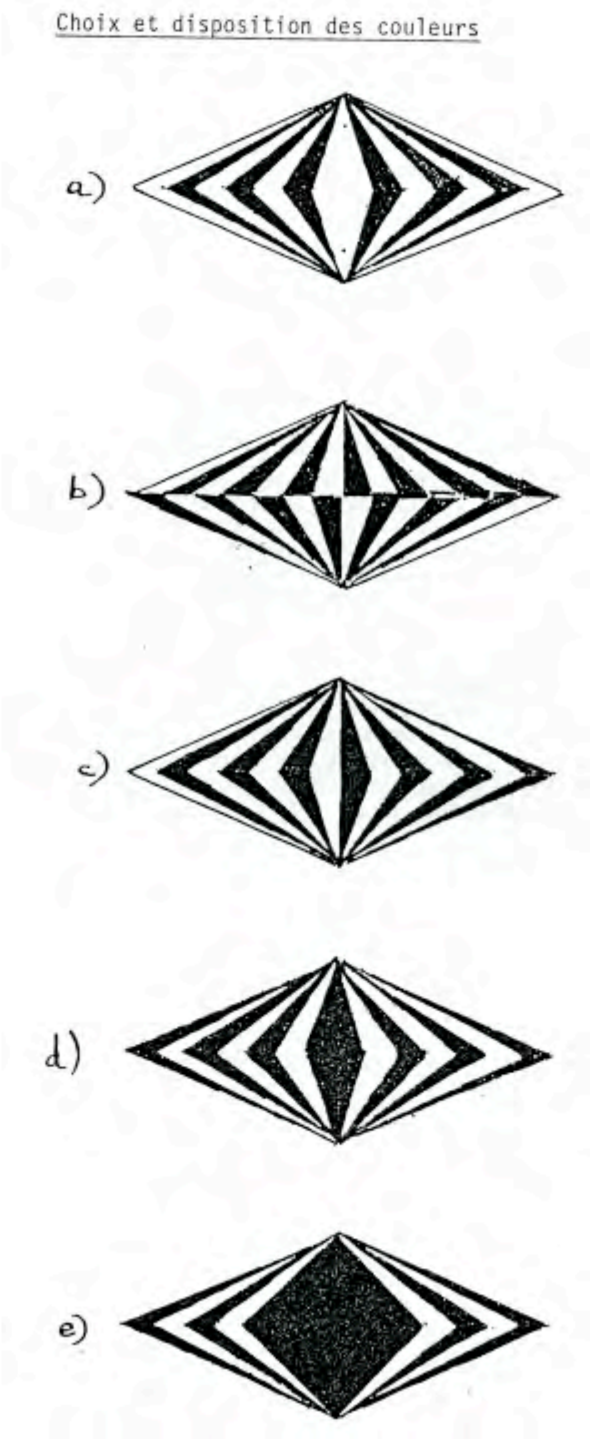
La démarche choisie consiste en une observation et une analyse collective d'un grand dessin affiché au tableau et reproduit ci-dessous.



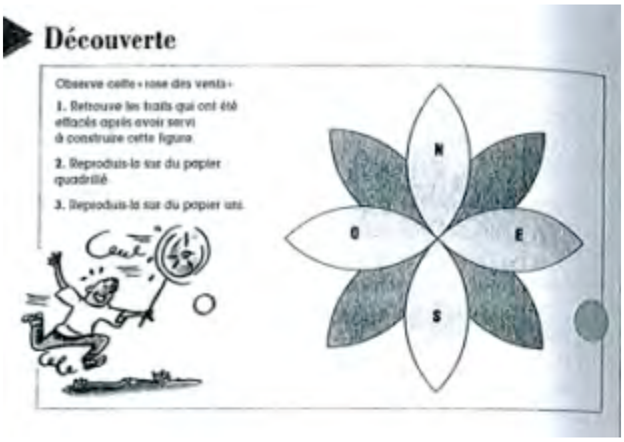




ANNEXE 2. LE PROBLEME DES LOSANGES (DUCEL, PELTIER 1986)



ANNEXE 3. LE PROBLEME DES ROSACES DANS DIFFERENTES RESSOURCES, A DIFFERENTES EPOQUES.



Découverte

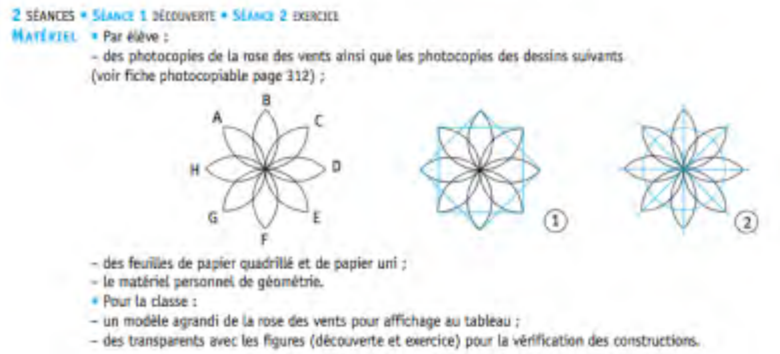
Observe cette « rose des vents »

1. Retrouve les traits qui ont été effacés après avoir servi à construire cette figure.

2. Reproduis-la sur du papier quadrillé.

3. Reproduis-la sur du papier uni.

Nouvel objectif Calcul, CM2, 1995-96.



2 SÉANCES • SÉANCE 1 DÉCOUVERTE • SÉANCE 2 EXERCICE

MATÉRIEL • Par élève :

– des photocopies de la rose des vents ainsi que les photocopies des dessins suivants (voir fiche photocopiable page 312) ;

– des feuilles de papier quadrillé et de papier uni ;
– le matériel personnel de géométrie.

• Pour la classe :

– un modèle agrandi de la rose des vents pour affichage au tableau ;
– des transparents avec les figures (découverte et exercice) pour la vérification des constructions.

Euromaths, CM2, 2009.

MALLETTE D'OUTILS MATHEMATIQUES, LE BOULIER ET LA PASCALINE

Gwenaëlle RIOU-AZOU
PRCE, ESPE de Bretagne
Gwenaelle.Riou-Azou@espe-bretagne.fr

Sophie SOURY-LAVERGNE
Maître de Conférences, Institut Français de l'Education
Laboratoire S2HEP
Sophie.Soury-Lavergne@ens-lyon.fr

Résumé
Les ressources présentées dans cet atelier sont issues du projet « mallette de ressources mathématiques pour l'école » dont l'objet a été la production de ressources pédagogiques, matérielles et digitales, pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle et au début de l'école primaire. La pascaline est une machine de type compteur mécanique, utilisée pour l'enseignement de la numération décimale et du calcul. La e-pascaline est une version numérisée de la pascaline, conçue de façon à renforcer son potentiel sémiotique et l'intérêt de son utilisation en classe (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013). De façon analogue, la mallette propose des bouliers chinois associés à un boulier virtuel (Riou-Azou, 2013). L'atelier permet de prendre connaissance de cet ensemble complexe de ressources composant la mallette.

Les ressources présentées dans cet atelier sont issues du projet « mallette de ressources mathématiques pour l'école »[1], conduit par un consortium national (Figure 1), qui a donné également lieu à des productions pour la maternelle, présentées dans ce même colloque (atelier A14 de S. Besnier, P. Eysseric et T. Le Mehaute et communication C25 de Bueno-Ravel, L., Eysseric, P., Riou-Azou, G. & Soury-Lavergne, S.). La pascaline est une machine de type compteur mécanique (Figure 2 à droite), utilisée pour l'enseignement de la numération décimale et du calcul (Soury-Lavergne & Maschietto, 2013). La e-pascaline est une version numérisée de la pascaline[2], conçue de façon à renforcer son potentiel sémiotique et l'intérêt de son utilisation en classe (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013). Elle est utilisée dans une collection de petites applications qui engagent les élèves dans la résolution de problèmes. De façon analogue, la mallette propose des bouliers chinois (Figure 2 à gauche) associés à un boulier virtuel[3] (Riou-Azou, 2013) (Gueudet, Bueno-Ravel, & Poisard, 2014). L'ensemble de ressources composant la mallette est complexe par la variété des objets réunis, objets matériels, logiciels et documentations pour les enseignants dont des propositions de séquences. Son appropriation par les enseignants est à l'étude dans le cadre d'une expérimentation en collaboration entre Canopé et l'IFÉ.

1 http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees/mallette

2 « e-pascaline » créée avec la technologie Cabri Elem accessible en ligne http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/cabri-elem-ife

3 Boulier j3p créé par Sésamath et l'IREM de Lille accessible en ligne http://cii.sesamath.net/lille/exos_boulier/boulier.swf

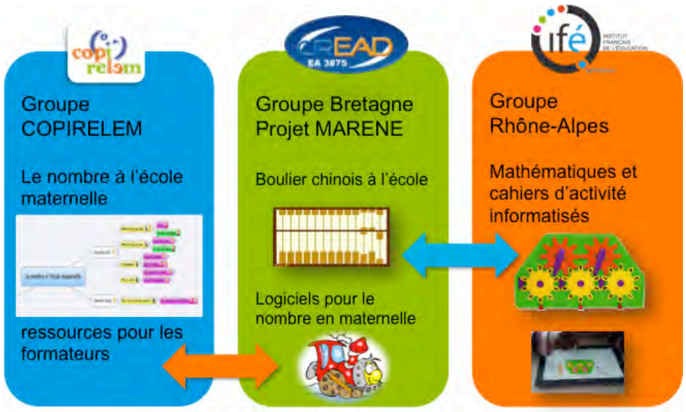


Figure 1. Les trois partenaires du projet « Mallette » sont la COPIRELEM, le CREAD et l'IFÉ. Ils ont produit des ressources matérielles et logicielles pour le nombre à l'école maternelle et élémentaire.

I - DES INSTRUMENTS ET DES MACHINES MATHEMATIQUES DANS LES MALLETTES POUR L'ECOLE

L'intérêt de matériels physiques pour l'apprentissage des mathématiques réside notamment dans la manipulation concrète d'objets et la réalisation d'opérations, au sens de mise en action des mains et sensation physique de l'action, ayant une possible signification mathématique. De nombreux travaux de recherche en didactique des mathématiques et dans d'autres champs scientifiques ont mis en évidence l'importance de la manipulation, des gestes et de la cognition incarnée pour la conceptualisation mathématique (pour une synthèse en français voir (Artigue, Cazes, Haspekian, Khanfour-Armalé, & Lagrange, 2013)).

Figure 2. Le boulier chinois (ou suan-pan) et la pascaline, tous deux initialisés à zéro

Ces objets matériels sont aussi issus de pratiques sociales ou historiques des mathématiques. Différentes versions de boulier existent (boulier japonais, boulier russe…) et sont encore actuellement en usage dans différentes parties du monde. Le boulier chinois présenté ici est très répandu en Chine depuis le 12e siècle. La pascaline est un héritage historique des travaux de Blaise Pascal. Si la Pascaline a bien été la première machine arithmétique fonctionnelle, malgré les efforts de B. Pascal pour diffuser et faire adopter son invention, son usage ne s'est pas répandu (Descotes, 1988). Elle reste néanmoins un outil exemplaire du travail arithmétique humain, « *le premier à lever la grande difficulté des travaux intellectuels par la simplicité de sa manœuvre, il se produit un renversement irréversible entre l'esprit et la machine : avec la petite boîte de la machine arithmétique, l'humanité est entrée dans une nouvelle phase de civilisation* » (Nagase, 2013). La pascaline moderne, commercialisée sous le nom de ZERO+1 par la société Quercetti, est une petite machine en plastique qui ne partage avec son illustre modèle que l'idée de rotation des roues pour réaliser la succession des chiffres dans l'écriture décimale des nombres et le recours à un engrenage pour automatiser les retenues. Cela s'avère suffisant pour en questionner l'intérêt pour l'apprentissage des mathématiques.

Les mallettes contiennent non seulement des artefacts matériels mais également des logiciels qui embarquent des versions digitales des artefacts matériels. C'est la complémentarité entre les artefacts matériels et les environnements informatiques qui est recherchée. Le boulier virtuel existe en deux versions qui ont été conçues indépendamment du projet mais dont les usages pour le cycle 1 ont été développés au sein du projet. La e-pascaline a été conçue dans l'environnement Cabri Elem et est disponible dans une collection de cahiers d'activité informatisés.

Ce compte rendu de l'atelier présente en parallèle l'usage de la pascaline et du boulier, chacun étant décliné en version matérielle et virtuelle, afin de mettre en évidence les différences et complémentarités de ces deux outils pour l'enseignement et l'apprentissage des nombres, de la numération et du calcul au cycle 2 de l'école primaire.

II - PRISE EN MAIN DU BOULIER ET DE LA PASCALINE

L'atelier a débuté par une prise en main des artefacts boulier et pascaline, en tant qu'objet permettant de faire des mathématiques. En effet, quelque soit le public, un temps d'appropriation personnelle est nécessaire, pour savoir comment utiliser ces outils pour faire quelques calculs mathématiques, avant même de s'interroger sur leur usage pour enseigner. Ce premier temps était guidé par deux types de questions : des questions concernant l'inscription des nombres et des questions concernant des opérations effectuées sur la pascaline[4] et sur le boulier. L'objectif était d'amener les participants à mettre en évidence les points communs et les différences entre les deux instruments.

1 Inscrire un nombre

Avant de pouvoir procéder à un calcul, l'utilisateur doit savoir comment inscrire un nombre sur la machine et comment lire un nombre inscrit sur la machine. Les deux outils fonctionnent selon les deux principes de la numération décimale (voir la communication C16 de F. Tempier dans ces actes) :

- le principe de position selon lequel la valeur d'un chiffre dépend de sa position dans l'écriture du nombre. La valeur d'une boule est donnée par la position de la tige dans le boulier, chacune des treize tiges correspond à un ordre d'unités, et la valeur d'une dent de la pascaline est donnée par la position de la roue dans la pascaline, chacune des trois roues correspondant également à un ordre d'unités.
- le principe décimal selon lequel les relations entre les ordres d'unités sont des puissances de 10, d'une tige à l'autre ou d'une roue à l'autre, les valeurs sont multipliées ou divisées par une puissance de 10.

La première tâche à effectuer sur le boulier et sur la pascaline était d'inscrire un nombre (90135 sur le boulier et 132 sur la pascaline). En effectuant cette tâche, les participants ont pu découvrir la nécessité de savoir comment sont placées les boules ou les roues en position initiale (inscription de zéro). Le boulier se tenant horizontalement, les boules sont placées contre le cadre extérieur et avec la pascaline, les dents portant le chiffre 0 sont placées en face des repères triangulaires rouges (Figure 2).

Pour inscrire le nombre 90135 sur le boulier, puisque $90135 = 9\times10^4 + 0\times10^3 + 1\times10^2 + 3\times10^1 + 5\times10^0$, on inscrit cinq sur la tige des unités, trois sur la tige des dizaines, un sur la tige des centaines et neuf sur la tige des dizaines de mille (Figure 3 à gauche). Sur chaque tige, l'inscription se fait en respectant la valeur des boules : les quinaires (boules situées au-dessus de la barre centrale) valent cinq et les unaires (boules situées au-dessous de la barre centrale) valent un.

Pour inscrire 132 sur la pascaline, il suffit d'actionner les roues et de positionner les chiffres voulus en face des triangles rouges (Figure 3 à droite).

4 A propos de la pascaline, un atelier de découverte avait été organisé en 2012 lors du 39e colloque de la COPIRELEM et les actes présentent plus en détail ces premières manipulations (Soury-Lavergne & Maschietto, 2013).

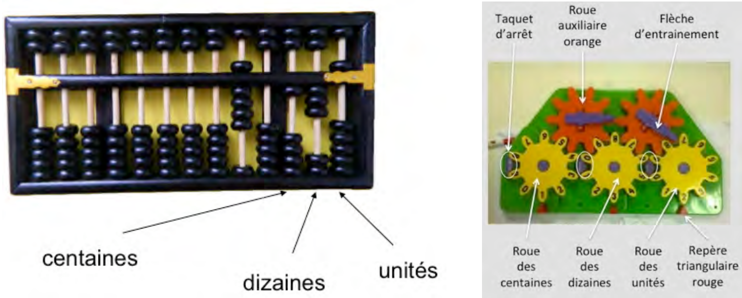


Figure 3. A gauche, inscription de 90 135 sur le boulier, à droite inscription de 132 sur la pascaline

Les participants ont pu constater une différence importante entre boulier et pascaline, lors de la recherche de l'inscription du nombre 10 : l'inscription n'est pas unique sur le boulier chinois tandis qu'elle l'est sur la pascaline.

En effet trois inscriptions sont possibles sur le boulier chinois. Une première possibilité est d'inscrire dix sur la tige des unités en s'appuyant sur la décomposition additive de dix suivante : 10 = 5+1+1+1+1+1 Figure 4 à gauche). Une seconde possibilité (Figure 4 au milieu) s'appuie, quant à elle, sur cette décomposition additive de dix : 10 = 5+5. Enfin une troisième inscription (Figure 4 à droite) est possible sur la tige des dizaines. Cette inscription s'appuie sur la décomposition de dix en une dizaine et zéro unité, elle est donc liée à la numération positionnelle en base dix. Cette dernière inscription qui est celle qui utilise le moins de boules possible se nomme « inscription économique » (Poisard, 2005).

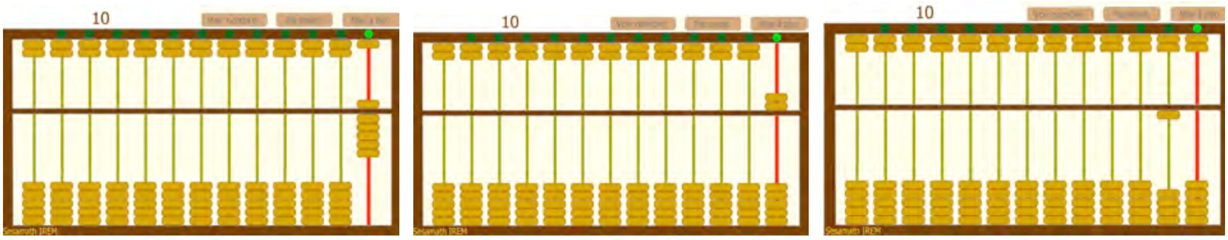


Figure 4[5]. Trois inscriptions différentes du nombre 10 sur le boulier chinois, celle de droite est la plus économique.

Avec la pascaline, un seul état correspond à l'affichage du nombre 10. En revanche deux procédures sont possibles à partir de l'initialisation de la pascaline à 0 pour aboutir à cet état. La procédure par itération consiste à actionner 10 fois la roue des unités (celle de droite). La procédure par décomposition consiste à actionner 1 seule fois la roue des dizaines (celle du milieu). D'une façon générale, avec la pascaline, on peut distinguer les procédures par itération, qui consiste à itérer la rotation de la roue de l'unité autant de fois que nécessaire et les procédures par décomposition qui utilisent successivement chacune des trois roues. Les procédures par décomposition sont plus économiques et s'appuient sur la décomposition canonique des nombres, comme dans le boulier.

En conclusion, pour l'inscription d'un nombre, ces deux outils se différencient d'abord par le fait que la pascaline présente des chiffres sur ses roues alors que le boulier ne montre que des boules sur ses tiges. L'intervalle de nombres qu'il est possible d'inscrire est également différent : [0 ; 9 999 999 999 999] pour le boulier et seulement [0 ;999] pour la pascaline. Enfin, l'inscription est unique sur la pascaline et peut être multiple sur le boulier.

2 Additionner et soustraire

La consigne donnée était d'effectuer les calculs suivants avec le boulier et avec la pascaline : 6+8, 653+271, 653 - 271 et de décrire les procédures utilisées.

Avec le boulier, pour additionner deux nombres il faut inscrire l'un des termes puis inscrire l'autre terme de l'addition « par dessus ». Par exemple, pour effectuer 6+8, on peut inscrire six sur la tige des unités en

5 Photos réalisées à partir de copies d'écran du logiciel boulier chinois développé par Sésamath et l'Irem de Lille.

activant une quinaire et une unaire puis activer la seconde quinaire et trois unaires sur cette même tige. Pour effectuer l'addition 653+271, il faut effectuer un échange : « *On peut dire que l'on manipule les retenues à la main sur le boulier chinois* » (Poisard, 2009). En effet, lorsqu'on inscrit 271 « par dessus » 653, on se retrouve avec huit dans les centaines, douze dans les dizaines et quatre dans les unités. Il est nécessaire de procéder à un échange de dix dizaines contre une centaine.

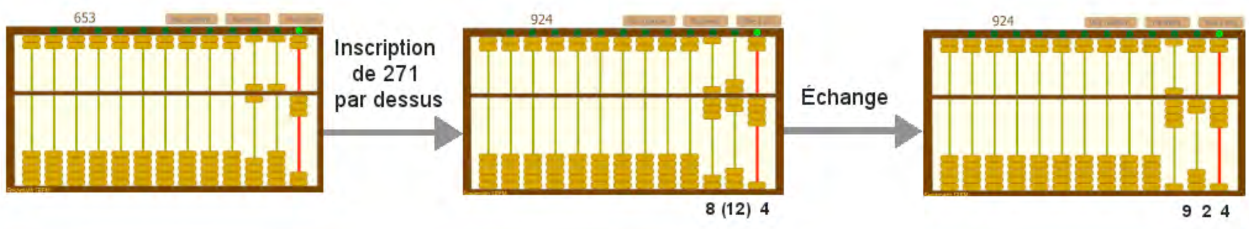


Figure 5. Calcul de 653 + 271 avec échange de 10 dizaines contre 1 centaine

Les participants ont pu noter que les retenues sont visibles et manipulées directement lors des échanges avec le boulier. Le fait que, de manière transitoire, douze soit inscrit sur la tige des dizaines permet de donner du sens à la retenue : douze dans les dizaines c'est cent-vingt unités et aussi une centaine et deux dizaines. La manipulation du boulier permet ainsi de donner du sens aux retenues qui apparaissent dans l'algorithme posé de l'addition.

De même pour soustraire 271 à 653, il est nécessaire d'échanger une centaine contre dix dizaines. C'est donc la technique de soustraction par emprunt qui est utilisée avec le boulier.

En ce qui concerne la pascaline, l'addition est réalisée en inscrivant le premier terme sur la pascaline, qui est alors lisible puis, le second terme est ajouté en poursuivant la rotation des roues à partir de cette position intermédiaire, d'un nombre de clics égal au second terme. Cela peut se faire soit par « itération de la roue des unités » dans le sens des aiguilles d'une montre, d'un nombre de dents égal au deuxième terme, soit par « décomposition » du second terme en faisant tourner les roues correspondantes d'un nombre de dents égal à chaque chiffre. Le clic sonore émis lors de l'incrémentation de chaque roue facilite le contrôle du nombre de clics, en l'absence d'affichage du second terme. En effet, à aucun moment le second terme n'est affiché sur la pascaline. Etant donné que la pascaline gère automatiquement le passage des retenues, l'utilisateur est libre d'incrémenter les roues dans l'ordre qu'il veut quand il utilise la procédure par décomposition. Suivant la taille des termes, la procédure par itération devient vite très couteuse et favorise le passage à la procédure par décomposition.

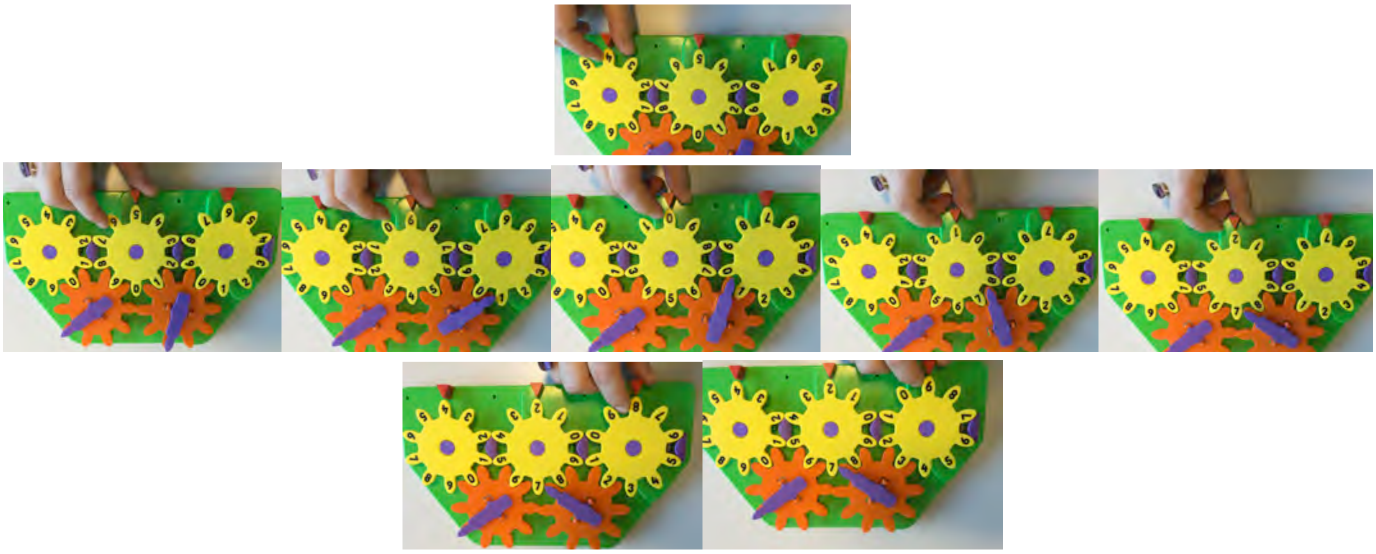


Figure 6. Addition 653+271 avec une procédure par décomposition sur la pascaline. 653 est inscrit, puis la roue des unités est tournée d'un clic, puis la roue des dizaines est actionnée de 7 clics (lorsqu'elle passe de 9 à 0, la roue des centaines tourne automatiquement d'un clic), finalement la roue des centaines est tournée de deux clics.

Avec la pascaline, la soustraction s'effectue simplement en inversant le sens de rotation des roues, mettant en évidence la réciprocité entre ces deux opérations.

Ainsi, pour les opérations, une différence notable entre le boulier et la pascaline concerne la gestion de la retenue (le passage d'un ordre d'unités à un autre lors des groupements et échanges). Sur le boulier cela doit être fait intentionnellement par l'utilisateur alors qu'elle se produit automatiquement sur la pascaline dès qu'une roue passe de 9 à 0 ou de 0 à 9, sans action spécifique de la part de l'utilisateur.

3 Les points communs et les différences entre le boulier et la pascaline

Cette phase de prise en main a montré que le boulier chinois et la pascaline sont deux instruments pour inscrire les nombres et pour calculer qui s'appuient sur la numération décimale tout en mettant en évidence des aspects différents :

- La représentation des nombres est analogique avec le boulier, sans présence de chiffres mais avec des boules représentant chacune une quantité tandis qu'elle est symbolique avec la pascaline puisque les chiffres de un à dix sont présents sur les roues. Dans les deux cas, le principe de position de la numération est matérialisé : par les tiges du boulier et par les roues et la pascaline.
- L'écriture d'un nombre n'est pas unique sur le boulier. Selon l'inscription effectuée, les connaissances mobilisées sont différentes (décomposition additive en appui sur cinq ou sur dix, numération positionnelle...). Sur la pascaline, l'écriture est unique mais, comme avec le boulier, il existe plusieurs procédures d'inscription ou de calcul qui s'appuient sur différentes connaissances : le nombre généré par itération de l'unité ou le nombre désigné par son écriture décimale dans les procédures par décomposition.
- Les deux instruments permettent d'effectuer des additions et des soustractions, le boulier chinois permettant toutefois de le faire avec des nombres beaucoup plus grands. Le boulier et la pascaline ne fonctionnent pas de la même manière pour les calculs nécessitant des groupements ou dégroupements (retenues) : les retenues sont manipulées à la main avec le boulier tandis que cela se fait de manière automatique avec la pascaline.

III - PRESENTATION DE SEQUENCES POUR LA GRANDE SECTION DE MATERNELLE ET LE COURS PREPARATOIRE

Après ce temps d'appropriation personnelle, les participants ont pu questionner l'utilisation de ces instruments en classe et ont découvert les ressources présentes dans les mallettes en visitant les sites où elles sont rendues disponibles (pour une présentation des ressources se référer à la communication C25 de ces actes (Bueno-Ravel, L., Eysseric, P., Riou-Azou, G. & Soury-Lavergne, S.)) :

- Ressources pour le boulier à l'école (consultée le 9 février 2015) : http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=611
- Ressources pour la pascaline en CP-CE1 (consultée le 23 avril 2015) : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees-13-14/mallette/prototype-mallette

Nous avons fait le choix de travailler seulement certains points des séquences proposées dans les ressources et de mettre l'accent sur l'articulation entre les usages des artefacts matériels et virtuels (Figure 11).

1 Le boulier en grande section de maternelle

Nous présentons ici les objectifs de la séquence, présentée dans la ressource « boulier chinois à l'école », ainsi que l'organisation de la classe, les phases de la séquence, les types de tâches proposés et montrons enfin un extrait de descriptif d'une séance. L'objectif général de la séquence est d'étudier différents codages du nombre et d'amener les élèves à faire des liens entre ces codages pour construire le sens du nombre. Plus précisément, il s'agit en GS de viser les objectifs suivants :

- inscrire et lire des nombres jusqu'à 30 avec le boulier chinois ;
- distinguer valeur et quantité (une unaire n'a pas la même valeur qu'une quinaire pourtant ces deux boules sont physiquement identiques) ;
- décomposer de manière additive des nombres (un même nombre peut se coder de différentes manières sur le boulier).

Nous précisons que pour le dernier objectif, il n'est pas judicieux de privilégier l'inscription économique des nombres. Au contraire, il faut encourager les élèves à connaitre différents codages sur le boulier et à passer de l'un à l'autre. Cela leur permet de décomposer les nombres de différentes manières.

La séquence est construite pour permettre un fonctionnement en atelier dirigé en GS car la présence du professeur est importante pour permettre aux élèves de comprendre les règles d'utilisation du boulier et les mémoriser. Cela dit, des temps de travail en autonomie sont possibles et permis notamment avec l'utilisation d'un boulier paramétrable par l'enseignant (voir dans la partie IV figure 13, les possibilités offertes par le boulier paramétrable).

Dans cette séquence deux types de tâches sont proposées aux élèves : des tâches d'inscription et des tâches de lecture des nombres. La séquence est constituée de quatre phases incluant vingt et une séances :

- Phase 1 : découverte du boulier, inscrire et lire les nombres de 0 à 5 (séances 1 à 3)
- Phase 2 : inscrire et lire les nombres de 0 à 10 (séances 4 à 7)
- Phase 3 : inscrire et lire les nombres de 0 à 20 (séances 8 à 14)
- Phase 4 : inscrire et lire les nombres de 0 à 30 (séances 15 à 21)

Pour chacune des séances, les ressources utilisées de manière préférentielle sont indiquées (Figure 8). Selon les séances, les élèves utilisent ainsi le boulier matériel et/ou le boulier virtuel et /ou des fiches du boulier. Le contenu de chaque séance est ensuite détaillé (Figure 9). Des précisions sont apportées concernant la mise en œuvre, l'organisation de la classe, le vocabulaire utilisé. Le but est de faciliter une mise en œuvre de séances en soulignant les points importants.

PHASE 1 : DÉCOUVERTE DU BOULIER. INSCRIRE ET LIRE DES NOMBRES DE 0 À 5.

Numéro séance	Inscrire et lire des nombres. Domaine numérique	Boulier matériel	Boulier virtuel	Travail sur fiche : lire un nombre	Travail sur fiche : inscrire un nombre
S1	0 à 5	X			
S2	0 à 5		X	X	
S3	0 à 5		X		X

Figure 8. Indication des ressources (boulier matériel, boulier virtuel, fiche etc.) à utiliser pour chaque séance dans la ressource en ligne « boulier en classe » ?

S2

Inscrire et lire des nombres de 0 à 5

Pour cette séance, les élèves apprennent à se servir du logiciel sur le boulier et donc à manier un boulier virtuel sur un ordinateur et éventuellement sur le TBI également. Un travail individuel sur fiche est proposé pour « lire des nombres de 0 à 5 » avec le boulier virtuel comme aide. Les élèves ne codent que les boules activées sur la fiche. Une seconde phase collective permet de poursuivre le travail sur les deux manières de coder 5.

Le vocabulaire travaillé est : celui de la S1 : tige, boule, ligne de lecture , activer, et également : unaire, quinaire.

Remarques

Pour le travail sur fiche, les élèves ont besoin de s'aider du boulier virtuel à ce moment de l'année.

Organisation de la classe et matériel

Organisation de la classe : un groupe de 8 élèves
Élève : boulier virtuel sur un ordinateur et sur le TBI pour les phases collectives
Fiche élève : lire les nombres de 0 à 5 (avec une aide pour écrire les nombres)
Livre du boulier et bande numérique

Figure 9. Description de la séance 2 de la phase 1 sur la ressource en ligne « boulier chinois à l'école »

2 La pascaline au CP

La ressource « mallette au CP-CE1 » en ligne sur le site EducMath, à propos de la pascaline, propose une séquence d'enseignement en CP, un ensemble de vidéos et tutoriels pour accompagner la prise en main par les enseignants de la pascaline, de la e-pascaline et des cahiers d'activité informatisés qui utilisent la e-pascaline (Figure 10).

La séquence, organisée en quatre unités clefs (Figure 10 à droite), a été conçue en collaboration avec des enseignants du terrain. Elle a pour objectif de travailler les notions suivantes : la numération de position en base 10, la dizaine, les décompositions additives et soustractives des nombres et l'articulation la numération et le calcul. Pour cela, elle propose différents types de tâches :

- afficher et lire un nombre sur la pascaline, à partir de collections d'objets ou de dictées de nombres
- additionner et soustraire,
- chercher diverses décompositions additives et soustractives d'un nombre.

L'unité 1 a pour objectif la découverte et la prise en main autonome de la machine par les élèves autour de questions telles que comment est faite cette machine et à quoi elle sert. Basée sur la production d'un dessin de la machine, qui permet de finaliser son exploration et sa description par les élèves, cette étape se conclue par la mise en place d'un vocabulaire pour désigner les parties de la machine les plus importantes en vu de son usage mathématique : les roues, les dents, les triangles rouges.

L'unité 2 permet de travailler l'inscription d'un nombre et de définir l'usage de chaque roue : unité, dizaine et centaine. Avec le cahier d'activité informatisé « les nombres avec la e-pascaline », l'élève de CP peut soit dénombrer une collection d'objets et inscrire sur la pascaline le nombre obtenu, soit utiliser la pascaline pour produire l'écriture chiffrée du nombre d'objets en associant, terme à terme, un objet avec un clic sur la roue des unités. Il utilise alors la e-pascaline pour générer une écriture chiffrée qu'il ne saurait pas encore lui-même associer au mot nombre. Le cahier propose également la tâche d'écrire sur la e-pascaline un nombre dicté à l'oral (nombres inférieurs à 100 en particulier dans la partie irrégulière de la centaine).

L'unité 3 concerne l'addition et la soustraction. Comme on l'a vu en I, l'addition avec la pascaline ne traite pas les deux termes de façon symétrique. En revanche, elle respecte la commutativité de l'addition. Le cahier « Additionner avec la e-pascaline » apporte une contrainte supplémentaire qui est de restreindre le nombre de clics possibles sur la roue des unités afin d'amener les élèves à abandonner la procédure par itération de la roue des unités, qui fait appel à une conception du nombre comme quantité d'unités, au profit de la procédure par décomposition, qui fait appel à l'écriture décimale du nombre.

Figure 10. Page d'accueil du site de la « mallette en CP-CE1 » (à droite) et entrée vers les unités d'enseignement (à gauche)

L'unité 4 utilise la pascaline pour créer un nouveau problème qui est celui de l'écriture d'un nombre sur la pascaline en un minimum de clics. C'est-à-dire qu'il s'agit de rechercher une écriture économique des nombres avec la pascaline, le coût d'une écriture étant calculé en nombre de clics sur les roues. Plusieurs solutions sont possibles et suivant les nombres, la solution la plus économique repose soit sur une itération de la roue des unités (5 en 5 clics sur la roue des unités), soit sur la décomposition canonique en unités, dizaines et centaines (31 en 3 clics sur la roue des dizaines et 1 sur la roue des unités) ou encore sur une décomposition soustractive (19 en 20-1, c'est-à-dire 2 clics sur la roue des dizaines et un clic sur celle des unités). La résolution de ce problème fait apparaître différentes propriétés d'un nombre, différentes décompositions additives et soustractives et mobilise du calcul réfléchi. Ce problème a du sens grâce à la machine et engage les élèves (et les adultes) dans une véritable recherche de solutions. L'utilisation de la e-pascaline est cruciale car elle fournit un compteur de clics qui décharge ainsi l'élève du calcul du coût de sa procédure en même temps qu'il l'exécute.

IV - LES DUOS D'ARTEFACTS DANS LES SEQUENCES

Les deux ressources présentées dans la partie III ont en commun le fait d'intégrer dans leur séquence l'utilisation d'un duo d'artefacts (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013), c'est à dire l'utilisation d'une version matérielle et d'une version logicielle de l'instrument considéré. Nous avons proposé aux participants d'évaluer ce choix et d'étudier la valeur ajoutée de la technologie.

Figure 11. Les élèves avec les duos d'artefacts

1 Valeur ajoutée du virtuel dans la représentation des nombres et dans le fonctionnement de l'artefact

Dans les deux cas, l'apparence et le fonctionnement de la version logicielle n'est pas identique à celui de la version matérielle. Ces différences sont exploitées didactiquement pour favoriser chez les élèves un usage de l'instrument qui se rapproche du travail mathématique visé. Dans le duo, chaque composant apporte une dimension qui lui est propre.

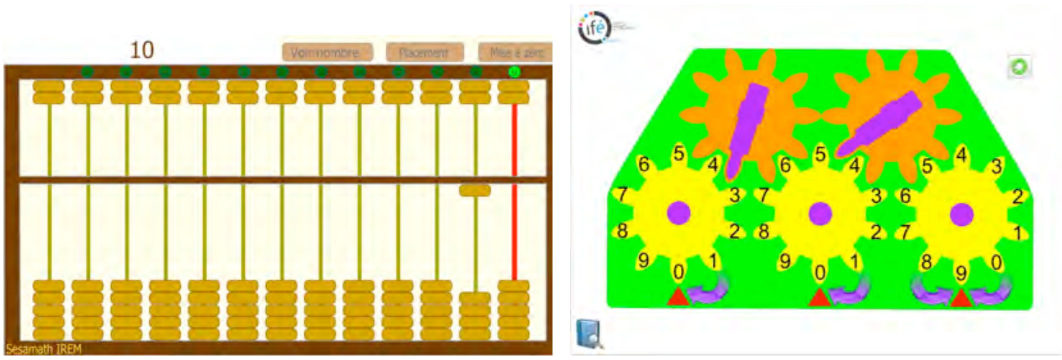


Figure 12. À droite, le boulier virtuel de Sésamath avec la tige des unités en rouge, l'icône « voir nombre » pour afficher le nombre en chiffres, l'icône « placement » pour inscrire économiquement un nombre sur le boulier et « la remise à zéro ». A droite, la e-pascaline de l'IFÉ avec les flèches d'action sur les roues (de part et d'autre des triangles rouges) et l'icône de remise à zéro (à droite).

Le boulier dans la version virtuelle de Sésamath (Figure 12 à gauche), dispose par rapport à la version matérielle, de fonctions et de caractéristiques spécifiques : la tige choisie pour les unités est rouge ; un clic sur l'icône « mise à zéro » désactive toutes les boules ; un clic sur « voir nombre » permet d'afficher l'écriture chiffrée du nombre inscrit sur le boulier et enfin un clic sur « placement » entraîne l'affichage de l'inscription économique du nombre, c'est-à-dire celle qui utilise le moins de boules possible. Le fait que la tige des unités soit rouge facilite la prise en main du boulier virtuel par les élèves. En effet, les élèves de GS se posent souvent la question du choix de cette tige avec le boulier matériel et certains choisissent la tige la plus à gauche. Le professeur peut, en s'appuyant sur le fonctionnement du virtuel, coller une gommette rouge sur le cadre du boulier matériel au-dessus de la tige des unités. L'icône « voir nombre », en permettant l'affichage de l'écriture chiffrée du nombre, est aussi une aide pour découvrir seul les règles d'utilisation du boulier. En effet, les élèves peuvent faire des essais, tâtonner pour apprendre à inscrire les nombres. Pour nous, cela permet de favoriser une démarche d'investigation lors de la découverte de l'artefact. L'icône « placement » nous semble moins utile dans la mesure où, en GS, il n'est pas souhaitable de favoriser l'inscription économique des nombres par rapport aux autres inscriptions. De plus, comme l'ont souligné certains participants, le passage d'une inscription à l'inscription économique est très rapide lorsqu'on clique sur l'icône « placement ». Pour en tirer un avantage en terme d'apprentissage, il faudrait pouvoir conserver l'affichage de l'inscription initial en parallèle de l'inscription économique. Cela nécessite l'ouverture simultanée de deux fenêtres du logiciel ce qui est possible notamment avec un tableau numérique interactif (Figure 13).

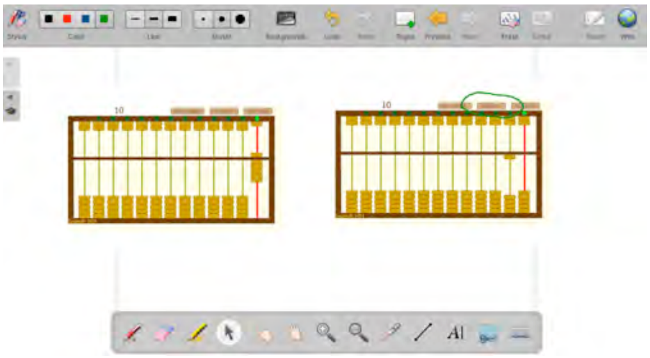


Figure 13. Comparaison de deux inscriptions de 10 au TNI avec Open-Sankoré

La e-pascaline (Figure 12 à droite) est elle aussi assez différente de la pascaline, bien que son apparence graphique, forme et couleur, soit très proche. Les chiffres sont toujours bien orientés pour la lecture quelque soit la position de la roue et plusieurs boutons de réinitialisation sont disponibles (au centre de chaque roue le cercle violet est cliquable et remet les trois roues à zéro). Une autre caractéristique de la e-pascaline, qui la différencie de la pascaline, est que les calculs ne sont rendus possibles que si le résultat peut s'afficher correctement, c'est-à-dire si le résultat de l'opération est compris entre 0 et 999. Ainsi lorsque la e-pascaline est initialisée à 000, aucune soustraction n'est possible. De même, lorsqu'elle affiche 900, il n'est plus possible d'ajouter une centaine. L'utilisateur s'en rend compte car la flèche d'action sur la roue des centaines disparaît (voir partie IV.3. pour la description des flèches d'action). Par exemple, sur la pascaline de la Figure 12 qui affiche 9, il n'est pas possible de soustraire une dizaine ou une centaine, les flèches d'action sont donc masquées. Ainsi l'usage de la e-pascaline est contraint pour rester à l'intérieur de son domaine de validité, alors que la pascaline matérielle permet, elle, de « faire » 000-1 ou 999+1 (nous laissons au lecteur le soin d'imaginer quels sont les affichages obtenus). Les cahiers d'activité informatisés de la collection e-pascaline proposent différentes tâches qui, en complément de l'utilisation de la pascaline, contribuent à l'avancée de la séquence. Ces cahiers constituent un environnement d'apprentissage car ils fournissent des rétroactions et s'appuient sur une évolution de valeurs de variables didactiques (Mackrell, Maschietto, & Soury-Lavergne, 2013). Dans les cahiers, l'usage d'une roue est contraint pour favoriser l'évolution des procédures élèves vers la procédure par décomposition ou, autre exemple, des outils annexes sont proposés, tels que le compteur de clics. Les nombres et les calculs soumis aux élèves sont générés aléatoirement (dans un ensemble contraint par un choix de valeurs de variables didactiques ou dans une liste fournie par l'enseignant), les rétroactions sont fines et fréquentes (chaque essai peut être évalué à la demande de l'élève, voir la colonne de smiley pour les additions réussies ou pas dans la Figure 14) et des aides sont fournies. Tous ces éléments font la valeur ajoutée de la e-pascaline et des cahiers informatisés.

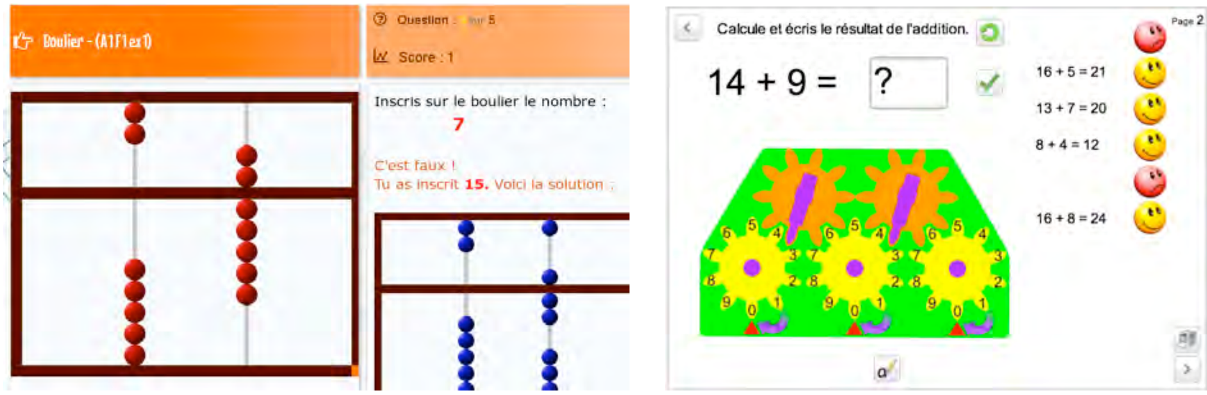


Figure 14. Interface des logiciels avec les rétroactions qui valident ou invalident les essais des élèves. A gauche, l'élève doit inscrire 7 sur le boulier. A droite l'élève doit calculer l'addition 14+9. Dans les deux cas, la réponse de l'élève est évaluée par le système.

Mais dans le duo d'artefacts, la machine matérielle a elle aussi des apports spécifiques pour l'apprentissage. L'utilisation de la pascaline matérielle garantie la présence et la mobilisation de compétences kinésiques (le retour d'effort différent au passage d'une dent ou d'une dizaine), l'occurrence de la boucle perceptivo-motrice œil-main et l'engagement corporel de l'élève, dont les recherches ont montrés l'importance pour l'apprentissage, en particulier en mathématiques. La pascaline matérialise physiquement le processus d'écriture des nombres avec notre système décimal, elle donne à voir le mécanisme de la numération. Comme le dit une élève de CE1 (2014 en Haute-Loire) : « *C'est facile, c'est comme si c'était un fonctionnement dans notre tête, mais qu'on avait reproduit comme ça, devant nous !* ».

2 Des gestes différents

Au-delà des fonctions additionnelles du boulier virtuel ou de la e-pascaline par rapport aux versions matérielles, leur utilisation nécessite des gestes différents de la part des élèves, ce qui peut avoir également une influence sur leurs procédures. Sur le boulier virtuel, comme sur la e-pascaline, certains gestes sont empêchés.

Par exemple, sur le boulier virtuel, il n'est pas possible d'activer simultanément des quinaires et des unaires d'une même tige. Avec un boulier matériel, un geste de pince avec le pouce et l'index le permet. Il n'est pas non plus possible d'activer simultanément des boules sur différentes tiges. Avec un boulier matériel l'utilisation des deux mains rend cette action possible. En effet, avec le boulier virtuel, un clic accompagne chaque activation de boules. Cela peut sembler plus fastidieux, mais l'objectif ici n'est pas d'être le plus rapide possible, il s'agit d'apprendre à inscrire et lire des nombres et d'être capable d'expliciter sa procédure.

De même, pour actionner les roues de la e-pascaline, l'utilisateur clique sur l'une des flèches courbes situées de part et d'autre des triangles rouges. Une action directe sur les roues n'est plus possible, en particulier sur les roues oranges. Il s'agit d'une contrainte sur le geste d'action qui est utile pour l'apprentissage car elle permet d'associer précisément une opération mathématique, addition ou soustraction, avec un seul sens de rotation. C'est un apport de la e-pascaline parce que lorsqu'ils le peuvent, donc avec la pascaline, les élèves apprécient beaucoup de tourner les roues oranges, en particulier en attrapant la tige violette supérieure. Or les roues oranges, directement engrenées sur les roues jaunes à leur droite, tournent dans le sens inverse de ces roues jaunes. La contrainte sur le geste avec la e-pascaline permet de construire un lien stable entre sens de rotation et opération. Un autre geste bloqué et le faire de faire défiler plusieurs dents en un seul clic. Cela favorise également le recours à la roue d'unité supérieure pour rendre une procédure plus économique.

Dans le cas du boulier virtuel comme de la e-pascaline, la contrainte sur l'action de l'utilisateur renforce le lien entre geste et signification mathématique.

3 Travail en autonomie et mise en commun

Deux autres avantages des artefacts virtuels sont également soulignés par les participants à l'atelier. L'usage d'une version virtuelle lors des séquences de classe favorise l'autonomie de l'élève et facilite les mises en commun.

Les bouliers virtuels (Figure 12 à gauche ou boulier j3p de la Figure 14) et la e-pascaline permettent aux élèves de travailler en autonomie (une fois que les premières séances de découverte et d'apprentissage ont été menées).

Par exemple, un élève de GS peut travailler en autonomie avec à la fois, un boulier matériel , le logiciel créé par Sésamath installé sur un ordinateur individuel (Figure 11) et une fiche lui indiquant les tâches à effectuer. L'affichage de l'écriture chiffrée du nombre permet à l'élève de vérifier son inscription sur le boulier matériel. Le fait que l'élève écrive sa réponse sur une fiche permet à l'enseignant de suivre ses progrès et de valider ses réponses. Le boulier paramétrable (boulier j3p) favorise encore davantage l'autonomie puisque les tâches sont données par le logiciel et la validation des réponses est également prise en charge. Cependant, il a été remarqué que si le logiciel propose une bonne réponse en cas d'erreur (Figure 14) il n'apporte pas d'aide aux élèves.

De la même manière les cahiers d'activité informatisés favorisent l'engagement et l'autonomie des élèves de CP. Ils peuvent effectuer des calculs avec la pascaline ou la e-pascaline, recevoir des aides (qui ne consistent pas à montrer la solution mais à mettre en évidence une caractéristique de la réponse de l'élève) et demander une évaluation. La succession des pages des permet de décliner une même tâche en modifiant ses caractéristiques (choix de valeurs de variable didactique), de faire évoluer l'enjeu de la tâche et le tirage aléatoire des valeurs numériques fournit à tous les élèves l'occasion d'essayer autant de fois que voulu.

L'utilisation du boulier virtuel ou de la e-pascaline avec un vidéo-projecteur ou un TNI apporte une aide importante lors des mises en communs en permettant aux élèves de partager et d'expliciter leurs procédures.

Figure 15. Exemples de mise en commun au TNI ou vidéo projecteur, avec le boulier virtuel (à gauche) et la e-pascaline (au centre et à droite).

V - CONSTATS AVEC LES ELEVES

1 Avec le boulier

Lors de la découverte de la séquence pour la GS, les participants ont pu envisager des difficultés rencontrées par les élèves lorsqu'ils utilisent un boulier chinois en GS ainsi que des réussites possibles en terme d'apprentissages sur le nombre.

Tout d'abord, la difficulté principale en GS est bien sûr de différencier la valeur d'une boule de la quantité de boules. En effet, lors des premières séances d'utilisation du boulier, les élèves commettent souvent des erreurs comme : ils activent cinq unaires et une quinaire dans les unités pour inscrire six. Pour eux il n'est pas évident d'admettre qu'une boule strictement semblable à une autre n'a pas la même valeur. Il est nécessaire d'utiliser le boulier régulièrement et sur un temps long pour permettre aux élèves de parvenir à surmonter cette difficulté initiale. Cela explique pourquoi la séquence en GS est constituée d'un nombre important de séances. C'est aussi pour cela que les premières séances ne sont consacrées qu'à l'inscription et la lecture des nombres jusqu'à cinq.

Nous soulignons le fait que cet apprentissage est facilité par le lien entre le boulier et les mains en prenant l'exemple d'une élève que nous avons observée lorsqu'elle inscrivait huit sur un boulier matériel. Elle a commencé par lever les cinq doigts de la main gauche (Figure 16) puis a activé une quinaire avec la main droite dans les unités en prononçant le mot cinq. Ensuite, elle a activé une unaire en prononçant « six », une seconde unaire en prononçant « sept » et enfin une unaire en prononçant « huit ». Elle a associé une quinaire à une main et une unaire à un doigt pour inscrire huit.

Cet appui sur les mains constitue une aide importante pour les élèves. Cette association peut se faire aussi pour les nombres sur la tige des unités jusqu'à quinze. L'exemple ci-dessous montre Déborah, enseignante en GS, que nous avons observée en 2012/2013 (Riou-Azou, 2013). Elle demande aux élèves d'utiliser leurs mains pour lire l'inscription réalisée au TNI en disant « dix ce sont les deux mains avec tous les doigts ». Les élèves ajoutent ensuite les cinq unaires à dix.

Figure 16. Inscription de huit à l'aide des mains (à gauche) et lecture de quinze en s'aidant des deux mains (à droite).

Enfin, le fait que le matériel envisagé pour mettre en œuvre la séquence ne se limite pas au boulier chinois nous a permis d'insister sur le fait que le boulier s'intègre dans la classe comme d'autres ressources pour construire le nombre mais ne se substitue pas à elles (Riou-Azou, 2015). Les élèves s'appuient par exemple sur la bande numérique pour inscrire un nombre. Cette élève (Figure 17) utilise la bande numérique pour associer le mot-nombre treize prononcé par l'enseignante à l'écriture chiffrée 13. Elle peut ensuite activer une unaire dans les dizaines et trois unaires dans les unités.

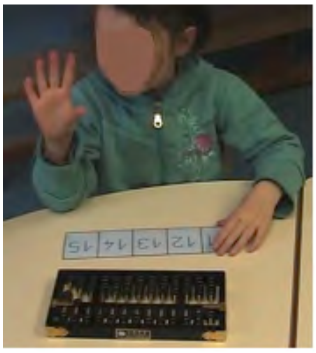


Figure 17. Inscription de treize sur un boulier à l'aide d'une portion de bande numérique.

2 Avec la pascaline

Au cours de la découverte de la pascaline matérielle, les élèves n'orientent pas la machine dans le bon sens et ne lisent pas les chiffres au dessus des repères triangulaires rouges (mais en face des tiges des roues oranges). En revanche, ils identifient bien les bruits et la résistance particulière de la machine au moment du passage de 9 à 0 « qui fait tout bouger ». Ils créent un vocabulaire pour désigner les différentes parties de la machine, comme par exemple tourniquet, fleur ou soleil pour parler des roues. A propos de l'utilité d'une telle machine, si elle ne leur a pas été présentée comme une machine mathématique, ils supposent que c'est pour lire l'heure ou pour jouer. Les dessins de la pascaline, qu'ils réalisent à la demande de l'enseignant, sont révélateurs des conceptions disponibles à propos du nombre et des chiffres : les chiffres peuvent

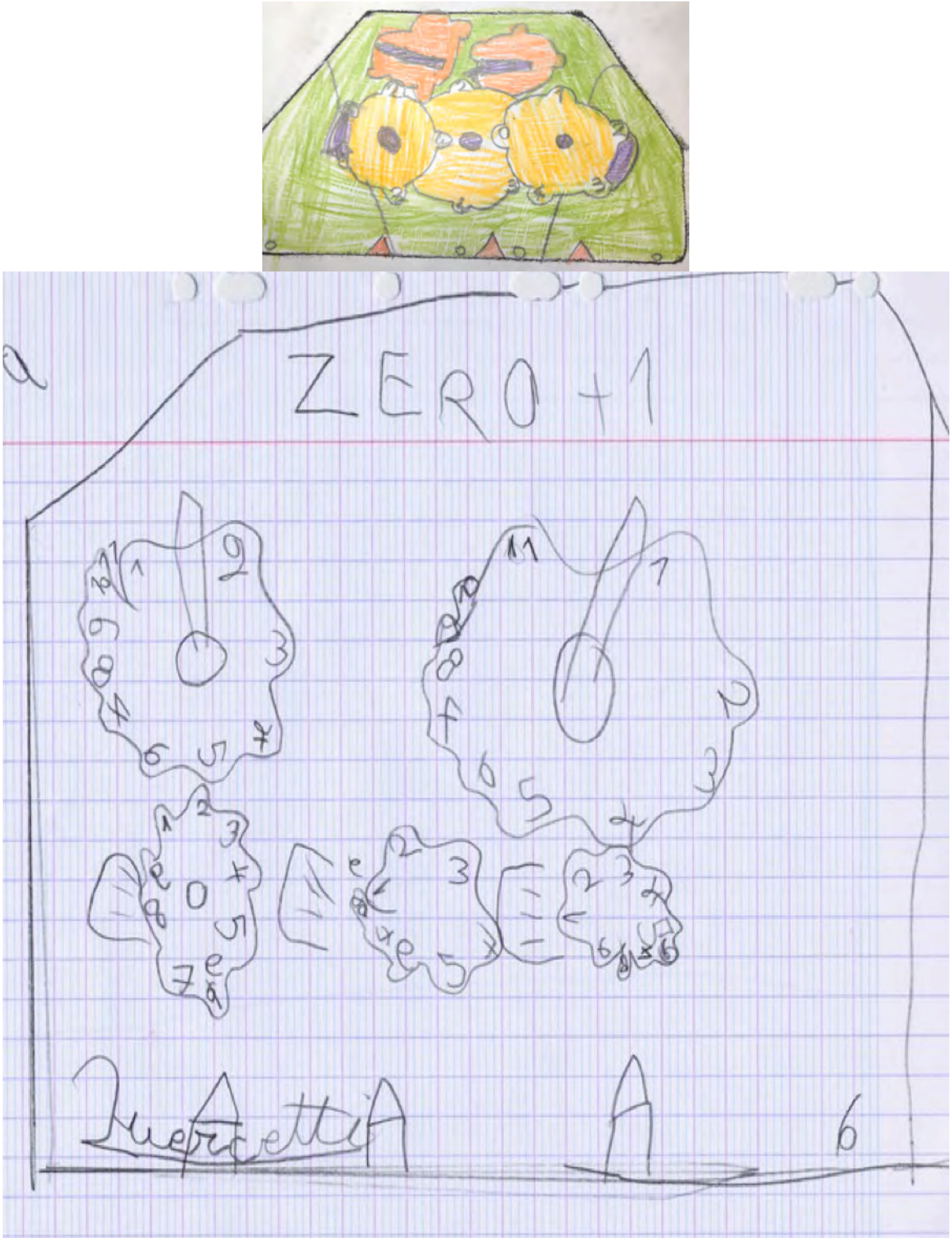


Figure 18. Dessins d'élèves montrant que les chiffres de 0 à 9 ne sont pas la caractéristique principale de la pascaline.

Les roues ne correspondent pas initialement aux unités, unité, dizaine et centaine. Ainsi, lorsqu'ils écrivent le nombre 13, les élèves utilisent toutes les roues et ne placent pas zéro sur la roue non utilisée. Ils obtiennent des affichages tels que 130, 137, 913 etc… qui permettent de discuter de l'usage de la machine, d'introduire une convention d'usage pour l'écriture et de nommer les roues.

Le passage à l'addition n'est pas aisé. Les élèves ont du mal à comprendre la répartition du travail entre l'utilisateur et la machine (ils écrivent les deux termes de l'addition sur la machine et attendent un effet ou alors calculent de tête et inscrivent le résultat sur la machine). Mais la difficulté vient du fait que le second terme de l'addition n'est à aucun moment affiché par la machine. Le contrôle du second terme est alors fait par le nombre de clics et, pour les élèves de CP, renvoie uniquement à une quantité d'unités : « 17 c'est 17 unités, donc pour additionner 17, je clique 17 fois sur la roue des unités ». Le rôle du cahier e-pascaline, qui limite l'usage de la roue des unités et rend impossible de faire 17 clics est alors déterminant pour rendre nécessaire l'évolution vers la procédure par décomposition.

L'usage de la machine nécessite de faire le lien entre parcourir la suite des nombres entiers (affichage du nombre suivant en faisant un clic sur la roue des unités) et l'opération +1. Ce lien entre bande numérique, numération et calcul est nécessaire pour résoudre le problème de l'unité 4 qui demande d'écrire un nombre en un minimum de clics. Les élèves ne mobilisent pas spontanément des procédures qu'ils considèrent relever du calcul pour résoudre un problème d'écriture de nombre qui consiste à positionner le bon chiffre à la bonne place. Pour écrire 19, on voit les élèves faire 1 clic sur la roue des dizaines, -1 clic sur la roue des unités puis ajuster à nouveau la roue des dizaines en faisant +1. Cette procédure qui peut se résumer par +10-1+10 n'équivaut pas à faire +20-1. D'ailleurs, ces mêmes élèves ne sont pas capables d'écrire 9 en un minimum de clics. Ces élèves sont dans le positionnement des chiffres au bon endroit et en ajustant si nécessaire, donc dans la numération. Mais ils ne mobilisent pas leurs connaissances sur le calcul et le fait que 19 est proche de 20. Comme l'engagement des élèves dans la résolution du problème est très forte et que l'écriture des nombres 9 ou 99 résiste, l'intervention de l'enseignant et le passage par des traces écrites permet de faire émerger d'autres procédures et diverses décompositions additives et soustractives des nombres.

VI - CONCLUSION, UN ACCOMPAGNEMENT DES ENSEIGNANTS NECESSAIRE

Les participants présents ont pu se rendre compte de la nécessité de disposer d'un temps suffisamment long pour prendre en main les artéfacts ainsi que pour s'approprier des ressources produites dans les mallettes. C'est dans cet objectif que des parcours de formation continue ont été ou sont actuellement en construction sur la plateforme M@gistère.

Le parcours M@gistère « IFE - La numération décimale avec une machine mathématique au cycle 2 » est disponible en échange inter-académique (il n'est pas inscrit sur le catalogue national mais utilisé dans les académies de Dijon, Lyon et Clermont-Ferrand).

Le parcours M@gistère «Matériels et logiciels pour la construction du nombre : le boulier chinois, nombres et calcul » est disponible sur la plateforme nationale[6] (à partir de septembre 2015).

VII - REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Artigue, M., Cazes, C., Haspekian, M., Khanfour-Armalé, R., & Lagrange, J.-B. (2013). *Geste, cognition incarnée et artefacts : une analyse bibliographique pour une nouvelle dimension dasn les travaux didactiques au LDAR* (No. 8). Paris, France: IREM Paris 7. Retrieved from http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/PS/IPS13006/IPS13006.pdf

Descotes, D. (1988). Pascal et le marketing. In *Mélanges offerts au Professeur Maurice Descotes* (pp. 141–162). Univ. de Pau et de l'Adour.

Gueudet, G., Bueno-Ravel, L., & Poisard, C. (2014). Teaching Mathematics with Technologies at Kindergarten: Resources and Orchestrations. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (Vol. 2, pp. 213–240). Springer.

Mackrell, K., Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013). The interaction between task design and technology design in creating tasks with Cabri Elem. In C. Margolinas (Ed.), *ICMI Study 22 Task Design in Mathematics Education* (pp. 81–90). Oxford, Royaume-Uni.

Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(7), 959–971. http://doi.org/10.1007/s11858-013-0533-3

Nagase, H. (2013). La machine arithmétique et les « ordres » pascaliens. *Dix-Septième Siecle*, *4*(261),

6 https://magistere.education.fr/dgesco/

677–694. http://doi.org/10.3917/dss.134.0677.

Poisard, C. (2005). Les objets mathématiques matériels, l'exemple du boulier chinois. *Petit X*, *68*, 39–67.

Poisard, C. (2009). Boulier chinois et algorithmes de calcul. *Plot*, *27*, 22–27.

Riou-Azou, G. (2013). *La construction du nombre en grande section de maternelle avec un boulier chinois virtuel. Mémoire de Master 2 RASPL, Quimper, non publié.* (Master 2 RASPL). Université de Bretagne Occidentale.

Riou-Azou, G. (2015). Apports du boulier chinois en grande section de maternelle. *Repères IREM*, *98*.

Soury-Lavergne, S., & Maschietto, M. (2013). A la découverte de la « pascaline » pour l'apprentissage de la numération décimale. In C. Ouvrier-Buffet (Ed.), *XXXIXe colloque de la COPIRELEM Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève*. Quimper, France.

DE LA RESSOURCE À LA SÉANCE EN CLASSE : LE CAS DE LA PROPORTIONNALITÉ EN CYCLE 3.

Cécile ALLARD
Doctorante en didactique des mathématiques, LDAR
Maître formateur académie de Versailles.
Cecile.allardb@free.fr

Stéphane GINOUILLAC
Enseignant-chercheur, ESPE de Versailles (UCP)
Laboratoire LMV (UVSQ) et chercheur associé au LDAR
Stephane.Ginouillac@uvsq.fr

Résumé
L'utilisation des ressources pour construire une séquence d'apprentissage fait partie des tâches dévolues aux Professeurs des Écoles (PE). Ceux-ci choisissent librement les ressources qu'ils utilisent et les usages qu'ils en font. Comment les ressources peuvent-elles aider les PE à identifier des difficultés prévisibles et à les résoudre ? Leur proposent-elles des éléments leur permettant d'exercer une plus grande vigilance didactique, au sens de Pézard, Butlen, Masselot (Charles-Pézard, 2010 ; Butlen, Charles-Pézard & Masselot, 2012) ? Enfin, à quels types d'enseignants, novices ou confirmés, s'adressent-elles ?
Cet atelier cherche à analyser l'aide que peut fournir une ressource aux enseignants pour leur tâche d'adaptation de ce qui est proposé pour leur classe et à dégager des enjeux issus de cette question en formation, dans le cadre d'une séance particulière. Nous avons choisi pour mener cette réflexion le thème particulier de la proportionnalité en CM2, dans un contexte d'agrandissement de figure, en appuyant notre étude sur une situation extraite du manuel Cap Maths.

I - PROBLÉMATIQUE DE L'ATELIER.

L'utilisation de ressources pour construire une séquence d'apprentissage fait partie des tâches des Professeurs des Écoles *(PE)* dans l'exercice quotidien de leur métier et relève de leur référentiel de compétences professionnelles. Les enseignants sont libres de choisir les ressources qu'ils utilisent et les usages qu'ils en font. En France, de nombreuses ressources en mathématiques sont disponibles (Arditi & Daina, 2012), qui peuvent être de natures très diverses : sites internet, manuels, guides du maître, ouvrages transposant des résultats de la didactique des mathématiques (du type ERMEL), etc.

On peut noter de nombreux liens entre les ressources utilisées et les pratiques des enseignants : des recherches ont montré que les usages des manuels semblent être constitutifs des pratiques (Butlen, 2004) et qu'ils conditionnent en retour les mathématiques enseignées (Margolinas & Wozniak, 2009). De plus, quand un PE choisit un manuel, il le fait en privilégiant ceux qui « font écho » d'une façon ou d'une autre à ses pratiques ou ses conceptions existantes, y compris lorsqu'il choisit un manuel qui présente un écart par rapport à ses pratiques établies dans le but de les faire évoluer. Son choix révèle alors potentiellement ce qu'il attend du manuel, tout au moins dans le cas d'un PE confirmé, le choix pouvant être soumis à d'autres déterminants prépondérants dans le cas des débutants.

L'atelier a pour objectif principal de s'interroger collectivement sur un type de ressource particulier : le guide du maître. Ces guides sont associés à une série de manuels. Ils accompagnent les manuels des élèves et ont pour ambition d'aider les enseignants à construire et à gérer leurs séances en classe. Ils proposent notamment des mises en scène du contenu proposé aux élèves ainsi que des éléments explicites de contenus, de gestion et de formulation. Ainsi, nous avons retenu comme ressource à étudier dans l'atelier, non pas le manuel de l'élève, qui sert d'intermédiaire entre l'enseignant et l'élève dans son travail d'apprentissage, mais le livre du maître, vu comme un intermédiaire entre le manuel de l'élève et l'enseignant, dans son travail de préparation de séance et de gestion de sa classe. Nous avons ainsi choisi de ne pas proposer une étude directe du manuel de l'élève, mais plutôt de le regarder à travers les accompagnements que l'on peut envisager de faire figurer dans le guide du maître associé. Nous tentons alors d'envisager *a priori* les aides potentielles (ou leurs manques éventuels) que peuvent effectivement apporter ces textes à destination des maîtres.

En nous fondant sur l'hypothèse que, parmi les ouvrages principalement recommandés en formation, figurent notamment Euro Maths, Cap Maths et ERMEL, *(hypothèse qui a été effectivement confirmée pour les 25 participants de l'atelier),* nous avons choisi de retenir une séance proposée dans l'un de ces trois ouvrages, en l'occurrence Cap Maths CM2.

À travers cette étude, se posera en filigrane la question de savoir à quels enseignants sont adressés ces guides, autrement dit quels sont les enseignants génériques envisagés par les concepteurs de ressources. En effet, l'une des difficultés des auteurs (et sûrement aussi un de leurs enjeux) est de cerner le public auquel ils s'adressent, ainsi que ses besoins potentiels. Le guide est-il écrit pour des débutants ? Pour des enseignants plus confirmés qui souhaitent faire évoluer leur enseignement ? Pour des enseignants dont le rapport aux mathématiques est plutôt bon ? Plutôt mauvais ? Pour tous ces publics simultanément ? Toutes ces questions figurent en arrière-plan des réflexions qui seront abordées dans l'article et nous ne pourrons y apporter évidemment que quelques éléments de réponse.

1 Des retours d'enseignants sur l'usage qu'ils font des ressources pour leur classe.

Régulièrement, en formation initiale, certains étudiants rapportent qu'ils ne disposent pas de guide du maître ou que les enseignants leur disent que ces guides ne servent pas. Par ailleurs, les PE que nous suivons en formation initiale nous rapportent avoir lu le guide du maître, mais avoir eu du mal ensuite à utiliser ce qu'ils ont lu. Nous fondons notre atelier sur l'hypothèse explicite d'un enseignant de ce dernier type, qui souhaite effectivement utiliser le guide du maître et en appliquer les recommandations.

Nous avons recueilli des témoignages concernant les usages de deux ressources que nous conseillons en tant que formateurs, Cap Maths et ERMEL. Ainsi, en formation initiale, une étudiante en master MEEF souligne dans son mémoire de M2 des difficultés qu'elle a éprouvées pour s'approprier ces ressources : elle précise que le maître « *doit comprendre le texte d'ERMEL et réfléchir à la mise en œuvre de la situation* » et ajoute que suivre ERMEL dans une classe qui ne possède pas une culture du travail de groupe et de l'argumentation lui a paru extrêmement difficile. Cette étudiante met ainsi en évidence qu'il doit y avoir une certaine cohérence entre la gestion effective de la classe et « l'esprit » de la ressource. Elle conclut que, pour elle, « *ERMEL a des avantages du côté des élèves, mais des inconvénients du côté des professeurs* ».

Du côté des enseignants confirmés, et concernant plus spécifiquement la ressource Cap Maths que nous avons retenue pour l'atelier, nous avons recueilli le témoignage d'une professeure des écoles maître formatrice *(PEMF)* dans l'académie de Versailles, que nous appellerons ici Solène, et dont nous avons utilisé les déclarations comme un cas d'école sur lequel fonder le travail de l'atelier *(annexe 1 ; entretiens effectués dans le cadre de la thèse en cours de Cécile Allard)*. En tant que maître-formateur, elle compare ses propres pratiques à celles qu'elle observe auprès de collègues qu'elle accompagne. Elle dit dans cet entretien qu'elle « alterne » entre l'utilisation des ouvrages Cap Maths et ERMEL et précise les usages qu'elle fait de ces ressources : « *Moi, je suis le livre et je fais confiance au support, parce que c'est bien fait. Au niveau du guide du maître, le Cap Maths même est plus détaillé [que ERMEL], puisque tu as toutes les procédures d'expliquées et tous les écueils que tu peux rencontrer* ». Elle poursuit en expliquant que les durées indiquées dans Cap Maths ne lui semblent par correspondre à la réalité : « *(…) ta séance, elle dure 45 minutes, une heure ; alors que Cap Maths, tu as un temps donné qui est trop court, clairement trop court ; mais dans tout c'est trop court (…)* ». Elle conclut en explicitant les raisons pour lesquelles selon elle les enseignants n'utilisent pas tous les guides du maître : « *(…) Il y en a certains, je comprends, qui disent : « Cap Maths, c'est trop compliqué » ; parce que parfois, tu as des formulations de consignes pas très claires au départ, qui sont écrites sur 3 lignes, 5 lignes, il faut la lire plusieurs fois. Moi, je suis bonne en maths, donc je finis par comprendre et par me l'approprier ; sauf que ceux qui ont des difficultés et qui font confiance au livre vont abandonner, vont faire autrement et vont prendre le livre sans utiliser le guide du maître… et là, tu n'as pas le déroulement* ». Ainsi, elle déclare faire confiance aux ressources utilisées, mais elle compte également sur son expertise de professeur pour combler des manques récurrents qu'elle a identifiés. Elle pointe explicitement plusieurs de ces manques, notamment : sur des indications fiables de temps ; sur le vocabulaire lié au découpage d'une séance et d'une séquence (l'usage habituel dans les fiches de préparation n'étant pas d'indiquer des phases) ; et sur le vocabulaire lié à la passation des consignes.

Malgré ces manques, Solène se sert conjointement de Cap Maths et de ERMEL et justifie ces choix par le fait que les situations proposées permettent souvent de « *faire manipuler les élèves* » : par exemple à propos de choix de séances sur les fractions, elle signale que « *manipuler des bandes, c'est plus facile que des tartes* ». Elle déclare combler ces manques par son expertise, par ses connaissances d'autres manuels et par son bon rapport avec cette discipline. D'après elle, les collègues qui abandonnent l'usage de ces deux ressources sont des collègues qui ne peuvent combler seuls ces manques et/ou qui ne possèdent pas un bon rapport aux mathématiques.

2 Des questionnements qui découlent de ce qui précède pour la formation.

Les conseils que nous donnons en formation, ainsi que l'entretien ci-dessus avec Solène, sont pour nous autant de données qui nourrissent nos réflexions. Les difficultés pointées par les PE, tant en formation initiale que continue, semblent montrer une tension entre ce qui est conseillé en formation et la mise en œuvre effective de ces situations sur le terrain. Nous nous demandons alors comment expliquer ces difficultés dans l'appropriation des ressources conseillées en formation et, surtout, comment les pallier.

Nous émettons l'hypothèse que, pour un professeur des écoles, dire qu'il n'arrive pas utiliser une ressource conseillée, c'est exprimer qu'il ne trouve pas dans cette ressource ce qu'il cherche (ou ce dont il aurait besoin) pour l'aider à assurer son enseignement. Cette incapacité constatée contribue alors à marquer un décalage ressenti entre théorie (ce qui est préconisé par certains auteurs « reconnus » ou par les formateurs, et qui peut être perçu comme l'imposition d'un certain « idéal didactique ») et pratique (ce qu'il est effectivement possible pour cet enseignant de gérer et de proposer à ses élèves dans sa classe). Pour se préserver, les PE argumentent que les ressources ne sont pas adaptées ou qu'elles sont trop difficiles pour les élèves. Il est probablement plus difficile de dire que l'investissement demandé pour les adapter est trop important, voire même parfois que leur propre rapport aux mathématiques ne serait pas suffisamment apaisé, ou pas suffisamment solide, pour pouvoir effectuer ce travail.

Si cette interprétation est correcte, elle nous conduit alors aux questions suivantes, que nous avons cherché à travailler à travers l'atelier. Comment les ressources peuvent-elles outiller effectivement les PE en termes de gestion de classe, d'identification des contenus et des savoirs mis en jeu, et d'exposition de ces savoirs à destination des élèves ? Comment nous, formateurs, pouvons-nous prendre en charge au moins une partie de ces questions, notamment lorsqu'elles ne le sont pas (voire éventuellement qu'elles ne pourraient pas l'être) par les ressources existantes ?

Pour préciser encore ces deux questions, nous nous appuierons sur des résultats issus de la recherche que nous présentons dans les deux paragraphes qui suivent : la tension entre dévolution et institutionnalisation et la notion de vigilance didactique. Ces deux concepts nous semblent en effet dégager des dimensions selon lesquelles les PE peuvent avoir besoin d'accompagnements et qui nous paraissent importantes à prendre en compte dans nos analyses.

3 Des tensions entre dévolution et institutionnalisation (souvent réglées au bénéfice de la première).

Dans leurs recherches sur les pratiques des PE qui enseignent dans les classes difficiles, Butlen, Charles-Pézard et Masselot (2012) dégagent une tension entre dévolution et institutionnalisation et proposent des éléments pour la comprendre. Ils identifient notamment des difficultés liées aux changements de posture successifs du professeur qui, après avoir confié la responsabilité de la tâche aux élèves, doit se faire moins présent pendant un temps, pour (re)jouer ensuite son rôle d'enseignant-révélateur des enjeux de savoir. Nous soulignons qu'il y a également un changement d'activité et de posture à mettre en œuvre du côté de l'élève, qui doit passer de l'élève-en-action, qui exerce une activité intégrant des manipulations, l'usage de brouillons, des productions de langage, etc., à l'élève-qui-écoute et exerce alors une activité purement intellectuelle. Ces auteurs ajoutent que cette tension entre dévolution et institutionnalisation « *se résout* » la plupart du temps au profit de la dévolution et émettent l'hypothèse qu'elle pourrait provenir au moins pour partie de ce qui est proposé en formation : « *Notons que* *l'institutionnalisation est en fait rarement spécifiquement travaillée au cours de la formation et en recherche, ce sont davantage les concepts de dévolution et d'ostension qui ont été étudiés. »*

Dans l'atelier, nous considérerons cette question du côté des ressources qui sont proposées aux PE : est-ce que les ressources donnent des indications suffisantes et adaptées pour la dévolution et/ou l'institutionnalisation ? Précisent-elles des éléments de contenu pour la dévolution et/ou l'institutionnalisation ? Aident-elles à articuler dévolution et institutionnalisation ?

4 La notion de vigilance didactique.

Pour aborder concrètement ces questions, nous nous appuierons de façon centrale sur la notion de vigilance didactique, qui a été développée par Charles-Pézard (2010) puis Butlen, Charles-Pézard, et Masselot (2012).

Cette notion s'inscrit dans le cadre plus général de l'approche conjointe didactique-ergonomique de Robert et Rogalski (Robert & Rogalski, 2002 ; Robert, 2008), qui proposent d'analyser les pratiques des enseignants à partir de cinq grandes composantes (cognitive, médiative, personnelle, sociale et institutionnelle). Ces composantes interagissent entre elles et sont ensuite à recomposer pour produire des analyses. Les deux premières composantes (cognitive et médiative) sont celles qui permettent de décrire l'organisation des scénarios, en articulant des choix de contenus abordés avec des choix de gestion associés ; tandis que les trois autres, relatives à l'enseignant ou aux conditions dans lesquelles il exerce, cherchent à prendre en compte des contraintes qui peuvent peser sur l'enseignement, qu'elles soient d'ordre individuel (composante personnelle) ou collectif (composantes sociale et institutionnelle), en vue de dégager des marges de manœuvre potentielles, des alternatives et des limites.

Pour affiner l'analyse des deux composantes cognitives et médiatives, Charles-Pézard (2010) puis Butlen, Charles-Pézard et Masselot (2012) développent le concept de vigilance didactique. Ce concept vise à prendre en compte le travail de l'enseignant dans deux éléments principaux, et largement dépendants entre eux, de son activité professionnelle, que sont préparer et gérer les déroulements en classe. La notion de vigilance didactique permet notamment de cerner le rôle joué dans ces actions par la maîtrise des contenus mathématiques à enseigner, de rendre compte de leur influence dans les grands choix effectués et également d'en préciser certaines limites. Ainsi, la maîtrise des contenus est nécessaire, mais elle ne suffit pas : d'autres connaissances, en particulier de type didactique, sont nécessaires à l'enseignement des mathématiques. De plus, toutes ces connaissances, qu'elles soient mathématiques ou didactiques, doivent être finalisées pour l'enseignement : elles doivent contribuer à une bonne perception des enjeux d'apprentissage des situations et de leur organisation, en vue de l'enseignement des savoirs mathématiques. La vigilance didactique est ainsi liée aux différentes tâches d'enseignement des contenus mathématiques, qu'elles se situent en amont, pendant ou après la classe, ainsi qu'aux différentes manières de les réaliser.

Charles-Pézard (2010) et Charles-Pézard, Butlen et Masselot (2012) définissent ainsi la vigilance didactique comme un *« ajustement didactique permanent de la part du professeur faisant appel aux deux composantes cognitive et médiative des pratiques et s'exerçant dans les trois niveaux global, local et micro »* et qui *« met en jeu des connaissances mathématiques et didactiques nécessaires pour enseigner. » (…) « Ces connaissances, finalisées par l'action d'enseigner, sont liées aux grandes étapes du cheminement cognitif des élèves. Elles fonctionnent en acte pendant la séance, leur absence pouvant se révéler source de différenciation. Elles peuvent être de statut différent selon qu'elles sont liées à l'action, à la formulation, à la validation ou à la preuve. » (…) « La vigilance didactique est donc à la fois du côté du savoir mathématique, des connaissances didactiques et de leur mise en fonctionnement dans l'acte d'enseigner. Elle structure et détermine les actions du professeur. » (…) « Elle se distingue de la vigilance épistémologique car elle n'est pas uniquement centrée sur le contenu, mais aussi sur l'action du professeur, notamment en classe. Une « bonne » vigilance didactique assure un déroulement de classe piloté prioritairement par les mathématiques, « au plus près » des apprentissages visés. Cela suppose d'avoir conscience des enjeux des contenus des situations, plus que des contenus eux-mêmes. »* Pages 101 à 103.

Ces auteurs détaillent ensuite différents indicateurs qui permettent de dégager des dimensions particulières selon lesquelles peut s'exercer cette vigilance didactique et qui, « *s'ils sont atteints, pourraient* *favoriser les apprentissages mathématiques des élèves* ». Ces indicateurs visent notamment à caractériser les mathématiques proposées aux élèves et les grands choix stratégiques qui sont déployés. Ils portent sur la situation elle-même, sur la mise en acte de cette situation ou encore sur les interactions maître-élèves ; sur différents moments du travail du maître (avant, pendant ou après sa classe) ; et enfin sur différents moments des déroulements en classe (notamment les moments de prescription de la tâche, de recherche, de synthèse et d'institutionnalisation).

Au total, l'enseignant doit savoir anticiper ce qui relève de la gestion de classe *(établir un climat d'écoute et de travail, aménager des temps de recherche, observer l'activité des élèves en cours pour identifier les procédures mises en œuvre, gérer les interactions élèves-enseignant, piloter les phases de mises en commun afin qu'elles constituent de réels moments d'échanges)* et ce qui relève des contenus à enseigner et de la didactique de la discipline *(choisir des situations proposant des problèmes consistants, identifier des indicateurs permettant d'interpréter en temps réel le travail et les productions des élèves, hiérarchiser les procédures attendues, expliciter verbalement les procédures observées et les propriétés mises en œuvre, identifier les savoirs mis en jeu et élaborer des formulations adaptées permettant de les communiquer).*

Tous ces paramètres nous semblent autant de dimensions qui nous aident à identifier de potentiels besoins d'accompagnement des PE, que ce soit sur le terrain comme en formation, et que l'on peut choisir de détailler (ou non) dans une ressource du type « guide du maître ».

Nous en déduisons un certain nombre de questions qui nous permettent d'approfondir encore notre questionnement : que peut proposer concrètement une ressource du type « guide du maître » pour aider les enseignants à exercer un niveau élevé de vigilance didactique ? Comment peut-elle les aider à articuler contenus mathématiques et gestion de la classe ? Donne-t-elle des indications sur des manières de communiquer la situation, des temps de recherche, des moyens d'expliquer les procédures réussies ou erronées, des éléments à pointer pour hiérarchiser les procédures ? Proposent-elles des textes pour aider à institutionnaliser ?

II - DÉROULEMENT ET JUSTIFICATIONS DE NOS CHOIX POUR L'ATELIER

1 Indications sur le déroulement global de l'atelier.

D'une façon plus détaillée et précise, l'atelier s'est organisé autour des trois questions suivantes, que nous avons posées successivement et auxquelles il était demandé de répondre en petits groupes :

1) *Quelles sont les principales ressources que vous conseillez en formation ?*
2) *Donnez une définition de la proportionnalité à destination d'un PE puis élaborez un texte sur la proportionnalité dans un contexte d'agrandissement de figures à destination d'élèves de cycle 3. (Vous vous mettrez d'accord par groupe et présenterez vos textes sur une affiche).*
3) *À partir de la situation que nous vous proposons (issue de Cap Maths CM2), déterminez les indications indispensables qui devraient figurer selon vous dans la ressource d'accompagnement, en précisant ce que vous attendez en termes de contenu et de forme.*

À l'issue de ce travail, les participants étaient invités à mettre en commun le fruit de leur réflexion. Dans les parties qui suivent, nous allons expliciter certains de nos choix, tant du point de vue du thème retenu (la proportionnalité) que du choix de la situation proposée à étudier.

2 Le choix d'une thématique : les agrandissements de figures et la proportionnalité.

Tout d'abord, il s'agit d'une thématique qui se situe à la charnière entre l'enseignement primaire et le collège. En effet, au cycle 3, on demande principalement d'étudier des exemples de situations de proportionnalité, exemples qui seront ensuite repris, formalisés et unifiés au collège sous le cadre général de la proportionnalité. Ainsi, comme le souligne ERMEL (2010, p. 233) : « *À l'école primaire, on n'étudie pas la proportionnalité,… on résout des problèmes de proportionnalité (et de non-proportionnalité). Ces* *problèmes sont résolus à l'aide de procédures personnelles, basées sur des raisonnements dans le contexte évoqué. Au collège, seront mises en place, progressivement, des procédures plus générales, des procédures expertes.*

Ces procédures personnelles utilisent, en acte, essentiellement les propriétés de linéarité et, dans certains cas, la reconnaissance d'un coefficient de proportionnalité (notamment s'il est possible de lui donner un sens dans le contexte évoqué). Le passage par l'unité permet de traiter les situations les plus difficiles. »

Nous ne détaillerons pas ici tous les enjeux mathématiques et didactiques associés à cet enseignement, qui sont bien connus et pour lesquels nous renvoyons par exemple à Simard (2012a, 2012b, 2012c, 2012d) et Perrin *(document sur son site personnel[1]).* En particulier, Perrin souligne *(paragraphe 3.7, p. 7)* que l'on peut essentiellement regrouper les approches permettant de résoudre des problèmes de proportionnalité en deux grands groupes : celles qui s'appuient sur des comparaisons entre les deux grandeurs mises en relation (ce sont en définitive celles qui utilisent le coefficient de proportionnalité) et celles qui s'appuient sur des relations internes à chacune des grandeurs considérées (et qui utilisent les propriétés additives et multiplicatives de linéarité). Nous retrouverons ces deux types d'approches dans la situation que nous avons retenue pour l'atelier *(annexe 5).* Selon l'approche envisagée par le PE, quel déroulement, quelles institutionnalisations va-t-il proposer ? Quels vont être les choix de la ressource et seront-ils explicités ?

3 Le choix d'une situation transposant une situation classique de la didactique.

Les guides du maître proposent, entre autres, des éléments de vulgarisation des recherches en didactique (Briand & Peltier-Barbier, 2008). Nous avons ainsi choisi pour cet atelier une situation proposée par Cap Maths CM2 sur le thème des « agrandissements » et dont le guide du maître signale explicitement (mais seulement en note de bas de page) qu'elle est « *librement inspirée de la situation dite du Puzzle de Brousseau* » (Brousseau & Brousseau 1987 ; Brousseau, 1998 et annexe 2). Notons que d'autres ouvrages actuels, notamment Euro Maths et ERMEL, proposent également des situations inspirées de ce puzzle. Bien entendu, le contexte et les programmes ayant changé, les situations actuelles doivent inévitablement introduire des modifications par rapport à la situation originelle telle que Brousseau l'avait proposée. Ces ouvrages réalisent alors des transpositions, pour les classes d'aujourd'hui, de la situation de Brousseau, qui cherchait elle-même à transposer des savoirs savants pour les classes de son époque. En l'occurrence, la transposition qu'a réalisée ici Cap Maths n'est pas analysée plus avant dans le guide du maître *(annexe 4).* Il nous semble cependant que les modifications apportées à cette situation sont à la source d'un certain nombre de besoins nouveaux d'accompagnements pour les PE pour leur permettre d'exercer leur vigilance didactique ; et notamment précisément parce que ces modifications n'ont pas (encore) été étudiées dans la littérature. Au fond, comme l'a verbalisé une des participantes lors de l'atelier (*annexe 7*), « *cela ressemble au puzzle de Brousseau au premier coup d'œil, mais en fait après analyse on voit que c'est très différent* »…

Dans les trois paragraphes qui suivent, nous proposons tout d'abord une description des enjeux qui étaient ceux de Guy Brousseau, puis une analyse du contexte institutionnel actuel et enfin une description et une analyse de la situation qui est proposée dans Cap Maths, en essayant de souligner les principales innovations et modifications qu'elle apporte. Afin de les distinguer clairement, nous appellerons dans la suite « *situation du puzzle* » la situation initiale de Guy Brousseau et « *situation du plan de la chambre* » celle qui est actuellement proposée par Cap Maths.

4 Le puzzle de Brousseau.

Pour éclairer la transposition qui est faite par Cap Maths, il nous faut commencer par considérer ce qui était proposé dans le texte originel, co-écrit par Nadine et Guy Brousseau (1987). Cette analyse nous permet de souligner des différences dans les contextes institutionnels et par voie de conséquence dans les enjeux d'apprentissages que l'on peut associer aux deux situations du « puzzle » et du « plan de la chambre ». Comme nous l'avons rappelé, une identification correcte de ces enjeux fait précisément partie des aides dont les PE ont besoin pour pouvoir exercer pleinement leur vigilance didactique. Ainsi,

[1] PERRIN Daniel, <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/algebre/Proportionnalite.pdf>.

l'analyse préalable de la situation du puzzle nous sert ici en quelque sorte de « révélateur », mettant en évidence des enjeux qui ont été conservés et d'autres qui ont été modifiés (et de quelle façon) dans la situation du plan de la chambre retenue pour l'atelier.

Rappelons tout d'abord des mises en garde explicites formulées par G. et N. Brousseau (1987) à l'adresse des lecteurs qui voudraient appliquer en classe les 65 leçons qu'ils décrivent et qui ont été testées à l'école « Jules Michelet » de Bordeaux (COREM[2]) : « *Nous ne considérons pas ce processus comme un modèle pour l'ensemble des classes, ni comme un outil simple et commode pour atteindre sans efforts les objectifs minimaux du cours moyen* ». Ils ajoutent : « *(…) nous devons aussi mettre en garde des enseignants contre des modifications, même légères, dont les conséquences n'auraient pas été assez sérieusement examinées, ou contre des emprunts superficiels de nos leçons, injectées dans un processus classique. La qualité des résultats dépend beaucoup de la cohérence de l'ensemble* ».

La situation proposée par G. et N. Brousseau sous le nom du « puzzle » consiste à agrandir les différentes pièces d'un puzzle constitué de six pièces, dont on note qu'aucune n'est rectangulaire : ce sont deux triangles isocèles et quatre trapèzes rectangles (*annexe* 2). De plus, dans ce puzzle, chacune des six pièces possède une arête oblique, donc dont la longueur n'est pas entière *(c'est le produit d'un entier par le nombre racine de deux)* et pour laquelle la détermination de la longueur agrandie ne peut pas s'obtenir (au niveau considéré) par un calcul ; ceci correspondant à la mise en œuvre d'une importante variable didactique. Les six pièces sont jointives (*ce qui correspond à la définition même d'un puzzle),* chaque pièce étant en contact avec au moins deux autres pièces. Le coefficient d'agrandissement retenu est égal à 7/4 (ou encore 1,75) et toutes les pièces sauf une possèdent au moins une longueur de côté impaire.

Au niveau des enjeux associés à cette situation, la progression globale proposée par N. et G. Brousseau vise comme un objectif important l'introduction des nombres rationnels, dont ils font travailler de nombreuses facettes (signification de la notion vue comme des rapports, modes de représentation symbolique, utilisation dans des contextes divers, relations avec la proportionnalité, les décimaux, les échelles et les pourcentages, etc.). Dans cette progression, la situation du puzzle est mise au service de la construction des nombres rationnels, dans le contexte de la proportionnalité. Enfin, à l'exception de la longueur servant à formuler la consigne (*« le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètres sur votre reproduction »),* aucune des douze autres longueurs à agrandir n'est donnée par un multiple de 4, c'est-à-dire ne correspond encore à une valeur entière après agrandissement.

5 Des enjeux dans le contexte institutionnel actuel.

Proposer une transposition actuelle de la situation du puzzle de Brousseau, c'est, entre autre, prendre en compte les exigences institutionnelles du moment, notamment les programmes, ainsi que les conditions actuelles d'exercice du métier. C'est également prendre en compte les enseignants concernés, que l'on peut qualifier d'« ordinaires » au sens où ils enseignent en-dehors du COREM et sans le bénéfice d'éclairages quotidiens de la part de Guy Brousseau.

On sait que les enjeux que l'on peut associer à une situation diffèrent grandement selon les progressions dans laquelle elle s'inscrit, et identifier clairement ces enjeux est indispensable pour éclairer les différents éléments de la vigilance didactique sur lesquels les enseignants pourront s'appuyer.

Une comparaison rapide des objectifs des séances proposées par Brousseau avec ceux énoncés par les programmes actuels permet de mettre en évidence d'importants besoins de changements si l'on souhaite adapter la situation du puzzle au contexte de 2014. Les programmes ont beaucoup changé : les PE n'ont plus à enseigner le produit d'un nombre entier par un nombre rationnel écrit sous forme fractionnaire. Ils n'ont plus à leur charge que l'introduction de certaines fractions, dites « fractions usuelles », ou « fractions simples » (1/2, 1/4, 1/3), c'est-à-dire des fractions de l'unité. Les préoccupations de N. et G. Brousseau et les programmes actuels ne poursuivent pas non plus les mêmes enjeux : alors qu'il s'agit pour N. et G. Brousseau de donner du sens à une écriture fractionnaire dans un nouveau contexte

[2] COREM : Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

(coefficient d'agrandissement), nous verrons au paragraphe suivant qu'il s'agit dans la situation proposée par Cap Maths de mettre en œuvre la proportionnalité dans un nouveau cadre (géométrique) et d'explorer dans ce contexte le statut « outil » de la proportionnalité.

De façon plus globale, les programmes actuels semblent orienter l'introduction des nombres rationnels par le choix fort et structurant d'une progression qui consiste à présenter les fractions de l'unité dans le but d'introduire les fractions décimales, ce choix s'appuyant sur différents travaux issus de la didactique *(*Arditi, 2011*)*. Les fractions ne sont plus envisagées dans ce cadre comme des rapports, mais comme des nombres, bien qu'ils puissent être parfois utilisés aussi de façon implicite comme des opérateurs (cf. Simard, 2012d). La proportionnalité n'est alors plus liée à la construction des rationnels mais à un tout autre domaine du programme, appelé « gestion de données ». Les problèmes de proportionnalité deviennent alors essentiellement dans ce cadre des situations dans lesquelles on doit appliquer différentes procédures que l'on peut identifier et nommer, qui s'appuient sur les propriétés additives et multiplicatives de linéarité, le coefficient de proportionnalité – ou coefficient d'agrandissement dans les contextes d'agrandissements géométriques -, la règle de trois et le retour à l'unité *(*Simard 2012a, 2012b, 2012c, 2012d*)*. Dans la mesure où le programme n'autorise pas la multiplication d'un nombre entier par une fraction, le coefficient de proportionnalité peut difficilement être dans ce contexte un nombre rationnel et ses facultés à être un décimal sont limitées.

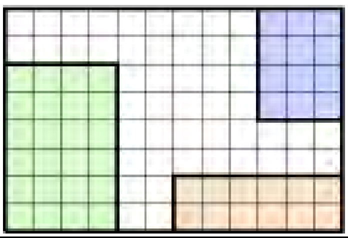
En conclusion, là où N. et G. Brousseau présentaient en 1987 une situation qui visait à contribuer à construire le concept de nombre rationnel, dans un contexte institutionnel où cette notion était véritablement présente et l'était d'une façon « riche » avec une grande variété de significations disponibles, le manuel Cap Maths déclare en 2010 s'inspirer de cette situation, mais en détourne de manière justifiée l'un des objectifs (celui de la construction des rationnels). Cependant, cet emprunt n'est pas isolé et l'on retrouve des références similaires au puzzle de Brousseau dans plusieurs autres ressources actuelles, notamment ERMEL et Euro Maths. Nous émettons l'hypothèse qu'une raison possible de ces choix (sachant que nous n'avons pas interrogé les auteurs de ces ressources à ce sujet) pourrait résider dans le potentiel a-didactique classiquement attribué à la situation de Brousseau et qui permet de nombreuses rétroactions du milieu.

Cela nous conduit alors aux questions suivantes : la situation du plan de la chambre, proposée dans Cap Maths, possède-t-elle le même potentiel a-didactique que la situation du puzzle ? Ce potentiel a-didactique est-il explicité dans la ressource d'accompagnement ? S'il est modifié, quelles adaptations des déroulements ou des modes de gestion sont-elles proposées pour accompagner cette transposition au niveau de la situation ?

6 La situation proposée par Cap Maths, et que nous avons choisie pour l'atelier.

La situation que nous avons retenue pour l'atelier figure parmi les dernières séances que Cap Maths présente sur la proportionnalité *(annexe 3)*. Il s'agit d'agrandir le plan d'une chambre comportant trois pièces de mobilier : un lit, un bureau et une étagère, le coefficient de proportionnalité choisi étant égal à 3/2, ou encore 1,5. Cette situation est présentée dans le manuel destiné aux élèves de la façon suivante (p. 135) :

« Lou a fait un plan de sa chambre sur un papier quadrillé pour y disposer son lit (rectangle vert), un bureau (rectangle bleu) et une étagère (rectangle orange). La chambre est représentée par le grand rectangle de 8 carreaux sur 12 carreaux. Elle veut réaliser un agrandissement de ce plan. Elle décide que le grand côté de la chambre (celui qui mesure 12 carreaux sur le plan déjà réalisé) devra mesurer 18 carreaux sur le plan agrandi.



Travail en équipes :
Chaque membre de l'équipe doit réaliser sur papier quadrillé un des éléments agrandis : la chambre, le lit, le bureau ou l'étagère.
1) Avec ton équipe, propose une méthode pour réaliser ces éléments agrandis et rédige-la.
2) Sur ta feuille quadrillée, trace l'élément agrandi que tu dois réaliser, puis découpe-le.
3) Installe, avec tes camarades, chaque élément agrandi à sa place.
4) Échange avec tes camarades pour savoir si votre agrandissement du plan est correct et expliquez votre décision ».

Pour réfléchir aux accompagnements que peut nécessiter cette situation, il faut évidemment analyser au préalable les difficultés mathématiques et didactiques qu'elle peut présenter pour des élèves. Nous proposons en annexe 5 une analyse *a priori* de cette séance mettant en évidence différentes procédures de résolution possibles selon que l'on choisisse ou non d'employer le coefficient de proportionnalité. Les accompagnements qui figurent effectivement dans le guide du maître de Cap Maths (Charnay & al., 2010) sont repris quant à eux dans l'annexe 4.

Nous souhaitons analyser dans cette partie certaines des modifications introduites par rapport à la situation du puzzle, en soulignant des besoins d'accompagnements nouveaux qu'elles peuvent susciter.

Une première différence réside évidemment dans le choix du coefficient de proportionnalité, qui est ici égal à 3/2, ou 1,5. On peut signaler que l'on retrouve ce même coefficient dans d'autres ressources actuelles qui reconnaissent s'inspirer du puzzle de Brousseau (notamment dans des situations proposées dans ERMEL et Euro Maths). On peut sans doute interpréter ce choix comme une réponse à une contrainte du contexte institutionnel : la raison pourrait être le souhait de maintenir une utilisation possible du coefficient de proportionnalité dans un contexte qui empêche de multiplier des nombres entiers par des fractions. En effet, la multiplication par 1,5 peut se réaliser plus simplement comme « prendre une fois et demie » la valeur, soit encore « prendre la valeur et lui rajouter sa moitié ». L'existence de cette procédure, qui repose sur le calcul réfléchi, permet alors d'éviter le recours à des multiplications et cette possibilité est même explicitement soulignée dans le guide du maître de Cap Maths *(annexe 4)*.

Une deuxième différence, qui nous semble peut-être la différence principale, est le fait qu'il ne s'agit plus alors d'un puzzle ! *(Sauf à considérer la pièce blanche comme un décagone ; mais c'est là une interprétation hautement improbable et qui contredirait de plus explicitement l'énoncé).* Cette modification possède de nombreuses conséquences. Ainsi, une pièce (la blanche) joue alors un rôle différent des autres. Plus exactement, elle acquiert un rôle double : d'une part, elle représente la chambre entière, définie par un rectangle en partie caché par les meubles et sur lequel sont superposées les autres pièces ; mais elle peut aussi s'interpréter visuellement comme l'espace laissé vide entre les meubles, de forme plus complexe. Si le rectangle de la chambre doit être agrandi en tant que chambre, est-il aussi évident pour les élèves que les espaces vides entre les meubles doivent l'être ? Cette double lecture possible de la pièce blanche, à la fois « entre » les meubles et « sous » les meubles, peut être reliée en définitive à la lecture de la figure en superposition. Nous nous appuyons ici sur Duval et Godin (2005, pp. 8-11), qui analysent les différences de regards que l'on peut porter sur les figures géométriques selon qu'elles apparaissent assemblées par juxtaposition ou par superposition. Typiquement, un puzzle correspond à l'archétype même d'une figure assemblée par juxtaposition, tandis que l'énoncé de la situation du plan de la chambre décrit explicitement un assemblage par superposition. Ajoutons que, lors de l'atelier, des participants ont explicitement proposé un accompagnement qui consistait à transformer cette situation via un découpage en un véritable puzzle *(annexe 7, groupe 2)*, c'est-à-dire à la ramener à une situation juxtaposée.

Une autre différence importante nous semble être la suivante : si l'on conserve la lecture par superposition, alors les trois pièces qui correspondent aux meubles ne sont plus jointives. Ce point est susceptible de créer d'importantes difficultés dans la mise en œuvre de la séance, dans la mesure où ceci rend plus difficile (voire impossible) l'invalidation d'un certain nombre de productions erronées. De ce fait, la situation cesse d'être complètement auto-validante. Là encore, des participants de l'atelier l'ont bien noté et ont entamé une discussion sur la nécessité qu'il y aurait à proposer également en classe des situations de ce type *(annexe 7, discussion générale).*

Enfin, une dernière différence importante nous semble liée à la situation elle-même et au contexte interprétatif qui est proposé. Dans la situation de Guy Brousseau, il s'agit d'un puzzle, et *« agrandir un puzzle »* ne peut rien signifier d'autre que « reconstituer le même puzzle en plus grand ». Il est alors naturel dans cette situation de raisonner pièce par pièce et de découper les pièces, ces deux caractéristiques étant des caractéristiques propres d'un puzzle. Dans cette mesure, le déroulement proposé est alors en adéquation avec le contexte. En revanche, dans la situation proposée par Cap Maths, le contexte modifie ces points. Il s'agit ici du plan d'une chambre, ce qui est susceptible de créer un certain nombre de difficultés interprétatives ou langagières. En effet, quand on agrandit socialement une pièce ou une maison, on peut agrandir les pièces sans pour autant agrandir les meubles, et éventuellement sans respecter non plus les proportions de la pièce initiale. Bien entendu, l'énoncé précise clairement qu'il s'agit ici d'agrandir, non pas « la chambre », mais bien « son plan » ; mais cela introduit un implicite qu'il faut décrypter sur le sens du mot « agrandir » dans ce contexte. Cela crée une ouverture potentielle concernant l'enjeu principal que l'on doit accorder à cette séance : si le sens du mot « agrandir » est clair, il s'agit alors de mettre en œuvre la proportionnalité dans ce contexte ; mais s'il ne l'est pas, il s'agit au contraire de clarifier son sens en s'appuyant sur une maîtrise préalable de la proportionnalité. Notons que le guide du maître semble appuyer en acte la deuxième orientation, en proposant d'institutionnaliser des phrases telles que : *«agrandir en géométrie, ce n'est pas… c'est… ».* Enfin, la proposition de découper les pièces semble évidemment une étape moins naturelle dans ce contexte que dans le cas d'un puzzle.

Cependant, en dépit de ces différences, le déroulement proposé par Cap Maths reste identique à celui qui était proposé par Brousseau : les élèves doivent travailler par équipes, chaque élève réalisant l'agrandissement d'une seule pièce, et se mettre d'accord sur une démarche de résolution à travers des discussions fondées sur un conflit cognitif attendu. Le guide du maître précise ainsi explicitement : « *Écrivez bien la méthode choisie. À la fin, vous ne placerez les différents éléments que lorsque chacun aura découpé le sien. Si vous pensez que ça va, expliquez pourquoi. Si vous pensez que ça ne va pas, expliquer aussi pourquoi et gardez le résultat de votre première tentative avant d'en faire une nouvelle* ». Cette proposition d'un déroulement identique malgré les différences dans la situation ne manque pas de soulever un certain nombre de questions, qui ont été soulignées lors de l'atelier. Par exemple, comment les élèves peuvent-ils commencer par *« proposer une méthode et la rédiger » (consigne 1)* avant tout essai ? Est-il possible d'agrandir chaque pièce isolément sans recourir au coefficient de proportionnalité *?* Comment déterminer que l'agrandissement est correct si le sens du mot « agrandir » n'est pas clair, ou si la compréhension de son sens est censée découler du succès de la tâche réalisée ?

En conclusion, il nous semble que ces difficultés (une situation qui n'est pas auto-validante parce qu'elle n'est plus un puzzle, des questions langagières et interprétatives qui introduisent des implicites à décrypter, et un déroulement susceptible de soulever des difficultés dans certaines de ses phases) ne doivent pas nécessairement être rejetées comme relevant de mauvais choix en soi ou d'erreurs didactiques, mais qu'elles vont au minimum nécessiter des accompagnements neufs pour que les PE puissent proposer en confiance cette situation dans leur classe ; d'où notre choix de la retenir pour cet atelier. En dernier ressort, sans une prise en charge adaptée par la ressource d'accompagnement, il nous semble que deux grands choix vont s'offrir aux PE : ou bien choisir de ne pas faire cette situation en classe car le PE aurait identifié les difficultés a priori (et cette solution fut même rapidement la préconisation unanime des participants de l'atelier !) ; ou bien proposer la situation sans en avoir identifié toutes les difficultés et devoir s'adapter à « chaud » aux difficultés rencontrées, ce qui requiert de la part du PE une vigilance didactique affirmée ou/et une grande confiance en soi et en la ressource.

III - PRODUCTION ET RÉSULTATS DE L'ATELIER

Dans cette partie, nous présentons les résultats du travail de l'atelier, dont les productions figurent dans les annexes 6 et 7. Rappelons que les trois consignes qui ont été données successivement aux groupes lors de l'atelier étaient les suivantes :

1) Quelles sont les principales ressources que vous conseillez en formation ?

2) Donnez une définition de la proportionnalité à destination d'un PE puis élaborez un texte sur la proportionnalité dans un contexte d'agrandissement de figures à destination des élèves de cycle 3. (Vous vous mettrez d'accord par groupe et présenterez vos textes sur une affiche).

3) Après avoir analysé la situation proposée dans Cap Maths, déterminez les indications indispensables qui devraient figurer selon vous dans la ressource, et précisez ce que vous attendez à la fois en termes de contenu et de forme.

Nous présentons les différents points de vue développés par les participants, qui nous semblent être plus complémentaires que contradictoires, en soulignant en particulier des points qui ont fait consensus au sein de l'atelier ainsi que des questions qu'il a soulevées. L'atelier a montré que les questions que nous nous posions, ainsi que les difficultés que nous ressentions, sont partagées par un collectif large de formateurs. Nous en déduisons des questions que nous adressons pour la formation, et peut-être pour certaines d'entre elles pour la recherche.

1 Sur les ressources conseillées.

En ce qui concerne la première question, qui portait sur les ressources recommandées en formation, la première phase très rapide de l'atelier a fait immédiatement apparaître un consensus manifeste au sein des 27 participants *(dont nous-mêmes)* autour de trois ressources principales : Cap Maths, ERMEL et Euro Maths. Les participants n'ont pas détaillé à ce moment-là s'ils répondaient en pensant à la formation initiale ou à la formation continue, c'est-à-dire pour des enseignants novices ou confirmés, mais ces trois réponses sont apparues dans tous les groupes. L'atelier s'est alors poursuivi avec la certitude que nous recommandions tous en particulier le manuel Cap Maths et que l'enseignante Solène avait à nos propres yeux de bonnes raisons de lui faire confiance.

2 Sur la rédaction de textes de savoirs décontextualisés sur la proportionnalité.

Dans cette deuxième phase, les participants devaient se mettre d'accord au sein de chaque groupe pour rédiger un texte commun, ce qui a suscité des discussions concernant les choix à effectuer.

Pour ce qui concerne les définitions de la proportionnalité à destination des PE *(annexe 6),* nous relevons que les textes proposés sont variés et qu'ils n'insistent par tous sur les mêmes points théoriques. Citons quelques facteurs de variation que l'on peut relever en leur sein. Ces textes choisissent selon les cas de se placer dans un contexte purement numérique, en considérant des suites de nombres, ou bien dans un contexte de grandeurs. Deux d'entre eux introduisent également la notion de « situation de proportionnalité ». Le coefficient de proportionnalité peut être ou non mentionné. Enfin, certains textes privilégient un point de vue multiplicatif et opératoire *(« on passe de l'un à l'autre en multipliant »)* tandis que d'autres s'appuient sur les notions mathématiques plus abstraites de rapport ou de proportion (voire les utilisent parfois même comme des prérequis supposés connus). Enfin, deux groupes ont introduit un symbolisme formel abstrait de type algébrique, tandis que les autres ont choisi de se limiter à des formulations en langage naturel. Nous proposons de notre côté la définition suivante, qui est donnée pour l'entrée en sixième dans le dictionnaire du manuel *« Domino » (Hache et al., 2005)* : *« deux grandeurs sont proportionnelles quand on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par un même nombre ».*

En ce qui concerne les textes à destination des élèves, la majorité d'entre eux s'appuient sur une figure qu'ils choisissent d'introduire. Les figures proposées représentent des triangles (contexte géométrique abstrait) ou des contours de maisons. Les textes accompagnant ces figures sont parfois très minimalistes (par exemple : *« la figure B est un agrandissement de la figure A »*). Ces figures recréent un contexte d'application sur lequel les explications s'appuient. Elles n'ont pas toujours une valeur uniquement illustrative mais peuvent remplacer parfois des explications éventuellement difficiles à formuler. Dans deux cas, ces figures servent à opposer un exemple à un contre-exemple, mais sans que les différences ainsi illustrées ne soient réellement explicitées. Enfin, trois textes proposent au moins une formulation entièrement décontextualisée, mais en se référant pour l'un deux à une notion supposée connue de proportionnalité qui n'est pas explicitée. Les textes peuvent adopter différentes optiques : la présentation d'une méthode générale pour obtenir un agrandissement (*« pour agrandir une figure, je multiplie… »*), celle des résultats qu'elle produit (*« une figure est un agrandissement d'une autre si on peut passer... »*) ou encore adopter des perspectives dépersonnalisées (*« les deux figures suivantes sont agrandies de manière proportionnelle »*). Une formulation retient particulièrement notre attention en ce qu'elle essaie d'articuler le point de vue pratique d'une méthode (« *multiplier chacune des dimensions* ») à une définition plus abstraite de ce que peut être un agrandissement, et parce qu'elle distingue de plus la nature du coefficient d'agrandissement (appelé nombre) de celle des données à agrandir (appelées dimensions) : *«une figure est un agrandissement d'une autre si on peut passer de l'une à l'autre en multipliant chacune de ses dimensions par un même nombre ».*

La variété des textes produits à destination des élèves, ainsi que les discussions dont les groupes ont eu besoin pour aboutir à des consensus, nous laissent penser que l'exercice consistant à rédiger un texte de savoir nécessite de nombreux échanges avant de pouvoir aboutir à des formulations réellement satisfaisantes, et ce n'est certes pas dans le temps limité d'un atelier que nous pourrions y arriver.

En complément à ce travail, nous pouvons signaler la formulation suivante, qui est proposée aux élèves dans l'aide-mémoire du manuel Euro Maths CM2 (Peltier & al, 2009) au paragraphe « agrandissement et réduction » : *« Quand on agrandit ou on réduit une figure, ses propriétés géométriques sont conservées, en particulier les angles ne changent pas. Les mesures des longueurs sur la figure-modèle et sur la figure réduite ou agrandie sont proportionnelles. Pour agrandir ou réduire une figure, on peut :*

- repérer ses propriétés géométriques et les conserver lorsque l'on agrandit ou que l'on réduit la figure ;

- mesurer les dimensions et les multiplier ou les diviser toutes par le même nombre. »

Nous retirons de cette expérience la nécessité de nous poser la question des contenus de ces textes et de leurs mises en forme possibles en formation. En effet, nous sommes souvent amenés à demander à nos étudiants de produire de tels textes, même si les institutionnalisations ne se réalisent évidemment pas uniquement à l'écrit, mais les difficultés que nous éprouvons à produire nous-mêmes de tels textes à destination des élèves nous interrogent : à l'expérience, la tâche n'est pas si aisée !

3 Sur l'élaboration d'un guide du maître et les accompagnements à proposer aux PE.

Les participants étaient unanimes pour dire qu'ils déconseilleraient en formation à des PE de proposer cette situation en classe. Ils justifient cela d'une part par le fait que la situation n'est pas auto-validante, et d'autre part à cause des difficultés de gestion liées à la consigne qui demande de concevoir d'abord une méthode pour résoudre le problème, avant de chercher à le faire concrètement. Ce n'est que le rappel des propos de Solène, qui disait suivre sa ressource et faire confiance à Cap Maths, qui a pu les conduire à réfléchir tout de même aux accompagnements dont cette enseignante pourrait avoir besoin.

Il nous semble que l'on peut classer les accompagnements que les participants ont proposés de faire figurer dans le guide du maître selon trois grands axes : ceux qui portent sur des questions d'ordre matériel et de gestion ; ceux qui portent sur des questions liées au contenu et aux enjeux mathématiques de la situation ; et enfin ceux qui portent sur des remarques d'ordre didactique visant à expliciter des liens ou articuler entre eux des choix de contenus et des choix de gestion. Selon les cas, ces remarques peuvent correspondre à la présentation d'approfondissements et de compléments, la proposition de variantes et d'alternatives, l'explicitation de contraintes et de limites, ou enfin des aides à l'élaboration d'une fiche de préparation.

Du point de vue de la gestion du groupe classe, les participants se sont étonnés après leurs analyses que le guide du maître de Cap Math ne propose pas plus d'éléments sur la constitution des groupes ni sur l'attribution des pièces à distribuer selon le niveau des élèves, certaines pièces étant plus « faciles » que d'autres à agrandir. Ils ont également pointé le manque d'indication de temps dans la ressource en ce qui concerne les différentes étapes de la ressource, *(manque qui était déjà pointé dans l'entretien avec Solène, cf. I.1. ci-dessus)*, et qui est susceptible de poser problème tout au moins aux enseignants débutants.

En ce qui concerne le contenu et les enjeux mathématiques, rappelons à nouveau que le collectif de formateurs semblait principalement ne pas trouver cette situation pertinente. Certains ont cependant ouvert le débat en précisant qu'il leur semblait quand même intéressant de confronter les élèves à des situations de ce type, et qu'il était en tout cas nécessaire de former les PE à savoir gérer des situations dans lesquelles les rétroactions ne viendraient pas toutes de la situation. D'autres ont proposé d'ajouter des possibilités de variantes ou d'alternatives, dégageant ainsi des marges de manœuvre possibles pour les enseignants, ou ont souhaité préciser à l'inverse des points cruciaux qui ne devraient en aucun cas être modifiés. Certains enfin ont essayé de clarifier l'orientation de la séance en développant certains enjeux de la situation, par exemple en détaillant l'usage que l'on peut en faire dans le champ géométrique.

Enfin, tout en mesurant qu'il est sûrement difficile d'intégrer de tels conseils dans un guide du maître, notamment en termes d'ergonomie (la question de fond étant la suivante : si la ressource est trop détaillée, les enseignants auront-ils encore la possibilité réelle de s'en servir ?), les participants auraient souhaité plus d'éclairages sur les choix effectués pour les variables didactiques, des explicitations plus détaillées sur les procédures attendues, ou encore des éclairages sur le savoir mis en jeu et ses enjeux en classe. Ainsi, la ressource ne propose pas de lien entre la gestion de la classe et le contenu travaillé. Elle ne propose pas non plus d'éléments de différenciation alors qu'institutionnellement il y a une demande forte de les anticiper.

Ces quelques points ne constituent évidemment pas une analyse exhaustive de tous les manques qui ont été pointés, mais ils nous semblent dégager un certain nombre de questions vives et que nous adressons à la formation. Tout d'abord, compte-tenu du guide du maître existant, qui contient tout de même déjà un certain nombre d'éléments et qu'il n'est peut-être pas possible d'allonger, la situation proposée semble conduire les enseignants à de potentielles difficultés. Est-il alors possible qu'un PE débutant (et sans appétence particulière pour les mathématiques) ait un niveau de vigilance didactique suffisant pour faire face seul à ces difficultés ? Va-t-il savoir identifier les difficultés de gestion et écarter d'emblée la situation en conséquence, comme l'ont fait les formateurs lors de l'atelier ? Ou bien l'écartera-t-il parce que la signification des mathématiques mises en jeu sera pour lui insuffisamment explicitée et qu'il n'en perçoit pas véritablement l'intérêt ?

De notre côté, comment nous, formateurs, pouvons-nous accompagner l'usage des ressources que nous conseillons ? Ne doit-on conseiller de proposer que des situations entièrement auto-validantes, et rejeter tous les scénarios de classe dont la gestion en classe pourrait être mal aisée ?

Nous continuons à parier sur un PE qui fait suffisamment confiance dans les ressources conseillées en formation et sur sa volonté pour tenter de mettre en œuvre cette situation malgré ses difficultés identifiées ; mais nous parions aussi sur un collectif de formateurs suffisamment vigilant et qui saura l'accompagner là où il a repéré que la ressource proposée le fait insuffisamment. En quelque sorte, on pourrait dire que nous parions sur ce qui pourrait être une forme de « vigilance didactique de formateurs ». Armés de celle-ci, nous continuerons de proposer l'usage de cette ressource en formation, en restant vigilants sur le fait que la confiance à lui accorder doit rester « éclairée ».

IV - CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES.

Nous souhaitons dégager deux grands axes de conclusions sur le thème des ressources, qui était celui du colloque COPIRELEM de cette année : l'un portant sur la conception des ressources et l'autre sur les conditions de leur appropriation par les enseignants.

Nous avons dégagé qu'en transposant la situation du puzzle dans le contexte actuel, la ressource reprenait certains de ses enjeux, notamment en termes de gestion, tout en la modifiant profondément sur d'autres, telles que le cadre institutionnel dans lequel elle s'insère, les objectifs visés, le potentiel a-didactique qu'elle possède, etc. Il nous semble qu'une telle transposition ne peut pas se faire d'une manière entièrement transparente, en laissant l'identification des questions qu'elle suscite et leur résolution à la seule charge des PE. De leur point de vue, comment être explicite sur le savoir en jeu, quels textes de savoir proposer, et faut-il laisser entièrement à leur charge l'écriture de ces textes ? Nous nous interrogeons également sur certains choix des auteurs, qui empruntent ici à des recherches en didactique, mais ne poussent pas le travail de transposition pour la classe « jusqu'au bout » et proposent sur la base de ces recherches une situation que des formateurs déconseilleraient en définitive de faire vivre en classe... Bien entendu, ce constat ne disqualifie pas la ressource en question, que nous continuerons de proposer en formation, mais interroge la transposition des situations d'un contexte à un autre, notamment de la didactique vers la classe ainsi que d'une époque à une autre.

L'autre direction dans laquelle nous souhaitons tirer des conclusions est celle des conditions d'appropriation des ressources par les enseignants. Si l'atelier nous a permis de soulever des questions sur le contenu d'une page particulière d'un guide du maître, nous sommes bien conscients que de nombreuses contraintes, notamment éditoriales, empêchent les auteurs d'écrire tout ce qu'ils souhaiteraient transmettre. Par ailleurs, indépendamment des contraintes externes qui sont celles de l'édition, il y a également des contraintes internes qui interviennent en la matière. Par exemple, à quels PE s'adresse ce guide du maître ? Pour qui est-il écrit ? Peut-il s'adresser simultanément à des PE confirmés et débutants, qui n'ont ni les mêmes difficultés ni les mêmes besoins d'accompagnements ? Quelle(s) ergonomie(s) du document serai(en)t à même de faciliter sa prise en main différenciée par ses divers publics ? Est-ce que le guide du maître outille la vigilance didactique du PE ?

Il n'est pas sûr que l'on possède des réponses claires et définitives sur ces différents points, et on peut penser que des recherches spécifiques pourraient aider à y apporter des éléments de réponse. Cependant, il est également certain que l'on ne peut pas tout attendre de la ressource et que l'un des enjeux des formations est de permettre aux PE de s'approprier des ressources qui seront inévitablement et nécessairement incomplètes. Il revient alors aux formateurs d'identifier les manques structurels ou inévitables dans les ressources qu'ils recommandent, et d'armer les enseignants auxquels ils s'adressent pour y faire face.

Ainsi, les difficultés que nous avons soulignées, à travers un exemple où elles nous semblaient particulièrement marquées, ne sont pas à prendre comme l'indice en soi d'une « mauvaise ressource », mais plutôt comme la connaissance éclairée que toute ressource possède des limites et que toute recommandation à son sujet doit s'accompagner de précautions. Nous continuerons donc résolument de proposer cette ressource en formation, mais en conseillant aux formateurs une étude éclairée des situations proposées.

En définitive, la question générale qu'il nous semble avoir considérée ici, que ce soit du côté des concepteurs de ressources comme de celui des formateurs (et qui, formulée ainsi, n'a évidemment rien de neuf !) est au fond la suivante : quelles sont les conditions minimales que doit respecter une ressource si elle souhaite pouvoir diffuser et devenir un outil que les PE puissent effectivement s'approprier ?

V - BIBLIOGRAPHIE.

ARDITI S. (2011) Variabilités des pratiques effectives des professeurs des écoles utilisant un même manuel écrit par des didacticiens, *Thèse de doctorat,* Université Paris-Diderot - Paris VII.

ARDITI S. & DAINA A. (2012) Manuels scolaires et pratiques des enseignants en France et en Suisse romande, *Actes du 39e colloque COPIRELEM, « Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève »,* 20-22 juin 2012, Quimper, 388-404.

BRIAND J. & PELTIER-BARBIER M.-L. (2008) *Le manuel scolaire carrefour de tensions mais aussi outil privilégié de vulgarisation des recherches en didactique des mathématiques,* Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, Séminaire d'octobre 2008, 325-335.

BROUSSEAU G. & BROUSSEAU N. (1987) *Rationnels et décimaux dans le cadre de la scolarité obligatoire : compte rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence, (DEA et Doctorat de Didactique des Mathématiques),* Université de Bordeaux I.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BUTLEN D. (2004) Deux points de vue pour analyser les pratiques, dans PELTIER-BARBIER M.-L. (dir.*), Dur d'enseigner en ZEP,* Chapitre 2, Grenoble : La Pensée Sauvage, 33-42.

BUTLEN D., CHARLES-PEZARD M. & MASSELOT P. (2012) *Professeurs des écoles débutant en ZEP. Quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHARLES-PÉZARD M. (2010) Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique*, Recherches en didactique des mathématiques,* **30-2,** Grenoble : La Pensée Sauvage, 197-261.

CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M.-P. & MADIER D. (2010) *Cap Maths, CM2, Manuel de l'élève,* Paris : Hatier, 135.

CHARNAY R., COMBIER G., DUSSUC M.-P. & MADIER D. (2010) *Cap Maths, CM2, Guide de l'enseignant,* Paris : Hatier, 286-287.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Recherches en didactique des mathématiques,* **7-2**, Grenoble : La pensée Sauvage, 5-31.

DUVAL R. & GODIN M. (2005) Les changements de regards nécessaires sur les figures*,* Grenoble : *Grand N,* **76**, 7-27.

ERMEL (2005) *Apprentissage numérique et résolution de problèmes, CM2,* Paris : Hatier.

HACHE C., AUBRIERE J, BATTON A., DONAT V., GOSSET H. & RAMBAUD N. (2005) Dictionnaire*, Domino Sixième,* Paris : Nathan, 252-261.

MARGOLINAS C. & WOZNIAK F. (2009) Usage des manuels dans le travail de l'enseignant : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, *Revue des sciences de l'éducation,* **35 (2)**, 59-82.

PELTIER M.-L., BRIAND J., NGONO B. & VERGNES D. (2009) *Euro Maths, CM2,* Paris : Hatier.

PERRIN D. *Proportionnalité et linéarité,* <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/algebre/Proportionnalite.pdf> *(documents sur son site personnel, page consultée le 30 août 2014)*.

ROBERT A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques, dans *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants,* Vandebrouck F. (Éd), Partie I, chapitre 3, Toulouse : Octarès Éditions, 95-68.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématique : une double approche*, Revue canadienne de l'enseignement des sciences des mathématiques et des technologies,* **2(4)**, 505-528.

SIMARD A. (2012a) Reconnaissance de situations de proportionnalité en CM2-6e*,* Grenoble : *Grand N,* **90**, 49-67.

SIMARD A. (2012b) Fondements mathématiques de la proportionnalité dans la perspective d'un usage didactique*, Petit x,* **89**, 51-63.

SIMARD A. (2012c) Proportionnalité en CM2 et sixième*,* Grenoble : *Petit x,* **90**, 35-52.

SIMARD A. (2012d) Proportionnalité au cycle 3, dans *Le nombre au cycle 3,* Durpaire J.-L. et Mégard M. (dir.), Poitiers (Futuroscope) : Scérén CNDP, 64-74.

VI - LISTES DES ANNEXES

ANNEXE 1 : ENTRETIEN AVEC SOLÈNE (PEMF).

(Retranscription d'échanges effectués dans le cadre de la thèse en cours de Cécile Allard).

« *(…)* Clairement, dans la préparation, je suis le bouquin, et même le livre du maître ; mais ce n'est pas obligatoirement le cas de tout le monde, puisque l'année dernière, avec Thomas, je l'avais vu, ça. Il avait pris Cap Maths, mais pas le livre du maître. Donc moi, quand j'ai refait la séance, ils n'avaient pas du tout eu la manipulation, ils n'avaient pas eu les consignes telles que écrites dans le livre… Donc, moi, je suis le livre, donc déjà, je suis un support, et je fais confiance au support sur lequel je suis ; parce que c'est bien fait. Au niveau du livre du maître, le Cap Maths, même, est plus détaillé [*que le ERMEL*], puisque tu as toutes les procédures d'expliquées, et tous les écueils que tu peux rencontrer à ce niveau. Dans le ERMEL, ce n'est pas le cas : tu as les procédures, tu as le déroulement, tu as des phases, parce qu'ils parlent en terme de phases, mais c'est à toi de t'adapter. Là, moi, avec l'expérience, je sais ce que je vais pouvoir faire dans une séance ; mais si tu suis leurs phases, tu vas faire phase 1, phase 2, phase 3, mais en combien de temps tu fais ces phases-là ? Ils ne te mettent aucun temps de séances par rapport à… Ben oui, ta séance, elle va durer 45 minutes, une heure… tu as trois séances ; tu as une séquence de combien de temps ? Et ça, ce n'est absolument pas marqué. Alors que Cap Maths, tu as un temps donné ; qui est trop court, clairement, qui est trop court, parce que c'est systématiquement 40 minutes ; mais dans tout c'est trop court : l'entretien, généralement, c'est trop court par rapport au temps annoncé, parce que tu ne peux pas faire ça dans un temps donné ; à part le calcul réfléchi et les opérations ; mais quand c'est des problèmes et que tu dois reprendre les procédures, ce n'est pas possible. Quand c'est de l'entretien de géométrie, ce n'est pas possible, en 15 minutes. Et les phases de découverte de Cap Maths, quand ce sont vraiment de grosses recherches avec de la manipulation, ça ne tient pas en 40 minutes. Donc, ça dépend des phases ; mais dans le ERMEL, tu as zéro indication de temps, donc c'est à toi de t'adapter. Sauf que moi, j'ai de l'expérience, donc je sais combien de temps je vais mettre pour une séance, même si elle va durer plus longtemps par rapport à ce que j'ai en classe et à l'intérêt des gamins, donc c'est à toi de t'adapter, mais ça par contre c'est un écueil. Celui qui ne prend que ERMEL, et bien, débrouille-toi, ou bien tu le connais bien ; mais si tu le connais bien, en général, tu as fait autre chose avant. Tu as déjà fait un autre bouquin, et donc tu arrives à t'en détacher... Moi, maintenant, je peux prendre ERMEL et je peux alterner après avec Cap Maths par exemple pour des exercices d'entraînement.

Question : Est-ce qu'ils vous en disent assez, dans Cap Maths et ERMEL ? Est-ce qu'ils pointent suffisamment les mots que vous devriez dire à l'oral ? Je me demande si cela ne vous embarque pas, parfois, dans des explications vraiment impossibles, alors que, s'il y avait le bon mot au bon moment, vous pourriez gagner par exemple un quart d'heure ?

- Oui… Mais il y en a certains, je comprends, après, qui vont te dire : « Cap Maths, c'est trop compliqué » ; parce que, parfois, tu as une formulation de consigne qui n'est pas obligatoirement très claire au départ, et qui est sur 3 lignes, 4 lignes, 5 lignes, et tu te dis… Il faut déjà la lire plusieurs fois. Moi, je suis bonne en maths, donc je vais finir par comprendre et par me l'approprier : mais ceux qui ont des difficultés et qui veulent faire confiance au livre, ils vont abandonner, ils vont faire autrement et ne se baser que sur le livre, sans prendre le guide du maître… et là tu n'as pas le déroulement. Et les phases, effectivement, alors on ne sait pas combien de temps elles prennent. Et ils disent : « mais je ne vais jamais arriver au bout », ou « je n'y arrive pas, parce que c'est trop long » ; mais non…».

ANNEXE 2 : LE PUZZLE DE BROUSSEAU

(Situation extraite de Nadine et Guy Brousseau, 1987, p. 137.)

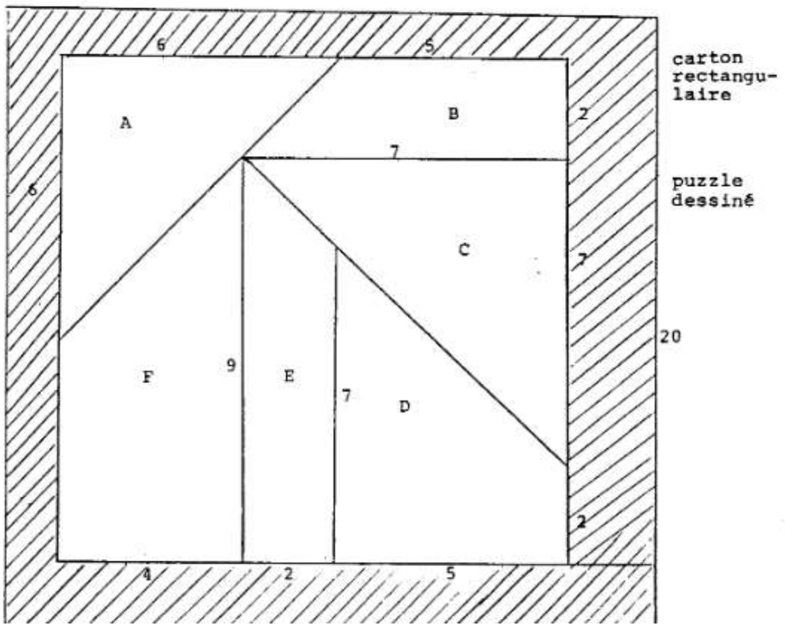
137

MODULE 8 - Activité 1 Séance 37

8.1 - AGRANDISSEMENT DU PUZZLE

8-1-1 : Matériel :

. 6 à 8 puzzles (suivant le nombre d'enfants) dessinés sur des cartons rectangulaires de 20 cm x 15 cm. Pour chacun des puzzles, les 6 pièces (A, B, C, D, E, F), découpées dans le même carton.
(chaque puzzle et ses 6 pièces sont placés dans une enveloppe).



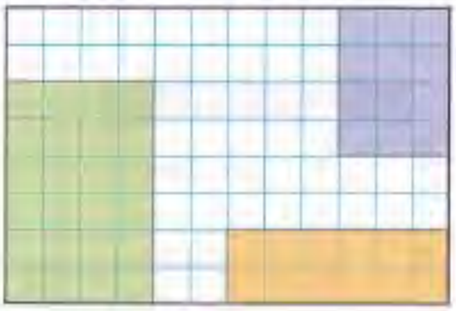
ANNEXE 3 : LA SITUATION DU PLAN DE LA CHAMBRE.

(Situation telle qu'elle figure dans le livre de l'élève de Cap Maths CM2, 2010, p. 135 (unité 13)).

Chercher **Agrandir le plan**

▶ **Pour toutes les questions de cette recherche, utilise le même papier quadrillé, fiche 68.**

Lou a fait un plan de sa chambre sur un papier quadrillé pour y disposer son lit (rectangle vert), un bureau (rectangle bleu) et une étagère (rectangle orange).
La chambre est représentée par le grand rectangle de 8 carreaux sur 12 carreaux.
Elle veut réaliser un agrandissement de ce plan.
Elle décide que le grand côté de la chambre (celui qui mesure 12 carreaux sur le plan déjà réalisé) devra mesurer 18 carreaux sur le plan agrandi.



▶ **Travail en équipes**

Chaque membre de l'équipe doit réaliser sur papier quadrillé un des éléments agrandis : la chambre, le lit, le bureau ou l'étagère.

1. Avec ton équipe, propose une méthode pour réaliser ces éléments agrandis et rédige-la.
2. Sur ta feuille quadrillée, trace l'élément agrandi que tu dois réaliser, puis découpe-le.
3. Installe, avec tes camarades, chaque élément agrandi à sa place.
4. Échange avec tes camarades pour savoir si votre agrandissement du plan est correct et expliquez votre décision.

ANNEXE 4 : EXTRAIT DU GUIDE DE L'ENSEIGNANT.

(Extrait de Cap Maths CM2, Guide de l'enseignant, (unité 13), 2010, pp. 286-287.)

(Le tableau se lit par lignes, de gauche à droite puis de ligne en ligne.)

1 Première tentative d'agrandissement

• Préciser la tâche :

➡ *Il faut que tous les éléments puissent être placés sur le plan agrandi, comme sur l'original. Sur l'agrandissement, le plus grand côté de la chambre (celui qui mesure 12 carreaux) doit mesurer 18 carreaux. Attention, dans le groupe, chacun doit tracer et découper son élément sur une feuille à part. Avant de commencer, discutez entre vous pour vous mettre d'accord sur la méthode à utiliser pour avoir un bon agrandissement. Écrivez bien la méthode choisie. À la fin, vous ne placerez les différents éléments que lorsque chacun aura découpé le sien. Si vous pensez que ça va, expliquez pourquoi. Si vous pensez que ça ne va pas, expliquez aussi pourquoi et gardez le résultat de votre première tentative avant d'en faire une nouvelle.*

• Laisser un temps de recherche suffisant, chacun devant pouvoir mener son travail à son terme.

• Lors de la **mise en commun**, mettre l'accent sur les productions erronées :

– demander aux élèves qui estiment ne pas avoir réussi d'expliquer pourquoi et d'exposer leur méthode : le plus souvent, ils ont ajouté 6 à toutes les dimensions ;

– demander à ceux qui estiment (à tort) avoir réussi, d'afficher leurs productions (ou de les reproduire au tableau). Les autres élèves doivent exprimer leur accord ou leur désaccord avec le résultat (par exemple, le fait que des milieux ou des moitiés ne se retrouvent pas sur l'agrandissement).

• **En synthèse**, écrire au tableau :

➡ **« Agrandir, ce n'est pas ajouter le même nombre à toutes les dimensions. »** (Cette phrase est encadrée au tableau.)

Des situations d'agrandissement ont déjà été rencontrées dans le cadre géométrique (au début du CM2), ce qui a permis aux élèves de prendre conscience de la nécessité de conserver certaines propriétés : angles, milieu…
Il s'agit ici de reprendre cette notion dans le cadre numérique pour mettre en évidence qu'agrandir en géométrie :
– ce n'est pas augmenter chaque dimension d'un même nombre ;
– c'est conserver les rapports entre les dimensions ;
– c'est multiplier toutes les dimensions par un même nombre.
La première étape, indispensable, réside dans la prise de conscience qu'agrandir en géométrie a un sens différent de celui du langage courant : agrandir n'est pas synonyme d'ajouter. La difficulté devant laquelle risque de se trouver de nombreuses équipes est donc voulue. Ce n'est qu'à partir de là que les élèves pourront élaborer une conception correcte de l'agrandissement.

Le rapport 1,5 a été choisi pour que puissent apparaître des procédures additives et pour pouvoir alors les mettre en défaut. Un coefficient 2 ne l'aurait sans doute pas permis.

2 Nouvelle tentative

• Relancer la recherche pour tous les élèves qui ont échoué.

• **Mise en commun et synthèse** : faire expliciter les méthodes qui ont permis d'aboutir et les conserver au tableau, par exemple :

➡ **ajouter à chaque dimension la moitié de cette dimension** (à 12, on ajoute 6 ; à 8, on ajoute 4 ; à 6, on ajoute 3 ; à 3, on ajoute 1,5…) ;

➡ **« faire une fois et demi »** (ce qui revient en fait à la procédure précédente, puisque les élèves ne savent pas multiplier par un nombre décimal) ;

➡ **utiliser les rapports « internes » entre dimensions** : 6 qui est la moitié de 12 devient 9 (moitié de 18) ; 4 qui est le tiers de 12 devient 6 (tiers de 18) ; 3 qui est le quart de 12 devient 4,5 (quart de 18)… ; ces rapports peuvent être visualisés sur le plan initial et le plan agrandi.

• Examiner le cas de la dimension 4,5 carreaux, agrandissement de 3 carreaux : il faut prendre quatre carreaux et un demi-carreau.

• Proposer un tableau pour rendre compte des relations entre les différentes dimensions :

2	3	4	6	8	12
3	4,5	6	9	12	18

Deux grandes catégories de procédures sont ainsi mises en évidence :
– celles qui prennent en compte les rapports « internes » entre les dimensions du plan initial et les reportent sur le plan agrandi (on retrouve les propriétés de linéarité de la proportionnalité) ;
– celles qui s'appuient sur le coefficient multiplicatif qui permet de passer des dimensions initiales aux dimensions finales (coefficient de proportionnalité) : les dimensions de la figure agrandie sont une fois et demie plus grandes que celles de la figure initiale.

ANNEXE 5 : ÉLÉMENTS D'ANALYSE *A PRIORI* DE LA SITUATION DU PLAN DE LA CHAMBRE

Nous donnons dans cette annexe notre propre analyse de la situation proposée par Cap Maths CM2, qui figure ci-dessus dans l'annexe 3. Nous avons effectué cette analyse avant l'atelier. Lors de l'atelier, les participants ont également réalisé une analyse du même type et ont trouvé essentiellement les mêmes éléments que nous (annexe 7).

Description de l'activité :

Le problème proposé est un problème qui traite des agrandissements. Il permet d'une part de mettre en fonctionnement les connaissances des élèves sur la proportionnalité et d'autre part d'établir des règles liées à cette transformation (notamment : conservation des formes, des angles, des proportions).

Les élèves ont à leur disposition deux sources d'informations : celles proposées par le texte *(« le grand côté de la chambre qui mesure 12 carreaux devra mesurer 18 carreaux dans l'agrandissement »*) et celles proposées par le plan dessiné de la chambre.

Les différents éléments de la chambre sont repérés par des couleurs. Les noms des objets représentés par ces couleurs sont indiqués dans le corps du texte : le lit est représenté par le rectangle vert, l'étagère par le rectangle orange et le lit par le rectangle bleu.

Les élèves ont pour tâche d'effectuer en groupe l'agrandissement.

Le coefficient de proportionnalité choisi est 3/2 ou 1,5.

Limitations de l'usage du coefficient de proportionnalité :

Pour réaliser cette tâche d'agrandissement sans aucune contrainte liée à la gestion ni au programme, il suffit de dégager le coefficient de proportionnalité (18/12 = 3/2 = 1,5), mais les nombres choisis ne permettent pas d'avoir recours si aisément à ce coefficient de proportionnalité dans le cadre actuel de l'enseignement élémentaire.

Pour résoudre ce problème, il faut donc se tourner vers les informations délivrées par le plan de la chambre, ou bien interpréter « multiplier par 1,5 » comme le fait d'ajouter à chaque nombre sa moitié. (Le guide du maître propose : « *ajouter à chaque dimension la moitié de cette dimension* »).

Pour le guide du maître, il y a deux types de procédures possibles : celles dans laquelle le coefficient d'agrandissement est trouvé grâce au rapport (12/18) et celles qui utilisent la propriété additive de linéarité.

Les procédures liées à la lecture du plan :

Nous indiquons ici les mesures des longueurs dans l'unité « petit carreau » qui figure sur le dessin et en les donnant dans l'ordre (longueur verticale ; longueur horizontale).

Les mesures de la chambre sont (8 ; 12) pour le plan initial et (? ; 18) pour le plan agrandi.

Par simple lecture du plan, on obtient également les dimensions suivantes : bureau (4 ; 3), lit (6 ; 4) et étagère (2 ; 6).

Pour déterminer les différentes mesures agrandies, il faut déterminer dans tous les cas les mesures des meubles de la chambre. Une variété de propriétés à repérer sur la figure peuvent le permettre :

- Des relations d'égalités entre des longueurs de côtés des pièces du mobilier :

On peut utiliser des relations d'égalité : la longueur du bureau est égale à la largeur du lit (4) et la longueur du lit est égale à celle de l'étagère (6).

- Des relations « moitié » entre des longueurs de côtés des pièces du mobilier :

La largeur du bureau vaut la moitié de la longueur du lit ou de l'étagère (3 et 6) et la largeur de l'étagère vaut la moitié de la longueur du lit ou du bureau (2 et 4).

- Des relations entre les pièces du mobilier et la chambre :

Les deux dimensions du lit (4 ; 6) valent la moitié de celles de la chambre (8 ; 12) ; plus précisément, la largeur horizontale du lit correspond à la moitié de la largeur verticale de la chambre (6 et 12) tandis que la longueur verticale du lit correspond à la moitié de la longueur horizontale de la chambre (4 et 8).

On peut ainsi établir des relations de ce type pour chacune des mesures du mobilier et des mesures de la chambre.

Au total, les élèves ont donc à leur charge : le relevé sur le plan des données, la mise en concordance de ces données avec les indications fournies par le texte, l'écriture des données relevées et enfin l'établissement de correspondances numériques entre les différentes mesures possibles. Nous émettons l'hypothèse que, si les pièces non agrandies étaient mobiles, cela pourrait faciliter le repérage de certaines de ces correspondances, en particulier celle des égalités, mais aussi celle mentionnée ci-dessus entre le lit en la chambre et qui suppose pour la voir de « retourner » mentalement la pièce du lit.

Cependant, chaque élève du groupe a à sa charge d'agrandir une pièce et rien n'est dit dans le guide du maître sur la hiérarchisation des difficultés d'agrandissement des différentes pièces, qui constitue pourtant un élément important de différenciation. Les élèves vont donc a priori chercher à utiliser essentiellement les mesures de leur propre pièce et les informations sur les dimensions de la chambre.

<u>Trois types de procédures se dégagent alors :</u>

1/Celles dans lesquelles les élèves vont établir puis exploiter les liens entre les mesures de leur propre pièce et celle de la chambre.

2/Celles dans lesquelles ils vont utiliser des relations entre leur propre pièce et une autre pièce (par exemple, le rectangle représentant l'étagère est exactement la moitié du rectangle qui représente le lit).

3/Celles qui consistent à déterminer puis utiliser le coefficient de proportionnalité.

Les contraintes liées à la formulation de la consigne nous amènent à penser que, dans un premier temps, les élèves ne prendront probablement pas en compte les dimensions des autres pièces. En effet, ils doivent réaliser sans concertation leur pièce et « installer avec leurs camarades chaque élément de la pièce agrandie ». Cette consigne suppose que les élèves travaillent seuls. Bien qu'ils aient le plan sous les yeux, s'autoriser à prendre des informations sur une pièce qui n'est pas la leur peut être loin d'être une idée évidente selon le contrat de la classe. On peut ainsi faire l'hypothèse que les procédures de type 2 ne seront probablement pas privilégiées en première approche.

<u>Exemple de la procédure 1 pour le cas du bureau comparé à la chambre :</u>

L'élève en charge de l'agrandissement du bureau peut procéder par comparaison avec la chambre.

Les deux figures sont des rectangles qui ont les dimensions suivantes : bureau (4,3) et chambre (8,12).

La largeur horizontale du bureau est quatre fois plus petite que la longueur (également horizontale) de la chambre (3 et 12) et la longueur du bureau est la moitié de la largeur de la chambre (toutes deux verticales : 4 et 8).

La chambre mesure initialement (8 ; 12) et la chambre agrandie (? ; 18). Le côté horizontal du bureau est quatre fois plus petit que celui de la chambre, donc les élèves doivent résoudre « 18 = 4 x ? », soit diviser 18 par 4, et le côté horizontal agrandi du bureau est de 4,5.

Les élèves doivent accepter ici de poursuivre la division au-delà de la virgule pour obtenir un quotient exact, c'est-à-dire un reste nul. Ils doivent prendre l'initiative de cela et ils doivent accepter ensuite de voir figurer une moitié de carreaux dans leur réponse.

Pour l'autre côté, la largeur agrandie de la chambre n'est pas connue, donc il est nécessaire de changer de point de vue sur les figures : par exemple on peut « retourner la pièce bureau ». Alors la longueur du bureau, devenue horizontale par ce retournement, est trois fois plus petite que la longueur de la chambre, ce qui conduit à résoudre : 18=3x ?, et l'autre dimension du bureau agrandi est de 6.

Bilan : L'agrandissement de la pièce du bureau est celle qui présente le plus de difficultés, et ce constat a d'ailleurs été unanime dans l'atelier, les deux relations devant se faire uniquement par rapport au seul côté agrandi de la chambre. De plus, la longueur d'un des côtés agrandis est 4,5 carreaux, donc une valeur non-entière, ce qui peut induire des interrogations sur la validité de la méthode utilisée et sur le droit de prendre ou non la moitié d'un carreau. Ce choix est cependant intéressant car il combat l'idée que les calculs doivent toujours donner des résultats « ronds », mais il faut prévenir au moins le professeur dans la ressource !

Agrandissement de la chambre :

L'élève en charge de l'agrandissement de la chambre peut :

- s'il le trouve, utiliser le coefficient d'agrandissement ;

- ou bien s'appuyer sur des raisonnements utilisant les propriétés de linéarité (procédures mixtes, utilisant les propriétés multiplicatives puis additives).

Les dimensions de la chambre (8 ; 12) deviennent (? ; 18) après agrandissement. Si l'on ajoute à chaque valeur initiale sa moitié, soit ici (4 ; 6), on obtient (8+4 ; 12+6), soit (12 ; 18). Ce raisonnement revient à multiplier les dimensions initiales par 1,5 en interprétant ce calcul comme « effectuer la somme du nombre initial avec sa moitié. » Cette procédure demande une bonne connaissance des propriétés de la linéarité.

Remarque sur les choix de gestion du manuel :

(Cette partie a été traitée plus rapidement en fin d'atelier et les participants ont eu à ce moment-là moins de possibilités de s'exprimer).

Cap Maths ne donne aucune indication sur la constitution des groupes, bien que la chambre et le bureau soient deux pièces à agrandir qui nécessitent des procédures un peu plus complexes que les autres.

Deux éléments de la gestion proposée nous questionnent :

- Celui qui consiste à demander aux élèves d'écrire d'abord une méthode avant de réaliser la tâche. En réalisant l'analyse a priori, nous avons relevé de nombreuses difficultés, notamment dans les choix de présentation des recueils de données : notre choix d'écriture ici à l'aide de parenthèses en respectant l'orientation (verticale, horizontale) n'est évidemment qu'un choix parmi d'autres possibles, et est à discuter.
- Celui de demander à chaque élève d'agrandir une pièce isolée dans un premier temps, ce qui conduit à privilégier les procédures de type 1 (ou 3) et défavorise celles de type 2.

La ressource propose ensuite une mise en commun après cette recherche et cette écriture individuelles. La consigne est la suivante : *« échange avec tes camarades pour savoir si votre agrandissement du plan est correct et expliquez votre décision »*. Ces choix nous semblent soulever de nombreuses questions. Pour n'en citer que quelques-unes : quel va être alors le mode de validation des élèves ? Si les pièces ont été agrandies correctement mais pas la chambre, comment les élèves vont-ils pouvoir se mettre d'accord ? Lorsque ce qui est fait est incorrect, que va devoir faire le professeur : laisser les élèves recommencer en favorisant la procédure 2, voire la 3 qui peut apparaître ? Comment le professeur conclut-il si aucune équipe n'a réussi ?

Le guide du maître propose tout d'abord d'établir qu' *« agrandir, ce n'est pas ajouter le même nombre »*, sans pour autant définir ce qu'est agrandir, puis de laisser les élèves chercher à nouveau pour faire finalement une synthèse sur les trois procédures possibles.

Le tableau de proportionnalité apparaît comme une solution pour ordonner les différentes données.

Le tableau est un tableau formel de nombres, qui ne permet pas nécessairement de savoir à quoi correspondent les nombres de la première ligne ni ceux de la deuxième ligne. C'est de nouveau laissé à la charge du professeur et des élèves.

Enfin, il est assez peu envisageable que cette séance dure réellement 45 minutes. Contrairement aux précédentes versions du guide du maître, la plus récente (celle que nous avons reprise ici) ne donne plus aucune indication de temps, ce qui est aussi à nos yeux un manque important pour guider un PE débutant.

Conclusion : cette situation ne peut être donnée en classe sans une solide analyse a priori, dont nous n'avons donné ici que quelques éléments, mais qui ont été aussi pointés par les participants de l'atelier. Les contraintes de gestion conduisent dans un premier temps à favoriser une procédure non évidente avant de pouvoir envisager les deux autres.

Le maître n'est pas vraiment ici face à une situation « clé en main » : il a par exemple à sa charge d'établir que certaines pièces sont plus difficiles à agrandir que d'autres. De plus, que va-t-il et quand va-t-il corriger le premier texte de méthode qui est demandé *(consigne 1)* ? D'après les participants de l'atelier, cette consigne n'avait pas de sens et nous partageons également cette remarque. De surcroît, le guide du maître ne dit rien sur la prise en charge ni sur les raisons de cette consigne. Pourquoi la ressource a-t-elle choisi de proposer une activité qui ne soit pas vraiment un puzzle et ne favorise pas alors la validation ?

ANNEXE 6 : PRODUCTIONS DE L'ATELIER CONCERNANT DES TEXTES DU SAVOIR SUR LA PROPORTIONNALITÉ

Cette annexe reprend les affiches qui ont été rédigées par les différents groupes lors de l'atelier en réponse aux deux demandes suivantes :

- donner une définition de la proportionnalité à destination d'un PE.,

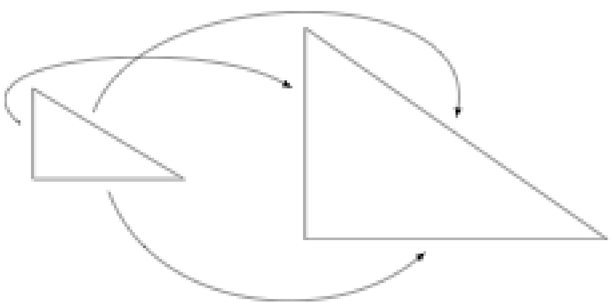
- puis élaborer un texte sur la proportionnalité dans un contexte d'agrandissement de figures, à destination d'élèves de cycle 3.

Il n'y a pas de correspondance directe entre la numérotation de groupes qui est utilisée ici et celle qui est l'est dans l'annexe suivante.

*** Groupe A :**

Une figure 1 est l'agrandie d'une figure 2 si toutes les longueurs de la figure 1 sont proportionnelles aux longueurs de la figure 2.

Exemple :



*** Groupe B :**

Dans une situation de proportionnalité, les deux grandeurs qui interviennent sont liées par un rapport multiplicatif constant.

Une figure est un agrandissement d'une autre si on peut passer de l'une à l'autre en multipliant (ou en divisant) chacune de ses dimensions par un même nombre.

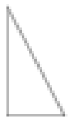
À rajouter : exemples et contre-exemples.

Remarque : la forme de la figure est conservée.

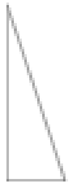
*** Groupe C :**

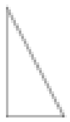
- Pour agrandir une figure géométrique, je multiplie chaque mesure par le même nombre.
- Illustration : puzzle de Brousseau :

pièce de référence Brousseau — agrandissement réalisé par un élève

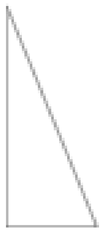


~~Proportionnalité~~





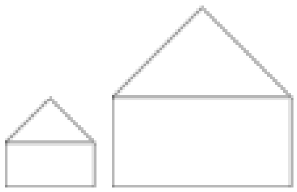
Proportionnalité



*** Groupe D :**

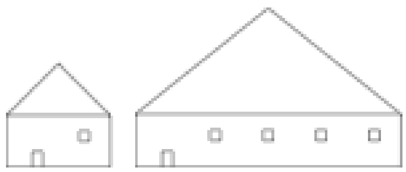
PE : Deux grandeurs dans un rapport multiplicatif constant sont dites proportionnelles.

Cycle 3 : Les deux figures suivantes sont agrandies de manière proportionnelle :



« On passe de la petite à la grande en multipliant chaque longueur par un même nombre ».

- Les deux figures suivantes sont agrandies de manière non proportionnelle :



*** Groupe E :**

Présentation de situations concrètes de proportionnalité et de non-proportionnalité.

Définition 1 : Deux grandeurs X et Y sont proportionnelles s'il existe un nombre k non nul tel que : $X = k\,Y$.

Exemple.

Définition 2 : Deux suites (x_1, x_2,… x_n) et (y_1, y_2,… y_n) sont proportionnelles s'il existe un nombre k non nul tel que $y_1/x_1 = y_2/x_2 = \ldots = y_n/x_n = k$.

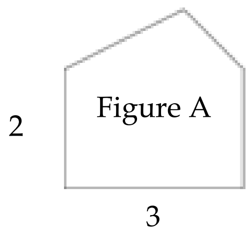
k s'appelle le coefficient de proportionnalité.

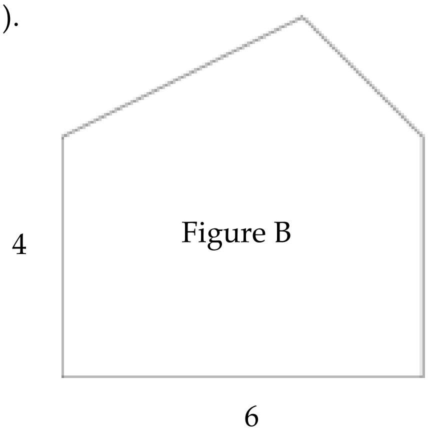
*** Groupe F :**

- Deux suites de nombres *(a,b,c,…)* et *(A,B,C,…)* sont proportionnelles lorsqu'il existe un nombre k ($k \neq 0$) tel que $A = k \times a$, $B = k \times b$

(k : coefficient de proportionnalité de *(a,b,c,…)* par rapport à *(A,B,C ,…)*).

- Cycle 3 :





La figure B est un agrandissement de la figure A.

ANNEXE 7 : PROPOSITIONS DE L'ATELIER CONCERNANT L'ÉLABORATION D'UN GUIDE DU MAÎTRE ET CONCLUSION DE L'ATELIER

Cette annexe reprend d'abord la transcription des propositions d'accompagnements faites par les 6 groupes lors de l'atelier pour aider les PE dans leur préparation de la séance proposée par Cap Maths (de type guide du maître), puis celle du débat conclusif qui a suivi. Il n'y a pas de correspondance directe entre la numérotation de groupes qui est utilisée ici et celle qui l'était dans l'annexe précédente.

Remarque : dans cette annexe, les textes écrits en caractères romains sont une transcription de ce qui a été effectivement produit et rapporté par les différents groupes lors de l'atelier, tandis que ceux en italiques sont des commentaires, qui ont éventuellement pu être pour certains rajoutés par la suite.

Groupe 1 :

Notre premier avis était que la situation en elle-même était mauvaise ; mais nous avons fini par obéir aux règles du jeu qui étaient proposées pour l'atelier, donc nous ne revenons pas ici sur ce que nous pensons de la situation en elle-même. Nous organisons ce que nous mettrions dans le guide du maître selon 4 points :

- 1 : Des précisions sur les enjeux et les objectifs, à la fois sur les plans mathématique et didactique : expliquer comment/où cette situation se situe dans la séquence ; émergence d'une conception erronée ; donner les procédures et erreurs envisageables ; et surtout, le faire en situant les procédures les unes par rapport aux autres, pour pouvoir les hiérarchiser ensuite lors la mise en commun ;

- 2 : Des précisions sur le scénario : comment se déroule la phase d'émission d'hypothèses ? Il est proposé aux élèves de se mettre d'accord d'abord sur une méthode avant de faire la construction, mais en fait cela nous parait impossible ;

- 3 : Des éléments pour la validation : les parties de la chambre ne sont pas contigües : comment le maître va-t-il gérer la mise en commun et pouvoir remettre en question les procédures qui ne marchent pas ? Il y a là des caractéristiques internes de la situation qui nous posent problème ;

- 4 : Des points à prendre en compte suite aux observations : l'auteur du guide du maître doit pointer des difficultés que les PE vont rencontrer dans la mise en œuvre.

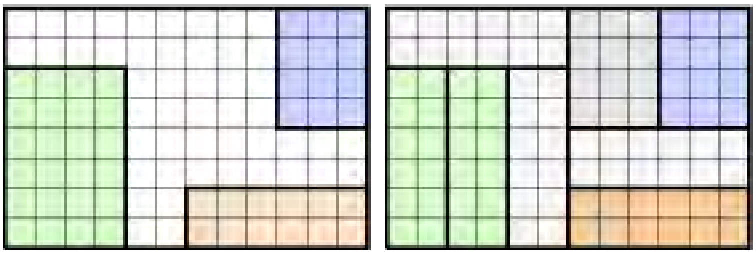
Groupe 2 :

Dans notre groupe, on est encore au stade de notre réflexion. Mais on peut au moins partager les remarques suivantes :

- Comment valider ?

- On a pensé à replacer l'étagère plusieurs fois sur le plan et à utiliser (voire indiquer) des pavages qui permettent de valider l'agrandissement. Par exemple, on peut paver l'espace de la pièce en utilisant des copies de l'étagère et du bureau.

(Le groupe montre un dessin tel que celui ci-dessous, dans lequel ils ont pavé l'espace blanc de la chambre avec 3 copies de l'étagère et une copie du bureau. Ils ont de plus partagé verticalement le lit, faisant ainsi apparaitre ainsi deux copies de l'étagère. Le plan est alors devenu un « vrai puzzle », formé avec seulement deux types de pièces : en tout 6 copies de l'étagère et 2 du bureau).



- Il y a une étape préalable sur laquelle nous nous sommes arrêtés : nous, on trouve que la situation est complètement infaisable, et on voudrait proposer de faire d'abord une situation préliminaire, avec seulement l'agrandissement de la chambre.

- Ou bien, autre possibilité : indiquer déjà les dimensions agrandies des deux côtés de la pièce, et non pas d'un seul.

- On s'oriente vers des choix de validations de type géométrique, avant d'aborder ensuite les validations de type numérique.

- Faire d'abord une première mise en commun préalable avant de les lancer dans la situation complète.

- Si c'est raté mais sans qu'il y ait de chevauchements, comment invalider les productions ?

- Et si les écarts entre les meubles ont été réduits, (proportionnellement au reste), comment invalider ?

- Comment doit-on considérer le quadrillage ? Est-ce le seulement un quadrillage annexe de la feuille support du plan, ou bien peut-on considérer que cela représente effectivement un carrelage du sol de la pièce ? Dans ce cas, il suffirait simplement de reproduire le carrelage agrandi pour pouvoir tout construire !

(Remarque : Cela orienterait alors vers une procédure de retour à l'unité, même si ce groupe ne l'a pas exprimé ainsi à ce moment-là).

- Il y a vraiment beaucoup d'obstacles.

- Enfin, nous trouvons aussi que les rapports numériques qui apparaissent entre les différentes figures et sous-figures ne sont pas simples.

Groupe 3 :

Nous rejoignons les remarques du groupe 1, auxquelles nous pouvons ajouter les suivantes :

- Prévoir le matériel.

- Justifier dans le guide tous les choix qui ont été faits. Par exemple : pourquoi du papier quadrillé ? Pourquoi n'avoir choisi que des rectangles ? Pourquoi les choix de ces rapports numériques précis, plutôt que d'autres, entre les rectangles ? Pourquoi un rapport d'agrandissement de 1,5 ? Pourquoi 4 étapes ? Pourquoi centrer la validation sur les propriétés de linéarité ? etc.

- Signaler quelles sont les choses que l'enseignant ne doit en aucun cas changer ;

- Donner des propositions de phrases toutes faites.

- Donner des indications de gestion : comment gérer les travaux des équipes ? Avec des affichages ?

- Que faire de ce qui est rédigé à la fin de la 1ere phrase : doit-on en parler ensemble ou pas ? etc.

(Un autre groupe leur demande alors : « et tout ça tiendra en combien de pages ? » ; sans réponse sur ce point du groupe 3.)

(Remarque : ceci pose au moins deux questions : celle des contraintes de formes que l'on se donne pour la ressource, qui ne sont pas précisées ici, et qui n'ont finalement été abordées dans aucun groupe ; et celle des critères d'ergonomie à retenir pour les personnes qui vont lire.)

- Nous avons nous aussi commencé par remettre en cause d'abord la situation, avant de jouer ensuite le jeu tel qu'on nous le demandait.

Groupe 4 :

- Nous avons eu au départ des remarques pratico-pratiques : notamment, sur le matériel. Par exemple, il y aura besoin de beaucoup de feuilles !

- Quels sont les prérequis ?

- À quel moment placer cette situation dans l'année ?

- Quels sont les objectifs et enjeux ? Préciser où tout cela nous emmène.

- Sur la mise en œuvre : il y a un travail en équipe, mais sur quels critères constituer ces équipes ? Le choix de ce critère va changer et modifier le travail des équipes, et ne sera pas sans effet sur le travail des élèves.

- Sur les durées : nous ne souhaiterions pas proposer une durée fixe, mais plutôt une durée en fonction de ce qu'il se passe, de ce qui est produit.

- Préciser les procédures envisageables et les procédures erronées.

- Puis une synthèse : institutionnaliser les procédures erronées et les procédures possibles.

- Résumer toutes les procédures dans un tableau.

- Nous nous sommes placés en fin de cycle 3, et pour nous, c'était vu comme un exercice d'application.

Groupe 5 :

- Nous sommes allés moins loin que les autres groupes.

- Sur les procédures attendues et erronées, la réflexion nous a pris beaucoup de temps, parce qu'il y a eu beaucoup de cas et de sous-cas que nous avons dû considérer.

- Préciser le matériel à la fois du côté PE et du coté élèves

- Préciser la gestion.
- Préciser la validation du professeur.
- Donner la gestion des différentes phases.
- Nous proposons encore une autre alternative : donner déjà le plan agrandi de la chambre (et non pas seulement ses dimensions) et demander aux élèves d'y placer les éléments.
- Différencier l'élève à qui on donne le bureau (plus difficile à cause de la longueur demi-entière).
- Enfin, signaler explicitement que, dans cette situation, la proportionnalité a un rôle outil et non pas objet.

Groupe 6 :

- Nous avons aussi finalement joué le jeu de le faire pour la séance du lendemain, même si nous critiquions comme les autres au départ la situation.
- Donner l'enjeu de la séance dans les accompagnements.
- Le choix des nombres n'est pas très riche en termes de procédures possibles: il va conduire les élèves à ajouter 6 partout ; ou à diviser par 2 puis multiplier par 3 ; ou à multiplier par 1,5 ; mais il ne nous semble pas conduire à des idées de procédures plus complexes, telles que « multiplier par 2 puis ajouter 1», etc.
- Préciser dans les accompagnements le déroulement : mettre les élèves en équipes, d'accord, mais des équipes de combien ? Pourquoi ? Constituées de quelle façon ? Homogènes ? hétérogènes ? relativement hétérogènes, c'est-à-dire hétérogènes mais seulement jusqu'à un certain point ?
- Distribuer le plan déjà agrandi pour pouvoir l'afficher au tableau.
- Afficher également le plan de départ.
- Est-ce que c'est l'enseignant qui va lire la question ?
- Important : donner le temps de la dévolution : par exemple, laisser les élèves chercher pendant un quart d'heure.
- La mise en commun : affichages, faire émerger les procédures correctes et erronées.
- Expliquer pourquoi telle procédure ne marche pas, dans le débat.
- Institutionnalisation : il nous faudrait réécrire celle que nous avions écrite précédemment dans le premier temps de l'atelier, si on veut qu'elle convienne avec cette situation.
- Cela ressemble au puzzle de Brousseau au premier coup d'œil ; mais en fait, après analyse, on voit que c'est très différent.
- Est-ce que pour finir on choisirait de donner cette activité ? Peut-être pas…

Discussion générale :

- **(CA-SG) :** D'accord ; mais comme l'enseignante que l'on considère nous dit qu'elle fait confiance à sa ressource, et que de plus il y a ici la référence à Brousseau qui figure explicitement dans le guide du maître, cela peut tout de même être une situation à laquelle on peut être confrontés, en tant que formateurs…
- Pour moi, ce n'est pas choquant que des choses difficiles soient proposées, et cela se régule par la pratique du débat et de l'échange d'arguments ; sinon, tout devient aseptisé.

Nous distribuons alors le guide du maître effectif de Cap Maths. Les participants prennent 5 minutes pour le lire, puis la discussion reprend.

- Question : En définitive, vous voulez nous faire dire qu'on a tort de conseiller Cap Math ?

- (CA-SG) : Non, pas du tout ! Nous ne cherchons, ni à vous faire dire que c'est une mauvaise situation, ni que Cap Maths serait un mauvais guide du maître, ni que nous-même serions de mauvais PE, mais que les choses sont plus complexes et plus compliquées que ça ; et aussi, de conduire à réfléchir aux enjeux auxquels cela nous conduit en formation. En tous cas, cela montre au moins qu'il ne suffit pas de dire « les PE se plantent parce qu'ils ne lisent pas le guide du maître » ; ni non plus de leur dire « et surtout, lisez bien le guide du maître, et vous serez sûrs d'être à l'abri » !

- Il y a quand même la proposition d'une 2e tentative ; mais pourquoi ces 2 phases sont-elles proposées ? Cela nous interroge. En revanche, dans le guide du maître ils ne disent rien sur la synthèse à faire sur les procédures exactes. Mais ce n'est pas le seul manuel qui fait ça : très souvent, et même dans les bons manuels, on constate que ça n'est souvent pas explicité. Mais d'un autre côté, est-ce que ce serait possible de l'écrire ? En tous cas, il est fréquent que l'on ne voie rien d'écrit dans les guides du maître sur ce qui doit être institutionnalisé.

- (CA-SG) : Pour finir, quels enjeux voyez-vous que l'on peut dégager en formation ?

- Avoir l'esprit critique : il n'y a pas que des situations auto-validantes, et on ne doit pas forcément ne chercher que ça, ou chercher à tout ramener à ça. On doit aussi entraîner parfois les élèves à ce qu'il se passe ici, c'est-à-dire à résoudre aussi des situations qui ne sont pas auto-validantes. Il faut alors trouver les critères de validité ailleurs ; et cela fait partie justement de la formation de l'esprit critique.

- (CA-SG) : Oui, d'accord ; mais alors, dans ce cas, il faut au moins les outiller et leur donner des billes pour pouvoir gérer dans ce cas leur séance, mais on ne peut pas les envoyer au casse-pipe sans les prévenir ni les outiller !

L'ANALYSE DE MANUELS EN FORMATION : POUR QUOI FAIRE ?

Christine MANGIANTE-ORSOLA
MCF, ESPE LNF, UNIVERSITE D'ARTOIS
Laboratoire de Mathématiques de Lens (LML)
COPIRELEM
christine.mangiante@espe-lnf.fr

Edith PETITFOUR
PESPE, ESPE de BAR-LE-DUC, UNIVERSITE DE LORRAINE
LDAR, Paris 7
COPIRELEM
edith.petitfour@univ-lorraine.fr

Résumé
Comme le soulignent différents travaux (Durpaire, 2006 ; Leroyer, 2012), le manuel scolaire reste l'outil de base de l'élève et du maître même si le choix de ce manuel est peu discuté dans les équipes d'enseignants. Par conséquent, il nous semble important de former les étudiants et les enseignants à exercer un regard critique sur le choix et l'utilisation des manuels.
Cet atelier s'inscrit dans la continuité de situations de formation conçues par des membres de la COPIRELEM et menées lors de colloques ou de séminaires destinés aux nouveaux formateurs (Le Poche & Taveau, 2005 ; Le Poche, Masselot & Winder, 2005). Il propose d'explorer et de questionner les potentialités d'une analyse de manuels, en identifiant différents objectifs de formation. Ce travail devrait permettre de définir des d'indicateurs en vue de construire un modèle d'analyse de situations de formation et d'enrichir la réflexion sur l'utilisation de manuels, en lien avec différentes situations ou stratégies de formation (Houdement, 1995 ; Kuzniak, 1994).

Parmi les différentes ressources utilisées par les enseignants, les manuels scolaires constituent un outil de base, utilisé au quotidien, et l'on peut remarquer que leur choix est peu discuté dans les équipes d'enseignants (Durpaire, 2006 ; Leroyer, 2012). C'est pourquoi, il nous semble important de former les étudiants et les enseignants à exercer un regard critique sur le choix et sur l'utilisation de ces manuels.

A l'origine de cet atelier, il y aussi des constats et des questions de formateurs : comment utiliser l'analyse de manuels en formation ? Il est certes facile de mettre entre les mains de futurs enseignants des manuels à analyser, mais il n'est pas toujours aisé de savoir ce qu'il convient d'institutionnaliser à l'issue de ces séances.

Cet atelier est complémentaire à l'atelier A15 (Analyser une ressource de formation : exemple de la « situation des annuaires ») dans la mesure où il vise lui aussi à interroger les potentialités d'une situation de formation. L'objectif commun est de construire un modèle d'analyse de situations de formation. Cela permettra d'enrichir la réflexion sur l'utilisation de manuels. Pour plus de cohérence, nous avons choisi un même domaine d'étude : grandeur et mesure, avec l'introduction de la notion d'aire en CM1.

Dans ce texte, nous commencerons par exposer l'organisation générale de l'atelier et les choix qui ont présidé à sa conception. Nous présenterons ensuite une première analyse succincte de quatre situations d'introduction de la notion d'aire en CM1 issues de différentes collections de manuels. Nous rendrons alors compte de la discussion menée avec les participants sur l'exploitation d'une analyse de manuels en formation et terminerons par la présentation d'un modèle d'analyse de situations de formation en termes de niveaux d'exploitation.

I - PRESENTATION GENERALE DE L'ATELIER

1 Organisation du travail

Avant le début de l'atelier, nous organisons la salle de façon à constituer des groupes de 4 personnes (voire 5 si le nombre de participants n'est pas un multiple de 4). Sur chaque îlot de tables nous disposons des dossiers contenant des extraits de manuels, de leur sommaire et guide du maître, ainsi que des grilles d'analyse de manuels à compléter. Au fond de la salle, quelques exemplaires de manuels et de livres du maître sont laissés à la disposition des participants qui souhaiteraient les consulter.

Après une introduction rapide de nos objectifs, nous présentons les documents et donnons la consigne de travail.

Nous expliquons tout d'abord que les dossiers disposés sur les tables concernent quatre collections différentes pour le CM1 :

- *Cap Maths, HATIER 2010* (cf. annexe 1)
- *Euro Maths, HATIER 2009* (cf. annexe 2)
- *Outils pour les Maths, MAGNARD 2011* (cf. annexe 3)
- *La Tribu des maths, MAGNARD 2009* (cf. annexe 4)

Sur chaque îlot, sont disposés deux dossiers : deux groupes travailleront avec *Outils pour les Maths* et *Euro Maths*, deux groupes avec *La Tribu des maths* et *Cap Maths* et le dernier groupe avec *Outils pour les Maths* et *La Tribu des maths.*

Nous présentons ensuite le déroulement du travail.

Dans une première étape, les participants devront par binôme (ou trinôme), analyser la partie recherche ou découverte de la séance introductive de la notion d'aire en CM1 d'une collection, en complétant la grille d'analyse fournie (cf. annexe 5).

Nous précisons qu'il s'agit de compléter le tableau, « en tant qu'étudiant » mais qu'il ne faut pas pour autant chercher à faire des hypothèses sur tout ce que les étudiants pourraient écrire. Il s'agit de répondre au mieux aux questions posées.

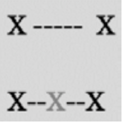
Dans une deuxième étape, au sein de chaque groupe, chaque membre d'un binôme fera part de son travail à un membre de l'autre binôme de sorte qu'ensemble, les deux nouveaux binômes puissent faire chacun une analyse comparée de l'introduction du concept d'aire des deux collections à disposition.

Enfin, dans une troisième et dernière phase, chaque groupe devra lister (sur les feuilles mises à disposition) les éléments de synthèse à dégager de ce travail d'analyse, c'est-à-dire, noter, en tant que formateurs, ce qu'il souhaiterait que les étudiants retiennent de la séance. Nous précisons que ces éléments de synthèse peuvent dépendre du public concerné et qu'il appartiendra à chacun des groupes d'indiquer dans quel contexte de formation il se situe.

Pour plus de clarté, nous projetons les schémas suivants, résumant l'organisation du travail et son déroulement.

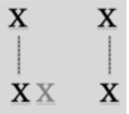
PHASE 1 (posture étudiant)

Compléter la grille d'analyse par binôme (ou trinôme).



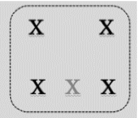
PHASE 2 (posture étudiant)

Constituer d'autres binômes (ou trinôme) pour mettre en commun les grilles d'analyse afin de comparer l'introduction du concept d'aire dans les deux collections.



PHASE 3 (posture formateur)

Par groupe rédiger les éléments de synthèse à dégager avec les étudiants M1, M2 ou FC.



2 Remarques à propos de l'organisation choisie

Pour préparer cet atelier, nous avons pris appui sur les comptes rendus de précédents ateliers d'analyse de manuels conçus par des membres de la COPIRELEM et menés lors de colloques ou de séminaires destinés aux nouveaux formateurs (Le Poche & Taveau, 2005 ; Le Poche, Masselot & Winder, 2005). Ces ateliers portaient sur des contenus différents (division euclidienne, fractions et décimaux, …), néanmoins, nous avons identifié une organisation du travail commune qui nous semble intéressante à étudier plus avant de manière à pouvoir l'étendre à d'autres situations d'analyse de manuels. L'atelier est généralement conçu selon un déroulement assez classique (présentation de la grille d'analyse, analyse des manuels, synthèse commune), mais ce qui retient plus particulièrement notre attention est l'organisation du travail des participants en trois phases définies par une structure pédagogique, des objectifs, des tâches différentes et une fonction précise des écrits produits que nous présentons ci-dessous sous forme de tableau.

Phase	Structure pédagogique	Objectif	Tâche	Fonction de l'écrit produit
Première phase	Par binôme	Débuter une analyse fouillée de plusieurs collections de manuels d'un niveau ou d'une collection de manuels sur plusieurs niveaux pour se les approprier et découvrir les situations proposée.	Compléter une grille d'analyse (les rubriques de cette grille correspondent aux entrées sélectionnées par les formateurs et dépendent de leurs objectifs)	Chaque personne doit compléter sa propre grille de façon à pouvoir au cours de la deuxième phase rendre compte à son nouveau binôme de l'analyse menée au cours de la première phase.
Deuxième phase	Les binômes se séparent pour former deux autres binômes	Croiser les analyses menées par les deux binômes.	Produire un écrit de communication portant sur l'objectif principal de l'analyse (comparer des manuels, repérer une progression sur plusieurs niveaux, …)	Cet écrit va alimenter la troisième phase de travail puisque les deux nouveaux binômes vont croiser leur analyse afin d'en faire ressortir les points saillants.
Troisième phase	Synthèse par groupe de quatre	Identifier les points saillants de l'analyse menée dans les deux phases précédentes (par exemple, points essentiels à retenir de la comparaison ou principaux choix des auteurs ou encore étapes essentielles de la progression).	Rédiger les conclusions de l'analyse croisée.	Présenter à tous les conclusions issues du travail d'analyse du groupe (à l'aide de transparents, d'affiches, …).

Cette organisation « croisée » permet d'abord un gain de temps puisque chaque personne analyse un seul niveau sur plusieurs collections de manuels ou une seule collection de manuels sur plusieurs niveaux. Elle induit aussi des échanges plus riches lors de la mise en commun (par des analyses complémentaires des deux groupes). En outre, elle permet d'impliquer de façon individuelle chaque participant dans le processus de travail d'analyse commun du groupe.

Dans la préparation du travail des groupes, chaque détail compte. Il est par exemple important de penser à donner une fonction précise à chacun des écrits demandés sous peine de voir les participants se contenter de répondre oralement aux questions posées et négliger la phase de rédaction (voir la dernière colonne du tableau). La disposition spatiale des personnes est aussi à prendre en compte. Ainsi, au moment du lancement de la deuxième phase, nous avons rapidement constaté que l'installation face à face des nouveaux binômes constituait un frein (il est difficile de consulter ensemble le manuel et la grille d'analyse lorsqu'on est assis l'un en face de l'autre, …) et encourageait des échanges à 4 plutôt que par binôme.

II - UNE PREMIERE ANALYSE SUCCINCTE DES MANUELS

Nous avons choisi quatre manuels nous permettant de présenter aux participants une grande variété d'approches de la notion d'aire. Les objectifs, les définitions données, les procédures attendues, les types de tâches, ..., diffèrent d'un manuel à l'autre. Notre intention dans cette partie est de présenter brièvement la stratégie choisie pour introduire la notion d'aire dans chacun de ces quatre manuels pour ensuite mettre en évidence en quoi il peut être intéressant de les comparer deux à deux.

1 Cap Maths

Dans le manuel *Cap Maths* de CM1 (2010), la notion d'aire est abordée en période 2, dans une leçon intitulée « Comparaison d'aires ». Cette notion est introduite dans le domaine des grandeurs par la relation « avoir la même aire » : deux surfaces ont même aire si elles peuvent se superposer ou, si après certaines transformations (découpage et réorganisation d'une des surfaces ou des deux), elles peuvent se superposer. L'aire est étudiée dans le domaine numérique, avec la mesure dans deux autres leçons ultérieures. Les objectifs d'apprentissage annoncés par les auteurs dans le guide de l'enseignant sont :

- Comprendre ce qu'est l'aire d'une surface et que des surfaces de formes différentes peuvent avoir une même aire.
- Comparer des surfaces suivant leurs aires par recouvrement ou transformation (découpage/recollement) et recouvrement.

Les auteurs précisent qu'ils emploient le terme surface pour indiquer une portion de plan et que, dans l'activité de recherche « Les papiers à motifs » de la rubrique « Chercher » du manuel, une surface correspond à une portion de feuille de papier.

Les élèves travaillent par équipe. Ils doivent, dans un premier temps, trouver dans un lot de six surfaces celles qui, après transformation (découpage, déplacement de morceaux), permettent de recouvrir une surface A rectangulaire (voir figure n°1 ci-contre, extrait du matériel photocopiable de Cap Maths). Dans un deuxième temps, ils doivent ranger les surfaces dans l'ordre croissant de leur aire. Les types de tâches proposés consistent donc à comparer des aires. Chacune des six surfaces peut être comparée à la surface A par une comparaison directe : les surfaces sont déplaçables. Une superposition directe permet de conclure pour les surfaces 2, 3 et 6, un découpage et recollement est nécessaire pour les trois autres. Les surfaces choisies permettent de différencier l'aire de la longueur d'une dimension ou de l'encombrement, à savoir la place globale prise par la surface sur le support.

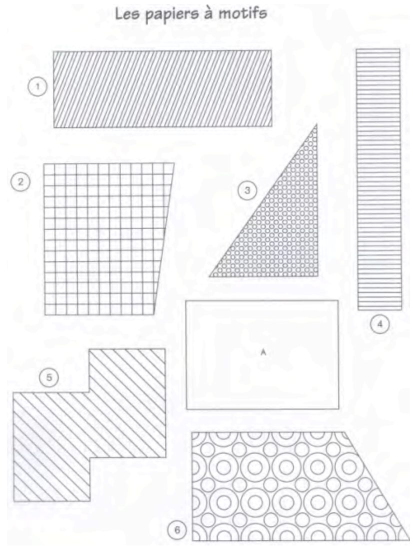


Fig. 1 : Réduction du matériel photocopiable « les papiers à motifs » de format A4

2 Euro Maths

Dans le manuel *Euro Maths* de CM1 (2009), la notion d'aire est abordée en période 3, dans une leçon intitulée « Formes et aires ». Les objectifs d'apprentissage annoncés par les auteurs dans le livre du professeur sont :

- Se familiariser avec la notion d'aire d'une surface plane.
- Comprendre que des surfaces de formes différentes peuvent avoir la même aire.

Comme dans *Cap Maths*, la notion d'aire est d'abord introduite dans le domaine des grandeurs, avant de l'être dans le domaine numérique avec la mesure dans la séance suivante. Dans le livre du professeur, les auteurs définissent une surface comme un « objet géométrique », ensemble de points du plan. Ils précisent que l'aire est une grandeur attachée à une surface, et qu'elle évoque l'espace occupé par la surface. Dans le manuel, la surface est représentée sur un rectangle par une « zone coloriée ». L'aire n'est pas définie directement, mais par la relation « avoir la même aire », avec la distinction de deux cas : deux figures planes ont la même aire si elles sont superposables, ou si on peut reconstituer avec chacune d'elles une même surface, sans trou ni chevauchement.

Une activité préparatoire de découverte, réalisée par groupes, consiste à partager des feuilles de format A4 en deux parties exactement superposables, sans faire de collage, ni perdre de papier. Les élèves doivent trouver le plus de partages possibles (cf. « situation des annuaires » de l'atelier A15). Le type de tâches proposé consiste en produire des surfaces de même aire : des paires de surfaces de même aire et de même forme, à partir d'une feuille rectangulaire ; un lot de surfaces issues de partages différents, de même aire et formes différentes. Dans *Euro Maths*, il s'agit donc pour les élèves de créer des surfaces de même aire, à la différence de *Cap Maths* où les élèves sont amenés à identifier une surface de même aire qu'une surface donnée. Dans les deux manuels, les surfaces sont réalisées sur des feuilles déplaçables et les procédures de recherche sont basées sur le tâtonnement avec découpage et superposition.

3 Outils pour les Maths

Dans le manuel *Outils pour les Maths* de CM1 (2011), la notion d'aire est abordée en période 3, dans une unique leçon intitulée « Mesurer et comparer des aires ». Contrairement à *Euro Maths* et à *Cap Maths*, cette notion n'est introduite et étudiée que dans le domaine numérique, avec la mesure. Les objectifs d'apprentissage annoncés par les auteurs dans le Guide du maître sont :

- Exprimer ou estimer l'aire d'une surface à l'aide d'une unité d'aire.
- Comparer des surfaces à l'aide d'une unité d'aire.

Une phase de découverte collective précédant la situation de recherche du manuel est exposée dans le guide du maître. Elle doit permettre de différencier les notions de surface et d'aire, que les auteurs définissent ainsi : une surface est une forme plane délimitée, l'aire est « la mesure de sa grandeur ». Les élèves devront donner des exemples de surfaces trouvées dans la classe, le problème d'en mesurer l'aire leur sera posé et aboutira au besoin d'une unité d'aire pour faire cette mesure. Le guide du maître ne donne pas d'indication sur la façon de résoudre ce problème, qui semble être laissé en suspens pour faire place à un travail individuel de recherche.

L'énoncé du problème, issu d'une situation concrète de la vie courante, est présenté dans la rubrique « Cherchons » du manuel. Le mur carrelé d'une salle de bain y est représenté, avec trois surfaces polygonales A, B et C de carreaux manquants (voir figure n°2 ci-contre). Les contours des surfaces A et B suivent des lignes de carreaux : ces surfaces contenaient des nombres entiers de carreaux (6 et 8). Le contour de la surface C ne suit pas de lignes de carreaux : seul un encadrement du nombre de carreaux contenus dans cette surface est possible.

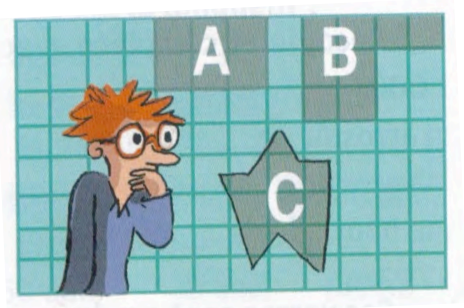


Fig. 2 : extrait du manuel élève Outils pour les maths CM1.

Les trois surfaces sont représentées sur la fiche « Cherchons » du CDROM sur un quadrillage régulier, ce qui n'est pas le cas sur le manuel où les carreaux n'ont pas tous la même aire. Cela pose un problème pour le mesurage puisque le carreau ne peut pas être utilisé comme unité d'aire.
Le problème est ainsi exposé dans le manuel : « M. Gilet doit réparer le mur de sa salle de bain. Il cherche à savoir combien de carreaux il doit commander ». Le premier type de tâches consiste donc à mesurer une aire à partir d'une unité, cette unité de mesure étant donnée (il s'agit de l'aire d'un carreau). Pour cela, les élèves sont invités à dénombrer les carreaux manquants dans chacune des surfaces A et B, et à trouver le nombre de carreaux nécessaires « à commander pour réparer entièrement la surface C ». Les auteurs identifient ce dernier nombre de carreaux (14) à l'aire de la surface C. Le deuxième type de tâches consiste à comparer des aires, de même que dans *Cap Maths* : les surfaces doivent être « classées » selon leur aire, de la plus petite à la plus grande. Cependant dans *Outils pour les Maths,* la comparaison directe n'est pas possible car les surfaces ne sont pas manipulables.

4 La tribu des maths

Dans le manuel *La tribu des maths* de CM1 (2009), la notion d'aire est abordée en période 3, dans une leçon intitulée « Comparer des surfaces ». L'objectif d'apprentissage annoncé par les auteurs dans le guide du maître est de mesurer des surfaces avec une unité ou en en changeant, et éventuellement de les comparer. Comme dans *Outils pour les Maths*, la notion d'aire est introduite dans le domaine numérique. Les auteurs définissent l'aire comme « la mesure de la surface » en caractérisant ainsi la surface : la surface est un morceau d'espace délimité par des lignes et des points. On peut la colorier. On peut la comparer à d'autres surfaces, la mesurer avec une unité.

Une activité « Avant de commencer » consiste à paver un carré avec différentes unités. Dans cette activité, les surfaces sont présentées sur un support pointé et ne sont pas déplaçables. Le même support est utilisé pour les cinq surfaces de l'exercice de recherche (voir figure n°3 ci-contre) où il s'agit de « classer les surfaces de la plus petite à la plus grande ».

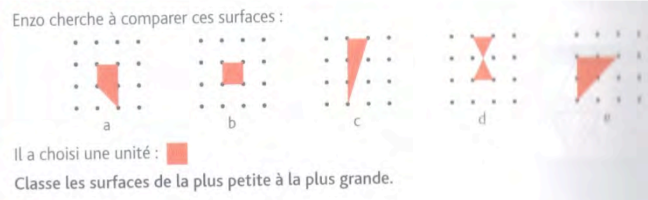


Fig.3 : exercice de recherche, La tribu des maths CM1

Le type de tâches revient donc à comparer des aires, comme dans *Cap Maths* et *Outils pour les Maths*. La recherche est individuelle. Un carré unité est donné, ce qui induit une procédure de comparaison par la mesure, comme dans *Outils pour les Maths*. Les auteurs précisent que l'exercice doit être effectué visuellement, sans aucune manipulation à faire. Hormis la surface b qui correspond au carré unité, les surfaces choisies ne peuvent être pavées par un nombre entier d'unités : deux peuvent l'être après une recomposition de la surface et les deux autres ont une mesure non entière et nécessitent donc de fractionner l'unité.

III - QUELQUES THEMES ABORDES LORS DE LA DISCUSSION AVEC LES PARTICIPANTS

1 Souligner la nécessité d'un regard critique sur les manuels et guides du maître

Cap Maths et *Euro Maths* abordent le concept d'aire dans son aspect « grandeur » en l'introduisant avec la relation « avoir la même aire », tandis qu'*Outils pour les Maths* et *La tribu des maths* ne font pas de distinction entre les notions de grandeur et de mesure : « l'aire est la mesure de la surface », « l'aire est la mesure de la grandeur de la surface ». Dans *Outils pour les Maths*, la notion d'aire risque d'être assimilée à un comptage de carreaux. Dans *La tribu des maths,* le terme « surface » est également utilisé dans son sens du langage courant comme synonyme du terme « aire ». Cet amalgame entre la surface (objet géométrique), l'aire (grandeur) et la mesure (nombre) peut conduire les élèves à des erreurs : ils peuvent par exemple confondre l'aire et le périmètre d'une surface, ainsi que cela peut apparaître dans des analyses de travaux d'élèves.

Le guide du maître d'*Outils pour les Maths* propose de commencer la leçon en définissant les termes « aire » et « surface ». Dans *La tribu des maths,* l'activité de recherche s'achève par la question de débat « Qu'est-ce qu'une surface ? » et aboutit à une définition. Ces manuels semblent donc accorder une attention particulière au vocabulaire, même si par ailleurs ils utilisent le terme « classer » dans son sens du langage courant, à la place du terme « ranger ». Dans *Euro Maths,* le terme « surface » est explicité pour l'enseignant dans le livre du professeur, mais il n'est pas formellement défini pour l'élève, il se réfère à une zone qui est coloriée. Il en est de même dans *Cap Maths* où la surface est identifiée à une partie de feuille de papier.

La comparaison des manuels permet de mettre en évidence ces différentes façons d'introduire et de définir la notion d'aire, elle donne ainsi l'occasion de se questionner sur leur validité scientifique. A ce propos, les participants estiment que les enseignants ne doivent pas se sentir obligés de définir formellement des termes comme « aire » ou « surface ». Pour introduire la notion d'aire, ils peuvent s'appuyer sur la relation d'équivalence. Ensuite, le formateur peut conseiller aux étudiants ou enseignants d'écarter les manuels qui ne font pas la distinction objet/mesure/grandeur ou qui peuvent entretenir une confusion. Il peut les rendre vigilants sur les notions et la manière dont elles sont définies, en sollicitant un regard critique sur ce qui est écrit dans les manuels.

Il peut également attirer leur attention sur certaines imprécisions. Dans le livre pour l'élève d'*Outils pour les Maths*, les carreaux ne sont pas tous identiques : l'aire d'un carreau ne peut donc pas être choisie comme unité d'aire. Ainsi, le support choisi peut faire obstacle à la construction même de la notion visée (il est important de faire comprendre aux élèves que l'égalité des aires est une condition dont on ne peut se passer dès lors que l'on cherche à mesurer).

Cependant, reste à savoir comment les enseignants pourront s'assurer qu'un manuel, même provenant d'un éditeur connu, propose des contenus scientifiquement corrects.

Faire vivre la situation aux étudiants est une autre entrée possible suggérée par les participants. L'argument avancé est que non seulement réaliser soi-même le travail attendu des élèves constitue un geste professionnel essentiel au moment de la préparation des séances mais de plus, cela peut amener l'enseignant à interroger la validité scientifique du manuel ou plus largement les choix didactiques de leurs auteurs.

Mais, là encore, chacun s'accorde à dire qu'il est difficile pour un enseignant débutant de porter un regard critique sur un manuel surtout lorsque son livre du maître ne présente pas clairement les intentions des auteurs (c'est le cas des ouvrages de la collection *Outils pour les maths*). D'autres collections présentent plus explicitement les choix didactiques et apportent de précieuses indications quant à la mise en œuvre des séances présentées : le guide du maître de la collection *Euro Maths* permet de préciser le scénario de la situation qui n'apparaît pas clairement dans le manuel (présentation en deux lignes seulement) ; celui de la collection *Cap Maths* répertorie les procédures des élèves et précise comment réagir à leurs propositions, indique les points importants à souligner, les synthèses à faire, …). Ainsi, la lecture comparée de ces extraits de collections permet de mettre en évidence des différences au niveau de l'articulation manuel/livre du maître et une prise en charge différente du travail de préparation de l'enseignant.

Une autre question que les formateurs souhaiteraient voir émerger est celle de l'adéquation entre la vision de l'apprentissage du manuel et celle que l'enseignant souhaite développer. Par exemple, les manuels *Outils pour les Maths* et *La tribu des maths* proposent des approches transmissives alors qu'*Euro Maths* et *Cap Maths* proposent une vision plus constructiviste. Il y a donc là des partis pris des auteurs de manuels dont les étudiants/enseignants doivent avoir conscience. Dans cette perspective, les participants proposent d'ajouter une rubrique dans la grille d'analyse concernant la place donnée dans le manuel à l'activité des élèves (explicite ou implicite) dans la construction des concepts et des savoirs. Etudier le rôle joué (ou pas) par les propositions des élèves dans l'avancée du travail autour de la notion pourrait en effet être une entrée pertinente pour interroger la vision des auteurs.

On pourra notamment faire remarquer aux étudiants que dans les manuels *Outils pour les Maths* et *La tribu des maths* les définitions sont données aux élèves alors que dans les manuels *Euro Maths* et *Cap Maths*, la notion d'aire n'est pas définie de manière explicite mais que les situations proposées visent à la construire de manière progressive. Ainsi, les définitions d'aire et surface sont données dans une activité préliminaire en début de séance (*Outils pour les Maths et La tribu des maths*) alors que l'introduction des termes a lieu lors de la synthèse en fin de séance (*Euro Maths* et *Cap Maths*).

Ces différences en termes de visions de l'apprentissage sont aussi révélées par les caractéristiques des situations choisies. Les manuels *Outils pour les Maths* et *La tribu des maths* proposent des problèmes non consistants (ramenés à une comparaison de nombres) alors que les auteurs d'*Euro Maths* et *Cap Maths* font le choix de problèmes riches (dont la réponse est non évidente). Dans le premier cas, la validation est à la charge de l'enseignant et dans le second, elle est à la charge des élèves (l'erreur jouant alors un rôle essentiel dans le processus d'apprentissage).

Enfin, ces différences apparaissent aussi via l'analyse de la tâche de l'élève (s'agit-il d'enseigner une technique ou de définir une relation ?). Dans les manuels *Outils pour les Maths* et *La tribu des maths,* la tâche des élèves consiste à mesurer en dénombrant. Dans les *Euro Maths* et *Cap Maths* il s'agit de produire des surfaces et cette tâche vise à définir la relation « avoir la même aire ». Le formateur pourra saisir cette occasion pour insister sur la nécessité de construire le sens de la notion d'aire et d'éviter les recettes. Il pourra aussi préciser aux étudiants les caractéristiques d'une situation-problème en reprenant celles indiquées par Douady (2003).

« *Le problème doit mettre en jeu la connaissance (la notion, la technique) dont l'apprentissage est visé.*

- *Le problème doit être « consistant », c'est-à-dire que la réponse ne doit pas être évidente sinon ce serait simplement un exercice d'entraînement.*
- *L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution avec ses connaissances antérieures, mais il doit aussi avoir à chercher pour les adapter et les faire évoluer*
- *La validation doit être le plus possible à la charge de l'élève (on parle d'auto validation).*
- *Le problème doit pouvoir servir de référence pour la notion et pour la classe.* »

2 Dégager des éléments de synthèse argumentés

Ces premiers échanges nous conduisent, en tant que formateurs, à réaffirmer la nécessité d'amener les étudiants/enseignants à questionner le manuel sur différents points (validité scientifique, choix didactiques, aides à la mise en œuvre, choix par rapport aux théories de l'apprentissage, ...). Mais, au-delà de ce nécessaire questionnement, nous constatons qu'il n'est pas toujours facile pour le formateur d'avoir un discours prescriptif. L'une des questions qui émerge tout naturellement de la mise en parallèle de ces séances introductives de la notion d'aire est celle de la pertinence des deux entrées identifiées (par la notion de grandeur/directement par la mesure). A la question « ces deux entrées se valent-elles ? » que peut-on répondre ? Les participants proposent plusieurs types d'arguments.

- Des arguments institutionnels

Se référer aux textes institutionnels permet d'avancer un argument d'autorité, par exemple, citer le texte récent du Conseil Supérieur des Programmes. Dans les « Recommandations pour la mise en œuvre des programmes de l'école élémentaire » (BO 19 juin 2014), il est écrit : Ce domaine d'apprentissage étant très souvent à l'origine de difficultés chez certains élèves, on peut prendre appui sur toutes les phases de manipulation (dont les comparaisons directes et indirectes) qui permettent de faire comprendre la notion de grandeur avant de faire appel à la mesure.

- Des arguments en lien avec les difficultés et erreurs des élèves

Le formateur peut aussi prendre appui sur des résultats issus de travaux de didactique, sur sa propre connaissance des difficultés des élèves, voire sur l'expérience des enseignants qui participent à sa formation. Dans les documents d'accompagnement des programmes de 2002, il était écrit : « Le fait d'annoncer la bonne unité de mesure à la suite du nombre n'est pas suffisant pour que les élèves se représentent correctement une grandeur [...] Il est nécessaire qu'ils aient préalablement travaillé sur les propriétés de chacune de ces grandeurs. ».

Il pourra notamment souligner le fait qu'introduire la notion d'aire par la mesure peut induire des blocages chez les élèves au moment de l'introduction du système d'unités, ou aussi pourra conduire à des confusions entre aire et périmètre. S'appuyer sur ce type d'argument (à partir d'études de cas en vidéo, de retranscriptions d'entretien avec élèves, de photos de brouillon, de traces d'activités, …) est nécessaire pour convaincre les étudiants/enseignants de faire une l'effort d'une distinction grandeur/mesure qui n'est pas faite dans la vie courante.

- Des arguments par rapport au savoir mathématique

Le formateur pourra aussi amener les étudiants/enseignants à identifier phase par phase les mathématiques en jeu ce qui permet de mesurer la consistance d'une activité, donne des éléments de comparaison de manuels, justifie le choix de construire la grandeur avant la mesure.

Nous aurions pu aussi pour conclure sur ce point, citer une phrase de Rouche (1992) : « Les grandeurs absolues n'existent pas, [Supposons] qu'au cours de la nuit prochaine, pendant mon sommeil, les dimensions de toutes choses et celles de l'univers lui-même soient diminuées de moitié, comment ferai-je à mon réveil pour vérifier l'événement ? ». Il en découle ensuite assez naturellement le fait que la mesure dépend de l'unité choisie et qu'il est nécessaire de construire un ordre de grandeur et des équivalences de base pour les unités conventionnelles d'aire.

3 Des éléments de synthèses qui tiennent compte des priorités des enseignants

Parmi les éléments de synthèse proposés, nous avons déjà évoqué la nécessité de souligner auprès des étudiants l'importance du choix du livre du maître. Mais, ce point a fait émerger de nouvelles questions.

Certains participants soulignent le fait que pour certains enseignants, notamment ceux responsables de classes multi niveaux, l'usage d'un livre du maître détaillé peut alourdir leur charge de travail ou que plus généralement ils peuvent avoir d'autres critères de choix que ceux souvent privilégiés par les formateurs : il sera par exemple important pour certains enseignants que le manuel soit suffisamment attrayant pour maintenir autant que possible l'attention des élèves et favoriser ainsi leur autonomie.

D'autres participants estiment qu'un livre du maître détaillé contribue à simplifier le travail du maître, l'aide à anticiper les procédures et les erreurs pour mieux prévoir comment réagir.

Les préoccupations des enseignants se situent probablement entre ces deux positions : on peut en effet raisonnablement faire l'hypothèse que leur priorité est de trouver la ressource qui va leur permettre au minimum de survivre, et au maximum d'enseigner de manière efficace, de proposer des situations suffisamment riches. Si le formateur restreint son argumentation à des critères de qualité, il s'expose à une fin de non-recevoir (« Ce n'est pas vous qui êtes sur le terrain, on n'a pas le temps de tout faire »). L'argument de l'utilité du livre du maître détaillé n'est donc pas nécessairement convaincant ou du moins, il semble important de privilégier une démarche en deux temps : amener l'enseignant à s'interroger pour ensuite apporter des éléments de réponses argumentés. Rendre transparents certains impacts des choix des auteurs des manuels sur l'apprentissage ne pourra être entendu que par des enseignants qui se questionnent. C'est à cette condition seulement, que le formateur pourra par exemple convaincre lorsqu'il affirme qu'un manuel très guidé pour l'élève constitue un leurre : on peut viser une réussite à court terme, mais les apprentissages réalisés sont peu durables.

De manière plus générale, pour qu'un enseignant évolue dans sa pratique, il faut qu'il puisse trouver un gain supérieur aux désagréments qu'induit ce changement de pratique. Mettre en avant l'avantage de disposer d'une liste de procédures n'est sans doute pas suffisant pour certains. Il appartient donc aux formateurs de trouver les arguments qui correspondent aux besoins des enseignants et à leur échelle de priorités.

IV - POUR ALLER PLUS LOIN DANS L'ANALYSE DES POTENTIALITES DE LA SITUATION DE FORMATION

1 L'analyse de manuels peut-elle constituer une entrée pertinente ?

L'analyse comparative des manuels choisis permet de faire émerger des éléments d'une très grande richesse autour du concept d'aire, du point de vue des connaissances tout autant que du point de vue de l'analyse didactique. Et même si des étudiants ou enseignants en formation continue ne sont pas en mesure d'identifier les erreurs dans les manuels, ils peuvent mettre en évidence des contradictions dans les définitions, pointer des choix différents d'objectifs poursuivis, de types de tâches, de variables didactiques, etc. Cette activité d'analyse de manuels située en début d'un module de formation permettrait donc de déclencher un premier questionnement. Un participant souligne toutefois la difficulté en formation à vouloir faire émerger les concepts en même temps que d'effectuer l'analyse didactique. Une autre met en avant l'importance de la mise en situation, absente de l'analyse de manuels, et de sa complémentarité avec cette même analyse. Vivre les différentes phases de la « situation des annuaires » (dévolution, action, formulation, validation) permettrait aux étudiants de mieux se rendre compte de leur intérêt que s'ils n'en lisent seulement la description dans le livre du professeur de *Euro Maths*.

Quelques limites à une activité de comparaison de manuels sont mentionnées par les participants. Pour un formateur, l'expérience montre que, suite à une analyse comparative aussi tranchée que celle des manuels *La tribu des maths* et *Cap Maths*, les conclusions qui semblent évidentes pour les formateurs sont loin d'être majoritaires à la fin des séances pour les étudiants. Ceux-ci opteront pour le manuel qui leur semble le plus clair et le moins compliqué alors que les formateurs ont des critères de choix relatif à la qualité scientifique et didactique. Quelqu'un évoque la proximité géographique des auteurs qui pourrait aussi avoir des conséquences sur les préconisations de formateurs. Enfin, un autre participant fait remarquer que l'activité de comparaison de manuels peut ne pas satisfaire des besoins en formation d'enseignants qui doivent travailler avec un manuel imposé. On pourrait par exemple s'attendre à ce type de remarque de M2 stagiaire : « C'est bien gentil de comparer des manuels, mais moi, c'est celui-là que j'ai, comment je fais avec celui-là ? ».

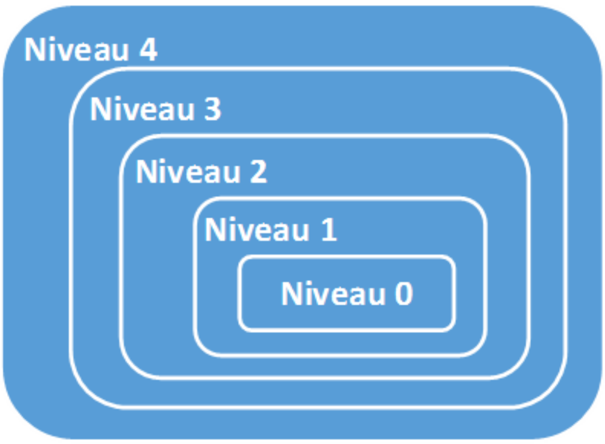
La comparaison de manuels n'est qu'une forme possible d'activité d'analyse de manuels. Plus généralement, on peut se demander si l'impact de ce type de situation de formation est dépendant du public visé. Il est probable qu'une analyse de manuels soit plus proche des préoccupations d'enseignants en formation continue que d'étudiants de M1, mais ce point de vue peut être discutable et l'on peut considérer que tout dépend du niveau d'analyse visé par le formateur. Nous faisons en effet l'hypothèse qu'une même situation de départ (et notamment l'analyse de manuel) possède différents niveaux d'exploitation possibles.

2 Analyser les potentialités d'une situation de formation

2.1 Présentation de notre modèle d'analyse

Dans la perspective de ce colloque, la COPIRELEM a souhaité initier une réflexion portant sur les ressources que notre commission a elle-même produites afin de pouvoir à terme les reconsidérer à la lumière des nouvelles contraintes de travail dans les ESPE pour les adapter et les enrichir. Pour atteindre ce but, il était important de nous donner des outils d'analyse. Comment, en effet, réussir à interroger l'adaptabilité d'une situation de formation au public choisi et aux contraintes imposées par le contexte de formation ? Comment aider les formateurs à percevoir les potentialités de ces situations et à les adapter en fonction de leurs propres objectifs ?

Ces questions nous ont conduits à l'élaboration d'un modèle d'analyse que nous avons présenté aux participants. Nous avons ensuite essayé de le faire fonctionner à partir d'exemples issus de la situation d'analyse de manuels servant de base à notre atelier.



Notre modèle d'analyse se présente sous la forme de quatre niveaux imbriqués. Chaque niveau correspond à un niveau d'exploitation différent d'une situation de formation donnée (ici, l'analyse de manuel). Chaque niveau englobant le précédent, nous faisons l'hypothèse qu'il n'est pas possible d'exploiter la situation à un niveau n si les étudiants/enseignants ne possèdent pas les acquis correspondants à un niveau n-1.

Sur notre modèle, le *niveau 0* désigne un type d'activité au cours de laquelle le formateur soumet au formé des tâches qu'il doit résoudre au même titre qu'un élève le ferait et son objectif est de faire agir le formé (réaliser une activité mathématique : jouer à des jeux, reproduire une figure géométrique, résoudre des problèmes, …).

Une activité de *niveau 1* suppose une analyse réflexive portant sur l'activité de niveau 0. C'est par exemple, le cas lorsque le formateur demande aux formés de lister les procédures pouvant être mises en œuvre, d'envisager les difficultés des élèves, d'analyser des productions d'élèves, de faire des hypothèses sur l'origine des erreurs, d'identifier les objectifs visés, etc. L'objectif du formateur est alors d'amener le formé à une prise de recul sur l'activité de niveau 0 pour réaliser l'analyse de certains aspects mathématiques et didactiques. Par voie de conséquence, une activité de *niveau 1* englobe une activité de *niveau 0.*

Le *niveau 2* est atteint lorsque le formateur s'adresse au formé en tant qu'enseignant c'est-à-dire lorsqu'il lui demande de produire des actions ou un discours en lien direct avec une pratique de classe. Ainsi, lorsqu'il propose une activité de *niveau 2*, l'objectif du formateur est d'amener le formé à développer des pratiques enseignantes, à envisager/analyser/simuler des gestes professionnels nécessaires à la mise en œuvre de l'activité de *niveau 0.*

Une activité de *niveau 3*, demande au formé de prendre un peu plus de recul encore. Elle suppose de mettre en relation l'activité de *niveau 0* avec d'autres types d'activités, de la situer par rapport à des enjeux plus larges et de réinvestir ce que le formé a acquis pour d'autres activités ; ce dernier est alors amené à interroger ses pratiques au-delà de l'activité de *niveau 0* et par voie de conséquence, à les enrichir. Il s'agit donc d'amener le formé à enrichir ses pratiques (au-delà de la simple mise en œuvre de l'activité de *niveau 0).*

Enfin, on pourrait envisager un *niveau 4* correspondant à une initiation à la démarche de recherche.

2.2 Un premier exemple

Prenons appui sur la situation d'analyse de manuels déjà présentée pour illustrer notre modèle d'analyse.

Si au moment de la phase de synthèse, le formateur attire l'attention de ses étudiants/enseignants sur des choix différents faits par les manuels à propos de l'introduction de la notion d'aire, par exemple, sur l'existence d'approches différentes (entrée par la mesure ou en tant que grandeur), alors il se situe au *niveau 1.* En effet, son objectif consiste ici à amener le formé à une prise de recul sur l'activité mathématique elle-même afin de dégager certains aspects didactiques.

Mais, ce faisant, le formateur pourra être amené à effectuer des rappels ou des apports de connaissances, c'est-à-dire, à revenir sur des acquis en lien direct avec une activité de *niveau 0*.

Si le formateur choisit d'aller au-delà du simple constat de choix différents faits par les auteurs de manuels et invite les étudiants/enseignants à interroger la pertinence de chacune de ces deux approches, il exploite alors l'analyse de manuel à un *niveau 2* voire *3*. En effet, les arguments avancés conduisent le formé à produire des actions ou un discours en lien direct avec une pratique de classe en s'interrogeant notamment sur les difficultés des élèves voire à prendre un peu plus de recul encore en questionnant le choix de ces activités par rapport à des enjeux plus larges.

Enfin, dans le cadre par exemple de séminaires de recherche, le formateur pourrait exploiter cette analyse de manuels dans le but d'étudier les conceptions des auteurs sur l'enseignement de la notion d'aire et plus généralement sur l'enseignement des mathématiques.

2.3 Un deuxième exemple

Dans la situation d'analyse de manuels, nous avons travaillé avec quatre collections. Nous avons proposé à chaque groupe une comparaison de deux manuels parmi ces quatre en faisant différents choix d'association. Si un fort contraste apparaît au niveau de l'approche de la notion d'aire dans la comparaison de *La Tribu des maths* et *Cap Maths*, il est moindre avec *Outils pour les Maths* et *La Tribu des maths,* toutefois, ces associations de manuels permettent toutes deux de faire émerger la notion de variable didactique. Un même type de tâches de rangement de surfaces selon leur aire est en effet proposé dans les trois manuels. Dans *La Tribu des maths* et dans *Outils pour les Maths,* les surfaces sont non déplaçables et la comparaison doit se faire visuellement et sans manipulation alors que dans *Cap Maths* la comparaison peut se faire par découpage et recollement avec une manipulation effective. L'association *La Tribu des maths*/*Cap Maths* permet donc de faire émerger la différence de nature de la situation, statique versus dynamique, alors que l'association *La Tribu des maths*/*Outils pour les Maths* ne le permet pas. Par contre cette dernière association permet de mettre en évidence la différence entre les mesures choisies pour les surfaces (entières ou non).

Dans la comparaison des deux approches de la notion d'aire, une activité de *niveau 1* revient à identifier différentes procédures de résolution liées aux variables didactiques. Une activité de *niveau 2* consiste à s'interroger tout d'abord sur la nécessité de manipulations effectives avant de proposer des « manipulations mentales », et de s'interroger ensuite sur les moyens d'amener les élèves à une activité de comparaison mentale.

Réfléchir plus généralement au rôle de la manipulation en phase d'apprentissage et aux étapes intermédiaires permettant de se construire des images mentales (décrire l'action en acte, l'évoquer) correspond à une exploitation de *niveau 3.* Comme le souligne Peltier (2003) :

« Ces expériences ne pourront être mobilisées que si elles ont été décrites au moment de l'action et surtout évoquées après avoir été menées, de manière différée et sans retour à la manipulation. »

Ainsi, selon les manuels qu'il choisit, la façon dont il les associe et selon les éléments de synthèse qu'il choisit/privilégie/met en valeur, le formateur va exploiter cette « activité avec manuels » à un *niveau 1*, *niveau 2*, *niveau 3* ou *niveau 4*.

V – EN CONCLUSION

L'analyse de manuels constitue une situation de formation très séduisante qui permet d'amener les (futurs) enseignants à adopter un regard critique sur leurs (futurs) outils de travail. Néanmoins, au-delà des échanges suscités, il n'est pas toujours facile pour le formateur de savoir ce qu'il convient d'institutionnaliser. Faire compléter une grille d'analyse, c'est certes intéressant mais il faut ensuite savoir ce qu'il convient d'en dégager.

Les débats qui ont eu lieu dans le cadre de cet atelier montrent que l'explicitation d'éléments de synthèse, ne va pas de soi : inévitablement, émergent des questions en lien avec la légitimité de l'analyse attendue de la part du formateur et par voie de conséquence, avec la nature des arguments à avancer pour convaincre les enseignants (que ce soit en formation initiale ou continue).

Du choix des manuels à la mise en commun en passant par la conception de la grille d'analyse, le travail du formateur doit être guidé par ses objectifs. A travers cet atelier, nous voulons souligner combien il est important de savoir « jusqu'où exploiter la situation de formation choisie » et dans quel but. C'est pourquoi nous proposons un modèle d'analyse qui se présente comme une aide pour identifier différents niveaux d'exploitation possible d'une situation de formation.

Ainsi, la situation d'analyse de manuels proposée aux participants peut être exploitée à différents niveaux. Tout dépend de la place qu'on lui donne dans le dispositif de formation. Le formateur peut choisir de se positionner à différents niveaux au cours d'une même séance de formation. Il peut se contenter de comparer les approches choisies par les auteurs de manuels et se limiter à des constats (*niveau 1*) ou amener les enseignants à prendre appui sur cette activité pour envisager/analyser/simuler des gestes professionnels (*niveau 2*). Descendre vers le *niveau 0* permet de sécuriser. Etirer la situation vers des *niveaux 2, 3* ou *4* permet d'amener les futurs enseignants à prendre de plus en plus de recul. Par exemple, dans le cadre de la formation continue, il est fréquent de vouloir atteindre les *niveaux 3* ou *4*, mais des retours au *niveau 0* sont parfois nécessaires.

Nous avons choisi l'exemple de l'introduction d'une notion mais il existe bien d'autres exploitations possibles des manuels en formation. Nous aurions pu choisir de demander aux participants de reconstituer une progression à partir de différents extraits donnés dans le désordre, d'analyser le choix des exercices proposés par un manuel afin d'en dégager une éventuelle progression, de choisir des exercices issus des pages de plusieurs manuels sur une même notion, d'étudier les traces écrites proposées dans un ou plusieurs manuels, de rédiger une fiche de préparation à partir d'extraits de manuels, de construire une progression, ...

Là encore, nous aurions pu rechercher différents niveaux d'exploitation possibles de la situation choisie afin de mettre à l'épreuve notre modèle d'analyse mais, c'est un travail qui est à poursuivre.

VI - BIBLIOGRAPHIE

DOUADY, R. (2003). Enseignement de la dialectique outil-objet et des jeux de cadres en formation mathématique des professeurs d'école, in *Carnets de route de la COPIRELEM. CONCERTUM. Tome 3* (p.189-200). ARPEME

DURPAIRE, J.L. (2006). L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire. Rapport IGEN.

HOUDEMENT, C. (1995). Autour des stratégies de formation des maîtres du premier degré en mathématiques. In *Actes du XXIIème Colloque interIREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres* (p. 79-86). Douai. IREM de Lille.

KUZNIAK, A. (1994). Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. In *Actes du XXIème Colloque interIREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres* (p.37-62). Chantilly. IREM de Picardie

LE POCHE, G. & TAVEAU C. (2005). Analyse de manuels scolaires sur la division euclidienne. In *Les cahiers du formateur. Tome 7* (p.79-88). IREM Paris 7.

LE POCHE G., MASSELOT P. & WINDER C. (2005). Fractions et décimaux : analyse de manuels. In *Les cahiers du formateur. Tome 7* (89-120). IREM Paris 7.

LEROYER L. (2013). Le rapport au support d'enseignement : pour une meilleure connaissance du travail de préparation en mathématiques des enseignants. In *Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève, Acte du 39ème colloque COPIRELEM*. Quimper.

PELTIER M-L. (2003). « Le napperon » : un problème pour travailler sur la symétrie axiale. In *Carnets de route de la COPIRELEM. CONCERTUM. Tome 2* (p.161-172). ARPEME.

ROUCHE, N. (1992). *Le sens de la mesure. Des grandeurs aux nombres rationnels*. Bruxelles : Didier Hatier.

VII – ANNEXES

Annexe 1 : Collection *Cap Maths*

Extrait du manuel *Cap Maths* CM1, p.44, HATIER 2010

UNITÉ 4

Comparaison d'aires

Guide ▶ Séance 6
CALCUL MENTAL :
Ajout, retrait de 9 et 11

RÉVISER Moule à calculs

Tu dois compléter ce moule avec les 3 nombres et les 2 signes.

□ ○ (□ ○ □)

A 2 3 6 − x

a. Écris tous les calculs possibles et trouve les résultats.

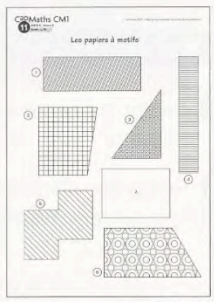
b. Range les nombres obtenus du plus petit au plus grand.

B Recommence avec ces trois nombres et ces deux signes :

4 10 25 − x

CHERCHER Les papiers à motifs

1 **Avec ton voisin, décore la surface A en la recouvrant avec du papier à motifs.**
Découpe les surfaces de ta fiche et choisis celles avec lesquelles tu peux recouvrir entièrement la surface A.



▶ Fiche 11

2 **Range** les surfaces de ta fiche, dans l'ordre croissant, de la plus petite aire à la plus grande aire.

EXERCICE

3 **Quelle est la surface de ta fiche qui a la même aire que la surface B ? Explique.**

B

44 quarante-quatre

Extrait du guide de l'enseignant *Cap Maths* CM1, p.89-90, HATIER 2010

APPRENDRE

Comparaison d'aires ▶ Les papiers à motifs

– Comprendre ce qu'est l'aire d'une surface et que des surfaces de formes différentes peuvent avoir une même aire.
– Comparer des surfaces suivant leurs aires par recouvrement ou transformation (découpage/recollement) et recouvrement.

CHERCHER Manuel p. 44 questions 1 et 2

1 Avec ton voisin, décore la surface A en la recouvrant avec du papier à motifs.
Découpe les surfaces de ta fiche et choisis celles avec lesquelles tu peux recouvrir entièrement la surface A.

2 Range les surfaces de ta fiche, dans l'ordre croissant, de la plus petite aire à la plus grande aire.

Dans cette activité, les élèves vont devoir trouver dans un lot de surfaces celles qui, après transformation, recouvrent une surface donnée A. De ces surfaces, on pourra dire qu'elles ont une aire égale ou plus grande que celle de A. Puis les élèves vont avoir à ranger ces surfaces suivant leurs aires.

ÉQUIPES DE 2

1 Préparation du matériel

• Distribuer à chaque équipe deux exemplaires de la fiche 11 et demander de découper les surfaces des deux fiches.

• Faire mettre de côté un exemplaire des surfaces à motifs (les surfaces sont attachées avec un trombone ou placées dans une enveloppe) qui servira de référence lors de cette première phase de l'activité et de support pour la suite.

• Fixer au tableau, avec la patafix, la surface A et les six surfaces à motifs agrandies découpées à partir de la première fiche 11. Elles serviront de référence pour toute l'activité.

Le terme « surface » est employé pour indiquer une portion de plan (ici une portion de feuille de papier). L'activité est réalisée sur des surfaces découpées afin de permettre la superposition et engager vers un processus de transformation des surfaces par découpage et recollement des morceaux. Matériellement, il est nécessaire de pouvoir distinguer les surfaces même après découpage, c'est la raison pour laquelle les six surfaces ont des motifs différents. Il est également important de garder une trace des surfaces initiales, c'est pourquoi un exemplaire des surfaces à motifs est conservé.

ÉQUIPES DE 2

2 Recouvrement de la surface A

Question 1

• Reformuler la consigne sans induire de procédure de résolution :

➡ *La surface A est blanche. Les autres surfaces ont des motifs. Pour décorer la surface A, on utilise le papier d'une surface à motifs. Attention, la surface A doit être entièrement décorée avec un seul motif. Vous devez trouver quelles surfaces à motifs il est possible d'utiliser sachant que ces surfaces peuvent être transformées, c'est-à-dire que vous pouvez les plier, les découper, en déplacer des morceaux. Il y a plusieurs possibilités. Vous noterez les numéros de ces surfaces sur votre feuille.*

• Lors d'une première mise en commun, recenser les solutions déjà trouvées. Mettre en évidence que :
– les surfaces 2 et 6 permettent un recouvrement évident de la surface A : il y a même du papier en trop ;
– la surface 3 ne permet pas, également de façon évidente, un recouvrement : il manque du papier ;
– pour les surfaces 1, 5 et 4, demander aux équipes qui proposent ces solutions de montrer au tableau leurs propositions de transformation par découpage sur les surfaces agrandies ; faire réaliser le recouvrement de la surface A avec de la patafix. Si le cas de ces surfaces ne semble pas tranché par la plupart des équipes, engager une nouvelle recherche, en précisant bien que les surfaces à motifs peuvent être découpées.

• Conclure que :
– les surfaces 1 et 5 permettent le recouvrement de la surface A : il n'y a pas de papier en trop ;
– la surface 4 ne permet pas un recouvrement de la surface A : il manque du papier.

COLLECTIF

3 Introduction de la notion d'aire

• À l'issue de cette première phase, introduire le mot « aire » en formulant la réponse à la question 1 :

➡ Les surfaces 1 et 5 peuvent, moyennant découpage et réorganisation, recouvrir exactement la surface A. Elles ont la même étendue de papier que la surface A : on dit qu'elles ont la même aire que la surface A.

➡ Les surfaces 2 et 6 ont une aire plus grande que celle de la surface A.

➡ Les surfaces 3 et 4 ont chacune une aire plus petite que celle de la surface A.

Les élèves abordent ici le concept d'aire. L'acquisition de ce concept est assez délicate, l'aire devant être distinguée d'autres propriétés des surfaces considérées : encombrement, longueur de certaines dimensions.
C'est l'aspect « grandeur » du concept qui est ici étudié, avant toute introduction de l'aspect numérique des mesures. Deux surfaces ont même aire si elles peuvent se superposer ou, si après certaines transformations licites (découpage et réorganisation d'une des surfaces ou des deux), elles peuvent se superposer.

ÉQUIPES DE 2

4 Comparaison des surfaces suivant leurs aires

Question 2

• Inviter les équipes à utiliser maintenant le deuxième exemplaire des surfaces à motifs pour répondre à la question 2 :
= *Vous allez maintenant ranger les surfaces à motifs, de celle qui a la plus petite aire à celle qui a la plus grande aire, de celle qui comporte le moins de papier à celle qui comporte le plus de papier. Vous pouvez faire des découpages. Puis vous noterez le rangement trouvé sur votre feuille.*

• Observer les démarches :
– quelques équipes utilisent ce qui a été trouvé précédemment en se référant à la surface A ;
– d'autres effectuent d'abord un rangement perceptif, puis comparent les aires des surfaces deux à deux en utilisant le recouvrement, le découpage et la réorganisation ; certaines équipes ont des difficultés de méthodes pour organiser les comparaisons successives afin d'en déduire le rangement final. Les engager à utiliser les résultats de la question 1. En procédant ainsi, du fait que les surfaces 1 et 5 ont une aire égale à A, leur recherche se réduira à comparer les aires des surfaces 3 et 4 ainsi que celles des surfaces 2 et 6.
– certains se bloquent sur un aspect perceptif : « ça dépasse », ou sur une des dimensions de la surface. Les arguments montrant des représentations erronées de la notion d'aire peuvent varier suivant les surfaces à comparer et être de types différents :
  – *les surfaces 1 et 5* n'ont pas la même aire car elles n'ont pas la même forme ;
  – *la surface 5* a une aire plus grande que *la surface 2* car elle a un encombrement plus grand (une plus grande distance séparant 2 points de la surface 5 : 10 cm, contre 9,2 cm sur la surface 2) ;
  – *la surface 4* a une aire plus grande que *la surface 1* parce qu'elle est plus longue.

• Lors de la mise en commun, donner d'abord la parole aux équipes qui visiblement ont confondu l'aire avec l'encombrement et la longueur d'une dimension : elles viennent expliquer leur classement. Demander aux autres élèves ce qu'ils pensent de ces arguments, faire débattre de leur validité. À la fin, conclure que, pour comparer les aires de deux surfaces A et B, il n'y a que deux possibilités :
– soit ces surfaces peuvent être comparées directement par superposition : on peut recouvrir la surface A avec la surface B et l'aire de A est plus petite ou égale à celle de B ;
– soit une des deux surfaces doit subir une transformation, par découpage et déplacement des parties découpées, pour que la surface transformée puisse être comparée par superposition à l'autre.

• Si besoin, aider certaines équipes à terminer les comparaisons nécessaires.

• Conclure que le rangement des surfaces de la plus petite à la plus grande aire est : 3, 4, 1 et 5, 2, 6.

Cette deuxième question doit permettre d'approfondir la compréhension du concept d'aire. Les productions des élèves peuvent être assez diverses, mettant en évidence les représentations erronées qu'ils se font de cette nouvelle notion. On s'attachera donc ici à lever les ambiguïtés qui existent pour les élèves au niveau de la signification du concept d'aire : aire/encombrement, aire/dimension, aire/forme.
Certains groupes peuvent également éprouver une difficulté de méthode pour effectuer la comparaison des six surfaces en effectuant des comparaisons deux à deux. Les engager à utiliser les résultats de la première question.

COLLECTIF

5 Le concept d'aire

• Faire une synthèse qui définit la notion d'aire :

On dit que deux surfaces ont la même aire :
– si l'une peut se superposer exactement à l'autre ;
– si, après transformation d'une des surfaces (par découpage), on peut recouvrir l'autre avec les morceaux de la première exactement.

C'est le cas des surfaces A, 1 et 5. Ces trois surfaces ont la même aire ; pourtant elles n'ont ni la même forme, ni le même encombrement, ni les mêmes dimensions.

• Engager les élèves à consulter le dico-maths.

INDIVIDUEL

EXERCICES

Manuel p. 44, exercice 3

Exercice 3

Donner aux élèves une autre fiche si nécessaire et préciser qu'ils peuvent découper les surfaces de la fiche s'ils le souhaitent. Les élèves peuvent faire plusieurs essais. La consigne signifie qu'il n'y a *a priori* qu'une seule solution.

Réponse : surface 4.

Annexe 2 : Collection *Euro Maths*

Extrait du manuel *Euro Maths* CM1, p.114, HATIER 2009

43

CALCUL MENTAL
À la recherche du quotient : le professeur donne le dividende et le diviseur, les élèves doivent trouver mentalement le quotient. Ex. : le dividende est 46, le diviseur 7. Quel est le quotient ?

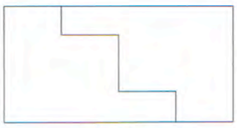
Formes et aires

Objectifs : se familiariser avec la notion d'aire d'une surface plane.
Comprendre que des surfaces de formes différentes peuvent avoir la même aire.

ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE DE DÉCOUVERTE : partage de feuilles de format A4 en deux parties exactement superposables. Analyse de la production des élèves.

DÉCOUVERTE

1 Théo, Leïla et Alice disposent de plusieurs rectangles identiques au rectangle bleu. Ils doivent partager chaque rectangle en deux parties exactement superposables.
Voici les partages qu'ils proposent :


Théo


Leïla


Alice

Pour chacun d'eux, dis s'il te paraît répondre à la consigne.
Puis décalque-le et découpe-le pour vérifier.

2 À ton tour, cherche d'autres surfaces dont l'aire est la moitié de celle du rectangle bleu en trouvant d'autres partages de ce rectangle en deux parties superposables.

3 Utilise les parties qui te semblent convenir pour obtenir, en les assemblant, une surface ayant la même aire que le rectangle bleu mais de forme différente.
Cherche différentes solutions et colle-les dans ton cahier.

EXERCICES

1 Découpe dans une feuille de papier quatre carrés de côté 8 cm. Utilise trois d'entre eux pour construire, par découpage et recollement, un rectangle de même aire que le carré, un triangle de même aire que le carré, un losange de même aire que le carré.

Extrait du livre du professeur *Euro Maths* CM1, p.144-145, HATIER 2010

ÉTAPE 43

Formes et aires

MANUEL P. 114-115

Objectifs

- Se familiariser avec la notion d'aire d'une surface plane.
- Comprendre que des surfaces de formes différentes peuvent avoir la même aire.

Pourquoi cette étape ?

- Nous définissons la notion d'aire d'une figure plane dans une situation de partage d'un rectangle en deux parties exactement superposables. Le terme « aire » n'est pas défini directement ; c'est la relation « avoir la même aire » qui est définie.

Nous distinguons deux cas (figures ci-contre) :
– deux figures planes sont dites avoir la même aire si elles sont superposables ;
– deux figures planes sont dites avoir la même aire si, avec deux exemplaires de chacune d'elles, on peut reconstituer une même surface, sans trou ni chevauchement.
Les deux parties grises ont la même aire.

La construction de différentes surfaces à partir de deux surfaces de même aire mais de formes différentes renforce la distinction fondamentale entre forme et aire.

Théo Leïla

- Nous insistons sur cette approche de l'aire qui permet de ne pas lier immédiatement l'aire d'une surface et le nombre qui la mesure. Il est en effet très important de laisser les élèves faire de nombreuses expériences de partages, de pavages, de découpages et de recollements pour leur permettre de construire de manière précise et efficace le concept d'aire.
- Un second point de vue sur l'aire est abordé dans l'exercice 3 : deux surfaces ont même aire si on peut les paver avec les mêmes surfaces.

3 SÉANCES • SÉANCE 1 ACTIVITÉ PRÉPARATOIRE • SÉANCE 2 DÉCOUVERTE ET EXERCICE 1 • SÉANCE 3 EXERCICES 2 À 5

MATÉRIEL
- Par élève : une paire de ciseaux ; le matériel personnel de géométrie ; une feuille de papier calque.
- Pour la classe :
– de nombreuses feuilles de format A4 mises à la disposition des élèves ;
– de grandes feuilles (type affiche) pour coller les surfaces obtenues.
On peut utiliser des feuilles de récupération (par exemple, des feuilles d'annuaires téléphoniques), l'important est que toutes les feuilles pour l'activité soient exactement superposables et assez grandes (approchant le format 21 × 29,7).

Calcul mental

À la recherche du quotient. Le professeur donne le dividende et le diviseur d'une division, les élèves doivent trouver mentalement le quotient. Ex. : le dividende est 46, le diviseur 7. Quel est le quotient ?
Il s'agit de permettre aux élèves de bien identifier le rôle de chacun des nombres dans une division euclidienne. C'est la raison pour laquelle nous proposons des nombres dans un champ numérique familier de manière à ne pas entraver la réflexion par des difficultés de calcul.

Activité préparatoire

Nous suggérons un travail par groupes de 2 ou de 4 pour favoriser des échanges.

■ **Présentation de l'activité**

La consigne peut être formulée de la façon suivante : « Vous avez à votre disposition des feuilles de même format, toutes superposables. Chacun d'entre vous prend une feuille et doit la partager en deux parties exactement superposables, sans faire de collage ni perdre du papier ; c'est-à-dire qu'avec les deux morceaux vous devez pouvoir reconstituer la feuille entière. »
Pour bien expliciter les contraintes, le professeur peut joindre le geste à la parole en montrant un exemple de partage en deux suivant une médiane du rectangle. Il insiste sur le fait que le partage ne doit pas aboutir forcément à deux rectangles mais qu'on peut obtenir toute sorte de formes, la seule contrainte étant que les deux parties soient exactement superposables.

■ **Première phase**

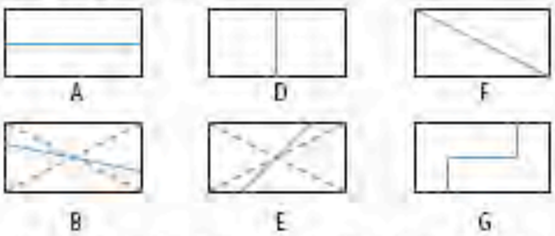
Après un premier temps de recherche, les élèves trouvent les partages en deux rectangles (figures A et D, page suivante), dont l'un est l'exemple du professeur, et parfois le partage suivant une diagonale.
Le professeur montre les premiers partages réalisés, vérifie la superposition des deux parties et la possibilité de reconstituer la feuille initiale, puis il propose aux élèves de trouver le plus de partages possibles qui répondent à la consigne.
Rappelons pour le professeur qu'il existe une infinité de

solutions obtenues par une ligne de partage symétrique par rapport au centre du rectangle. Bien sûr, cette généralisation ne sera pas évoquée avec les élèves.

■ **Deuxième phase**

Prévoir un temps de recherche assez long (environ une demi-heure). Rappeler éventuellement que tous les instruments sont autorisés dans la mesure où la consigne est respectée.

Les partages par une droite (qui passe par le centre du rectangle, exemples figures B et E ci-dessous) sont trouvés relativement vite parce qu'ils correspondent à un seul pliage de la feuille.



La ligne brisée (ex. figure G) n'apparaît que plus tardivement, souvent à la suite de pliages réguliers en 8, puis en 16, ou par construction de segments de même longueur partant de deux sommets diagonalement opposés, ou encore par constat du rôle particulier que peuvent jouer les diagonales et les médianes.

De nombreux essais n'aboutissent pas mais permettent à leurs auteurs d'affiner leurs hypothèses sur les propriétés de la ligne de partage.

Il est important que certains partages apparaissent dans la classe. Il faut donc laisser aux élèves un temps de recherche important. Si toutefois aucun élève ne propose de solutions autres que le partage suivant une médiane ou une diagonale, le professeur peut en montrer un, tel que le partage G, pour que les élèves, comprenant que d'autres partages sont possibles, se remettent à chercher.

■ **Synthèse**

Quand le professeur considère que le nombre de formes de surfaces différentes est conséquent (ou que le temps de recherche a dépassé une demi-heure), il organise la synthèse en recueillant des surfaces (chacune des deux parties) dans chaque groupe et les affiche au tableau.

Les élèves ont un temps d'observation ; ils peuvent demander une vérification de visu que le groupe responsable vient faire au tableau en montrant la superposition des deux parties et en reconstituant la feuille de format A4.

La mise en commun porte sur les méthodes que les élèves ont trouvées pour réussir le découpage et sur celles qui n'ont pas abouti.

La synthèse permet d'introduire des termes mathématiques de référence : deux partages différents qui répondent à la consigne donnent des parties de feuilles, toutes ces parties de feuilles obtenues sont des **surfaces**, qui ne sont pas toutes superposables mais qui ont toutes la même **étendue**, qui contiennent aussi la même « quantité » de papier ; elles correspondent toutes à la moitié d'une feuille. En mathématiques, on dit que **ces surfaces ont « la même aire »**.

Coller sur une affiche plusieurs surfaces de même aire et demander aux élèves de conserver les surfaces qu'ils ont obtenues au cours de leur recherche.

Découverte

Il s'agit, pour les élèves, de se réapproprier individuellement le travail mené en groupe lors de l'activité préparatoire.

La lecture de l'ensemble de la découverte et du texte du premier furet permet de faire le lien avec l'activité préparatoire.

Travail individuel, correction individuelle pour les deux premières questions, mise en commun pour la troisième.

■ **Question 1**

Les élèves prévoient si les partages réalisés par les enfants du livre répondent bien à la consigne, puis vérifient leur prévision à l'aide d'un calque.

■ **Question 2**

Les élèves peuvent reproduire autant de petits rectangles de 2 cm sur 4 cm qu'ils veulent pour tracer les lignes de partage. La vérification peut se faire par découpage ou au moyen d'un calque.

■ **Question 3**

Elle est très importante : il s'agit pour les élèves de comprendre qu'avec deux des parties obtenues à la question précédente, ils peuvent construire une surface qui a même aire que le rectangle bleu sans en avoir la forme. Il peut être nécessaire pour certains élèves de dupliquer la surface construite et d'essayer de retrouver par découpage et recollement le rectangle bleu avec l'un des deux exemplaires.

Conclure avec les élèves

S'inspirer de ce que dit le deuxième furet pour conclure.

Commenter le paragraphe « Mesure d'aires » de l'Aide-mémoire, page 21.

Proposer aux élèves de coller dans leur cahier plusieurs surfaces de même aire obtenues à la question 2 en précisant qu'elles ont toutes la même aire qui est la moitié de l'aire du rectangle bleu, ainsi que plusieurs surfaces obtenues à la question 3 ayant même aire que le rectangle bleu.

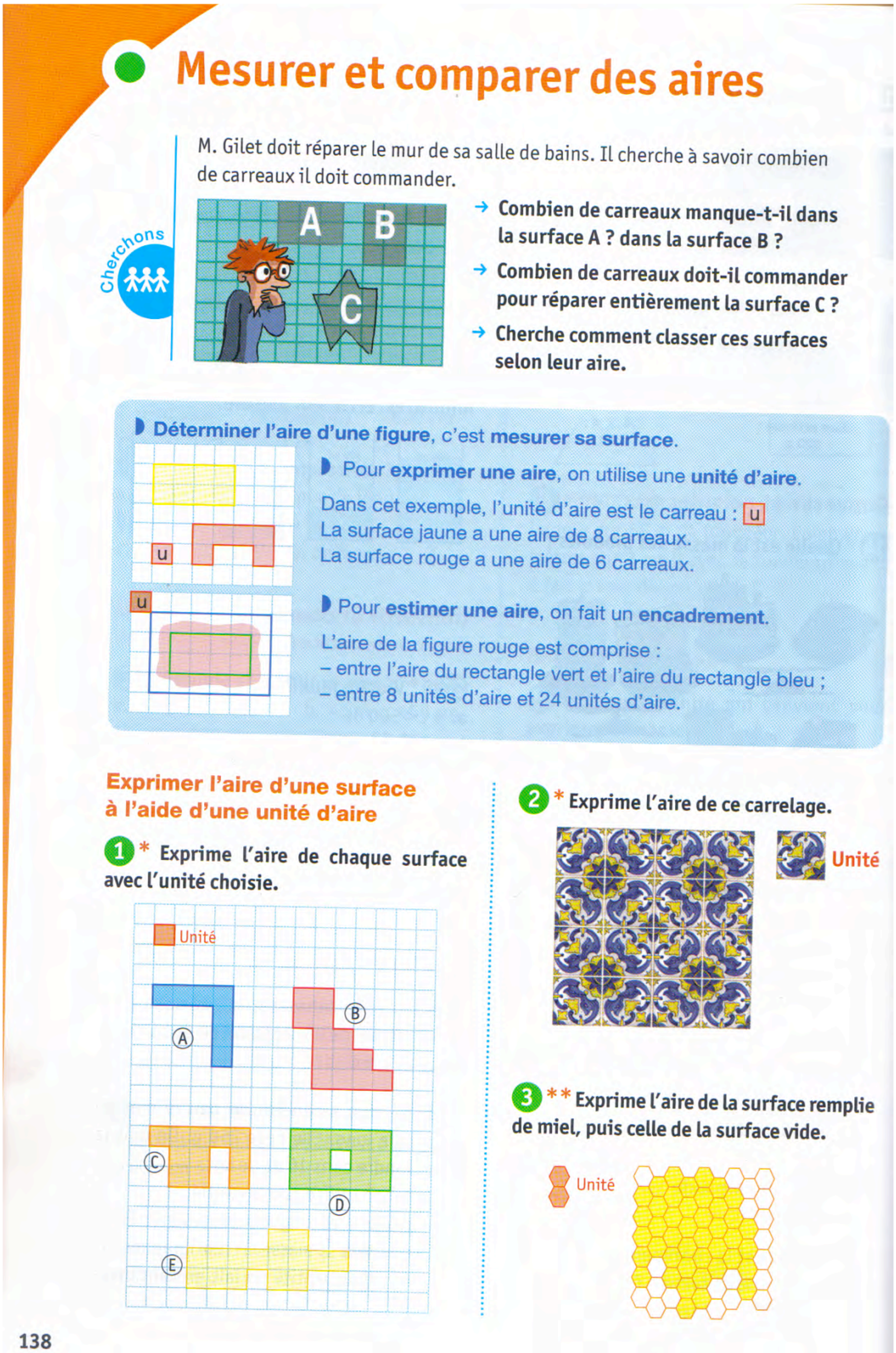
Exercices

Nous proposons, ici, le déroulement suivant :

– Lecture des consignes et reformulation étayée par l'enseignant.

Annexe 3 : Collection *Outils pour les Maths*

Extrait du manuel *Outils pour les Maths* CM1, p.138, MAGNARD 2011



Mesurer et comparer des aires

Cherchons

M. Gilet doit réparer le mur de sa salle de bains. Il cherche à savoir combien de carreaux il doit commander.

→ **Combien de carreaux manque-t-il dans la surface A ? dans la surface B ?**

→ **Combien de carreaux doit-il commander pour réparer entièrement la surface C ?**

→ **Cherche comment classer ces surfaces selon leur aire.**

▶ **Déterminer l'aire d'une figure**, c'est **mesurer sa surface**.

▶ Pour **exprimer une aire**, on utilise une **unité d'aire**.

Dans cet exemple, l'unité d'aire est le carreau : u

La surface jaune a une aire de 8 carreaux.

La surface rouge a une aire de 6 carreaux.

▶ Pour **estimer une aire**, on fait un **encadrement**.

L'aire de la figure rouge est comprise :

– entre l'aire du rectangle vert et l'aire du rectangle bleu ;

– entre 8 unités d'aire et 24 unités d'aire.

Exprimer l'aire d'une surface à l'aide d'une unité d'aire

1 * **Exprime l'aire de chaque surface avec l'unité choisie.**

2 * **Exprime l'aire de ce carrelage.**

3 ** **Exprime l'aire de la surface remplie de miel, puis celle de la surface vide.**

138

Extrait du guide du maître *Outils pour les Maths* CM1, p.124, MAGNARD 2011

Grandeurs et mesures

Mesurer et comparer des aires

p. 138-139 du manuel

PROGRAMMES 2008

- Mesurer ou estimer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé.
- Classer et ranger des surfaces selon leur aire.

OBJECTIFS DE LA LEÇON

- Exprimer ou estimer l'aire d'une surface à l'aide d'une unité d'aire.
- Comparer des surfaces à l'aide d'une unité d'aire.

En CM1, les élèves découvrent qu'on peut estimer ou calculer la grandeur d'une surface soit en comptant des unités d'aire définies (carreau, demi-carreau…), soit en manipulant des formes (*cf.* **Exercices complémentaires**). La différence entre l'aire et le périmètre sera abordée en CM2, de même que le calcul des aires à l'aide de formules et d'unités usuelles (cm^2, m^2…).

Découverte collective de la notion

Cherchons

• Commencer par lire le titre du chapitre et demander ce qui va être mesuré. → *Des aires, des surfaces.*
Questionner : *Qu'est-ce qu'une aire ?* Insister sur la différence entre « aire » et « surface » : *Une surface est une forme plane délimitée, l'aire est la mesure de sa grandeur.*
Proposer aux élèves de chercher des surfaces dans la classe *(→ le tableau, les tables, une feuille de papier…)*
Questionner : *Comment mesurer leur aire ?* La problématique est posée : *Nous n'avons pas ici d'unité d'aire pour le faire.*

• Laisser les élèves découvrir la situation de recherche. Distribuer la fiche **Cherchons**. Demander de chercher le nombre de carreaux manquants dans la surface A et dans la surface B (*cf.* 1re question). Pour répondre, les élèves colorient ces surfaces sur la fiche. → *On compte 6 carreaux pour la surface A et 8 carreaux pour la surface B.*
On a donc défini une unité d'aire : ici, c'est le carreau. Écrire au tableau et compléter la fiche **Cherchons** : *aire de la surface A = 6 carreaux aire de la surface B = 8 carreaux.*
Demander de répondre à la 2e question. Pour la surface C, le problème se pose : *Combien de carreaux sont à changer ?* Proposer de colorier de deux couleurs différentes les carreaux entiers manquants et ceux qui sont cassés. Écrire au tableau l'encadrement de l'aire correspondante : *L'aire de la surface C est comprise entre 1 et 14 carreaux.* Faire remarquer que dans cette situation, le personnage devra changer tous les carreaux abîmés, même ceux qui ne sont cassés que partiellement. La réponse sera 14 carreaux, la plus grande surface.
Répondre à la 3e question collectivement : pour classer ces surfaces selon leur aire, il suffit de les ranger selon leur nombre de carreaux. Dans cette situation, la surface C sera présentée comme la plus grande.

• Prolonger la séance avec l'exercice 2 de la fiche **Cherchons** et conclure que deux figures peuvent avoir la même aire, mais pas la même forme.

• Faire lire la leçon et montrer que les unités d'aires ne sont pas forcément des carreaux (*cf.* exercices 3 et 4 du manuel, p. 138-139).

Difficultés attendues
À ce stade de la découverte, les mesures d'aires ne posent pas de difficultés, car les élèves agissent par comptage. Cependant, lorsqu'ils doivent dessiner une surface selon une aire donnée, vérifier qu'ils ne confondent pas cette notion avec celle du périmètre.

Autres pistes d'activités

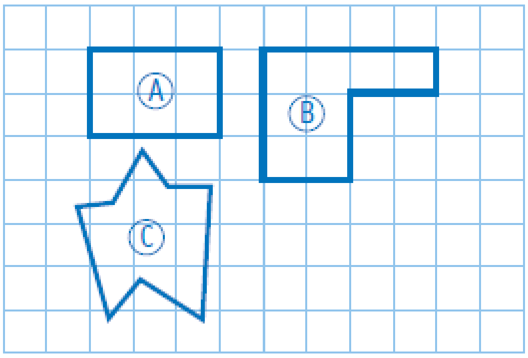
- Proposer des manipulations avec des Tangrams pour comparer les surfaces (*cf.* **Exercices complémentaires**).
- Calculer l'aire des surfaces carrelées de l'école.

Cherchons
Remédiation
Exercices complémentaires
Évaluation : *Les aires*

Extrait de la fiche « Cherchons » du CDROM de *Outils pour les Maths* CM1, MAGNARD 2011

1. **a. Cherche l'aire des surfaces A et B. Colorie-les.**

b. Cherche l'aire de la surface C.



Aire de la figure **A** = ……………………….

Aire de la figure **B** = ………………………………..

Aire de la figure **C** = ………………………………..

Classe-les de la plus petite à la plus grande :

……………...

Annexe 4 : La Tribu des *Maths*

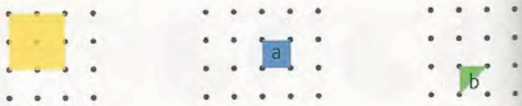
Extrait du manuel *La tribu des maths* CM1, p.76, MAGNARD 2009

30 Comparer des surfaces

Je sais choisir une unité pour comparer des surfaces

Avant de commencer

Combien le carré jaune contient-il d'unités *a* ? d'unités *b* ?
Peux-tu trouver une unité qui serait contenue deux fois dans le carré jaune ?



a = unité *b = unité*

Recherche

À la surface !

Enzo cherche à comparer ces surfaces :

a b c d e

Il a choisi une unité : 

Classe les surfaces de la plus petite à la plus grande.

Qu'est-ce qu'une surface ?

Application

Alex veut mesurer les surfaces avec une autre unité : 

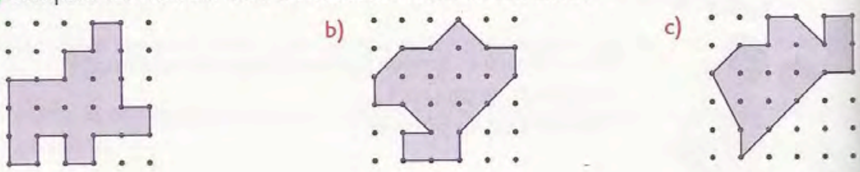
a) **Va-t-il obtenir le même classement ?**

b) **Combien chaque surface contient-elle d'unités dans ce cas ?**

Entraînement

1 **Compare ces trois surfaces en utilisant l'unité de ton choix.**

a) b) c)



76 *soixante-seize*

Extrait du Guide du maître *La tribu des maths* CM1, p.112-114, MAGNARD 2009

Manuel, pp. 7

30 Comparer des surfaces

Je sais choisir une unité pour comparer des surfaces

Organisation de la séquence

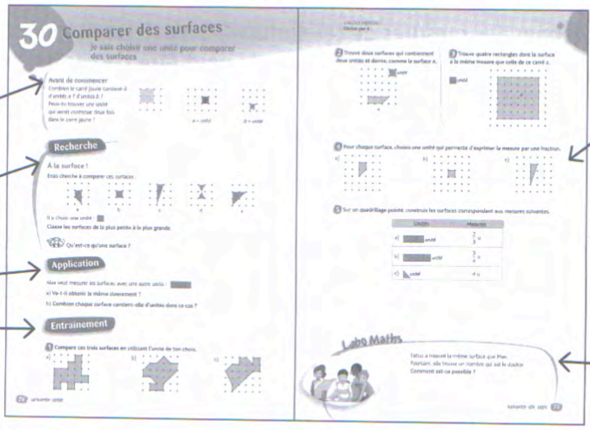
Séance 1

Avant de commencer (10 min)

Recherche (20 min)

Application (15 min)

Entraînement 1 (10 min)



Séance 2

Entraînement 2 à 5 (40 min)

Labo Maths (15 min)

Programmes

Connaissances	Compétences/Capacités
• Mesurer ou estimer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence (une unité d'aire) ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé.	• Savoir paver une surface avec une unité. • Savoir changer d'unité. • Savoir trouver une unité. • Utiliser un quadrillage pour construire ou mesurer des surfaces.
• Classer et ranger des surfaces selon leur aire.	• Comparer des surfaces en utilisant une unité.

Notre progression

Le chapitre précédent *(chapitre 29)* se rapportait déjà aux surfaces, mais pour compléter l'approche des fractions liées à la vie courante développée dans la période.
Cette fois, dans le domaine des grandeurs et mesures, il s'agit de **mesurer des surfaces avec une unité ou en en changeant, et éventuellement de les comparer**. Les chapitres 46 et 53 reprendront ces compétences en les complétant. Au chapitre 30, on ne parlera que des surfaces (avec un essai de définition à donner pour répondre à la question du débat). En revanche, aux chapitres 46 et 53 apparaîtra l'aire, qui est la mesure de la surface.
Les unités d'aire usuelles seront abordées au CM2.

Calcul mental

Diviser par 4

Demandez en collectif de rappeler comment on divise par 2 (chercher la moitié), puis sollicitez la classe pour énoncer une méthode pour diviser par 4.

Le but est d'arriver à la technique suivante : chercher la moitié de la moitié. Il est possible de faire un lien avec le calcul mental du chapitre 24 (trouver le quart) et la rubrique « Avant de commencer » des chapitres 21 et 23.
Donnez quelques exemples en collectif (« Divisez 20, 44, 68, 36, 100 par 4. ») avant de passer à des exercices similaires par le procédé La Martinière. Commencez par des nombres à deux chiffres, puis proposez des nombres à trois chiffres.
Faites mettre en évidence que, pour l'instant, on ne sait diviser par 4 que les nombres pairs.

Séance 1

Temps : 10 minutes
Dispositif : individuel

Avant de commencer

→ Prérequis évalués

Le but est de vérifier la **capacité à effectuer des pavages, puis à comprendre que l'unité est conventionnelle**, qu'elle peut donc changer et que l'on peut effectuer des conversions.
D'autre part, il faudra **évaluer rapidement la capacité au calcul rapide des mesures de surface en utilisant le quadrillage** et les possibilités qu'il offre.

→ Mise en œuvre

- **Lecture individuelle.**
- **Recherche individuelle.**
- **Mise en commun orale.** Elle permettra de répondre à la deuxième question et d'énoncer que le carré jaune est partagé en deux triangles égaux selon la diagonale.

Donnez éventuellement un exercice supplémentaire en changeant d'unité (c = 2 carrés).

Recherche

Temps : 20 minutes
Dispositif : individuel

→ Objet d'apprentissage

L'objectif est d'obtenir que les élèves soient **capables de paver sans erreur les cinq surfaces à l'aide de l'unité.** Il n'y a pas de manipulation à faire, l'exercice étant effectué visuellement.

→ Mise en œuvre

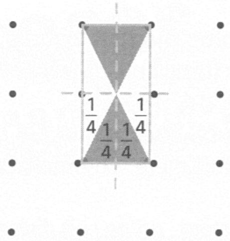
- **Lecture individuelle** de l'énoncé pendant quelques minutes. Décomposez le travail en faisant rappeler rapidement et oralement pourquoi les surfaces a, b et e devraient être mesurées facilement (elles reprennent les exemples de la rubrique « Avant de commencer ») :

$a : 1 + \frac{1}{2}$; $b : 1$; e : 2 (la moitié de 4).

- **Recherche individuelle.** Pour les surfaces c et d, laissez tâtonner, le but étant de découvrir une technique liée aux propriétés géométriques du quadrillage :

 est la moitiité de 

La diagonale partage le rectangle en deux triangles égaux.
c : 3 divisé par 2, soit et 1 et demi.



$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ou $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times 2 = 1$

- **Mise en commun.** Faites répondre à la question du débat :

Qu'est-ce qu'une surface ?

La surface est un morceau d'espace délimité par des lignes et des points. On peut la colorier. On peut la comparer à d'autres surfaces, la mesurer avec une unité.

Corrigé : *b* et *d* < *a* et *c* < *e*.

Application

Temps : 15 minutes
Dispositif : collectif, puis individuel

Les élèves débattent pour répondre à la question **a)** et pour expliquer qu'un classement est indépendant de l'unité choisie. Il ne change donc pas quelle que soit l'unité.

En individuel, ils mesurent chaque surface avec la nouvelle unité. La procédure à privilégier est la suivante : l'utilisation des techniques explicitées tout au long de la Recherche pour trouver les mesures des surfaces : *a* $(\frac{1}{2})$, *b* $(\frac{1}{3})$, *c* $(\frac{1}{2})$, *d* $(\frac{1}{3})$ et *e* $(\frac{2}{3})$. Ceci permet de confirmer le classement précédemment obtenu : *b* et *d* < *a* et *c* < *e*.

À noter que cet exercice fait effectuer implicitement des comparaisons de fractions ! Faites bien constater que le classement est identique.

Entraînement (1)

Temps : 10 minutes
Dispositif : individuel
Niveau de difficulté : *

1 * C'est une application de ce qui précède, y compris du constat que l'unité ne change pas le classement, ce qu'il ne faudra pas manquer de faire remarquer.

Si l'unité choisie est le même carré que dans la Recherche, les trois surfaces auront les mesures suivantes : *a* (14) ; *b* (14) et *c* $(12 + \frac{1}{2})$.

En remédiation ou en prolongement, vous pouvez changer d'unité, en imposant celle de votre choix.

Séance 2

Entraînement (2 à 5)

Temps : 40 minutes
Dispositif : individuel
Niveau de difficulté :
* 2, 3, 5
** 4

2 * C'est toujours une application stricte. L'élève a toutes les possibilités pour trouver deux surfaces en assemblant des carrés et des triangles. Précisez qu'il ne faut pas se contenter de la même surface orientée différemment.

Annexe 5 : Grille d'analyse de la partie recherche ou découverte de la séance introductive de la notion d'aire en CM1

Manuel	
Objectifs de la séance indiqués par les auteurs	
Vocabulaire : Comment les auteurs définissent-ils les termes de surface et d'aire ?	
Types de tâches (à noter chronologiquement)	
Pour chaque type de tâches : identifier les variables didactiques choisies : - nature de la situation (statique, dynamique) - type de support (uni, quadrillé, pointé, ...) - matériel proposé - nature des surfaces - présence ou non de la figure - Type de mesure (exacte ou encadrement) ainsi que les procédures pouvant être mises en œuvre	
Difficultés et erreurs prévisibles pour les élèves	
Remarques	

POURQUOI UTILISER DES RESSOURCES EN LIGNE OUVERTES A TOUS ? ETUDE DE DEUX EXEMPLES

Richard CABASSUT
Maître de Conférences, Université de Strasbourg
LISEC EA2310
richard.cabassut@unistra.fr

Marc TRESTINI
Maître de Conférences, Université de Strasbourg
LISEC EA2310

Résumé
Nous étudions deux exemples de ressources en ligne sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. D'abord nous précisons la notion de ressource en ligne ouverte à tous, son contexte et la problématique de notre réflexion, notamment avec l'essor des cours en lignes ouverts à tous (en anglais MOOC). Ensuite nous présentons les ressources proposées, le site TFM couvrant l'enseignement des mathématiques à l'école primaire en France, et le site du projet LEMA, proposant une formation sur l'enseignement de la modélisation, en explicitant à chaque fois les critères qui ont présidé au choix de ces ressources. Nous concluons sur l'enjeu des ressources en ligne ouvertes à tous, entre la demande et le besoin.

I - LES RESSOURCES EN LIGNE OUVERTES A TOUS

Pour définir une *ressource* au sens large, on retiendra qu'il faut « penser les ressources comme une forme du verbe re-sourcer : nourrir à nouveau, ou différemment. Cette interprétation est provocante : elle a pour objectif d'attirer l'attention sur les ressources et leurs usages, de questionner des significations tenues pour acquises […] étendre le sens commun de ressources au-delà des objets matériels et comprendre les ressources humaines et culturelles, comme le langage et le temps, comme cruciales dans la pratique des mathématiques scolaires » (Adler, 2010, p.25). Dans cette acception générale des éléments de formation initiale ou continue, la constitution d'un groupe d'échange entre pairs, un document papier ou un site, peuvent être des ressources.

Une ressource est dite *en ligne* si elle est accessible par une ligne de communication, en général à travers un réseau intranet ou internet. Ces dernières années connaissent un essor important des ressources en ligne. En formation initiale, Gelis et Kermorvant (2012) témoignent de la mise en place d'une formation à distance pour le professorat des écoles et des conséquences sur le déroulement et le contenu des apprentissages. En formation continue, Cabassut & al., (2006) rendent compte d'une formation à distance en géométrie à l'école élémentaire, impliquant l'utilisation des TIC. Puis l'essor des MOOC en France relance le débat de la diffusion et de la mise à disposition du savoir en ligne. Depuis le jeudi 16 janvier 2014, les Français peuvent suivre des cours en ligne interactifs et gratuits sur les MOOC de la plateforme de « France université numérique » (FUN[1]). Plus de 80.000 personnes s'étaient inscrites dès son lancement. Cisel et Bruillard (2012) participent à son développement en produisant le MOOC EFAN[2] et étudient les mutations induites par cette innovation techno-pédagogique. Trestini, Rossini et Christoffel, (2014) recueillent et étudient les avis et représentations des professionnels français sur la question des MOOC au moment même où ils commencent à se développer sur notre territoire[3]. Ils montrent que les modèles pédagogiques, didactiques et économiques des MOOC nord-américains ont été adoptés et reproduits sans remaniement par les professionnels français de l'enseignement en ligne. Ils observent néanmoins qu'une évolution de ces modèles est en cours et qu'elle est provoquée par les premiers résultats de l'activité au sein des MOOC. Ces

1 http://www.france-universite-numerique.fr/

2 « Enseigner et Former Avec le Numérique » : Intitulé d'un cours dirigé par Eric Bruillard sur FUN.

3 C'est-à-dire au tout début de l'expérience française, du 30 janvier au 20 février 2014, période qui correspond grosso modo à la fin de la saison 2 d'Itypa et au 1er mois de fonctionnement de FUN.

derniers ne sont d'ailleurs présentés aux français par Geneviève Fioraso[4], alors ministre de l'enseignement supérieur, que « comme une expérimentation, amenée à évoluer à l'usage et selon les avis des utilisateurs ».

Un MOOC est un « massive open online course », ce que nous traduisons, avec Cisel et Bruillard (ibidem), par cours en ligne ouvert à tous.

On peut considérer qu'un *cours* est une catégorie de ressources, plus structuré qu'une simple ressource documentaire (souvent avec une progression dans le temps), avec des objectifs (implicites ou explicites) d'enseignement et d'apprentissage~~,~~ et souvent avec une composante d'évaluation (qui peut aller de l'auto-évaluation à la certification).

Le caractère *ouvert à tous,* qui traduit *massive open,* est potentiel, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de limitation dans le suivi du cours, limitation par la demande par exemple d'une participation financière comme droit d'inscription pour accéder au cours. Dans certaines formations universitaires, il y a des conditions d'inscription, par exemple être titulaire d'une licence pour pouvoir s'inscrire dans une formation de master. Nous ne considérons pas qu'aujourd'hui l'inscription technique, avec une adresse courriel et parfois ses coordonnées, constitue une limitation. Par contre une limitation liée à une participation financière, une condition de diplôme ou d'âge, une appartenance institutionnelle enlève la qualité d'ouverture à tous. Cisel et Bruillard (ibidem, p.3) évoquent un MOOC sur l'intelligence artificielle ayant attiré 160 000 étudiants, ce qui fait que le terme « massif » peut être interprété comme exprimant une fréquentation massive du cours. Pour notre part, nous l'interpréterons comme signifiant un cours ouvert sans limitation, c'est-à-dire *ouvert à tous.*

Nous n'avons pas trouvé de MOOC concernant la formation des maîtres de l'enseignement primaire français (ni également à l'étranger), notamment avec une composante d'évaluation. C'est pourquoi nous étudierons la catégorie plus large des ressources en ligne-ouvertes à tous. Dans cette catégorie, il existe de nombreuses ressources en ligne concernant l'enseignement primaire français. L'objectif de cet atelier est d'étudier deux exemples pour préciser des critères de choix de ces ressources, leurs contenus et plus généralement exprimer des besoins de cours en ligne ouverts à tous. La première ressource concerne un thème de formation large : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire française. La seconde ressource traite d'un thème de formation plus ciblé : la modélisation dans l'enseignement des mathématiques.

II - DEUX EXEMPLES : TFM ET LEMA

1 Critères de choix d'une ressource

Examinons les critères proposés et discutés dans l'atelier avant l'étude des ressources. Le nom choisi pour décrire chaque critère n'est pas le nom original issu de l'atelier. Il s'agit d'une dénomination synthétique qui reprend les diverses propositions des participants de l'atelier.

Un des premiers critères proposé est l'*accès gratuit*. La gratuité renvoie probablement au contexte de l'enseignement en école primaire où les budgets des écoles en termes de ressources pédagogiques semblent plus limités que dans les établissements du secondaire. On pense alors au travail de mise à disposition de ressources gratuites pour l'enseignement par l'association Sesamath (http://www.sesamath.net/) et pour la formation des maîtres par ARPEME (http://www.arpeme.fr/) en lien avec la COPIRELEM. L'*autonomie dans l'utilisation* de la ressource semble renvoyer aux préoccupations du formateur ou de l'enseignant qui souhaitent être affranchis des difficultés matérielles ou de guidage dans la prise en main. Un autre critère est *la liberté d'usage* de la ressource : l'utilisateur peut paramétrer la ressource ; il peut « la mettre à sa sauce » ; il y a plusieurs usages possibles. On peut emprunter à la théorie instrumentale (Rabardel, 1995) le concept *d'instrumentalisation* de la ressource : l'utilisateur attribue des fonctions (prévues ou non à l'origine par celui qui l'a conçue) à cette ressource (Cabassut & al., 2006, p.16). L'*adéquation au contexte* est un élément important : la ressource doit être cohérente avec les objectifs de la formation, conforme à la sensibilité didactique de l'utilisateur, et minimiser l'écart entre ce qui est prévu en formation et ce qui est réalisé lors de la mise en œuvre en classe. L'*ergonomie* est aussi importante : rapidité de la compréhension et de la prise en main, lisibilité, pluralité des modes d'accès, hiérarchisation des informations. Enfin, une composante d'*évaluation* doit encourager les pratiques réflexives. La *portée* de la ressource précise son champ d'application : thème traité, contexte institutionnel visé, cible d'utilisateurs.

[4] Interviewée le 8 mars 2014 dans 01 BUSINESS. Accessible sur : http://video.lefigaro.fr/figaro/video/le-numerique-dans-l-enseignement-superieur-genevieve-fioraso-dans-01business-2-4/3314406014001/

Seule la seconde ressource a pu être étudiée dans l'atelier compte tenu du nombre réduit de participants qui n'a pas permis de se répartir en deux groupes, et du temps imparti (insuffisant pour prendre en main successivement les deux ressources). Cependant nous proposons une analyse de la première ressource à partir des critères proposés en atelier.

2 Télé formation mathématiques : TFM

Le site www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/ , édité par l'Université René Descartes de Paris, propose des ressources sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire à destination des étudiants et stagiaires, enseignants et formateurs de l'école primaire. Les ressources sont produites par des chercheurs et des formateurs. Les ressources sont organisées dans trois espaces.

2.1 Formation autonome

Un *premier espace* est consacré à une formation autonome.

Il est proposé une synthèse d'une dizaine de pages, précisant les enjeux de cet enseignement, les catégories de connaissances permettant la maîtrise d'un concept, l'importance du sens et de l'activité de résolution de problème, les difficultés de l'apprentissage et le statut de l'erreur dans la perspective de l'évaluation.

A côté de cette synthèse, il est proposés d'examiner en détail différents champs théoriques : entiers naturels, fractions et nombres décimaux, calcul, grandeurs et mesure, espace et géométrie, exploitation des données numériques et résolution de problèmes, didactique et pédagogie, psychologie et apprentissage, difficultés, troubles et handicaps. Chaque champ théorique est décrit en différentes notions : désignations, aspect cardinal, aspect ordinal … Enfin chaque notion est fréquemment expliquée par un texte complété par une série de questions (sans doute adressée par les utilisateurs de la ressource à la rubrique contact du site), qui sont répondues. Les textes proposés peuvent renvoyer par un lien à d'autres notions précisées sur le site. Enfin une bibliographie complète parfois l'information concernant une notion.

Une autre partie propose des éléments de réponses à une question pédagogique construite en sélectionnant trois éléments : d'abord un cycle au sens des programmes de 2002 (cycles 1, 2, 3, ou liaison école-collège) ; ensuite un champ parmi la liste des champs théoriques évoqués précédemment complétée par les deux champs : activités pédagogiques et organisation didactique, aspects historiques ; enfin un point précis dans une liste de quarante. Certaines sélections peuvent ne produire aucun éléments de réponse (par exemple : cycle 2, exploitation de données numériques, proportionnalité). Les éléments de réponses permettent d'accéder à des outils utilisables en classe ou de visionner des pratiques illustrant ces réponses.

Une dernière partie est constituée par un espace vidéo de mise en œuvre d'activités en classe, contenant une quarantaine de vidéos, réparties sur les trois cycles et les différents champs théoriques précédents et accompagnées d'un bref commentaire sur le sujet de la vidéo. La collection est complétée par des vidéos d'interviews d'enseignants sur l'utilisation de différents thèmes (rôle du fichier, activités ludiques, outils adaptés à la diversité des élèves …).

2.2 Formation programmée

Un *second espace* permet une formation programmée, répartie en différents thèmes de l'enseignement mathématique : nombres entiers et numération ; fractions et nombres décimaux ; calcul ; grandeurs et mesure ; espace et géométrie ; exploitation des données ; résolution de problèmes. Pour chaque thème, il est prévu différents modules de formation proposant un parcours répondant aux exigences des programmes, sans qu'il soit clair si l'actualisation des programmes est prise en compte (rappelons que la dernière mise à jour du site indiquée est le 22 janvier 2012). Voici un exemple de parcours proposé pour le thème « nombres entiers, numération » :

Connaissance des nombres entiers naturels aux cycles 1 et 2

Parcours 1. **L'appropriation des nombres à l'école maternelle et en début de CP**	Module 1 : Les jeunes enfants et les divers usages des nombres (problèmes relatifs aux quantités et aux positions) Module 2 : L'apprentissage du dénombrement
Parcours 2. **Désignation orale et littérale des nombres inférieurs à 1 000**	Module 1 : La comptine orale, son rôle dans l'apprentissage des nombres Module 2 : La lecture des nombres
Parcours 3. **La numération chiffrée (désignation chiffrée des nombres inférieurs à 1 000)**	Module 1 : Généralités sur les différents systèmes de numération additif, multiplicatif et positionnel Module 2 : Maîtrise de la suite écrite en chiffres des nombres Module 3 : Ordre sur les nombres

Connaissance des nombres entiers naturels au cycle 3

Parcours 1. **Les grands nombres**	Module 1 : Lecture et écriture chiffrée des grands nombres Module 2 : Maîtrise du système de numération et ordre sur les nombres

On voit que chaque parcours est structuré en modules de formation. Chacun commence par faire le point par une série de questions auxquelles on répondra à la fin de la formation, ensuite les enjeux sont précisés notamment en référence au programme, puis différentes séquences de formations sont déroulées. Chacune est nourrie de renvois aux fiches de notions, aux clips vidéos, aux questions-réponses évoquées dans l'espace de formation autonome.

2.3 Exploitation de l'évaluation nationale des acquis des élèves

Un *dernier espace* propose une aide à l'exploitation de l'évaluation nationale des acquis des élèves, en CE1 et en CM1, avec le cahier des élèves, le cahier des enseignants et la synthèse des résultats par compétences pour certains domaines mathématiques. Ces documents remontent aux évaluations de 2010 et 2011, et n'ont malheureusement pas été actualisés.

2.4 Mise à jour du site

Il semblerait que le site ne soit plus mis à jour régulièrement : la dernière mise à jour indique la date du 22 janvier 2012. Les documents d'applications proposés concernent les programmes de 2002. Les champs théoriques « psychologie et apprentissage » et « difficultés, troubles et handicaps » contiennent des listes de notions sans explications et sans éléments bibliographiques. Cela pose le problème de la maintenance des ressources ou des ressources incomplètes ou inachevées, notamment quand les moyens alloués à la création de la ressource viennent à disparaître. Mais cela ne doit pas faire oublier la richesse de la ressource proposée, l'originalité de la diversité des entrées et le recours intelligent au support vidéo. Alors que dans beaucoup de MOOC les vidéos sont de simples enregistrements d'un professeur récitant son cours ou commentant son diaporama, ici il s'agit de vraies mises en œuvre en classe qui éclairent souvent bien mieux qu'un discours filmé. Examinons donc les critères de choix de cette ressource.

2.5 Critères de choix de cette ressource

Observons la qualité de cette ressource au regard des critères de choix précédents et éventuellement de nouveaux critères.

Accès gratuit, autonomie dans l'utilisation, ergonomie : Une qualité de cette ressource, commune à toutes les ressources en ligne ouvertes à tous est le caractère gratuit et de disponibilité immédiate. Il y a aussi le format des données (pas de texte en Latex par exemple) et des vidéos qui ne nécessitent pas de format sophistiqués (ici les formats wmv et flash sont proposés). La prise en main des différentes fonctions des ressources (correspondant en partie à différentes entrées) paraît facile et peut se réaliser de manière autonome.

Liberté d'usage et adéquation au contexte : Ce site propose plusieurs scénarios d'utilisation, avec des entrées modulaires. Des fonctions multiples sont travaillées (explication d'une notion, conception d'une séance d'enseignement, utilisation d'un matériel, évaluation de la compréhension d'une notion …). Les concepteurs de la ressource ont prévu trois types de scénarios d'utilisation de la ressource :

- ressource de formation à distance, appuyée par un tutorat spécifique,

- ressource utilisée par un formateur en formation des maîtres dans le cadre d'un cours, d'un stage de formation continue ou d'une animation,

- ressource pour l'auto-formation sur les questions d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

Mieux, l'utilisateur peut se saisir d'éléments des ressources (clips vidéos, textes, questions) pour lesquels il peut inventer d'autres fonctions dans un autre parcours que ceux proposés. Par exemple utiliser des clips vidéos pour analyser les pratiques de l'enseignant, les pratiques des élèves, les compétences mises en jeu, les évaluations possibles... ; utiliser les questions dans des exercices d'évaluation.

Evaluation : En début de notion, des questions sont abordées, ce qui peut faire penser à une évaluation diagnostique. Ces questions sont reprises en fin de notion, ce qui peut évoquer une auto-évaluation, et sont répondues ensuite. Il n'y a pas cependant d'échanges entre l'utilisateur et le concepteur de la ressource qui pourraient préfigurer une évaluation externe, ce qui dans le cas de certains MOOC va jusqu'à la certification.

Portée : La ressource couvre une grande partie du programme de l'école primaire et possède une multiplicité de fonctions d'utilisation, ce qui permet ainsi de se familiariser à la structure et au fonctionnement de la ressource dans une grande variété de situations.

On remarquera qu'aucun élément de la ressource ne stimule une utilisation collaborative ou ne favorise des interactions entre utilisateurs, comme c'est le cas dans certains MOOC. Si l'on reprend la distinction rappelée par Cisel et Bruillard (ibidem, p.5-6)) où « les xMOOC se concentrent sur la transmission de savoirs déjà existants tandis que les cMOOC, connectivistes, reposent sur leur génération par les apprenants » on est plutôt ici dans le cadre d'une ressource concentrée sur la transmission de savoir déjà existants. Bien entendu la ressource TFM a été créée bien avant la distinction entre xMOOC et cMOOC, ce qui ne nous empêche pas d'utiliser cette distinction pour caractériser la ressource TFM.

On peut remarquer également la complexité de l'arborescence des liens qui tissent un véritable réseau entre les différentes ressources de la plate-forme. Par exemple, si on clique sur « les questions aux questions pédagogiques et outils », que l'on sélectionne « cycle 2, nombres entiers naturels, comparaison des nombres, sens, compréhension, numération », puis qu'on lance la recherche : 44 questions s'affichent et, en cliquant sur les liens, autant de textes à lire pouvant eux-mêmes renvoyer à d'autres liens (vidéos et autres). Tout le monde n'est pas prêt à « payer ce prix » pour s'auto-former et certains utilisateurs privilégient des ressources simples d'usage, et permettant d'obtenir rapidement un élément de réponse. On voit ici la difficulté de toute ressource : répondre à une grande variabilité des besoins de l'utilisateur, ce qui suppose une grande richesse de la ressource, et articuler cette richesse de la ressource à une simplicité d'utilisation.

Nous allons voir que l'approche est différente dans la ressource proposée par le projet LEMA.

3 Ressources sur la modélisation : le site du projet LEMA

Ce site (lema-project.org) a été réalisé dans le cadre du projet européen LEMA, mené de 2006 à 2009, avec pour but de produire et d'expérimenter une formation sur l'enseignement de et par la modélisation.

Une grosse différence avec la ressource TFM est que cette ressource s'adresse à l'enseignement primaire ou secondaire, ce qui signifie que les ressources doivent être adaptées au niveau d'enseignement visé. Trois parties sont proposées : des ressources pour les formateurs, des ressources pour les enseignants et des vidéos de mise en œuvre de la modélisation en classe.

3.1 Ressources pour les formateurs

Les ressources pour les formateurs comprennent cinq modules de formation à la modélisation :

- « modélisation » propose une formation sur ce qu'est la modélisation et les avantages et inconvénients de l'introduire dans l'enseignement,

- « tâches » propose une formation pour explorer et créer des tâches de modélisation, ainsi qu'adapter des tâches à des objectifs plus ciblés,

- « leçons » propose une formation sur les méthodes d'enseignement utilisant la modélisation et sur les compétences mises en jeu,

- « évaluation » propose une formation à l'évaluation formative, l'évaluation sommative et la rétroaction,

- « réflexion » propose un retour réflexif sur les expériences de modélisation en classe et sur la prise en compte des parents d'élèves et des conditions institutionnelles du système scolaire.

Ces modules sont sous-divisés en sous-modules de formation accompagnés chacun d'un *diaporama* à utiliser avec les formés déroulant la session de formation, d'un *guide du formateur* précisant la structure, les objectifs et les matériels de cette session, de *ressources* imprimables pouvant être utilisées dans la session, d'un *journal du formé* où chaque formé peut pratiquer un retour réflexif tout au long de la formation qu'il suit.

3.2 Ressource pour les enseignants dans les classes

Cette ressource propose trente énoncés de tâches de modélisation pour la classe associées à des situations issues de contextes qui peuvent être liés aux différents pays européens partenaires du projet LEMA.

3.3 Vidéos de classe

Quatre vidéos dont une mise en œuvre dans une classe d'école primaire française montrent des mises en œuvre de modélisation en classe. Les vidéos sont sous-titrées en français et sont découpées en différentes phases commentées, qui structurent la séance.

3.4 Critères de choix de cette ressource

Lors de la discussion en atelier les arguments suivants ont été exprimés :

Ergonomie : La partie de la ressource dédiée aux formateurs apparaît complexe tant au niveau de l'accès que de la prise en main et mériterait un accès plus clair.

L'*adéquation au contexte* demande à être vérifiée, notamment pour ce qui concerne le savoir mathématique et le savoir didactique visés. Il est important de montrer la conformité avec le programme de l'école primaire en proposant une carte des répartitions des connaissances et des compétences qui pourraient être couvertes par des activités de modélisation. On sent que le caractère plurinational de la production de cette ressource n'a pas permis une contextualisation aussi poussée dans le programme français. Dans un contexte de classe, quelle progression mettre en œuvre ? Qu'auront appris les élèves et quels objectifs peuvent être visés ? La ressource devrait approfondir ces thématiques.

Liberté d'usage : La ressource propose une entrée par modules. Cependant les modules sont parfois interdépendants. Il manque une bibliographie d'appui qui permettrait de prendre en main les modules avec plus d'autonomie.

Evaluation : Au début de chaque session, le diaporama du formateur, adressé aux formés, présente les objectifs de la session et les productions attendues. A la fin de chaque session il est prévu un retour sur les objectifs visés et sur les productions attendues. Le journal du formé encourage les pratiques réflexives, les objectifs métacognitifs et l'évaluation formative : il est synthétique et structurant. On pourrait également envisager un journal du formateur. Cependant cette auto-évaluation reste limitée, puisque restant confidentielle et donc non soumise à un regard extérieur, même si le formateur peut organiser des séances collectives de retour réflexif. Dans une utilisation autonome de la ressource, on observe l'absence d'évaluation externe, alors que certains MOOC la prévoient, allant parfois jusqu'à la certification.

Portée : Cette ressource est plus ciblée sur le thème de la modélisation. Cependant certaines pratiques (travail en groupes, débat argumenté, compte-rendu …) font travailler des compétences transversales. Une des difficultés de la ressource brute est qu'elle s'adresse aussi bien à des enseignants du secondaire que du primaire. Il manque des indications distinguant ces deux parcours. C'est l'utilisateur, formateur ou enseignant, qui doit lui-même adapter la ressource au type de parcours souhaité.

Par rapport à la distinction rappelée précédemment entre xMOOC, de type transmissifs, concentrés sur la transmission de savoirs déjà existants et cMOOC, de type connectivistes, reposant sur leur génération par les apprenants , on est plutôt ici dans le cadre d'une ressource centrée sur la production de savoir par les formés (par exemples la production de liste d'avantages ou d'inconvénients de l'enseignement de la modélisation, de difficultés et de moyens pour les surmonter, de tâches de modélisation …). Pour autant la ressource n'utilise pas la connectivité en ligne pour créer des communautés à distance qui collaboreraient à distance, comme c'est le cas pour certains MOOC (cf. Cisel, Bruillard, 2012).

III - DEMANDE, BESOIN ET OFFRE EN RESSOURCES

Au terme de cet atelier, on remarque la difficulté qu'il suscite. D'abord la réflexion a priori sur des critères généraux de choix d'une ressource paraît difficile. Peut-être l'utilisateur est-il trop souvent guidé par le hasard (référence d'une ressource obtenue par une rencontre fortuite, navigation aléatoire sur internet...), même s'il peut exister des démarches construites (utilisation d'un moteur de recherche, conseil d'un expert, visite de lieux spécialisés …). De plus préciser des critères généraux en décontextualisant des besoins, demandes, cadres institutionnels et usages paraît difficile : une grande variabilité existe suivant l'utilisateur et le cadre institutionnel. On retient cependant que la *gratuité* est un critère important. Et derrière ce critère il y a quelques questions : Qui paie la gratuité ? La gratuité à quel prix ? L'*ergonomie, l'adéquation au contexte* d'utilisation (avec notamment l'adéquation au programme et aux contraintes de temps), la *liberté d'usage*, l'*évaluation* et la *portée* sont d'autres critères évoqués. Il existe d'autres ressources privilégiant davantage les échanges voire les collaborations : ce sont par exemple les forums entre enseignants. Mais ceux-ci n'ont pas la prétention de proposer un cours structuré, ils mériteraient une étude spécifique. Nous avons préféré nous concentrer sur deux ressources proposant un cours structuré, même si la dimension évaluative y est peu présente. A l'origine de l'atelier nous voulions voir le positionnement des utilisateurs suivant la portée de la ressource : ici une ressource très générale (TFM) et une ressource très spécifique (LEMA). Le manque de temps et de participants à l'atelier n'a pas permis de comparer ce positionnement puisque nous nous sommes limités à la ressource LEMA, préférée par les participants car moins connue que TFM.

Concernant cette ressource LEMA, un rapport de l'inspection générale (IGEN, 2006, p.39) montre qu'une grande majorité de professeurs proposent peu ou pas du tout de problèmes issus de la vie courante ou de la vie de la classe, contrairement aux préconisations du programme. Il y aurait donc un besoin de formation sur ce thème. Mais la demande des formés pourrait ne pas coïncider avec les propositions des formateurs. De même dans un contexte de contraintes (notamment budgétaires) sur l'offre de formation continue, l'offre pourrait ne pas rencontrer les besoins. Une réflexion sur l'articulation entre demande, besoin et offre en ressources mériterait d'être entreprise, notamment avec le démarrage en novembre 2014 du premier MOOC sur France Université Numérique concernant l'enseignement et la formation mathématiques : « enseigner et former avec le numérique en mathématiques » (FUN 2014). Parions que ce MOOC saura proposer une dimension évaluative et une dimension échanges-collaboration.

IV - BIBLIOGRAPHIE

ADLER J. (2010) La conceptualisation des ressources. Apports pour la formation des professeurs de mathématiques, 23-37, in TROUCHE L., GUEUDET G. (2010) Ressources vives. Le travail documentaire en mathématiques. Lyon : INRP.

CABASSUT R., TRESTINI M. , RIEMLINGER P. (2006) Les TIC dans la formation et l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, en collaboration avec Riemlinger P. et Trestini M., 103-112, in *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM*, Strasbourg : IREM de Strasbourg.

CISEL, M., BRUILLARD, E. (2012) Chronique des MOOCs. *Sciences et Technologies de l'Information et de la communication pour l'éducation et la formation*. Volume 19.

GELIS J.-M., KERMORVANT E. (2012) Comment concevoir une formation à distance pour les professeurs d'école en mathématiques : une exploration des possibles à travers deux expériences, in *Actes du 39ème Colloque COPIRELEM.* Brest : IREM de Brest.

IGEN Inspection Générale de l'Education Nationale (2006) *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire.* Ministère de l'Education Nationale.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin, Paris.

TRESTINI, M., ROSSINI, I., CRISTOFFEL, E. (2014). Les MOOC en France: perceptions et analyses de professionnels de l'Education. *2e colloque international sur les TIC en éducation : bilan, enjeux actuels et perspectives futures*. Montréal : 1er et 2 mai.

FUN France Université Numérique (2014) Enseigner et former avec le numérique en mathématiques. https://www.france-universite-numerique-mooc.fr/courses/ENSCachan/20007/Trimestre_3_2014/about .

FORMATION INITIALE EN GEOMETRIE ET VISUALISATION

Thomas Barrier (coord.)
Groupe Recherche-Action-Formation
« Se former comme formateur/trice en géométrie »[1]
ESPE Lille Nord de France
Laboratoire de Mathématiques de Lens
thomas.barrier@espe-lnf.fr

Résumé
Nous présentons dans ce compte rendu certains résultats issus d'un travail collectif en formation initiale des professeurs des écoles en géométrie (première année de Master). Deux séances ont été conçues collectivement et mises en œuvre par trois formateurs différents. Nous mettons en évidence des variations dans les interprétations faites par ces trois formateurs au niveau des enjeux de savoirs associés aux séances. Nous nous intéressons en particulier aux processus d'institutionnalisation et à la gestion des savoirs liés à la visualisation. Nous faisons en effet l'hypothèse que le fait de donner plus ou moins de visibilité à ces savoirs est susceptible de produire des différenciations dans les apprentissages des étudiants.

L'atelier dont ce texte rend compte est issu des travaux du Groupe de Recherche-Action-Formation (GRAF) « se former comme formateur/trice en mathématiques » de l'Université d'Artois. Ce GRAF regroupe les formatrices et formateurs en mathématiques de l'ESPE Lille Nord de France intéressés par un processus d'échange de pratiques, dans la perspective de les enrichir mais aussi à les adapter au nouveau contexte institutionnel de formation. Plus précisément, l'atelier s'est construit à partir des réflexions du sous-groupe « Géométrie » de ce GRAF, consacré à la formation des professeurs des écoles en géométrie. Les membres de ce sous-groupe ont commencé par échanger autour de leur manière d'aborder la géométrie en formation initiale et autour des ressources utilisées. À partir de là, un document décrivant deux séances d'introduction à la géométrie pour les étudiants de première année du Master préparant au professorat des écoles a été collectivement conçu. Une version légèrement abrégée de ce document est proposée en annexe 1. Il a servi de support à plusieurs mises en œuvre, de la part de divers collègues. Trois d'entre elles ont été filmées. L'essentiel du matériau utilisé au cours de l'atelier provient de ces films (transcriptions, photo, extraits). L'atelier a été l'occasion de prolonger le travail du sous-groupe en engageant une démarche réflexive concernant la prise en charge des savoirs liés à la visualisation dans la formation en général, et dans ces mises en œuvre en particulier. Si cette thématique de la visualisation était présente dans les réflexions initiales du sous-groupe – notamment du fait de la « tradition » locale de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie (Barrier, Hache & Mathé 2014 ; Perrin-Glorian, Mathé & Leclerc 2013) – la construction de la problématique au cœur de cet atelier, que nous allons expliciter par la suite, est le produit d'une posture réflexive essentiellement postérieure aux mises en œuvre des séances de formation.

I - INTRODUCTION

Le travail du sous-groupe « Géométrie » du GRAF a démarré par un questionnement général autour de l'enseignement de la géométrie pour nos étudiants en première année de master MEEF mention 1^{e} degré. Il s'agissait de trouver un moyen d'enseigner à tous les étudiants, y compris à celles et ceux, assez nombreux, qui sont en froid avec la géométrie. Pour élaborer notre réflexion en vue de l'atelier, il nous a semblé intéressant de chercher à interpréter cette difficulté de formation en nous appuyant sur deux sources principales : les travaux de Duval (2005) sur les conditions cognitives de l'apprentissage de la

[1] Outre le coordinateur, ont participé à ce groupe : Jean-Philippe Dalle, Bruno Loiseau, Anne-Cécile Mathé, Bernard Montuelle et Denis Vekemans.

géométrie d'une part, et certains travaux de didactique des mathématiques s'intéressant à la différenciation des apprentissages (Coulange 2012, 2014 ; Margolinas & Lappara 2008, 2011).

1 Géométrie et cognition

Commençons par décrire l'approche cognitive développée par Duval (2005). Selon lui, l'apprentissage de la géométrie suppose la mise en place de conditions cognitives spécifiques à ce domaine de connaissances, qui « sont en quelque sorte des conditions pour apprendre à apprendre en géométrie » (Duval 2005, p. 8). Ces conditions sont décrites en détail dans l'article cité[2]. Pour notre part, nous retenons des travaux de Duval l'idée selon laquelle la pratique géométrique nécessite une articulation cognitive délicate entre des compétences de visualisation d'une part et des compétences discursives (i.e. verbales dans l'acception du terme par ce chercheur)[3] d'autre part.

Concernant la visualisation, la spécificité de la géométrie réside dans un traitement cognitif des figures qui s'oppose au traitement iconique des formes tel qu'il est en œuvre dans les conditions ordinaires de visualisation. Le concept clé est celui de déconstruction dimensionnelle :

« Avec la déconstruction dimensionnelle la figure n'est plus qu'une configuration particulière et transitoire parce que contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexe, le détachement d'une figure particulière étant commandé par l'énoncé du problème. » (ibid., p. 26).

Prenons un exemple en lien avec les séances que nous allons étudier.

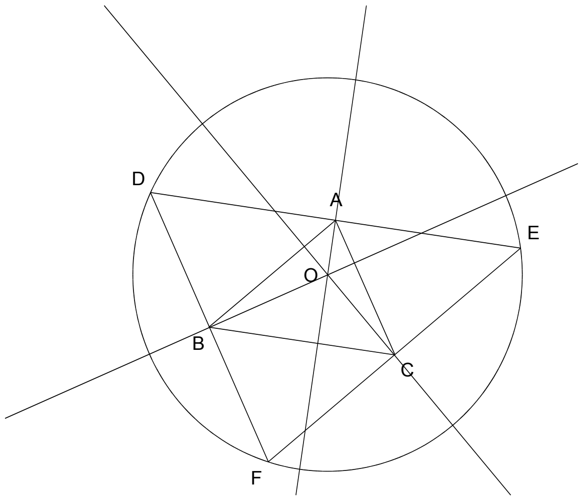


Figure 1

Plusieurs figures peuvent être « détachées » dans la figure 1. Parmi celles qui ne nécessitent pas de tracés auxiliaires, et pour en rester aux formes de dimension 2 (surfaces), on peut repérer des triangles, un cercle (des « portions » de cercle), des parallélogrammes, des trapèzes, et bien d'autres polygones. Imaginons que l'on ait pour tâche de reproduire cette figure, et que l'on commence à partir du triangle ABC. Pour construire le point E, par exemple, il est très utile de le percevoir comme le point d'intersection entre les parallèles aux côtés (AB) et (BC) passant respectivement par C et par A (point de vue réseau de droites) ou encore comme sommet du parallélogramme ABCE (point de vue polygone particulier). En d'autres termes, il faut passer d'un regard focalisé sur le triangle à un regard focalisé sur le parallélogramme (ou toute chose équivalente). La suite de la construction suppose le même type de flexibilité cognitive : le point O est d'abord identifié comme orthocentre du triangle ABC (point de concours de droites construites relativement à un triangle donné) puis comme centre du cercle circonscrit au triangle DEF. Une tâche de démonstration supposerait le même type de fonctionnement

[2] On trouvera par ailleurs divers exemples d'exploitation de son approche dans les actes de la précédente session des colloques COPIRELEM (2013, Nantes).

[3] Nous pourrions rajouter des compétences instrumentales. Cf. Barrier, Chesnais & Hache (2014) et Celi & Perrin-Glorian (2014) pour des descriptions et analyses de telles articulations.

cognitif au niveau de la visualisation (pour un exemple, *cf*. Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian 2014). Si cette tâche ne nécessite pas de tracé auxiliaire, il n'en est pas toujours ainsi. Un exemple très célèbre est donné par Kant au début de *La Critique de la Raison Pure* lorsque celui-ci considère le cas de la somme des angles d'un triangle. Alors que le philosophe en resterait à l'analyse du concept de triangle, et se trouverait dès lors démuni, le géomètre procéderait par des constructions auxiliaires : se donner un triangle, *prolonger* un côté du triangle, *tracer* des lignes parallèles. Ces constructions permettent de faire apparaître de nouvelles formes, nécessaires à l'avancée du travail géométrique, via un enrichissement du réseau de droites sous-jacent à la figure initiale (en l'occurrence cet enrichissement permet de mettre en œuvre les connaissances liées aux angles alternes-internes). Dans Duval (2005), on trouvera un exemple relatif à la construction d'un parallélogramme de même aire qu'un triangle donné. Là encore, c'est le mécanisme cognitif de déconstruction dimensionnelle qui est en jeu.

Duval (2005) distingue par ailleurs plusieurs mécanismes discursifs en géométrie : dénomination, énonciation de relation et démonstration. Il soutient en particulier la thèse d'une rupture entre les mécanismes discursifs de la démonstration et de l'argumentation (Duval 1992, 1995). Dans cet article, nous laisserons en second plan la thématique spécifique de la démonstration et de ses rapports avec l'argumentation pour nous centrer sur les autres mécanismes discursifs et leurs liens avec la visualisation. Dans les contextes ordinaires, la visualisation (iconique) est première par rapport au discours. En d'autres termes, le mécanisme cognitif de visualisation iconique pilote les mécanismes discursifs. Nous disons « il y a un arbre » lorsque, en présence d'un tel objet, notre appareil perceptif le discrimine comme un objet singulier ressemblant à d'autres déjà connus et pour lesquels nous nous sommes donnés en français un moyen culturel de désignation (une dénomination). Il est plutôt inhabituel que ce soit une verbalisation qui soit à l'origine de l'identification d'un objet. Une telle hiérarchie est moins prégnante en géométrie, tout du moins lorsque l'on dépasse les mécanismes iconiques de reconnaissance globale qui ont cours, au cycle 1 notamment. Nous montrerons plus loin la dépendance au discours de l'identification des parallélogrammes de la figure 1. Pour autant, la visualisation semble souvent suffisante pour l'identification d'autres éléments de cette figure (typiquement les éléments « superposés » : les « deux » triangles et le cercle). Soulignons par ailleurs que l'énonciation de relation suppose la disponibilité d'objets susceptibles d'être mis en relation (et de noms d'objets), c'est à dire le plus souvent des points et des droites (alignement, parallélisme, etc.). Le pendant visuel de cette disponibilité est l'émergence d'un certain réseau de droites (et/ou de points d'intersection), ce qui est un aspect fondamental de la déconstruction dimensionnelle. La déconstruction dimensionnelle a donc une valence visuelle et une autre discursive, la pratique géométrique nécessitant l'articulation des deux.

Si l'enseignement scolaire de la géométrie semble avoir depuis quelques temps déjà pris en compte la nécessité d'une approche explicite des spécificités discursives de la démonstration, la place de la visualisation des figures, et a fortiori la question de son articulation avec le discursif, reste plus incertaine, y compris dans la formation des enseignants. Nous faisons l'hypothèse que les spécificités cognitives des pratiques géométriques sont impliquées dans les difficultés que nous rencontrons en formation. Nous poursuivons maintenant l'élaboration de notre problématique en nous appuyant sur le concept de savoir caché.

2 Savoirs cachés et institutionnalisation

Commençons par expliciter ce que nous entendons par savoir caché. Il s'agit pour nous d'une portion du curriculum réel (portion de la prescription de l'institution qui est effectivement enseigné) qui reste invisible ou implicite dans le jeu didactique (Perrenoud 1993). Précisons dès maintenant que nous utilisons le terme « savoir » au sens d'un savoir disciplinaire inscrit dans la culture (scolaire) et (dé)contextualisé dans une institution (Margolinas 2012), et non au sens d'une attitude générale ou d'une compétence transversale que les curricula laisseraient dans l'ombre (parce que trop centrés sur les disciplines, impensé ou inavouable etc.). Une idée force que l'on retrouve aussi bien dans les travaux de Coulange (2012, 2014) que dans ceux de Margolinas & Lappara (2008) est le fait que le caractère « caché » de certains savoir conduit à des dysfonctionnements de l'institutionnalisation, c'est-à-dire du processus de transformation de connaissances mises en jeu en situation en savoirs identifiés comme tels dans une institution donnée. Ces dysfonctionnements seraient notamment impliqués dans les processus de différenciation scolaire, de construction des inégalités scolaires dans la classe (Rochex & Crinon 2011).

Avant de chercher à instancier cette hypothèse dans le cas qui nous occupe, il nous semble nécessaire de procéder à une précision théorique concernant la thématique du « caché » dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Nous utiliserons ici, à notre manière, la distinction entre paradigme de la censure et paradigme de la méconnaissance opérée par Perrenoud (1995). Dans un premier cas, le savoir n'est pas à proprement parler caché pour l'enseignant. Il existe différentes raisons pour lesquels un enseignant (une institution, un groupe social etc.) peut souhaiter enseigner des savoirs à l'insu des élèves. Notre point de vue de didacticien des mathématiques nous conduit ici à en retenir une en particulier, explicitée par Brousseau (1986) sous une forme paradoxale : l'enseignant ne peut pas dévoiler aux élèves les savoirs qu'il souhaite leur enseigner sans dans le même temps les soustraire aux conditions de possibilité de leurs apprentissages (les élèves ne pourraient plus agir de leur propre mouvement). En d'autres termes, le caractère caché des savoirs, la rétention didactique, est une nécessité « grammaticale » des jeux didactiques (Sensevy 2008). Pour autant, les phases adidactiques des situations didactiques, phases dans lesquelles l'intention du professeur d'enseigner un savoir particulier est « cachée », ne se suffisent pas à elles-mêmes. Il est tout aussi nécessaire d'ancrer les connaissances des élèves construites dans ces phases adidactiques au sein de l'institution scolaire, d'expliciter les savoirs culturels qui sont visés. Toute la difficulté pour l'enseignant est alors de lever le voile sur ses intentions, de se ressaisir « les savoirs dont il se départit nécessairement à un moment » (Coulange 2014), alors même que les expériences cognitives effectives des élèves relèvent du privé (nous ne pouvons, au mieux, que faire des hypothèses sur ce que les élèves ont effectivement vécu). Nous avons donc ici affaire à une première source potentielle de dysfonctionnement pour l'institutionnalisation, prenant ces racines dans la nature même du jeu didactique, dans la difficulté pour le professeur (le formateur) d'articuler les processus de dévolution et d'institutionnalisation (Margolinas & Laparra 2008).

Venons-en maintenant au paradigme de la méconnaissance, qui offre un regard complémentaire, plutôt que contradictoire, sur les analyses précédentes. Les difficultés identifiées ci-dessus se trouvent encore renforcées si l'enseignant lui-même peine à identifier les enjeux de savoirs implicitement présents dans les situations d'apprentissage qu'il propose à ses élèves. Au-delà des questions de formation (des enseignants comme de leurs formateurs), il nous semble que ce cas de figure est d'autant plus probable si les savoirs en question ne font pas l'objet d'une reconnaissance institutionnelle explicite, notamment dans les documents officiels à disposition des enseignants. Nous rejoignons donc ici les choix théoriques de Joigneaux, Laparra & Margolinas (2012, p. 3) pour qui les savoirs cachés relèvent de la partie du curriculum réel « composée des savoirs absents dans des programmes alors même que les connaissances associées à ceux-ci sont nécessaires pour réussir les tâches proposées à l'école ». Un exemple d'un tel savoir est fourni par l'énumération (Briand, 1999). Issu de la recherche en didactique, ce savoir essentiel à diverses tâches scolaires reste absent des programmes et peu connu des enseignants (Margolinas & Laparra 2011). Il existe une certaine similitude entre le concept d'énumération et celui de déconstruction dimensionnelle auquel nous nous sommes intéressés au cours de l'atelier. Tous les deux sont issus de la recherche sur l'enseignement-apprentissage des mathématiques, et non de la recherche en mathématique. Aucun des deux ne fait l'objet d'un enseignement explicite dans les filières de mathématiques à l'université ; on pourrait d'ailleurs discuter de la qualification de « mathématiques » pour de tels concepts qui ont émergé de l'analyse des pratiques mathématiques scolaires et non des mathématiques elles-mêmes. Quoi qu'il en soit, ni l'un ni l'autre ne figure explicitement dans les programmes de l'école alors qu'ils sont tous deux nécessaires à la réalisation de diverses tâches qui, elles, y figurent explicitement.

Reprenons l'exemple de la somme des angles du triangle déjà utilisé plus haut et imaginons qu'une étudiante parvienne à trouver une solution. Celle-ci pourrait très bien présenter ce qu'elle a fait au tableau, expliciter chacun des tracés auxiliaires qu'elle aurait été amenée à faire, et ainsi de suite. Pour autant, une telle explicitation peut-elle être reçue par les autres étudiants ? Peuvent-ils percevoir les enjeux d'apprentissage liés à la déconstruction dimensionnelle (décomposer une figure en réseaux de droites, enrichir un tel réseau, en détacher de nouvelles formes etc.) ? En l'absence d'une inscription institutionnelle explicite de ce savoir, le formateur peut-il parvenir à faire fonctionner le processus d'institutionnalisation ?

Nous arrivons ainsi à un deuxième niveau d'élaboration de notre problématique. En appui sur l'analyse développée par Duval des conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie, nous avions émis l'hypothèse que nos difficultés de formation étaient *en rapport* avec les difficultés cognitives spécifiques à la géométrie. Le recours à la notion de savoir caché nous permet de préciser notre questionnement autour de ce rapport : nos difficultés de formation sont-elles liées au caractère caché, implicite des savoirs liés à la visualisation et à la déconstruction dimensionnelle ? Peut-on les analyser comme relevant d'un dysfonctionnement du processus d'institutionnalisation ? Notre gestion des moments d'institutionnalisation renforce-t-elle la différenciation des apprentissages au profit de celles et ceux qui sont « avancés » en géométrie ?

Ces questions ont été soumises aux participants à l'atelier, tout en étant conscient que les réponses étaient à l'évidence hors de portée. Il s'agissait essentiellement de présenter le contexte général de notre questionnement réflexif. L'atelier s'est ensuite organisé en deux phases successives. Dans un premier temps, les participants ont travaillé sur les séances que nous avons conçues (extraits vidéo, transcriptions, productions etc.). L'objectif était de discuter de leur potentiel pour faire émerger les enjeux d'apprentissage liés à la posture cognitive à adopter en géométrie. Ensuite, nous nous sommes intéressés à la manière dont les trois mises en œuvre filmées organisaient (ou non) des moments d'institutionnalisation autour de ces savoirs. Ce compte rendu reprend cette organisation.

II - ANALYSE DU POTENTIEL DIDACTIQUE DES SEANCES

L'analyse de la séquence a débuté par une phase d'appropriation générale, à partir du document figurant en annexe 1. La tâche des participants a été d'en repérer les grandes phases et leurs objectifs principaux. Nous nous contenterons ici d'en rappeler les grandes lignes. L'ensemble de la séquence s'appuie sur une seule et même figure, déjà présentée plus haut (figure 1). Dans une première partie, cette figure est projetée au tableau, puis cachée. La tâche des étudiants est alors de la reproduire à main levée. Ils doivent ensuite en proposer une description. Dans une deuxième partie, il s'agit d'écrire des programmes de construction. Trois cas de figures sont envisagés, selon l'ancrage initial retenu : le triangle ABC, le triangle EDF ou le cercle de centre O. La troisième et dernière partie de la séquence porte sur la démonstration. Il s'agit d'exploiter le travail préalable sur la visualisation et la verbalisation (partie 1) et celui sur les programmes de construction (certains énoncés relèvent parfois de la construction, parfois non) pour nourrir le travail sur la démonstration.

Les participants repèrent notamment[4] :

- le fait que les tracés à main levée (ni manipulation des instruments, ni vocabulaire spécifique) sont suivis d'une phase de verbalisation permettant de préciser le vocabulaire spécifique à la géométrie.
- le fait qu'un même objet mathématique peut être vu (nous pourrions rajouter décrit) de différentes façons, en lien avec les choix implicites de reproduction.
- le point de vue séquentiel (ordre) qu'il est nécessaire d'adopter pour rédiger un programme de construction
- le fait que le travail sur les démonstrations nécessite de voir des relations entre objets, et de changer de point de vue.

Nous avions ensuite procédé à des analyses plus ciblées, portant essentiellement sur la première partie de la séquence. Nous en rendons compte ci-dessous.

[4] Nous profitons ici, et plus loin, de la prise de notes de Sara Arditi lors de l'atelier. Merci à elle.

1 Reproduction à main levée et description : le cas des parallélogrammes

Nous nous intéressons ici à la tâche de reproduction à main levée et aux descriptions proposées par les étudiants en nous centrant spécifiquement sur le cas des parallélogrammes de la figure 1. Nous cherchons ici à éprouver le point de vue cognitif de Duval (2005) à partir de l'étude des pratiques effectives des étudiants, mais aussi à analyser dans quelle mesure les savoirs en lien avec la visualisation et la déconstruction dimensionnelle sont effectivement en jeu.

Les supports proposés aux participants ont été de quatre types (annexe 2) : un extrait vidéo recueilli dans le groupe d'un premier formateur (appelons le F1), quatorze productions d'étudiants correspondant à la tâche de reproduction à main levée recueillies dans le groupe d'une autre formatrice F2 (nous désignerons le troisième collègues par F3), une photo du tableau de F1 après que les étudiants ont terminé de recenser ce qu'ils voyaient, et de cours extraits de transcription pour chacune des trois mises en œuvre. En complément de ces données, les participants avaient été invités eux-mêmes, dès le démarrage de l'atelier, à dire ce qu'ils avaient vu sur la figure 1, préalablement projetée puis rapidement cachée.

Dans un premier temps, les participants ont eu pour tâche d'identifier les objets et relations qui étaient prioritairement perçus par les étudiants. Sur le plan méthodologique, il s'agissait d'exploiter deux types d'indices : quels étaient les éléments mobilisés pour la reproduction à main levée (un tracé à main levé nous renseigne plus finement qu'un tracé aux instruments ; on peut tracer deux droites perpendiculaires à une même droite sans nécessairement tracer deux parallèles !), et quels sont les éléments qui font l'objet d'une verbalisation. L'activité de description ayant été préalablement proposée aux participants, les difficultés qu'ils avaient eux-mêmes rencontrées ont fortement pesé sur les analyses de ce paragraphe. Les participants avaient spontanément relevé un cercle, deux triangles, des droites, des médiatrices, un cercle circonscrit, son centre, un orthocentre, un triangle (peut-être équilatéral) inscrit dans le cercle, des points codés, la droite « des milieux », des hauteurs. Mais ils n'avaient perçu ni les parallélogrammes, ni les trapèzes, lesquels n'ont été identifiés que lors de l'étude générale du document (annexe 1). Ce phénomène a donc été pris en compte lors de l'analyse. Les participants ont rapidement repéré que les parallélogrammes n'avaient pas été identifiés par les étudiants non plus, tout du moins dans un premier temps.

Nous reprenons ici rapidement les éléments de synthèse que nous avons proposés :

- Les extraits vidéo montrent deux procédures de reproduction : la première débute par le « grand » triangle, la seconde par les trois droites concourantes et le cercle ayant pour centre le point de concours de ces droites. Dans les deux cas, les « unités » du tracé (ce qui est tracé dans une certaine continuité) sont des droites, des triangles (ABC et EDF) et un cercle.
- Ce constat semble être confirmé par l'analyse des productions, même si la marge d'interprétation est plus grande. Prenons l'exemple de la figure 10 (annexe 2-1). Nous faisons l'hypothèse que ce sont les triangles qui ont été représentés, et non les parallélogrammes. Selon cette lecture, le fait que les quadrilatères ADBC, EABC et ABFC aient une certaine ressemblance avec des parallélogrammes est une conséquence (non perçue à ce moment de la séance) du positionnement approximatif des sommets du triangle ABC au milieu des côtés du triangle DEF. Nous considérons que l'identification des parallélogrammes aurait conduit à une meilleure prise en compte de ses propriétés.
- La photo montre l'état du tableau à l'issue de la phase de description (figure cachée, groupe de F1), avant que F1 n'ait à nouveau projeté la figure pour valider et compléter cette liste. Comme lors des deux autres mises en œuvre, les étudiants n'ont pas spontanément identifié les parallélogrammes (il faudra un dialogue avec le formateur ou la formatrice pour y parvenir). Ils perçoivent néanmoins des parallèles, le théorème de Thalès et celui de la droite des milieux.

D'une manière générale, les analyses convergent pour convenir que les étudiants ont prioritairement repéré les « deux » triangles (ABC et DEF) et le cercle, avant les autres triangles, les parallélogrammes et les trapèzes. Conformément au cadrage théorique développé plus haut, nous en avons proposé une interprétation de nature cognitive. Cette interprétation consiste à attribuer l'identification des triangles et du cercle à un processus relevant de la division méréologique des figures au sens de Duval (juxtaposition et/ou superposition). Ce processus peut se développer indépendamment du discours. Comme pour la visualisation iconique (identification d'une forme par ressemblance à une forme typique), la visualisation est alors première par rapport à la verbalisation. Cette caractéristique distingue la division méréologique du processus de déconstruction instrumentale, qui pour sa part est intimement liée à une activité discursive (Duval 2005, p. 23). Selon nous, c'est ce second processus qui est en jeu dans l'identification des parallélogrammes. Avant d'expliciter ce point de vue, il nous semble important de revenir sur certaines discussions qui ont eu lieu au cours de l'atelier.

Comment expliquer le phénomène observé et sa régularité dans les trois groupes (l'identification des parallélogrammes vient dans un deuxième temps, elle émerge dans le dialogue) ? Une première explication pourrait consister à attribuer ce phénomène aux caractéristiques visuelles de la figure et à celles de notre appareil perceptif (biologiquement et culturellement déterminées). Le fait que les triangles et les cercles soient abordés à l'école avant les parallélogrammes pourrait en effet avoir une incidence sur la formation de notre regard géométrique et expliquer des différenciations dans le traitement des figures. Qui plus est, la nature des expériences liées à la visualisation évolue sensiblement du cycle 1 (où commencent à être abordés les triangles et les cercles) au cycle 3 (apparition des parallélogrammes) : la visualisation iconique et la division méréologique deviennent moins prépondérantes. Une participante a par ailleurs souligné que la présence du point O au milieu de la figure, point de concours de trois droites, est quelque chose qui focalise particulièrement l'attention. Les objets 2D qui lui sont culturellement liés sont le cercle (les droites en sont des diamètres et le point O le centre), et les triangles ABC et DEF (les droites en sont des hauteurs ou des médiatrices, le point O respectivement l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit). Terminons en évoquant le choix de codage : celui des deux triangles respecte l'ordre alphabétique, ce qui est d'usage lorsque l'on définit un objet en mathématiques, pas celui des parallélogrammes.

Une autre explication consiste à s'intéresser non seulement à la tâche de description mais plus généralement à la situation dans laquelle celle-ci s'insère. Cette tâche de description fait suite à une première tâche de reproduction à main levée. Il nous faut donc envisager l'influence de cette première tâche sur le comportement des étudiants dans la seconde. Un participant a avancé qu'il est peu usuel de commencer une reproduction de figure par un parallélogramme. Le fait qu'il y ait des contraintes à respecter pour le tracé, liées aux relations qui lient leurs côtés, en font des objets plus délicats à construire, y compris dans le cas d'un tracé à main levée. Dans la tâche proposée, il est possible, et assez facile, de se passer du recours au parallélisme pour la construction[5]. En ce qui concerne notre figure, il aurait alors fallu construire le triangle DEF comme une superposition de parallélogrammes, ce qui est en pratique plutôt laborieux, notamment au regard du tracé de ce triangle comme une « unité ». En résumé, cette explication se distingue de la précédente en ce qu'elle attribue la priorité du recours aux triangles et au cercle non pas, ou pas essentiellement, à des raisons d'ordre cognitif relevant du rapport des étudiants à la figure mais plutôt à des raisons d'ordre pragmatique et instrumentale. Selon cette analyse, les indices que nous avons relevés en lien avec la reproduction (vidéos et productions) seraient des indices du caractère plus laborieux des procédures mobilisant les parallélogrammes, plutôt que des indices de ce que les étudiants les percevraient moins spontanément. Et les indices liés à la verbalisation seraient également biaisés par cette tâche inaugurale.

Bien qu'il nous soit impossible d'évaluer précisément l'influence de la première tâche sur les comportements des étudiants dans la seconde, il nous semble néanmoins que l'explication de nature cognitive, en termes de « priorité visuelle » et de différenciation entre modes de visualisation, reste pertinente. Si les facilités de tracé peuvent constituer l'élément prépondérant ayant conduit les étudiants à privilégier triangles et cercle, on aurait pu s'attendre à ce que les étudiants contrôlent davantage la présence des parallélogrammes dans leur figure à main levée, une fois le tracé réalisé. A plus forte

[5] Notons que lors de l'écriture des programmes de construction : celui nécessitant l'utilisation des propriétés du parallélogramme (i.e. celui commençant par le « petit » triangle) a posé beaucoup plus de difficultés aux étudiants que les deux autres programmes envisagés (Partie 2, section B, tâche b – annexe 1)

raison, il nous semble qu'il est peu probable qu'un élément perçu, mais non utilisé dans les tracés pour des raisons de commodité, ne fasse l'objet d'aucune verbalisation spontanée dans la phase dédiée à cette tâche. Enfin, la même tâche de description a été proposée aux participants de l'atelier, indépendamment de la tâche de reproduction à main levée. Cela ne semble pas avoir eu d'influence notable puisque les parallélogrammes n'ont pas non plus émergé dans cet autre contexte.

Nous avons ensuite proposé aux participants de repérer des similitudes dans les extraits de transcription correspondant à l'émergence du terme parallélogramme dans les trois mises en œuvre (annexe 2-2). Chacun de ces extraits se situent après des relances des formateurs, les réponses spontanées des étudiants ayant été auparavant épuisées. Dans ces extraits, il semble que ce soient les dialogues avec les formateurs, et dans deux des mises en œuvre des éléments discursifs que l'on peut associer à la démonstration, qui aient été à l'origine de l'émergence des parallélogrammes dans le discours des étudiants. Prenons l'exemple du groupe de F3. Une étudiante ayant repéré une relation de parallélisme en a « déduit » la vision des parallélogrammes (« *du coup* on peut voir des parallélogrammes »). Il semble ici que le passage par le registre langagier, registre privilégié du déductif, ait permis à l'étudiante de s'engager dans un processus de déconstruction dimensionnelle, lequel se produit « pour une (re)construction déductive des objets représentés » (Duval 2005, p. 24).

2 Déconstruction dimensionnelle et discours

Nous poursuivons notre analyse de la mobilisation du processus de déconstruction dimensionnelle par les étudiants. Nous venons de défendre l'idée que ce processus était en jeu lorsqu'il s'agissait pour les étudiants de « détacher » des figures comme les parallélogrammes (ou plus généralement les trapèzes). Nous explorons maintenant la manière dont les interactions sociales et langagières contribuent à favoriser la flexibilité des points de vue, le détachement successif de diverses figures. Pour des contraintes de temps, nous avons proposé aux participants de faire un choix entre deux types d'extraits, chacun d'entre eux provenant de la phase de description de la partie 1 de la séquence. Le premier est constitué de passages dans lesquels la présence de hauteurs et de médiatrices est discutée (annexe 3). Il s’agit alors d’analyser la contribution des interactions entre les différentes voix qui s'expriment autour d'un même objet mathématique au processus de déconstruction dimensionnelle. Le second regroupe des passages dans lesquels on peut repérer des variations dans les modes de validation, perceptif ou déductif (annexe 4). Ici, nous cherchons à mieux comprendre les rapports entre visualisation et déduction. Les participants ayant fait le choix du deuxième type de données, les analyses qui suivent à propos des premières ne sont pas un compte rendu, mais plutôt une présentation de nos intentions.

Considérons la ligne joignant les points O et A. Différentes verbalisations peuvent renvoyer à cette même trace graphique : droite, segment, hauteur, médiatrice, perpendiculaire, diamètre, etc. Chacune d'entre elles porte un arrière-plan figural différent. Par exemple, l'expression « droite » renvoie à la seule ligne rejoignant O et A, hauteur renvoie à un triangle particulier, et diamètre à un cercle particulier. Plusieurs questions peuvent alors se poser : les étudiants repèrent-ils que ces diverses verbalisations renvoient à un même objet mathématique ? La coexistence de verbalisations renvoyant à des visualisations différentes est-elle susceptible de favoriser la flexibilité cognitive associée au processus de déconstruction dimensionnelle ? Ces questions nous semblent d'autant plus importantes que la capacité à considérer un même objet relativement à plusieurs figures « englobantes » nous semblent un élément essentiel dans le travail autour de la démonstration. Prenons l'exercice 3 de la partie 3 (annexe 1) : la démonstration suppose le recours à plusieurs statuts successifs pour la droite (AO) : hauteur issue de A dans le triangle ABC, droite perpendiculaire à (BC), droite perpendiculaire à (DE), droite simultanément perpendiculaire à (BC) et (DE), médiatrice de [DE], diamètre du cercle circonscrit à DEF.

A titre d'illustration, arrêtons-nous sur un court extrait de transcriptions au cours duquel deux étudiants débattent de « la » nature de la droite (AO) (groupe de F1) :

E1 : c'est pas la médiane de D E ? [médiatrice ?]

E2 : Ben non elle est perpendiculaire et elle passe par le sommet

E1 : ben non il passe pas par le sommet

E2 : ben il passe par A

E1 : Ah ouais vous parlez de l'autre triangle

Dans cet extrait, on observe deux arrière-plans figuraux divergents conduisant, dans un premier temps, à un quiproquo entre les étudiants. E1 s'intéresse à la droite (OA) relativement au segment [DE], alors que E2 semble focalisé sur le triangle ABC. Le différent se règle sans difficulté, par un recours au codage des sommets. Les interactions permettent ici la rencontre de deux regards différents sur un même objet, que la pratique géométrique nécessite d'articuler.

Poursuivons par l'étude d'un extrait issu du groupe de F2. On s'intéresse ici aux échanges concernant le fait que DEF soient ou non équilatéral. Ces échanges ont lieu après que les hauteurs du triangle ABC ont été repérées, et qu'une définition du concept de hauteur a été explicitée (annexe 3). Nous reprenons ici les arguments significatifs (colonne de gauche), en lien avec les arrière-plans figuraux que l'on peut y associer (colonne de droite).

E : il est inscrit dans un cercle et que O c'est l'orthocentre / *E : [l'orthocentre] du cercle*	On a ici deux voix dissonantes (chez un même élève) : le triangle DEF (« il ») est rapproché du cercle, mais l'expression « O c'est l'orthocentre du cercle » peut être rapprochée des échanges précédents relatifs au triangle ABC.
E [une autre étudiante] : ouais puis les hauteurs elles passeraient par [inaudible]	On retrouve ici un autre écho des échanges précédents autour des hauteurs dans le triangle ABC.
E : Les hauteurs elles passeraient par les milieux des côtés s'il était équilatéral	Les deux voix dissonantes persistent : il est difficile de saisir la référence du pronom « il », lequel renvoyait jusqu'ici assez clairement au triangle DEF.
F2 : Alors ouais / les hauteurs elles passeraient par O F et G / c'est vrai ça / enfin E F et / et pourquoi ?	F2 utilise ici le triangle EDF comme arrière-plan. Par contre, elle désigne les médiatrices de EDF par « hauteur », reprenant ainsi l'expression introduite par les étudiantes et renvoyant au triangle ABC. L'argument qui semble être une simple reprise de celui avancé par l'étudiant s'en distingue néanmoins : les hauteurs passent par les milieux des côtés vs. les médiatrices passent par les sommets.
E : Parce que dans un triangle équilatéral les médiatrices et les hauteurs elles sont confondues	Cette fois, l'énoncé est décontextualisé (pas de déictique). Il peut venir justifier tout aussi bien l'argument de l'étudiante que celui de la formatrice.
F2 : Mais attention parce que là ce sont les hauteurs de A B C	La formatrice relève la dissonance décrite plus haut ; elle clarifie l'arrière-plan associé au mot hauteur.
E : Ouais mais comme c'est le milieu c'est une médiatrice non ?	Cette fois, l'arrière-plan figural semble mieux installé (« milieu » et « médiatrice » renvoient toutes les deux aux cotés de EDF).

Nous interprétons ces échanges comme signalant un changement progressif de regard concernant la trace graphique reliant les points A et O. Le contexte énonciatif est initialement celui du triangle ABC, la ligne en question est désignée comme une hauteur. Par la suite, il évolue pas à pas. On peut tout d'abord repérer deux voix dissonantes, relevant des deux arrière-plans figuraux superposés et divergents. Cette superposition conduit à un certain flottement : il n'est pas toujours aisé pour l'observateur de saisir de manière univoque quels sont les objets auxquels les interlocuteurs font référence. En fin d'échange, le contexte énonciatif semble stabilisé, le triangle EDF sert de repère pour parler de la droite (AO). Cet échange illustre selon nous la manière dont un processus discursif, par la confrontation de positionnements énonciatifs associés à différentes figures, peut contribuer au processus de déconstruction dimensionnelle.

3 Déduction et visualisation

Nous avons déjà évoqué plus haut les relations entretenues entre la déconstruction dimensionnelle et les processus discursifs et déductifs. Nous poursuivons ici cette étude en nous focalisant sur des échanges, relevant toujours de la phase de recension des figures (séance 1, partie 1B), dans lesquels on peut repérer des variations dans les modes de validation (perceptif et déductif). D'une manière générale, et bien qu'aucune justification n'ait été exigée du travail des étudiants pour cette phase (autre qu'une justification perceptive : il y a tel ou tel objet parce que je le vois), les formateurs se sont appuyés sur plusieurs modes de validation pour contrôler les affirmations des étudiants : perceptif, déductif mais aussi « instrumental » (via un logiciel de géométrie dynamique). Ils se sont appuyés sur ces allers-retours pour évoquer les différentes pratiques de la géométrie scolaire, et leur évolution au cours de la scolarité. Bien sûr, en l'absence de toute définition de la figure projetée, les pratiques déductives sont conditionnées au choix de certaines hypothèses parmi les énoncés à disposition (des définitions implicites)[6]. Ces choix peuvent être consensuels ou non, explicites ou non.

Au sein de l'atelier, la pertinence de ces recours à des éléments de déduction, dans cette situation, a particulièrement été discutée. Est-il raisonnable de mobiliser un cadre déductif, qui plus est dans une première leçon de géométrie, en l'absence d'un statut univoque pour les énoncés et alors même qu'un enjeu de l'apprentissage de la démonstration réside dans la distinction entre les statuts des différents énoncés ? Sur quoi faire reposer le choix des hypothèses, alors que le recours à l'évidence perceptive est estimé insuffisant pour valider l'énoncé cible (la « conclusion ») ? N'y a-t-il pas des risques de confusion ? A l'inverse, une telle situation pourrait permettre de problématiser l'intérêt de disposer d'hypothèses stables, explicites et consensuelles pour s'engager dans un processus de démonstration, d'en faire émerger la nécessité. La troisième partie de la séquence propose d'ailleurs des exercices de démonstration qui reposent sur diverses définitions de la figure 1. Par ailleurs, la souplesse permise par un travail à partir d'une « figure » non définie pourrait offrir aux étudiants la possibilité, dans ces passages relevant d'une géométrie déductive, de choisir des hypothèses en relation avec leurs connaissances et leur vision particulière de la figure. Notre questionnement étant davantage centré sur le rôle de la visualisation, et de son articulation avec le discours, nous laissons de côté ces discussions autour de l'introduction à la démonstration.

Du point de vue de notre problématique, le fait que chacun des trois formateurs dont les mises en œuvre ont été filmées fasse des passages par la géométrie déductive, dans une phase de la séquence où l'objectif concernait plutôt des enjeux de visualisation et de formulation des relations perçues, nous paraît significatif. Nous interprétons cette régularité comme un indice des liens étroits qu'entretiennent les processus de visualisation et de démonstration. La déconstruction dimensionnelle ne relève pas d'une visualisation statique, ni même d'une succession de détachements isolés de figures à partir d'un réseau de points ou de droites. Ce qui est en jeu relève de la dynamique, de la transition d'un regard à un autre. Dans le registre langagier, ce sont typiquement les processus déductifs qui assurent ces transitions, d'un énoncé à un autre, via des règles de déduction. La pratique géométrique nécessite le même type de compétence en ce qui concerne la visualisation des figures, les deux processus étant intimement articulés. Cette hypothèse théorique d'un lien fort entre déduction et déconstruction dimensionnelle permet d'interpréter le fait que les formateurs aient été tentés de faire des passages par la géométrie déductive alors même que la première de séquence affichait plutôt des objectifs relevant plutôt de la visualisation, de la dénomination et de l'énonciation de relation. Dans les analyses qui suivent, nous cherchons à mettre en évidence la manière dont le recours à des éléments déductifs permet de tisser un lien dynamique entre les figures. Au niveau de l'atelier, nous nous sommes appuyés sur les transcriptions présentées dans l'annexe 4. La tâche des participants a consisté à identifier les

[6] À moins que l'on ne cherche à démontrer des implications (des « théorèmes » cf. groupe de B, annexe 4), mais cela ne change pas le fait qu'il soit nécessaire d'attribuer à certains énoncés un statut particulier.

basculements d'un mode de validation à l'autre, typiquement en repérant les termes qui sollicitent ou constituent des liens entre les énoncés (pourquoi, parce que, donc, mais, etc.), puis à identifier les hypothèses et arrière-plans figuraux qui viennent en soutien de la position énonciative des interlocuteurs. Les participants ont été répartis en trois groupes, chacun d'entre eux étant chargé d'une mise en œuvre. Dans ce compte rendu, nous nous contenterons de présenter les analyses ayant trait aux groupes de F1 et F2. Nous commençons par la mise en œuvre de F2.

Étudiants	F2
	Et oui c'est le cercle qui passe par les trois points du centre / par les trois sommets pardon / par les trois sommets du triangle / ouais ? / ben oui c'est quoi le cercle circonscrit à E D F ben c'est le cercle qui est tracé / bon qu'est-ce que ça veut dire sur le point O par rapport au point D et E par exemple ? ///
Y a égales distances	
	Y a égales distances d'accord / effectivement il est à égales distances / alors pourquoi tu me dis ça ?
C'est une propriété de la médiatrice	
	Ah d'accord / ben d'abord parce que O est le centre du cercle qui passe par D E et F / c'est quoi un cercle ?
[inaudible] ensemble des points [inaudible]	
	Oui c'est l'ensemble des points qui est à une distance donnée du centre O là / qui est ici / ça veut dire que forcément O D et O E sont deux rayons du cercle donc je sais que ces deux segments ils ont même longueur.
[... discussion autour du statut – segment ou longueur – du rayon ...]	
	Ok hum / et oui on avait dit un autre truc toi tu m'as dis moi je sais que O E c'est égal à OD parce que c'est une propriété de la médiatrice / c'est quoi cette histoire / vous savez me l'expliquer ? / de quoi elle parle ? /// non ?

Dans cet extrait, F2 engage une discussion autour de « la » raison pour laquelle les points E, D et F se trouvent à égales distances du point O. On peut alors observer la coexistence de deux arrière-plans figuraux venant soutenir l'énonciation des interlocuteurs. Les étudiants mettent en avant le fait que O est un point des médiatrices des segments [ED], [DF] et [FE]. D'un point de vue dynamique, ces droites viennent s'ajouter à la configuration composée des trois sommets du triangle EDF et du point O. Pour sa part, la formatrice évoque le cercle de centre O (déjà évoqué lors de sa première intervention dans le tableau ci-dessus). Cette fois, c'est le cercle et son centre qui viennent enrichir la figure. Au cours de l'atelier, une participante a fait l'hypothèse que cette divergence puisse être le fruit d'un effet de contrat, plus que de postures divergentes concernant la visualisation de la figure, l'expression « égales distances » se situant plutôt dans le réseau sémantique « contractuel » des médiatrices que dans celui du cercle. Les divergences seraient donc issues d'un défaut d'interprétation de l'intention didactique de la formatrice lié aux habitudes scolaires. Quoi qu'il en soit, nous pouvons bien observer des interprétations différentes de la demande de justification de F2, que l'on peut associer à différentes hypothèses implicites contribuant à définir la figure. Dans un premier cas, l'hypothèse est que les droites sont concourantes en O et qu'elles sont bien des médiatrices des côtés du triangle, dans le second, l'hypothèse est que O est le centre du cercle circonscrit au triangle DEF. La formatrice fera d'ailleurs le lien entre les deux lectures de la figure, soulignant ainsi l'existence de deux dynamiques permettant de mettre en relation les énoncés, et par la même occasion les éléments graphiques de la figure.

L'extrait provenant de la mise en œuvre de F1 offre un complément aux analyses précédentes. Il fait suite au constat collectif du fait que le cercle est circonscrit au triangle EDF.

Etudiants	F1
	[...] Pourquoi le point O est-il le centre de ce cercle ?
tous les points sont à la même distance de / tous les points qui appartiennent au cercle sont à la même distance de O	
	là tu me donnes la définition d'un cercle donc je ne peux pas te dire non / je te rappelle que ce que l'on appelle un cercle circonscrit c'est le cercle qui passe par les trois sommets du triangle
c'est les trois points qui appartiennent au cercle de centre O	
	alors comment traduire ça par une relation ?
[… la relation recherchée est donnée par les étudiants et notée au tableau...]	
	donc là en fait j'ai pas répondu à la question que je vous ai posée / elle était pas très honnête en fait ma question / je vous demandais pourquoi / là on a trouvé un moyen de traduire autrement l'idée / mais comme je suis un homme terriblement têtu d'après vous pourquoi c'est vrai ça ? /// alors je vous donne un joker : pour vous c'est quoi une médiatrice ?
[… F1 fait ensuite la démonstration attendue...]	

Nous pouvons observer ici de nouvelles dynamiques autour d'une configuration spatiale proche de la précédente. F1 considère tout d'abord le cercle circonscrit à DEF et le point O. Cette fois, les dynamiques sont enclenchées par une demande de justification (implicitement déductive) du fait que le point O est bien le centre de ce cercle. L'enrichissement de la figure consiste du point de vue du formateur à prendre en compte les médiatrices des côtés du triangle. L'hypothèse associée est que ces médiatrices en sont bien, et qu'elles sont concourantes en O. Ce mouvement de position énonciative est assez proche de celui effectué par les étudiants dans l'extrait précédent, même si les deux dynamiques se différencient du point de vue de la prise en compte initiale du cercle. De leur côté, les étudiants se focalisent sur le cercle, l'enrichissement semble consister à appréhender le cercle comme un ensemble de points, plutôt que comme un objet linéaire, ce qui n'est pas neutre sur le plan cognitif (Bulf, Mathé & Mithalal 2014). Ceux-ci se donnent une hypothèse implicite selon laquelle les points du cercle sont bien équidistants par rapport au point O. Comme précédemment, le formateur met en fin de compte en perspective les deux dynamiques. Chacun de ces deux extraits illustre la manière dont le recours à un mode de validation déductif permet de nourrir une dynamique dans la visualisation des figures, de par la recherche de relation entre configurations spatiales qu'une mise en relation entre énoncés suppose.

III - VISUALISATION ET INSTITUTIONNALISATION

Dans la partie précédente, nous avons cherché à montrer que la séquence que nous avons conçue et expérimentée permettait de faire émerger certaines pratiques dont les fondements cognitifs sont spécifiques de la géométrie. La familiarité avec ces pratiques, et les savoirs qui leur sont associés, nous semble être un enjeu important de la formation des étudiants. Les processus cognitifs sous-jacents, celui de la déconstruction dimensionnelle particulièrement, sont très souvent en jeu dès lors qu'un apprentissage géométrique se construit. Dans cette partie, nous discutons de la prise en compte des savoirs liés à la visualisation et à la déconstruction dimensionnelle dans nos pratiques de formation, en particulier dans les phases didactiques des situations d'apprentissage relevant du processus d'institutionnalisation. Rappelons que ce questionnement sur l'institutionnalisation était essentiellement absent lors notre réflexion collective ayant conduit à la conception des séances de formation. On ne trouve d'ailleurs pas de trace d'un positionnement commun sur ce qui devrait ou non être institutionnalisé au cours de cette séquence dans le document descriptif. Pour autant, ce document évoque certains objectifs d'apprentissage, et propose parfois des orientations pour les mises en commun et synthèses. Pour ce qui est de la première séance, plusieurs passages signalent des enjeux de visualisation (mise en commun de la partie 1A, fin de la synthèse de la séance). Sur le plan méthodologique, nous nous focalisons dans cette partie sur les moments collectifs impliquant fortement l'enseignant (mise en commun, conclusion, synthèse...) lors de la première séance (partie 1 et 2). Nous chercherons en particulier des contrastes entre les trois mises en œuvre, de manière à mieux identifier les choix didactiques des formateurs.

1 Mise en œuvre de F1

F1 est un formateur expérimenté, intervenant tant dans les aspects disciplinaires, didactiques ou transversaux de la formation professionnelle. Il est par exemple en charge d'un cours sur le « métier » d'élève, un cours qui aborde notamment les aspects des apprentissages des élèves dont les curricula ne rendent pas compte, et plus largement à la thématique de l'implicite dans l'enseignement scolaire. Il nous semble que l'on peut interpréter certains de ses choix pédagogiques et didactiques à l'aune de cette particularité. Au sein de l'atelier, nous nous sommes arrêtés sur le passage au cours duquel ce formateur explicite les consignes de la tâche B de la partie 1 de la première séance (recensement de ce qui a été perçu). La passation de la consigne dure 1min30s, ce qui est assez considérable, notamment au regard des deux autres mises en œuvre. F1 procède à des reformulations, explicite l'organisation pédagogique et matérielle de la tâche, et précise ce que les étudiants vont avoir à faire pour apprendre au-delà de la seule réalisation de la tâche puisqu'il est notamment question de prise de notes (cf. annexe 5 pour une transcription complète). Bien sûr, ces précisions ne portent pas sur ce qu'il va être nécessaire de mettre en œuvre, du point de vue mathématique, pour réaliser la tâche qui est proposée. Comme nous l'avons développé dans la première partie de ce texte, il est nécessaire qu'une part d'implicite soit maintenue en ce qui concerne les enjeux d'apprentissage. Nous cherchons maintenant à décrire la manière dont le formateur va (ou non) se ressaisir des connaissances mathématiques que les étudiants ont mises en jeu dans la tâche qui leur a été proposée pour les identifier comme des savoirs de la culture scolaire, susceptibles d'être utilisés en d'autres occasions. Nous avons mis en évidence dans la partie précédente le fait que certaines de ces connaissances avaient à voir avec des compétences de visualisation (et de verbalisation) liées à la déconstruction dimensionnelle. Ces connaissances sont-elles relevées par le formateur ? Privilégie-t-il d'autres aspects de l'activité mathématique ?

Après avoir recensé les verbalisations proposées spontanément par les étudiants (cf. photo du tableau annexe 2), F1 organise une phase dialoguée au cours de laquelle ces verbalisations sont validées et complétées. Le formateur enchaîne alors directement sur la partie 2 de la première séance, à savoir la partie concernant les programmes de construction. Il ne cherche pas, à ce moment-là tout du moins, à exploiter plus en avant la tâche réalisée, à expliciter et organiser les savoirs mathématiques qui ont été travaillés. Il semble donc que celui-ci interprète cette partie 1 comme un travail préparatoire (analyse de la figure, rappel de vocabulaire) à la partie 2 plutôt que comme une situation d'apprentissage ayant ses propres objectifs en termes de savoirs. Le formateur avait par ailleurs mentionné lors de la passation de consigne le fait qu'un document récapitulant définitions et théorèmes serait distribué en fin d'activité :

F1 : Quand on aura fini l'activité, je vous distribuerai un document dans lequel se trouve toutes les définitions, tous les théorèmes qu'on va utiliser ensemble / donc vous aurez tout par écrit / donc quand on va échanger ensemble on va évoquer bien sûr forcément des définitions des théorèmes / vous n'êtes pas du tout obligés de tout noter / les seules choses que je vous inviterai à noter ce sera les apartés de didactique que je ferai en plus / mais à chaque fois je vous le dirai quand je ferai des remarques didactiques / d'accord ? / mais tout ce qui est mathématiques générales vous aurez un beau dossier à la fin qui résumera tout

Cette diffusion semble donc jouer le rôle d'un processus d'institutionnalisation minimaliste pour la première partie de la séance. Ce qui nous intéresse ici n'est pas tellement d'expliquer ou de discuter ce choix (« rappel » vs. apprentissage, horaires très contraints *etc*.), d'ailleurs partagé par les autres formateurs, mais plutôt de relever que ce document consiste en un recueil de définitions et de théorèmes, éventuellement illustré par des figures (nous reviendrons plus loin sur son organisation). Les savoirs associés au traitement des figures, à la dynamique de la déconstruction dimensionnelle, ne sont usuellement pas représentés dans ce type de document. Comme l'a souligné un participant à l'atelier, les objectifs d'apprentissage concernant la déconstruction dimensionnelle et la visualisation ne sont pas vraiment explicites dans notre document collectif, il n'est donc pas étonnant que ces savoirs ne le soient pas non plus dans les mises en œuvre. Quoi qu'il en soit, ce qui nous intéresse ici est aussi d'identifier et de comparer l'interprétation que les formateurs ont pu faire de ce document lors des trois mises en œuvre. Nous poursuivons en décrivant les moments dans lesquels les étudiants ont été invités à prendre du recul au cours de la tâche de rédaction de programmes de construction (séance 1, partie 2), ces moments étant de susceptibles de contribuer au processus d'institutionnalisation. Après avoir explicité ce qui était attendu de la part des étudiants dans ce type d'activité, de manière à nouveau très détaillée, le formateur a engagé les étudiants dans la rédaction d'un premier programme, sans précision concernant le point d'ancrage. Une phase de recherche a été organisée, suivie d'une mise en commun. Une première montée en généralité a lieu après qu'un premier programme de construction a été écrit au tableau et que les étudiants ont discuté du choix de son ancrage initial (le programme présenté commence par le triangle DEF) :

F1 : Quand j'ai circulé parmi vous au début, vous étiez tous dans le même débat / la difficulté de l'exercice c'est de passer d'une figure statique à un programme qui véhicule une dynamique / c'est à dire qu'il faut trouver un début et un enchaînement / et vous avez beaucoup réfléchi sur le début

L'expression « l'exercice » a dans cette intervention une valeur générique (le formateur utilise ensuite beaucoup d'indéfinis). Le formateur distingue ici deux modes d'appréhension d'une figure : un mode visuel et statique qu'il oppose à un mode discursif et séquentiel. Nous avons abordé plus haut cette opposition entre dynamique et statique, soulignant la nécessité de construire une forme dynamique de la visualisation via le processus cognitif de déconstruction dimensionnelle. Nous avons donc affaire dans ce court extrait à de premiers éléments portant sur la visualisation, son rapport au langage et les difficultés spécifiques que pose la pratique géométrique. Pour autant, le projet didactique de F1 semble piloté par une autre préoccupation. À la suite de ce cours passage, un étudiant propose un nouveau programme de construction, débutant par le tracé du cercle. Le formateur fait alors remarquer que ce deuxième programme ne recourt qu'à peu de concepts mais que, pour autant, il permet aussi d'assurer l'ensemble des observations réalisées précédemment, par un processus de déduction (il ouvre alors une parenthèse à propos de la géométrie déductive, axiomatique, en référence à Hilbert). Cette orientation, privilégiant le travail sur la démonstration et en particulier sur sa dimension discursive, est confirmée par la suite. La séance se termine par la distribution du document dont il a déjà été question lors de la première partie de la séance. Le formateur procède alors à un nouvel aparté didactique visant notamment à expliquer l'organisation du document, dans la perspective de son usage dans le travail déductif. Selon que l'on privilégie une recherche par analogie, par chaînage avant ou arrière, les étudiants sont invités à préférer telle ou telle entrée dans le document. En somme, nous retiendrons de cette mise en œuvre que l'interprétation par ce formateur du document conçu par les collègues du GRAF est prioritairement orientée par les enjeux d'apprentissage en lien avec la démonstration. Il s'agit bien sûr d'un aspect délicat de la formation, et d'un levier de réussite important pour le concours de recrutement. Les explicitations concernant les savoirs associés à la visualisation sont plutôt rares.

2 Mise en œuvre de F3

F3 est également un formateur expérimenté, par ailleurs chercheur en mathématiques. A l'image de ce que nous avons fait pour la mise en œuvre de F1, nous cherchons à identifier les principaux enjeux de savoirs que F3 attribue aux séances conçues. Nous commençons par nous intéresser à la transition entre la première phase (séance 1, partie 1A) et la seconde (partie 1B). La phase de recension faisant suite aux reproductions à main levée commence figure cachée. La liste des observations est ensuite validée et complétée sous forme de dialogue avec le formateur, la figure étant à nouveau projetée. Cette fois-ci, et bien que F3 ait également prévu un document récapitulant les définitions et théorèmes essentiels de la géométrie plane à distribuer aux étudiants, le formateur prend le temps d'un échange assez fourni autour des droites remarquables des triangles. L'originalité de cet échange, au regard des deux autres mises en œuvre, est de se détacher plus fortement de la figure associée à la tâche : il ne s'agit plus de valider des observations (via parfois un rappel des définitions), ni de raisonner en contexte (le triangle DEF peut-il être isocèle ?).

F3 : y a quelque chose sur lequel je voudrais revenir / alors la première 'trois droites passant par le centre du cercle' [il entoure l'expression qui figure au tableau] / et la seconde que j'avais d'ailleurs négligée tout à l'heure qui est 'O est l'orthocentre de ABC' [il entoure également] / je vais m'occuper d'abord des droites sécantes au centre du cercle qui sont en fait les médiatrices / alors je vais faire disparaître progressivement le triangle ABC qui ne m'intéresse pas en l'occurrence [il le fait grâce à un logiciel de géométrie dynamique] [...]

Le formateur s'exprime ici à la première personne à propos de concepts mathématiques. Il se positionne comme enseignant, marquant ainsi le caractère fortement didactique du passage. Par ailleurs, la fonction du logiciel de géométrie dynamique permettant de cacher certains éléments de la figure est mise à contribution pour faciliter la visualisation des objets dont il est question. Les droites concourantes ne peuvent plus être vues comme des hauteurs si le triangle ABC est caché (par la suite, ce sera le triangle EDF puis le cercle qui seront à leur tour cachés, les droites qu'il s'agit de réinterpréter restant affichées). Ceci procure un gain de généralité puisque seuls les composants directement concernés par les énoncés en jeu sont présents. En d'autres termes, les observations réalisées sur la figure 1 sont recontextualisées dans une configuration graphique plus générale (des déplacements opérés sur les sommets du triangle contribuent par ailleurs à renforcer cette généralité). F3 en profite pour énoncer et écrire au tableau certains théorèmes classiques sur les droites remarquables du triangle. Le travail sur les savoirs « conceptuels » de la géométrie plane est donc plus conséquent dans cette mise en œuvre que dans la précédente, qui privilégie pour sa part les enjeux d’apprentissage de la démonstration. Quant au travail sur la visualisation des figures, il ne fait pas non plus l'objet d'une prise en charge explicite. Bien que le fait de cacher ou de réafficher certains éléments graphiques puisse être interprété comme une forme de modélisation de la dynamique visuelle de la déconstruction dimensionnelle (au sens d'un processus cognitif de détachements dynamiques de figures) ce sont bien les configurations statiques qui sont thématisées, de manière relativement isolées. La transition vers l'écriture de programmes de construction est ensuite abordée par F3 à partir de ce que le logiciel permet ou non de déplacer (plusieurs constructions avaient été préparées). A la manière de F1, il utilise alors les écarts entre les contenus des programmes de construction et les observations sur la figure 1 pour aborder la dimension déductive de la géométrie. Pour ce qui est de notre questionnement sur l'interprétation des enjeux de savoirs de cette séance par chaque formateur, nous retenons donc que les mises en œuvre de F3 et de F1 se distinguent par leur orientation principale (démonstration ou définitions et théorèmes). Dans les deux cas, les savoirs liés à la visualisation sont peu explicités.

3 Mise en œuvre de F2

F2 est une formatrice confirmée. Elle est par ailleurs chercheure en didactique des mathématiques, elle connaît bien les travaux de Duval sur la visualisation. Dans cette mise en œuvre, on trouve, plus que dans les deux autres, un certain nombre de références aux compétences de visualisation que suppose la pratique géométrique scolaire. En voici un exemple :

F2 : vous voyez qu'on en voit des choses sur cette figure / on a vu qu'on arrivait d'abord à décomposer cette figure en surfaces, en sous éléments de surface / deux triangles et puis un cercle / et puis après là depuis tout à l'heure on est en train de décortiquer les postions relatives des sommets de A B C par rapport à D E F et puis ce que sont ces droites-là / ce que représente le point O pour A B C / ce que représente le point O pour D E F / est-ce que vous voyez d'autres choses ?

E : est-ce qu'on pourrait pas faire trois triangles à l'intérieur de D E F ?

Cette intervention intervient lors de la phase de recension des objets et relations perçus dans la figure. Sa fonction didactique est de relancer la dynamique des observations du côté des étudiants, ce qui semble se produire puisqu'une étudiante émet une nouvelle proposition (ce seront ensuite les parallélogrammes qui seront identifiés, cf. annexe 2-2). Elle rend compte de la nature des compétences mathématiques qu'il a été nécessaire de mobiliser afin d'identifier les éléments déjà repérés dans la figure. Bien qu'assez fortement contextualisée, cette intervention invite à adopter une posture réflexive, à prendre de la distance par rapport au processus spontané de visualisation. Elle nous semble susceptible, de ce point de vue, de contribuer au processus d'institutionnalisation. La recension des observations se poursuit, suite à quoi F2 revient, cette fois-ci de manière plus générale sur le travail venant d'être fait :

F2 : bon / donc d'accord vous voyez que cette première activité c'était pour vous montrer que ces activités de reproduction à main levée c'est des trucs qu'on retrouve dans les classes / ben c'est important parce qu'est-ce qu'on a fait en fait / on a essayé de matérialiser des relations que l'on voyait entre les objets / vous voyez que les contraintes de précision ici moi je m'en fiche / ça n'a pas d'importance / ce qui était intéressant c'était de déconstruire la figure de regarder les sous-éléments de la figure d'essayer de les mettre en relation / C'est ça que je voulais faire apparaître avec vous / ça nous a permis aussi un peu de rappeler les propriétés géométriques de se remettre un peu là-dedans / bon ben maintenant on va passer à une autre activité […]

Elle dévoile très explicitement dans ce passage ses intentions didactiques (« c'est ça que je voulais faire apparaître avec vous »). Il s'agissait d'apprendre aux étudiants à « déconstruire », « regarder », « mettre en relation ». Les savoirs visées par la formatrice lors de cette première partie de la séance 1 relève de la construction d'un regard géométrique. Les rappels concernant les propriétés géométriques, assez centraux dans la mise en œuvre de F3, semblent ici plus secondaires (« ça nous a permis *aussi*... »). Ces savoirs font néanmoins l'objet d'apartés occasionnels, parfois à partir de figures plus générales construites pour l'occasion et s'écartant du contexte initial (un polycopié sera également distribué). Suite à cette explication, F2 engage les étudiants dans la réalisation des programmes de construction, laissant libre le choix de leur commencement. À la manière des autres mises en œuvre, elle s'appuie sur ces programmes pour légitimer la nécessité d'un discours déductif.

Dans cette partie, nous avons cherché à identifier quels étaient les enjeux d'apprentissage que les formateurs attribuaient en priorité à ces séances, et plus particulièrement à la première. Notre analyse comparée du processus d'institutionnalisation révèle des divergences dans leurs interprétations. F1 semble mettre au cœur de ses préoccupations la thématique de la preuve, F3 les définitions et propriétés des objets élémentaires de la géométrie plane. Dans ces deux mises en œuvre, les savoirs liés à la visualisation restent au second plan, à la différence de celle de F2 qui les met davantage en avant. Nous ne chercherons pas ici à expliquer tel ou tel choix. Notre propos était plutôt de souligner ces divergences, lesquelles sont susceptibles d'avoir une influence sur les apprentissages des étudiants.

IV - CONCLUSION

Dans cet atelier, nous avons abordé la question d'un enseignement des savoirs géométriques concernant la visualisation des figures. Nous avons montré que ces savoirs étaient concernés dans plusieurs tâches de notre séquence. Le processus cognitif de déconstruction dimensionnelle est en jeu dès lors qu'il s'agit de reproduire une figure, d'en construire aux instruments, mais aussi dès lors qu'il s'agit d'en produire des descriptions ou de s'engager dans des processus déductifs. En appui sur les concepts de savoir caché et d'institutionnalisation, nous avons émis l'hypothèse que l'absence d'identification de ces savoirs, à destination des étudiants, était susceptible de contribuer à la différenciation des apprentissages au détriment de celles et ceux qui n'auraient pas construit les conditions cognitives de ces apprentissages. L'originalité de notre démarche est d'avoir cherché à articuler des cadres théoriques d'orientation cognitive d'une part et sociologique de l'autre. Nous avons alors montré, à partir d'une analyse comparée de trois mises en œuvre, que l'interprétation des enjeux d'apprentissage d'une même séquence, conçue collectivement (mais sans que ces enjeux de savoir n'aient fait l'objet d'une trace écrite univoque), pouvait varier selon les formateurs. On peut penser que ces variations sont corrélées à l'idée que chacun se fait de la nature du travail géométrique, aux différentes expériences professionnelles passées. Il n'est pas étonnant que la formatrice par ailleurs sensibilisée aux enjeux d'une éducation du regard géométrique ait davantage mis en avant ces savoirs. Les données à notre disposition ne permettent néanmoins pas d'étudier les effets de ces variations sur les apprentissages géométriques des étudiants et plus généralement, sur leur formation professionnelle. La question de la nécessité d'un enseignement de la visualisation géométrique, de concepts comme celui de déconstruction dimensionnelle, reste pour nous largement ouverte. Le principal apport de notre recherche nous semble être d'en préciser les enjeux. Signalons à ce propos une discussion impulsée par une participante lors l'atelier. Les notions de visualisation iconique, non iconique, de déconstruction dimensionnelle, etc., sont des notions relevant de la cognition mathématique, et non des mathématiques elles-mêmes. Elles se distinguent par ailleurs des analyses métamathématiques des pratiques discursives ou déductives en mathématiques. Ces dernières, dont certaines revendiquent une proximité avec les pratiques effectives, disposent de théories formalisées de formes textuelles stables et consensuelles. En somme le statut de savoir des notions rendant compte de la visualisation géométrique ne va pas de soi, ce qui n'est pas sans poser de difficultés si l'on envisage d'en faire des objets d'enseignement ou de formation. Nous terminons en évoquant les spécificités de la formation des professeurs des écoles. La question prend en effet une autre coloration dans ce contexte, si on le compare par exemple à un enseignement de géométrie à destination de collégiens, par exemple. En formation des enseignants, il s'agit aussi de travailler, dès le premier semestre du Master, la construction de compétences professionnelles. Au-delà des apprentissages géométriques disciplinaires, un enseignement de savoirs liés à la visualisation est susceptible de contribuer à la formation professionnelle en outillant les étudiants pour l'analyse des pratiques géométriques scolaires.

V - BIBLIOGRAPHIE

BARRIER T., CHESNAIS A. & HACHE C. (2014) Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant, *Spirale – Revue de Recherches en Education*, **54**, 175-193.

BARRIER T., HACHE C., MATHE A.C. (2014) Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves, *Grand N*, **93**, 13-37.

BRIAND J. (1999) Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19(1)**, 41-76.

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7(2)**, 33-115.

BULF C., MATHE A.-C. & MITHALAL J. (2014) Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique, *Spirale – Revue de Recherches en Education*, **54**, 29-48.

CELI V. & PERRIN-GLORIAN M.-J. (2014) Articulation entre langage et traitement des figures dans la résolution d'un problème de construction en géométrie, *Spirale – Revue de Recherches en Education*, **54**, 151-174.

COULANGE L. (2012) *L'ordinaire de l'enseignement des mathématiques, Pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves*, Habilitation à Diriger des Recherches (note de synthèse), Université Paris Diderot.

COULANGE L. (2014) Les pratiques langagières au cœur de l'institutionnalisation des savoirs mathématiques, *Spirale – Revue de Recherches en Education*, **54**, 9-27.

DUVAL R. (1992) Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?, *Petit x*, **31**, 37-61.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Bern : Peter Lang.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5–53.

JOIGNEAUX C., LAPARRA M. & MARGOLINAS C. (2012) Une dimension cachée du curriculum réel de l'école maternelle: la littératie émergente ? C*olloque Sociologie et didactiques*, 2012, Lausanne, Switzerland.

MANGIANTE-ORSOLA C. & PERRIN-GLORIAN M.-J. (2014) Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres, in *Actes du XL colloque Copirelem* (pp. 57-80), 2013, Nantes, France.

MARGOLINAS C. (2012) Des savoirs à la maternelle. Oui, mais lesquels ? in *Actes du XXXIX*[e] *colloque Copirelem*, 2012, Quimper, France.

MARGOLINAS C. & LAPARRA M. (2008) Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation. Des effets de la transparence des objets de savoir, *Colloque Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation*, 2008, Bordeaux, France.

MARGOLINAS C. & LAPARRA (2011) Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire, 19-32, in Rochex J.Y. et Crinon J. (éds.) *La construction des inégalités scolaires*, Rennes : PUR.

PERRENOUD P. (1993) Curriculum : le formel, le réel, le caché, 61-76, in Houssaye J. (éd.) *La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui*, Paris : ESF.

PERRENOUD P. (1995) *Métier d'élève et sens du travail scolaire*. Paris : ESF.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C. & LECLERCQ R. (2013) Comment penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments, *Repères-IREM*, **90**, 7-41.

ROCHEX J-Y. & CRINON J. (2011) *La construction des inégalités scolaires, au cœur des pratiques et dispositifs d'enseignements*. Rennes : PUR.

SENSEVY G. (2008) Le travail du professeur pour la théorie de l'action conjointe en didactique : une activité située ?, *Recherche & Formation*, **57**, 39-50.

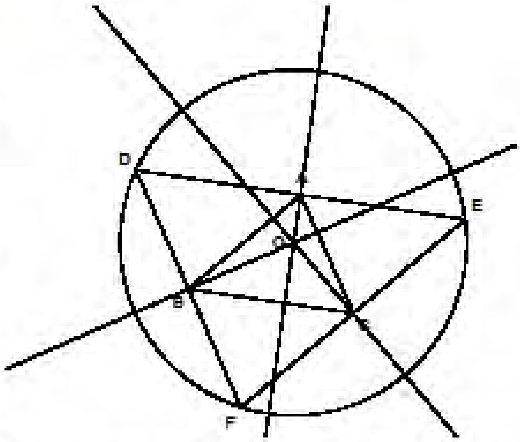
ANNEXE 1

Les séances élaborées et expérimentées (dans le cadre du GRAF « géométrie » ESPE Lille Nord de France)

Séance 1

Partie 1 : Reproduction à main levée, identification perceptive de propriétés géométriques d'une figure donnée

A. Reproduction à main levée d'une figure projetée



Objectifs : identifier des sous-éléments (2D, 1D, 0D) d'une figure donnée, reproduire à main levée les relations perçues entre ces sous-éléments

Choix de commencer par une reproduction à main levée : permettre à la plus grande partie des étudiants de produire quelque chose, pas d'obstacle lié au vocabulaire, à la formulation, montrer aussi la pertinence (didactique) d'un travail sur le tracé à main levée. Aide à la formulation des propriétés et relations entre ces sous-éléments de la figure (être capable de voir avant d'être capable de dire).

Pas d'instrument pour se débarrasser des difficultés de manipulation et d'usage des instruments. Se libérer d'un contrat de précision en géométrie qui mette en échec les étudiants, pas d'attente concernant le soin pour privilégier réflexion sur propriétés et relations.

Déroulement prévu :

La figure ci-contre est projetée quelques minutes au tableau puis cachée.

Consigne : Reproduire la figure à main levée (individuelle, sur feuille isolée)

Mise en commun :
Qu'avez-vous représenté ?
Première expression de difficultés des étudiants.
→ Vers l'identification de sous-éléments :
- on peut regarder les triangles DEF et ABC, DAB, BCF, AEF...,
- voir le cercle comme défini en premier ou cercle circonscrit à DEF,
- voir les parallélogrammes, etc...

À l'oral : de premières relations perçues entre ces sous-éléments (de premières formulations, rappels de vocabulaire)

Éventuellement à débattre : distinction dessin figure : quelles sont les propriétés que nous ne prenons pas en compte en géométrie ?
Différents dessins représentent une même figure.
Quels types de propriétés prend-on en compte en géométrie ? (position relative de A par rapport à [DE] mais pas position de E, D, F sur le cercle par exemple...pas si simple). En fait, en ne regardant que ce dessin, on ne peut que faire des hypothèses sur les propriétés géométriques caractérisant la figure sous-jacente.

Document de travail élaboré par le GRAF « géométrie » ESPE de Lille

B. Formuler les propriétés perçues

En individuel, figure projetée au tableau. Formulation écrite individuelle

Consigne : «Objectifs : formuler les propriétés / relations que vous voyez dans cette figure. »

Mise en commun : formulation des propriétés géométriques, des relations perçues entre les sous-éléments de la figure, rappels sur le vocabulaire, les formulations des propriétés en géométrie.

Rappels sur les conventions de notation.

Partie 2 : Programme(s) de construction

Trois entrées différentes sont possibles pour rédiger un programme de construction de cette figure : en partant du cercle, en partant du triangle EDF, en partant du triangle ABC.

A. En collectif, construction de la figure sur logiciel de géométrie dynamique en partant du cercle, élaboration d'un premier programme de construction (simple), règles pour élaborer un programme de construction

Qu'est-ce qu'un programme de construction ?
Objet scolaire
But : communiquer une suite d'étapes permettant de construire sans ambiguïté une figure géométrique, caractérisée par des propriétés géométriques.
(→ Les énoncés, le grain, dépend du public visé, des connaissances et outils à disposition tant de celui qui l'émet que de celui auquel il est destiné)
Une suite d'étapes de construction d'une figure géométrique qui ne donne lieu à aucune ambiguïté.
Pas d'évocation des instruments.
Rq. : pour nous : on dira qu'on construit plutôt des points, des segments, des droites, des cercles que des carrés, des parallélogrammes.

Proposition alternative : Rédaction en utilisant des « étiquettes d'instruction ».

B. Individuellement, rédaction d'autres programmes de construction

a) En partant de EDF
b) En partant de ABC

Mise en commun : des étudiants décrivent leur programme de construction (ou affiche). On teste sur logiciel de géométrie dynamique la validité des programmes.

Des programmes de construction possibles

Question bonus

Soient A, B, C trois points. Comment construire, à règle et au compas, un triangle EDF tel que A, B, C soient les milieux respectifs de [ED], [DF], [EF].

Synthèse possible

Document de travail élaboré par le GRAF « géométrie » ESPE de Lille

Mise en regard des programmes de construction produits : des propriétés différentes, des instruments à utiliser différentes, retour sur le vocabulaire, sur les « règles d'un programme de construction », sur les écarts entre description et programme de construction

Peut-être retour sur des questions liées à la distinction dessin/figure : on reproduit la figure, pas le dessin donc pas de prise en compte des mesures (notamment des mesures des côtés du triangle DEF), on peut par exemple placer les points E,F et D n'importe où sur le cercle.

Retour sur les objets, propriétés, définitions
On peut construire différents regards sur la figure, isoler différents sous éléments, voir de différentes manières ces sous-éléments.
Exemple : Qu'est-ce que le point O ?
O est le centre du cercle.
O est le centre du cercle circonscrit.
O est le point d'intersection des médiatrices du triangle EDF.
O point de concours des hauteurs de ABC.

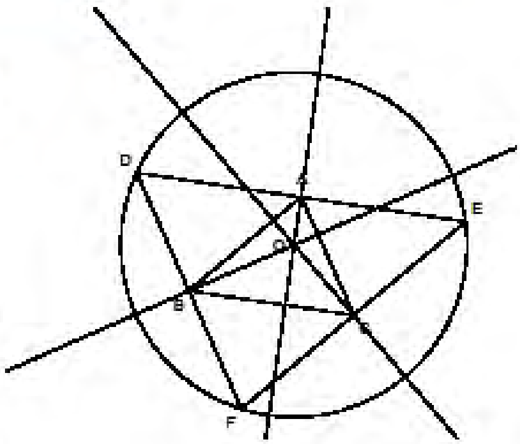
On formule les différentes figures englobantes, manières de voir...

Fin de la séance : travail sur tracés à la règle et au compas ; éventuellement : rappels sur des objets géométriques de base, des propriétés, exercices

Séance 2

Partie 3 : exploitation pour le travail dans la démonstration

A. Démonstration, construction de preuves



On choisit un programme de construction, donc une définition de la figure. Comment peut-on en déduire des propriétés identifiées en séance 1, convoquées dans un autre programme de construction ?
Autrement dit :
On a des propriétés en vrac (partie 1)
Certaines sont suffisantes pour construire, pour définir la figure.
À partir de celles-ci, comment montrer que les autres sont vraies ?

En maths, pour montrer qu'une propriété est vraie, le système de validation repose sur raisonnement hypothético-déductif.

Appui sur banques de propriétés et théorèmes.

Quelques premiers exemples de démonstration. Discussion sur ce qu'est une démo.

Exemple : on part de DEF et A, B, C milieux respectifs. Montrer que ADCB est un parallélogramme.

Exemples :
(On part du triangle ABC)
Soit *ABC* un triangle quelconque, soit *O* son orthocentre.
Soient Δ1 la droite perpendiculaire à (OB) passant par B
Δ2 la droite perpendiculaire à (AO) passant par A
Δ3 la droite perpendiculaire à (OC) passant par C.
Δ1 et Δ2 se coupent en D, Δ1 et Δ3 se coupent en F, Δ2 et Δ3 se coupent en E.

Montrer que O est le centre du cercle circonscrit au triangle EDF.

(On part du triangle ABC)

Soit *ABC* un triangle quelconque, soit *O* son orthocentre.

Document de travail élaboré par le GRAF « géométrie » ESPE de Lille

Soit F le point tel que ABFC soit un parallélogramme

Soit E le point tel que ABCE soit un parallélogramme.

Les droites (AE) et (BF) se coupent en D.

Montrer que O est le centre du cercle circonscrit au triangle EDF.

Activités de prolongement

Exercice 1

Soit (C) un cercle de centre O
On considère trois points D, E et F appartenant à (C)
Soient, respectivement A le milieu de [DE], B milieu de [DF] et C milieu de [EF]
Démontrer que O est l'orthocentre du triangle ABC

Exercice 2

Soit DEF un triangle quelconque et O le centre de son cercle circonscrit.
Soient A, B et C milieux respectifs des segments [DE], [DF] et [EF]
Démontrer que O est l'orthocentre du triangle ABC

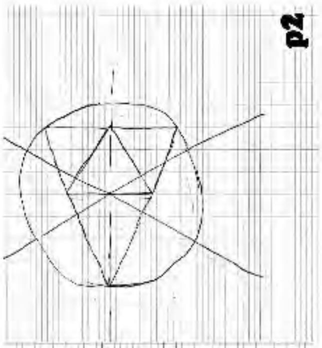
Exercice 3

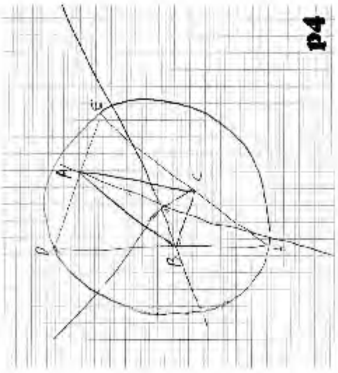
Soit ABC un triangle d'orthocentre O.
Soit D1 la droite perpendiculaire à (OB) passant par B, D2 la droite perpendiculaire à (AO) passant par A et D3 la droite perpendiculaire à (OC) passant par C.
On appelle D le point d'intersection de D1 et de D2, E celui de D2 et de D3 et F celui de D1 et de D3.
Démontrer que O est le centre du cercle circonscrit à DEF

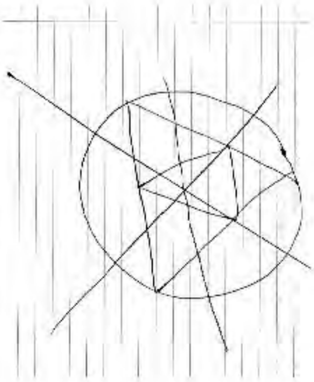
Exercice 4
Soit ABC un triangle d'orthocentre O.
Soit le point F tel que ABFC est un parallélogramme
Soit le point E tel que ABCE est un parallélogramme.
Les droites (AE) et (BF) se coupent en D
Démontrer que O est le cercle du centre circonscrit à DEF

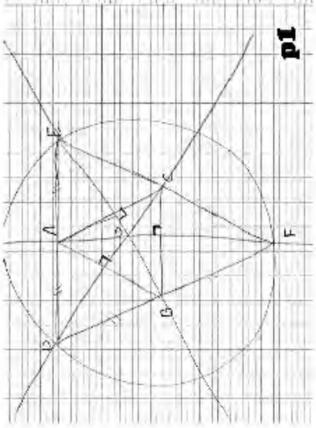
Document de travail élaboré par le GRAF « géométrie » ESPE de Lille

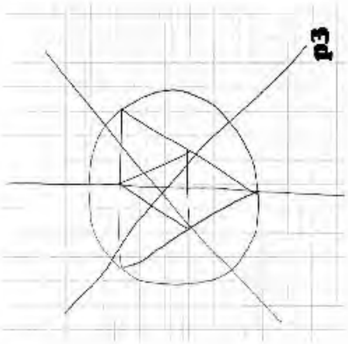
ANNEXE 2-1

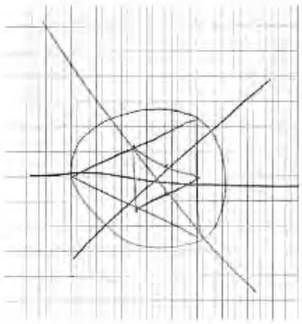


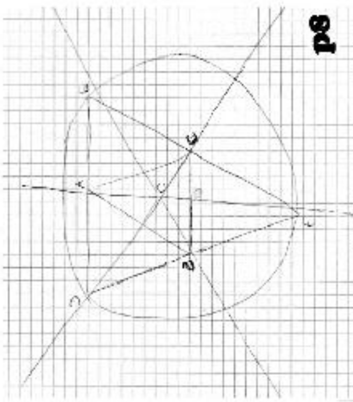


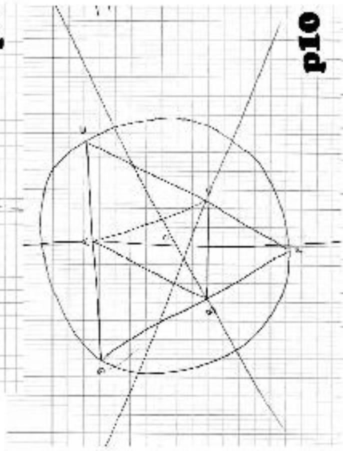


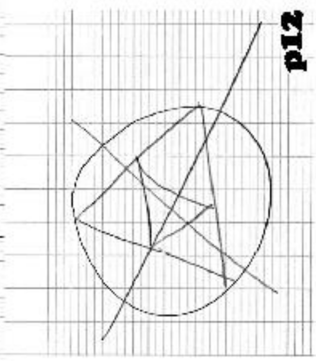


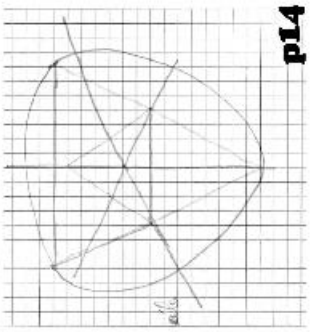


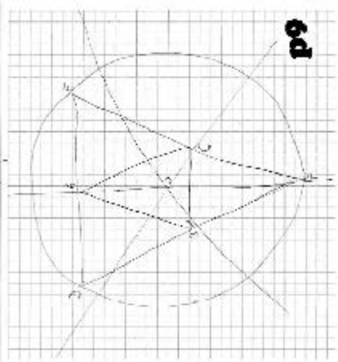


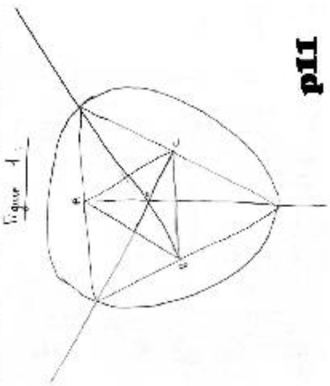


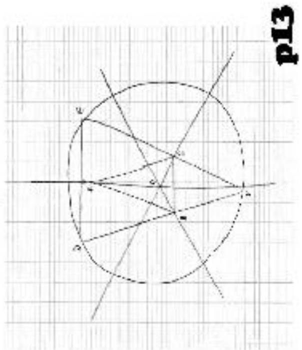












ANNEXE 2-2

Photo d'un tableau

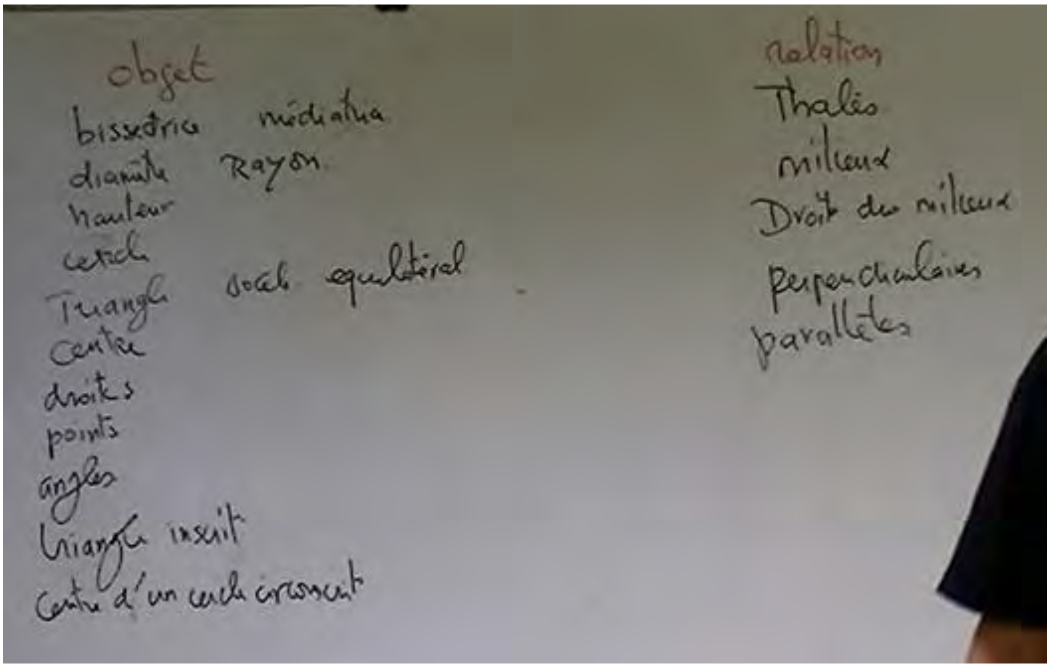


Photo de l'état du tableau à l'issue de la verbalisation associée à la phase de reproduction à main levée (figure cachée, groupe de F1).

Consigne de F1 : « Alors avant de valider vos productions et avant que je vous re-projette la figure de départ je vous propose qu'on fasse un petit échange et qu'on fasse une petite collecte / Je serais très curieux de recenser les éléments de géométrie que vous avez recenser dans la figure / et je vous propose de les classer d'ailleurs / de mettre d'un côté tout ce qui est objet et d'un autre côté tout ce qui est relation / pour redire les choses en termes le plus simple possible j'aimerais que vous me disiez ce que vous avez vu dans le dessin et qu'on en prenne note au tableau / qu'on fasse un recensement complet après on remettra la figure et on validera […] »

Emergence des parallélogrammes : extraits de transcription

<u>Séance de F2</u>

La séance a commencé par la phase de reproduction à main levée. F2 formule la consigne, puis la figure est projetée pendant 2 minutes d'observation silencieuse (possibilité de prendre des notes). Les étudiants-es font ensuite leur reproduction à main levée (2 min 30). Puis, F2 organise une recension de ce qu'ils ont vu (ou voient, puisque la figure reste projetée au tableau) : "on va faire le point là / on va faire la liste de ce que vous avez vu / alors, je vous écoute"

L'extrait qui suit est issu de la fin de cette phase, après que les étudiants ont déjà identifié de nombreux éléments, mais ni les parallélogrammes, ni les relations de parallélisme.

F2 : vous voyez qu'on en voit des choses sur cette figure / on a vu qu'on arrivait d'abord à décomposer cette figure en surface, en sous éléments de surface / deux triangles et puis un cercle / et puis après là depuis tout à l'heure on est en train de décortiquer les postions relatives des sommets de A B C par rapport à D E F et puis ce que sont ces droites là / ce que représente le point O pour A B C / ce que représente le point O pour D E F / est-ce que vous voyez d'autres choses ?

E : est-ce qu'on pourrait pas faire trois triangles à l'intérieur de D E F

F2 : alors je sais pas dis moi

E : en fait à l'intérieur du triangle D E F alors est-ce qu'on aurait pas trois triangles de même mesure que A B C

F2 : alors ça veut dire quoi de même mesure ?

E : ben que A C serait égal à D A

F2 : A C il est égal à D A / c'est vrai cette histoire-là ?

E : ben j'sais pas / c'est vrai que j'ai dit ça

F2 : pourquoi il serait égal à D A ?

E : y a pas du Thalès là ?

F2 : alors y a du Thalès pourquoi ? Thalès ça sert à démontrer des trucs

E : c'est un parallélogramme / y a A C qui est parallèle à D E

Séance de F3

La séance commence comme celle d'F2 : consigne puis projection de la figure et reproduction à main levée. Par contre, cette fois la figure reste cachée lors de la phase de verbalisation, tout du moins dans un premier temps. Cette phase est enclenchée par F3 de la manière suivante : "j'aimerais bien que vous me disiez ce que vous y avez trouvé / les éléments que vous avez vus dans cette figure et que vous avez tenté de reproduire / donnez des éléments qu'il y avait dans la figure". Comme pour l'extrait précédent, celui-ci provient de la fin de la phase : les étudiants ont déjà identifié de nombreux éléments ; la figure est de nouveau projetée depuis plusieurs minutes. F3 relance une nouvelle fois son groupe.

F3 : alors est-ce qu'on peut observer d'autres choses sur cette figure d'autres relations d'autres euh / d'autres égalités de ceci ou de cela

E : y a B C qui est parallèle à B E

F3 : ah y a des parallèles

E : on peut voir du coup des parallélogrammes

F3 : et on peut voir du coup des parallélogrammes

Séance de F1

Comme pour les deux précédents, l'extrait auquel on s'intéresse provient de la fin de la phase de verbalisation. La consigne avait été formulée de la manière suivante : « alors avant de valider vos productions et avant que je vous re-projette la figure de départ je vous propose qu'on fasse un petit échange et qu'on fasse une petite collecte […] ». La figure est maintenant projetée et tout ce qui avait été repéré par les étudiants a déjà été (in)validé. C'est notamment le cas du théorème de « Thalès ». La validation de ce repérage conduit F1 à un rappel autour du théorème des milieux : ce théorème permet « pour peu qu'on soit d'accord avec le fait que A soit le milieu de D E et que B est le milieu de D F » de « penser que la droite B A est parallèle à la droite F E ». Le passage qui suit vient après cette remarque :

F1 [liste les relations repérées pour validation] : donc Thalès oui /// vaguement / des milieux / oui / tout plein / droite des milieux c'est fait / perpendiculaire c'est vu / des parallèles / des égalités de longueur / en fait vous avez vu pas mal de choses qui étaient vraies / mais moi j'en vois d'autres

Es : points alignés

F1 : des points alignés oui oui c'est vrai / des objets plutôt ?

Es : des triangles / des triangles dans les triangles non ? / un losange / un parallélogramme

F1 : ah ça y est

ANNEXE 3

Les extraits qui suivent proviennent tous de la phase de recension des observations sur la figure. On peut néanmoins relever quelques variations dans les déroulements. Dans la séance de F2, la figure est projetée dès le début de la phase (la validation a lieu au fur et à mesure), alors qu'elle ne l'est qu'une fois les propositions des étudiants épuisées dans les séances de F1 et F3, à des fins de validation.

Séance de F1

Etudiant-e-s	Formateur
	bon alors dans les triangles vous avez vu des droites particulières / vous avez vu des bissectrices des médiatrices et des hauteurs // alors là j'aimerais bien que vous précisiez les choses /
[quelques bruits de fond dans la salle]	
	par exemple si vous me disiez j'ai vu une hauteur j'aimerais que vous me disiez quel triangle et quelles propriétés / sinon je pose la question qu'est-ce qu'une hauteur
[on parvient à attendre sommet côté opposé angle droit mais ce n'est pas très distinct]	
	une hauteur c'est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au sommet opposé / alors où est-ce que vous voyez des hauteurs ?
[Es] A O / A F / ben non	
[E1] ben non / ben non / elle va pas être perpendiculaire	
	mettez-vous d'accord
[E2] ben A O il est quand même perpendiculaire [E1] A F y va être euh	
	alors A O pour quel triangle ?
Ben A B C	
	alors dans le triangle A B C/
[E1] c'est pas la médiane de D E ? [médiatrice?]	
[E2] Ben non elle est perpendiculaire et elle passe par le sommet [E1] ben non il passe pas par le sommet [E2] ben il passe par A [E1] Ah ouais vous parlez de l'autre triangle	
	la droite A O serait une hauteur
[...Apparté de nature didactique (différentes géométries, logiciels, dessin/figure)...]	
	donc des hauteurs /// effectivement A O c'est une hauteur du triangle A B C / pendant qu'on y est le

	triangle A B C a combien de hauteurs alors ?
[inaudible]	
	trois A O / B O et C O / tout à l'heure vous me parliez de droites perpendiculaires / est-ce que vous voyez que quand j'évoque les hauteurs j'évoque les droites perpendiculaires / Quand je vous dis que A O est une hauteur je vous dis que la droite A O est perpendiculaire à... /// aidez-moi s'il vous plaît
B C	
	B C etc / avez-vous une remarque à faire sur ces trois hauteurs ?
[...La discussion se poursuit autour de l'orthocentre puis de l'absence de bissectrice...]	
	des médiatrices ? /// alors ?
[quelques échanges inaudibles puis on entend] : par ce que A il bouge / A il est pas fixe en fait / [de manière publique] : on croyait que A c'était le milieu en fait	
	alors est-ce que vous voyez des médiatrices sur ce dessin ? Et si vous avez un doute on changera après
sais pas si la droite A O est perpendiculaire à D E / [un autre étudiant] A O	
	la droite A O est plus ou moins perpendiculaire à D E c'est ça que tu penses ?
[…on passe la discussion autour du fait que A soit ou non effectivement le milieu de [DE]...]	
	alors je vais tricher parce que je voudrais pas qu'on passe l'heure à dialoguer sur un truc qui reste de l'observation et donc du subjectif / moi malgré mon grand âge j'ai l'impression que le point A est au milieu du segment D E
D E	
	et j'ai l'impression que la droite A O est perpendiculaire à la droite D E / Donc pour résumer ma pensée j'ai l'impression que la droite A O
Médiatrice	
	est une médiatrice du segment D E
est une médiatrice du segment D E	
[…F1 revient sur la thématique de la subjectivité de la perception...]	
	donc vous avez la droite A O qui est médiatrice du segment D E [F1 le note au tableau] / est-ce que vous voyez d'autres médiatrices ?
B O avec D F	

	donc B O avec D F c'est ça ?
Ouais	
	et C O avec euh... E F
ouais / c'est tout	
	alors est-ce que vous repérez le grand triangle, le triangle D E F et est-ce que vous voyez que vous venez de décrire les médiatrices des trois côtés de ce grand triangle

Séance de F3

Etudiant-e-s	Formateur
	alors on peut déjà préciser un petit peu / le cercle circonscrit au triangle D E F c'est bon / est-ce qu'il y a des médiatrices ?
c'est quoi ?	
	c'est peut-être l'occasion de le rappeler
du coup les médiatrices elles coupent le sommet opposé en son milieu perpendiculairement	
	elle coupe leur/
dans un triangle	
	dans un triangle
Voilà	
	voilà / une médiatrice
une médiatrice euh/// coupe un côté en son milieu perpendiculairement	
	oui voilà donc c'est une définition possible de la médiatrice [note au tableau la définition de l'étudiante de "droite coupant perpendiculairement un côté en son milieu"]
[... on en vient à la validation de "deux droites sécantes passant par le centre du cercle", élément avancé par les étudiants en début de séance et repris par F3 au tableau...]	
	alors deux droites sécantes passant par le centre du cercle... [met sa phrase en suspens]
trois droites	
	y en avait trois / qui sont les / qui seraient les / les médiatrices en question
[… sous l'impulsion de F3, le groupe vérifie ensuite que O est bien le centre du cercle circonscrit, passe à l'orthocentre ; F3 remet ça à plus tard, puis le groupe cherche à vérifier la présence de hauteurs...]	
	il y a des hauteurs [F3 lit la formulation du tableau] /

	où est-ce qu'on trouverait des hauteurs
triangle A B C	
	dans le triangle ABC / alors qu'est-ce que c'est qu'une hauteur dans un triangle ? [une étudiante donne une définition, que F3 reprend]

<u>Séance de F2</u>

Étudiant-e-s	Formatrice
je suis partie de A B C et j'ai construit les trois hauteurs	
	alors toi tu me parles d'un triangle donc effectivement y avait un triangle A B C [F2 le note au tableau "triangle ABC"] / et alors tu nous dis les hauteurs / qu'est-ce que c'était les hauteurs ici / t'as vu des hauteurs toi / elles sont où les hauteurs
ben la droite qui part de B	
	alors la droite qui part de B ça veut dire quoi / y en a plein des droites qui partent de B / y a celle-ci, y a celle-là / puis y a celle-ci, y a celle-là
[pointe quelque chose du doigt sur la figure projetée au tableau depuis sa place mais semble embarrassée pour verbaliser] celle-là	
	alors comment on peut faire pour la nommer ?
B O	
	oui alors toi tu me parles de la droite O B / une hauteur c'est une droite ?
ben qui est perpendiculaire [inaudible]	
	alors c'est quoi une hauteur dans un triangle [F2 commence à écrire au tableau "Hauteur..."]
c'est une droite qui passe / qui est perpendiculaire au côté	
	c'est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé / on parle de hauteur dans un triangle hein parce que à chaque fois effectivement / une hauteur dans un triangle / [F2 donne une définition, tout en réalisant un petit schéma, puis s'apprête à écrire dans la liste des objets identifiés] / donc une hauteur c'est un droite donc comment je la note ?
parenthèses	
	avec des parenthèses [F2 complète "Hauteur <u>(OB)</u>"]
[…F2 introduit la notion d'orthocentre en rapport avec ABC ; Elle vient de noter triangle EDF au tableau...]	

	on en était au triangle EDF / qu'est-ce que vous avez vu d'autre ?
il est équilatéral déjà	
	il est équilatéral ? Moi je suis sûre qu'il est pas équilatéral / on le verra peut-être / vous savez pourquoi je suis sûre qu'il n'est pas équilatéral ?
parce qu'il est inscrit dans un cercle et que O c'est l'orthocentre /	
	mouais [dubitative]
du cercle	
[une autre étudiante] ouais puis les hauteurs elles passeraient par [inaudible]	
	ben ça l'empêcherait pas forcément d'être équilatéral ce truc-là / en fait /
les hauteurs elles passeraient par les milieux des côtés s'il était équilatéral	
	alors ouais / les hauteurs elles passeraient par O F et G / c'est vrai ça / enfin E F et / et pourquoi ?
parce que dans un triangle équilatéral les médiatrices et les hauteurs elles sont confondues	
	mais attention parce que là ce sont les hauteurs de A B C
ouais c'est pour ça	
	bon alors on laisse tomber / on y reviendra après
ouais mais comme c'est le milieu c'est une médiatrice non ?	
	ah ouais c'est ça qui m'intéresse / Ces droites là O B / O A et O C qu'est-ce que c'est pour le triangle EDF ?
les médiatrices	
	les médiatrices / alors c'est quoi une médiatrice ?
c'est une droite qui est perpendiculaire euh	
	c'est une droite qui est perpendiculaire à quoi
à un côté	
	à un segment
et qui passe par son milieu	
	et qui passe par son milieu / du coup on parle de médiatrice de quoi / est-ce qu'on a forcément besoin d'un segment / on a pas forcément besoin d'un triangle pour que ce soit des médiatrices [F2 fait un dessin et rappelle une définition pour la

	médiatrice d'un segment] donc du coup comment est-ce qu'on pourrait formuler ça / est-ce que vous voyez des médiatrices et comment est-ce qu'on peut le dire ? /// alors une médiatrice ?
I médiatrice de F E [à peine audible]	
	I ? j'ai pas entendu
I médiatrice de F E / du segment F E	
	où est-ce que tu vois I toi ?
[d'autres étudiant-e-s] c'est un C / c'est un C	
	où est-ce que tu vois ? c'est ça [pointe la lettre C, sur laquelle passe un trait qui le fait "ressembler » à un I] ?
hum	
	c'est un C / alors C est la médiatrice de F E [F2 prend un air dubitatif] / C c'est quoi ? C c'est un point
O C / O C	
	bon alors c'est O C / O C la médiatrice c'est une droite donc on peut dire que O C est médiatrice de [elle note en même temps (OC) est médiatrice de...] E F / je note comment E F ?
crochets	
	oui / si je note sans rien ça veut dire quoi ? [note EF]] /// vous vous souvenez ?
longueur	
	une longueur hein c'est une longueur [F2 complète l'écrit en [EF]].

ANNEXE 4

Les extraits qui suivent proviennent tous de la même phase de recension des observations sur la figure. Au cours de cette phase, divers modes de validations coexistent : perception, logiciel (instrument) mais aussi démonstration (en l'absence de définition de la figure). On se concentre ici sur les relations entre validation perceptive et démonstration, avec en arrière-plan l'idée de déconstruction dimensionnelle. Pour F3 et F1, les validations en question viennent au moment où la figure est à nouveau projetée au tableau, et les éléments repérés sont validés un par un. Pour F2, la validation se fait au fur et à mesure (la figure reste projetée).

Séance de F2

Etudiant-e-s	Formateur/trice
	qu'est-ce qu'on peut dire sur les points D E et F ?
des points du cercle circonscrit un truc comme ça non ?	
	oui centre du cercle circonscrit / alors pourquoi est-ce que ça s'appelle centre du cercle circonscrit
parce qu'il passe par les trois points	
	O est le centre du cercle circonscrit [note ce qu'elle dit au tableau en même temps] / c'est quoi le cercle circonscrit au triangle ?
[inaudible]	
	et oui c'est le cercle qui passe par les trois points du centre / par les trois sommets pardon / par les trois sommets du triangle / ouais ? / ben oui c'est quoi le cercle circonscrit à E D F ben c'est le cercle qui est tracé / bon qu'est-ce que ça veut dire sur le point O par rapport au point D et E par exemple ? ///
y a égales distances	
	y a égales distances d'accord / effectivement il est à égales distances / alors pourquoi tu me dis ça ?
c'est une propriété de la médiatrice	
	ah d'accord / ben d'abord parce que O est le centre du cercle qui passe par D E et F / c'est quoi un cercle ?
[inaudible] ensemble des points [inaudible]	
	oui c'est l'ensemble des points qui est à une distance donnée du centre O là / qui est ici / ça veut dire que forcément O D et O E sont deux rayons du cercle donc je sais que ces deux segments ils ont même longueur.
[... discussion autour du statut – segment ou longueur – du rayon ...]	
	ok hum / et oui on avait dit un autre truc toi tu m'as dis moi je sais que O E c'est égal à OD parce que c'est

	une propriété de la médiatrice / c'est quoi cette histoire / vous savez me l'expliquer ? / de quoi elle parle ? /// non ?

Séance de F3

[…le passage qui suit fait suite à l'identification par les étudiant-e-s des parallélogrammes...]	
on peut dire aussi que B A est égale à la moitié de E F / que A C est égale à la moitié de D F	
	alors B A est égale à la moitié de E F / donc ceci est égal à la moitié de E F / oui d'accord [F3 note l'égalité au tableau]
E1 : monsieur pourquoi B A est égale à la moitié de E F ?	
	ah pourquoi B A est égale à la moitié de E F ?
E2 : t'as des parallélogrammes donc t'as B A qui est égale à C E / t'as aussi l'autre parallélogramme donc t'as B A qui est aussi égale à F C donc du coup t'as B A qui est égale à la moitié / E1 : ah c'est parce que c'est un demi d'accord E2 : tu vois les parallélogrammes ? E1 : oui mais comment tu sais que B A est égale à C E ? E2 : ben c'est un parallélogramme, c'est les propriétés d'un parallélogramme/	
	voilà on va
E1 : ah oui [inaudible]	
	si on veut on peut éventuellement / enfin sortir de l'affichage des éléments perturbants qui permettront de mieux voir les choses /
c'est tout de suite plus visible comme ça	
	ah / voilà on a nos parallélogrammes ici et effectivement ceci égale ceci parce que ceci est un parallélogramme / et d'autre part celui-ci est égal à cela parce que c'est un parallélogramme donc euh celui-ci celui-ci celui-ci sont égaux donc A B est bien la moitié de E F ///
[... F3 affirme ensuite que ce que l'on vient de faire est une preuve d'un cas particulier de Thalès...]	
	en fait je triche un peu en disant qu'on l'a démontré parce qu'on est en train de se baser sur des choses qu'on observe sur la figure et d'autres choses qui sont de l'ordre du raisonnement / hein ici par exemple / bon y a pas mal de choses qu'on a perçues de manière visuelle / qu'on avait des angles de 90 degrés qu'on avait des parallèles *etc.* / et puis là ce qu'on vient de faire c'est un raisonnement / on ne s'est pas basé que quelque chose qu'on a observé mais on a vraiment raisonner pour dire que ceci c'était la moitié de ce triangle-là / donc ben on

	est passé à la géométrie du collège là mine de rien / sans en avoir l'air

Séance de F1

	tout à l'heure quelqu'un m'avait dit que le triangle était inscrit
hum hum	
	c'est toi hein ? / est-ce que vous voyez que le langage était un peu personnel mais que l'idée y est ? hein on est d'accord / en somme effectivement les trois points D E F sont inscrits sur le cercle ça va / et pourquoi ? Pourquoi le point O est-il le centre de ce cercle ?
tous les points sont à la même distance de / tous les points qui appartiennent au cercle sont à la même distance de O	
	là tu me donnes la définition d'un cercle donc je ne peux pas te dire non / je te rappelle que ce que l'on appelle un cercle circonscrit c'est le cercle qui passe par les trois sommets du triangle
c'est les trois points qui appartiennent au cercle de centre O	
	alors comment traduire ça par une relation ?
O E égal O F égal O D	
	donc dans les relations je vous propose des égalités de longueurs
ouais O D égal O E égal OF	
	[tout en notant au tableau] donc O D égal O E égal O F / Est-ce que tout le monde identifie que ces trois / enfin ces deux égalités pardon traduisent le fait que les points D E et F sont sur un cercle de centre O / ils sont tous les trois à la même distance / ça va ?
hum hum	
	donc là en fait j'ai pas répondu à la question que je vous ai posée / elle était pas très honnête en fait ma question / je vous demandais pourquoi / là on a trouvé un moyen de traduire autrement l'idée / mais comme je suis un homme terriblement têtu d'après vous pourquoi c'est vrai ça ? /// alors je vous donne un joker : pour vous c'est quoi une médiatrice ?
[… F1 fait ensuite la preuve attendue...]	
	ça s'appelle comment ce que je viens de vous faire là ?
Démonstration	
	une démonstration / pour justifier les propriétés qu'on observe / ça va donc là j'ai triché par rapport à ce que je

	disais en début de séance mais voyez que je suis aussi capable de faire des démonstrations / l'enjeu est assez modeste / ici je l'ai fait parce que y avait un vrai débat un vrai doute sur ce que l'on percevait / ça va ? On en reparlera dans 15 jours [...]

PENSER UNE PROGRESSION EN GÉOMÉTRIE EN FORMATION DES ENSEIGNANTS

Alain KUZNIAK
Professeur, Université Paris Diderot
Laboratoire de Didactique André Revuz
alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr

Assia NECHACHE
Doctorante, Université Paris Diderot
Laboratoire de Didactique André Revuz
Assia.nechache@hotmail.fr

Résumé
Lors des formations continues des enseignants du premier degré, la question du travail géométrique global à mener dans les classes est souvent posée. En effet, certains enseignants ne perçoivent pas la finalité et l'organisation générale des différentes ressources qui leur sont proposées. Dans cet atelier, nous avons souhaité initier une réflexion sur les éléments qui pourraient être donnés en formation aux enseignants pour les aider à voir une cohérence globale dans l'enseignement de la géométrie.
Nous avons choisi de lancer cette réflexion à partir de l'analyse d'une séquence d'enseignement de la géométrie proposée à des élèves de CM1 – CM2.
Cette analyse s'appuie principalement sur le modèle des Espaces de Travail Géométrique (Kuzniak, 2006) utilisé comme outil pour construire et structurer un enseignement cohérent de la géométrie.

Après avoir rappelé les objectifs de l'atelier, nous présentons tout d'abord le modèle des Espaces de Travail Géométrique (ETG) et la notion de paradigmes géométriques (Kuzniak, 2006). Par la suite, nous rendons compte de l'analyse faite avec les participants d'une séquence d'enseignement en géométrie. Cette analyse s'appuie principalement sur le modèle des ETG et nous permet de mettre en évidence certains points essentiels pour penser l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire.

I - INTODUCTION ET OBJECTIFS

1 Les constats

Enseignante dans une ESPE, l'une des auteurs (Assia Nechache) a animé plusieurs formations continues pour les enseignants du premier degré, notamment en géométrie. Diverses ressources ont été utilisées pour construire ces formations, comme : l'ouvrage Concertum de la Copirelem, les revues Grand N, des brochures d'IREM, etc. Cette année, il lui a fallu concevoir une formation de six jours consacrée à la géométrie, destinée à des enseignants du cycle 2 et 3. Diverses situations ont été proposées aux enseignants comme la reproduction et la restauration de figures simples et ou complexes. Les enseignants stagiaires ont manifesté un réel intérêt pour ces situations qu'ils découvraient pour la première fois. Par la suite, une discussion autour de la mise en place de ces situations en classe a été initiée. Cette discussion a débouché sur la question plus globale de la manière de concevoir une progression pour enseigner la géométrie à l'école élémentaire.

De fait, si les travaux didactiques concernant des situations géométriques à mettre en place en classe sont relativement nombreux et aisément accessibles dans les diverses ressources que nous avons signalées, il y a en a très peu qui concernent directement la construction d'une progression en géométrie pour l'école.

Comment dans ces conditions, le formateur d'enseignants peut-il aider les enseignants à intégrer dans une progression les situations intéressantes à la fois du point de vue mathématique et du point de vue didactique qu'il a pu proposer aux enseignants. Comment peut-il les aider à structurer cette progression en assurant sa cohérence ?

Dans le cadre de nos travaux de recherche en géométrie, nous utilisons le modèle des Espaces de Travail Géométrique (ETG) pour structurer les manières de penser l'enseignement de la géométrie au collège et au Lycée. Nous nous sommes demandés si ce modèle pouvait être un outil pour aider à penser des éléments d'une progression en géométrie dans le cadre de la formation des enseignants du premier degré ?

2 Objectifs et travail de l'atelier

Le but de cet atelier a donc été de fournir, en peu de temps, aux formateurs d'enseignants des éléments pour avancer sur les questions précédentes relatives à la géométrie et à son enseignement. Pour cela, l'atelier était divisé en deux temps principaux :

- introduire en premier lieu le modèle des Espaces de Travail Géométrique et la notion de paradigmes géométriques ;
- dans un second temps, en s'appuyant sur l'analyse d'une séquence de géométrie, mener une réflexion autour de la manière de penser une progression dans l'enseignement de la géométrie.

II - ESPACES DE TRAVAIL ET PARADIGMES GÉOMÉTRIQUES

Les paradigmes géométriques et les usages possibles de cette notion en formation des enseignants ont déjà fait l'objet de plusieurs présentations à l'occasion des colloques de la Copirelem. Pour une présentation complète, nous renvoyons plus particulièrement aux articles de Kuzniak et Rauscher (2003, 2004). Quant au modèle des Espaces de Travail Géométrique (ETG), son usage en formation des enseignants est notamment illustré dans l'article de Gomez-Chacon et Kuzniak (2011). Il s'inscrit désormais dans le cadre plus large des Espaces de Travail Mathématique (ETM) qui a fait l'objet d'une communication (Kuzniak) dans ce même colloque de la Copirelem.

1 Les Espaces de Travail Géométrique

Le modèle des Espaces de Travail Géométrique (ETG) se propose de décrire les formes du travail géométrique effectué par les élèves dans le cadre scolaire. Comme son nom l'indique, il place le travail géométrique au centre de la réflexion sur l'enseignement et l'apprentissage. Dans ce contexte, les institutions scolaires et les professeurs ont pour finalité première de développer un environnement qui doit permettre aux élèves de résoudre de manière adaptée des problèmes mathématiques, dans notre cas géométriques.

Pour décrire cette activité finalisée des élèves, les ETG sont organisés en deux niveaux. Le niveau dit épistémologique (Fig.1 plan épistémologique) définit les attentes *a priori* sur cette activité par rapport aux exigences de la discipline même. Pour l'étudier, nous avons identifié trois composantes caractéristiques de l'activité géométrique dans sa dimension purement mathématique :

- Un espace réel et local comme support matériel avec un ensemble d'objets concrets et tangibles qui dans le cas de la géométrie seront des figures ou des dessins ;
- Un ensemble d'artefacts tels que des instruments de dessin ou des logiciels ;
- Un système théorique de référence basé sur des définitions et des propriétés.

La géométrie enseignée n'est pas un corpus désincarné de propriétés et d'objets réduits à des signifiants manipulables par des systèmes formels, elle est d'abord et principalement une activité humaine. Ainsi, il est essentiel de comprendre comment des communautés d'individus mais aussi des individus particuliers utilisent et s'approprient les connaissances géométriques dans leur pratique de la discipline. Cela nous a conduits à introduire un niveau dit cognitif (Fig1. Plan cognitif) qui rend compte du travail mené par l'élève pendant l'activité de résolution d'un problème. Nous avons retenu trois processus cognitifs en interaction :

- un processus de visualisation en relation avec la représentation de l'espace et le support matériel ;
- un processus de construction déterminé par les instruments utilisés (règles, compas, etc.) et les configurations géométriques ;
- un processus discursif qui produit des argumentations et des preuves.

Cet ensemble de relation peut être visualisé grâce au diagramme suivant qui fait de plus apparaître les relations entre les deux niveaux avec différentes dimensions ou genèses : sémiotique, discursive, instrumentale.

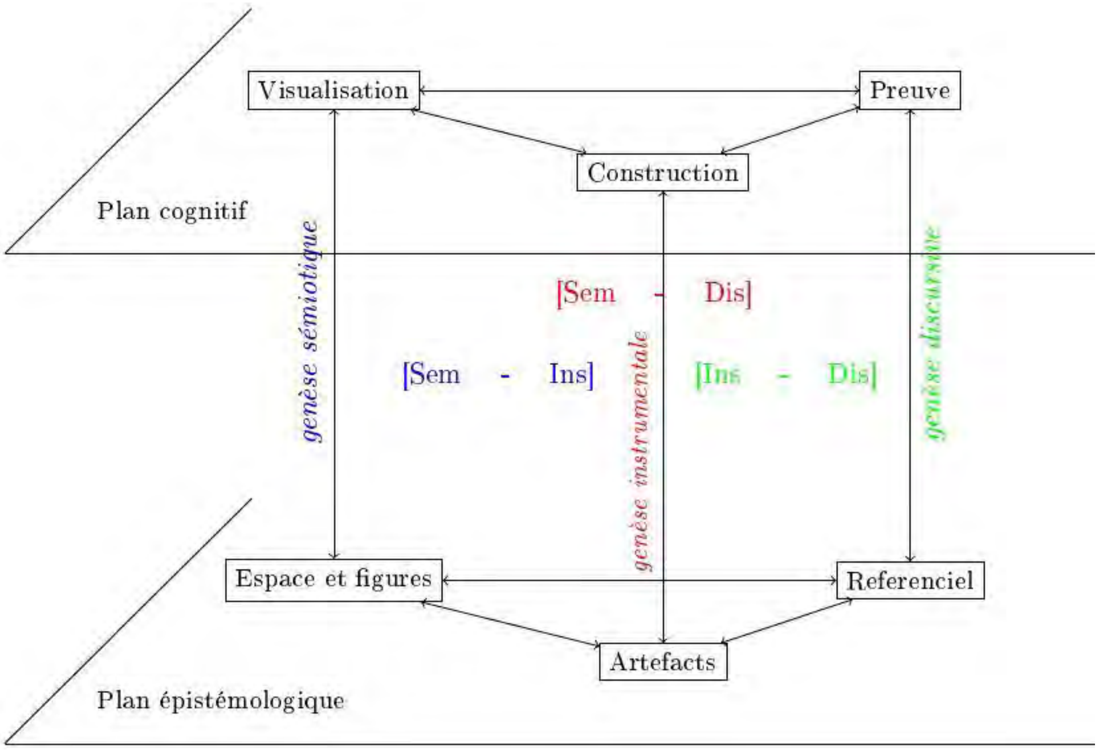


Figure 1. Diagramme général des Espaces de Travail Géométrique

2 Les différentes entrées dans le travail géométrique

Le diagramme précédent fait apparaître trois dimensions particulières du travail géométrique qui nécessiteront trois genèses particulières.

1. Une genèse *sémiotique* qui donne du sens aux dessins et plus généralement aux objets tangibles de l'ETG. Cette genèse sera en grande partie basée sur les registres de représentation sémiotique qui confèrent à ces objets leur statut d'objets mathématiques opératoires ;
2. Une genèse *instrumentale* qui permet de rendre opératoire les artefacts et les instruments de dessins dans le travail autour des constructions particulièrement crucial dans le cas de la géométrie ;
3. Une genèse *discursive* de la preuve qui utilise les propriétés réunies dans le référentiel théorique pour les mettre au service du raisonnement mathématique et d'une validation non exclusivement iconique, graphique ou instrumentée.

Les entrées dans le travail géométrique peuvent donc se faire à travers l'une des trois dimensions associée à chacune des genèses (sémiotique, instrumentale et discursive), ou à travers l'articulation de deux d'entre elles : sémiotique et instrumentale, sémiotique et discursive, ou discursive et instrumentale. Ces différentes articulations définissent ainsi trois plans verticaux que l'on note respectivement :

[**Sem-Ins**], [**Sem-Dis**] et [**Ins-Dis**].

L'observation des modalités d'entrée dans le travail géométrique sera particulièrement importante pour décrire et organiser dans sa globalité la géométrie enseignée. Il s'agira de savoir quelle(s) dimension(s) particulière(s) sera privilégiée pour initier le travail, et si possible d'analyser la manière dont les trois dimensions interagissent afin de constituer un travail géométrique complet. Notons, que cette approche rappelle les points de vue précisés dans les programmes autour du perceptif, de l'instrumenté et du déductif.

Le diagramme de la figure 1 fait apparaître un certain nombre de plans qui correspondent aux connexions entre ces entrées, et qui nous permettrons dans la suite de préciser la circulation du travail géométrique dans l'ETG, autrement dit, la manière dont le travail géométrique s'effectue. Ces trois plans peuvent être identifiés par les genèses qu'ils mettent en œuvre [Sem-Ins] (en bleu), [Ins-Dis] (en rouge) et [Sem-Dis] (en vert). Un des objectifs de la mise en situation lors de l'atelier était précisément de comprendre la nature et le fonctionnement de ces différents plans à l'occasion de la résolution d'une suite de problèmes géométriques.

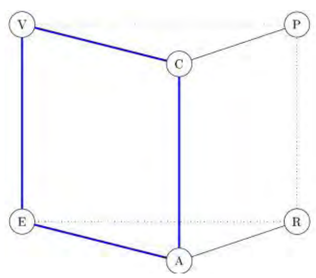


Figure 2. [Sem-Ins]

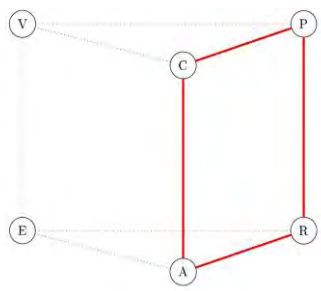


Figure 3. [Ins-Dis]

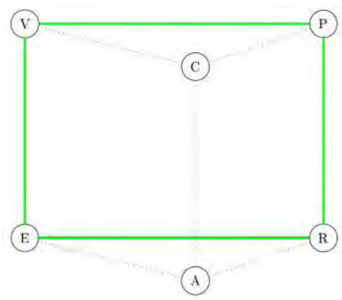


Figure 4. [Sem-Dis]

3 Les paradigmes géométriques

Il nous reste à préciser le rôle des paradigmes géométrique dans ce modèle. Sous le terme de géométrie se cache une grande diversité de conceptions et d'idées différentes qui renvoient à ce que Kuhn (1966) appelle des paradigmes. Selon lui, un paradigme désigne l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Cette notion permet ainsi de regrouper les théories et plus généralement les connaissances d'un groupe qui travaille sur le même sujet. En se situant dans le même paradigme, les personnes peuvent ainsi se comprendre car elles utilisent un vocabulaire et des concepts communs qui leur permettent d'envisager et de traiter un problème de la même manière. A contrario, lorsque les individus ne se réfèrent pas au même paradigme géométrique, des malentendus vont apparaître, souvent source d'une réelle incompréhension.

Dans le cadre de l'enseignement, il est possible d'identifier trois paradigmes géométriques (Houdement et Kuzniak, 2006) dont seuls les deux premiers nous concernent au niveau de la scolarité obligatoire. Le premier définit une géométrie qui s'intéresse au monde de la pratique, au monde des dessins, des objets réels, il s'agit de ce qu'on peut appeler la géométrie naturelle (ou Géométrie I). Cette géométrie a pour source de validation la réalité et le monde sensible. D'une certaine façon, tous les types d'arguments sont permis pour justifier une affirmation et convaincre un interlocuteur. Le deuxième paradigme renvoie à une géométrie axée sur la démonstration, très attentive aux propriétés, aux théorèmes, aux relations entre les définitions des objets. Il s'agit de la géométrie axiomatique naturelle (ou Géométrie II). La Géométrie II est bâtie sur une schématisation de la réalité mais une fois les axiomes fixés, les démonstrations doivent se situer à l'intérieur du système des axiomes pour être certaines. Enfin, pour être complet, il faut évoquer la Géométrie axiomatique formaliste (Géométrie III), qui privilégie essentiellement les relations entre les axiomes définissant les objets sans se préoccuper de leur relation avec la réalité.

Actuellement, dans la scolarité obligatoire, seules, les deux premières géométries sont prises en compte dans l'enseignement de la géométrie. Il est important de comprendre qu'elles ne sont pas hiérarchisées. L'une n'est pas meilleure que l'autre, elles n'ont tout simplement pas les mêmes fonctions et la même finalité : pratique et technologique dans le cas de la Géométrie I, axiomatique et logique dans celui de la Géométrie II.

L'école élémentaire a pour but de mettre en place les bases de la première géométrie sans perdre de vue que la seconde sera privilégiée dans l'enseignement secondaire. Les paradigmes serviront donc de boussole permettant d'identifier la nature épistémologique du travail réellement effectué dans le cadre de l'enseignement. Ils permettront ainsi de caractériser de manière générale les ETG mis en place, mais également la circulation du travail géométrique en fonction des différentes entrées.

III - MISE EN SITUATION

1 La séquence étudiée dans l'atelier

Il s'agit d'analyser une séquence d'enseignement en géométrie en utilisant les ETG et la notion de paradigmes géométriques. Cette analyse vise à permettre de caractériser l'ETG mis en place par les auteurs dans leur ouvrage.

Présentation de la séquence et analyse de la séquence du point de vue des ETG

Nous avons proposé d'analyser la séquence « Le cercle sans tourner en rond » (Fénichel & Taveau, 2009) destinée à des élèves de CM1-CM2. Elle est composée de huit séances. L'objectif de cette séquence est d'introduire le cercle comme un ensemble de points équidistants d'un point donné ; d'utiliser cette propriété pour résoudre des problèmes de distance ; et enfin d'utiliser le compas comme report de distance pour construire des figures géométriques particulières (triangle, losange, hexagone régulier, etc.).

Pour nous, l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire doit se situer dans le paradigme de la Géométrie I dont il s'agit de mettre en place les bases. Cette mise en place de la Géométrie I fait appel à la coordination de la vue, de l'action et de la réflexion sur des objets visibles et constructibles. Ceci renvoie alors aux trois composantes cognitives de l'ETG, à savoir : la visualisation, la construction et le raisonnement discursif. De ce point de vue, les objectifs de la séquence choisie pour l'étude sont *a priori* particulièrement en phases avec cette conception d'un travail géométrique complet au niveau de l'enseignement primaire puisqu'il s'agit de jouer sur la reconnaissance visuelle et sur l'usage des artefacts pour dégager la notion de cercle comme outil notionnel susceptible dans un deuxième temps de contribuer à la résolution de problèmes géométriques liés à la distance. D'autre part, il sera également intéressant de voir la manière dont le travail de la Géométrie I se met en place en relation avec les différents types d'activités, centrés sur le travail de la description, de la construction et de la reconnaissance des objets géométriques.

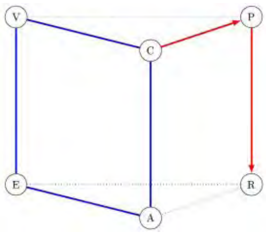
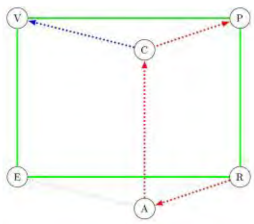
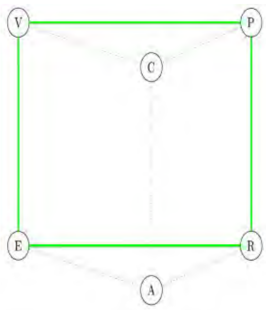
Sur le temps de l'atelier, nous avons fait le choix d'analyser plus finement les séances 1, 2, 3, 4 et 7 (Voir l'annexe). Pour chacune des cinq situations retenues nous avons proposé aux participants de les analyser en utilisant le modèle des ETG. En particulier il leur était demandé d'identifier, si possible, les différentes entrées (sémiotique, instrumentale, discursive) avec les plans privilégiés plan [Sem-Ins], plan [Sem-Dis] et plan [Ins-Dis]. Cette identification visait à mettre en évidence la dynamique du travail géométrique dans les différentes séances étudiées, et permettre de caractériser l'ensemble de l'ETG mis en œuvre.

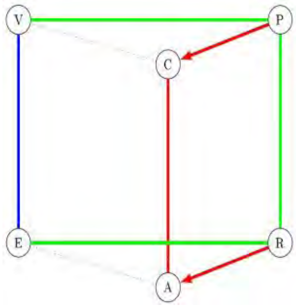
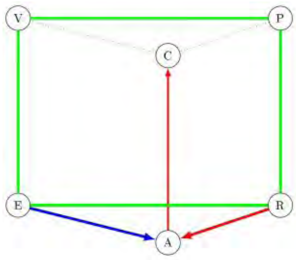
2 Déroulement et mise en commun

Les participants sont invités à se mettre par groupe de 3 ou 4. Il leur est demandé de prendre connaissance de chacune des séances et de faire une analyse *a priori* du travail géométrique attendu par le professeur. Cette analyse est centrée sur l'identification des différentes entrées dans le travail géométrique de chacune des séances que nous avons rappelées plus haut.

Une première mise en commun a permis d'identifier les différentes entrées dans le travail mathématiques de chacune des séances. Nous résumons ces entrées en lien avec le diagramme de l'ETG dans le tableau ci-dessous.

Afin de faciliter la lecture des diagrammes du tableau ci-dessous, nous avons utilisé les lettres V, C, P, A, R, S qui correspondent respectivement aux différentes composantes de l'ETG : Visualisation, Construction, Preuve, Artefact, Référentiel, Espaces et figures.

Séances	Entrée dans le travail géométrique	Diagrammes
Séance 1 *Objectif* : Introduire le cercle comme ensemble de points équidistants d'un point donné	Le travail géométrique commence dans le plan [Sem-Ins] et il se conclut par l'énoncé de la caractérisation du cercle comme ensemble de points équidistants d'un point donné. Cette propriété vient enrichir le référentiel de l'ETG. Ce dernier est constitué des propriétés et définitions des différentes figures utilisées à ce niveau de la scolarité. Il faut noter que la plupart du temps, les figures sont définies par ostension, ce n'est pas le cas ici et la séance proposée est clairement en rupture avec les séances traditionnelles	 [Sem-Ins] → Dis
Séance 2 *Objectif* : Résoudre un problème géométrique en utilisant la propriété énoncée dans la séance 1	Il s'agit d'utiliser la nouvelle propriété du référentiel pour résoudre un problème. L'entrée dans le travail est dans un premier temps plutôt *sémiotique* mais elle nécessite l'usage du *discursif* pour la validation. L'utilisation des instruments de dessin dépend fortement du traitement fait à partir de la propriété énoncée précédemment dans la définition du cercle. Ils sont souvent proposés comme outils, facultatif, de vérification une fois la tâche résolue dans le plan [Sem-Dis].	 [Sem-Dis] (→ Ins)
Séance 3 *Objectif* : Donner du sens à la propriété énoncée dans la séance 1 en la faisant fonctionner sur des dessins à main levée	Le travail géométrique se situe cette fois dans le plan [Sem-Dis] mais avec une entrée nettement *discursive* puisque le travail s'effectue sur des dessins à main levée qui apparaissent comme des signes symboliques. Les instruments de dessin ont été quasiment évacués et la seule façon d'évoluer pour répondre à la consigne est de mobiliser le niveau discursif. L'idée est de montrer que le « cercle » n'est plus seulement un objet lié visuellement et instrumentalement à un dessin mais qu'il est aussi lié à une propriété. Le discours de la preuve est un discours argumentatif correspondant au niveau de classe, et il est dirigé par le paradigme GI mais prépare l'entrée dans la GII qui sera l'enjeu du collège. Comme précédemment, les auteurs se réservent la possibilité d'un retour à une validation expérimentale si	 [Sem-Dis]

	elle apparaît nécessaire pour certains élèves. Dans ce cas, on obtient un diagramme semblable à celui de la séance 2.	
Séance 4 *Objectif* : Faire découvrir l'usage du cercle et l'usage du disque pour résoudre des problèmes d'équidistance	Il s'agit cette fois d'un travail de modélisation d'une situation nécessitant une construction. Une fois l'énoncé interprété dans le plan [Sem-Dis], le travail géométrique se situe principalement dans le plan [Dis-Ins] avec une utilisation du référentiel : la propriété caractéristique du cercle comme un outil théorique permettant de construire la solution. Les données sont fournies dans le registre sémiotique. La propriété du cercle va permettre de contrôler la validité de la solution.	 [Sem-Dis]→[Dis-Ins]
Séance 7 *Objectif* : Construire des triangles en utilisant la propriété énoncée dans la séance 1, et présenter le compas comme un outil de report de distance	Cette fois, l'accent est mis sur un nouveau rôle du compas. Considéré initialement comme un outil pour tracer des cercles, le compas doit devenir aussi un instrument pour reporter des longueurs et pour construire d'autres figures géométriques, comme les triangles. Le travail propose un enrichissement de l'artefact en relation avec le référentiel et la figure objet cercle. Le travail commence dans le plan [Sem-Dis] pour nourrir la dimension instrumentale à partir d'un travail initial dans le plan épistémologique.	 [Sem-Dis] → Ins

Les participants ont affirmé que le modèle des ETG pouvait être un outil intéressant, car il permet à la fois de donner une vision globale du travail géométrique, et de prendre conscience de l'existence des différentes entrées dans le travail géométrique. De plus ils soulignent la nécessite d'articuler les différentes dimensions (sémiotique, instrumentale et discursive) donnant lieu à divers parcours décrivant la circulation du travail géométrique. Ces divers parcours prennent en compte le niveau de difficultés et de connaissances des élèves. Ce qui permet d'affirmer que l'ETG reste un outil assez flexible.

D'un point de vue méthodologique, il était intéressant de vérifier si les participants parvenaient aux mêmes résultats que ceux obtenus par les deux auteurs lors de leur analyse a priori des situations. Cette correspondance entre les diverses analyses que nous avons pu vérifier dans l'atelier, est un élément qui renforce la validité du cadre d'analyse.

3 Un essai de caractérisation de l'ETG de la séquence étudiée

Dans la séquence analysée du point de vue des intentions du professeur, le travail géométrique est centré sur le développement de la notion de cercle (simultanément avec l'usage du compas) comme l'ensemble des points équidistants d'un point donné, qui est son centre. L'ETG peut être caractérisé comme lié au travail sur le champ conceptuel « cercle » associé au triplet (cercle, compas, équidistance). Le travail des concepteurs de cette séquence s'appuie, dans un premier temps, sur des outils matériels pour faire émerger une propriété et un outil théorique. Puis, ces outils matériels sont progressivement mis en arrière-plan pour favoriser un raisonnement discursif utilisant la notion de cercle associé à l'équidistance.

Pour résumer, nous proposons, ci-dessous, cette caractérisation de l'ETG autour de l'objet « cercle » associé à l'utilisation de l'outil compas et à la propriété caractéristique du cercle.

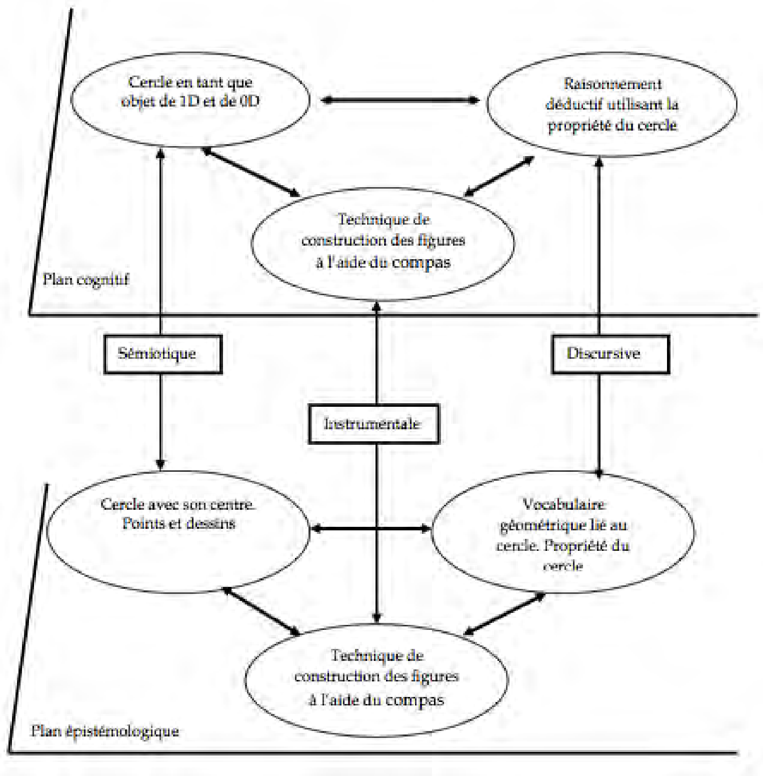


Figure 5. ETG de la séquence « Le cercle sans tourner en rond »

4 Quelle articulation des différentes entrées de l'ETG avec le programme de l'école élémentaire ?

Dans les programmes, le travail géométrique est traditionnellement structuré autour de l'étude des grandes entités : **objets géométriques** et des **relations entre ces objets** et il est articulé avec le travail sur **les grandeurs et mesures**. Par ailleurs, l'utilisation avec précision et soin des outils géométriques constitue l'un des objectifs du travail géométrique, ce qui nous amène à prendre en compte le travail de **l'approximation** dans celui de la géométrie. Nous considérons que ; l'approximation correspond à un ***ajustement des mesures*** liées aux instruments (***approximation instrumentale***), mais dans certains cas cet ajustement est contrôlé uniquement par la vue (***approximation visuelle***).

Au cours de cet atelier nous avons proposé aux participants de poursuivre la réflexion autour de l'articulation des différentes entrées de l'ETG (sémiotique, instrumentale, discursive), ainsi que des différents éléments concernant le travail géométrique décrit dans les programmes de CM1-CM2 (objets géométriques, relations entre les ces objets, les grandeurs et mesures et l'approximation). Pour ce faire nous avons repris l'analyse de la séquence faite précédemment autour de la notion du cercle, de l'outil compas et de la propriété d'équidistance des points situés sur le cercle.

Le tableau ci-dessous résume le travail autour de l'articulation des différentes entrées et les éléments du programme relative au triplet (cercle, compas, équidistance) :

Entrée dans le travail géométrique / Programmes	Sémiotique	Instrumentale	Discursive
Objet géométrique	Cercle comme objet de 0D et 1D	Double fonction du compas : tracer un cercle et reporter des longueurs	La caractérisation du cercle comme ensemble de points équidistants d'un point donné (le centre) et sa réciproque
Relations entre objets	Points appartenant à un cercle sont à égale distance de son centre	Règle et le compas dans leur dimension de report de longueur	Équidistance entre deux points
Liens avec les grandeurs	Comparaison de longueurs	Règle et le compas dans leur dimension de report de longueur	La distance entre deux points est la longueur du segment dont les extrémités sont définies par ces deux points. La notion en jeu est la longueur d'un segment
Approximation	Ajustement Approximation visuelle et instrumentale		Discours implicite à travers la précision d'un dessin.

Le tableau ci-dessus a permis de mettre en évidence un lien entre l'analyse du travail géométrique de la séquence analysée précédemment en termes d'entrée (sémiotique, instrumentale et discursive) et les diverses entités du programme de CM1-CM2. Nous supposons que cette analyse croisée du travail géométrique peut être conduite avec d'autres entités du programme.

Nous posons comme principe qu'un travail géométrique complet suppose l'organisation d'un triplet de type (objet géométrique, artefacts, propriétés) à travers les entrées sémiotiques, instrumentales et discursives. Par conséquent, il nous semble qu'une progression en géométrie doit passer par l'identification des grandes entités du programme, et ensuite par une analyse du travail lié à ces entités en termes d'entrées dans le travail géométrique. Dans une certaine mesure, le but de ce travail est de constituer un champ conceptuel autour de ces entités.

Quelques exemples de grandes entités :

1. (Droites, règle non graduée et équerre, orthogonalité) ;
2. (Points, règle non graduée, alignement) ;
3. (Quadrilatère, règle non graduée et équerre, parallélisme).

Le travail global sur le programme n'a pu être mené pendant le temps de l'atelier.

IV - CONCLUSION

Notre question initiale portait sur la manière de penser une progression en géométrie à l'école élémentaire. Le modèle théorique des ETG nous semble donner aux enseignants (ou, tout au moins dans un premier temps, aux formateurs d'enseignants) une ressource intéressante pour structurer une vision globale du travail géométrique. L'analyse des différentes entrées dans le travail géométrie articulées avec la mise en place de la dialectique entre les différentes genèses de l'ETG peut permettre de penser une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie.

Ainsi, l'analyse de cette séquence nous a permis d'identifier les différentes entrées privilégiées dans le travail mathématique et de constater que l'ETG idoine proposé par les auteurs est structuré autour d'un ensemble de tâches relatives au triplet (cercle, compas, équidistance). Cet ensemble de tâches mobilise les différentes genèses (sémiotique, instrumentale et discursive) et une réelle dynamique est planifiée entre ces différentes genèses.

Nous n'avons pas abordé la question de l'enseignement de la géométrie en maternelle. Ce choix est justifié par le fait qu'en maternelle, la géométrie étudiée est plutôt une pré géométrie liée au spatial. Le modèle des ETG concerne le travail d'une géométrie qui est reconnue comme domaine mathématique ce qui n'est pas le cas pour la pré-géométrie et une réflexion sur la maternelle doit s'intégrer plus largement dans une réflexion sur le travail mathématique voire le travail scolaire attendu à ce niveau.

Pour en revenir à la formation continue, il nous semble utile de fonder les progressions en géométrie sur l'identification des entrées dans la géométrie en insistant sur la nécessité de travailler et d'articuler les trois dimensions et genèses du travail géométrique (sémiotique, instrumentale et discursive) sur un ensemble de tâches. Ceci constitue alors le point de départ pour une pensée organisée du travail géométrique. Cela ne nécessite pas forcément d'entrer de manière théorique avec les stagiaires dans le détail des ETG. Mais notre réflexion sur la transposition didactique de ce modèle est loin d'être finie, puisque rappelons que cet atelier visait à initier cette réflexion. Les échanges fructueux autour de cette question nous ont permis de prendre conscience de la nécessite de continuer à approfondir ce type d'analyse à l'aide des ETG avec d'autres notions géométrique enseignées à l'école élémentaire. Mais également de penser sur le long terme l'analyse du travail géométrique en rapprochant les ETG de l'école élémentaire et du collège.

V - BIBLIOGRAPHIE

DUVAL, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N,* **76**, 7-27.

FENICHEL, M. & Taveau, C. (2009). Enseigner les mathématiques au cycle 3. Le cercle sans tourner en rond, DVD, *CRDP Créteil*.

GOMEZ-CHACON, I. & KUZNIAK, A. (2011). Les Espaces de Travail Géométriques de futurs professeurs en contexte de connaissances technologiques et professionnelles, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **16**, 187-216.

KUHN, T.S. (1966). *The structure of scientific revolutions, 2nd ed*. Chicago: University of Chicago Press.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2006). Les paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **11**, 175-193.

KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science and Mathematics Education,* vol **6.2**, 167-188.

KUZNIAK, A. (2011). L'Espace de Travail mathématique et ses genèses, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **16**, 19-24.

KUZNIAK, A. & RAUSCHER, J-C (2003). Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école, *Actes du Colloque de la COPIRELEM, mai 2002, La Roche sur Yon.*

KUZNIAK, A. & RAUSCHER, J-C (2004). Un exemple de sensibilisation des étudiants PE1 à la géométrie en tant qu'objet à enseigner. *Actes du Colloque de la COPIRELEM, mai 2003, Avignon*

VI - ANNEXE

Document 1. La séquence « Le cercle sans tourner en rond »

Séance 1.

Objectifs

Mettre en évidence que l'ensemble des points équidistants d'un point définit un cercle.
Faire faire le lien entre *ces points* et *ce cercle,* entre *la distance* et *le rayon du cercle.*

Tâche des élèves

Construire des points à égale distance d'un point donné. Construire des points à une distance supérieure ou inférieure à une distance donnée.

Matériel

- Bande de papier, feuille de papier calque, ficelle, équerre, compas. *Même matériel pour le maître.*
- Feuille blanche de format A3.
- Feutres de couleur.

Déroulement

Phase 1 (par binôme) *:* ***15 points à la même distance du point A***

Chaque binôme dispose de l'ensemble du matériel et d'une feuille format A3.
Il s'agit de faire construire, par une méthode personnelle, 15 points équidistants d'un point donné.

Consigne : « Placez un point sur votre feuille. Appelez-le **A** (repassez-le en couleur **rouge** par exemple). Positionnez-le plutôt au centre de votre feuille. Puis placez, d'une autre couleur (bleu par exemple), un second point (différent de **A**) sur votre feuille. Appelez-le **B**. »
Le maître place lui aussi en même temps, sur une feuille fixée au tableau, les points A et B.

« Maintenant placez **15 autres points** sur votre feuille de telle sorte que leur distance au point A soit la même que la distance du point B à A. Mettre tous ces points de la même couleur que B.
Vous pouvez utiliser tout le matériel dont vous disposez sur la table.
Vous devrez ensuite être capable d'expliquer comment vous avez fait et pourquoi.»

Remarque : les feutres en couleurs permettent de mieux voir les productions affichées pour la mise en commun.

Phase 2 (collective) : **mise en commun et analyse des productions d'élèves**

Le maître choisit quelques productions de groupes d'élèves qu'il expose au tableau en demandant, pour chaque cas, le matériel utilisé et l'allure des points « bleus » tracés sur la feuille.

- Faire valider la notion de cercle évoquée par les élèves, par la construction effective de celui-ci sur chaque production.
- Faire argumenter sur l'imprécision des tracés par le fait que des points ne sont pas sur le cercle alors qu'ils devraient l'être.
- Faire émerger la notion d'équidistance à un point comme les points situés sur un même cercle.
- Réactiver les termes de *centre* et *rayon* du cercle.

Phase 3 (par binôme) ***: réinvestissement***

Le maître veut évaluer l'appropriation de cette notion de façon immédiate. Les élèves disposent toujours de l'ensemble du matériel.
Consigne : « Maintenant je vous demande de mettre encore dix autres points **C** avec un stylo vert, à la même distance de **A** que la distance de B à A. Allez-y ! »
La procédure attendue est le tracé immédiat des dix points sur le cercle, qui vient d'être construit précédemment, sans avoir recours aux instruments de construction (ficelle, compas, bande de papier).

Phase 4 (collective puis par binôme) ***: mise en commun et notion de disque***

Analyse collective concernant le tracé de ces dix nouveaux points et reformulation du lien entre l'équidistance de points et les points du cercle.
Puis compléter la construction de la notion par la consigne suivante :
« Construire, d'une nouvelle couleur, **cinq points** tels que leur distance au point A soit plus **grande** que la longueur de A à B et en changeant de couleur, **cinq autres points** tels que leur distance au point A soit plus **petite** que la longueur de A à B. »

Phase 5 (collective) ***: mise en commun et synthèse***

La mise en commun à partir de productions d'élèves doit permettre d'avancer vers la synthèse qui constituera la phase d'institutionnalisation.

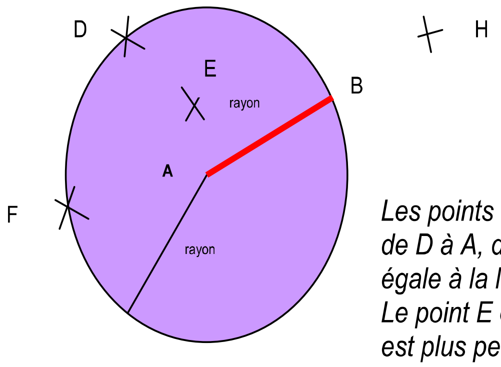
Synthèse

- Tous les points B qui sont situés à égale distance de A sont tous sur le **cercle** de centre A et de rayon AB (par exemple).
- Tous les points qui ont leur distance à A plus petite que la longueur du rayon sont situés dans le **disque** de centre A et de rayon AB.
- Tous les points qui ont leur distance à A plus grande que la longueur du rayon sont situés à l'extérieur du disque de centre A et de rayon AB.
- La surface limitée par le cercle est appelée *disque* (le colorier). Le cercle représente la frontière du disque.

Trace écrite à envisager : affiche synthèse

« Le cercle est constitué d'un ensemble de points (une infinité) qui sont tous situés à la même distance du centre. Cette distance est appelée le rayon du cercle. »
« Tous les points du cercle sont situés à égale distance du centre. »

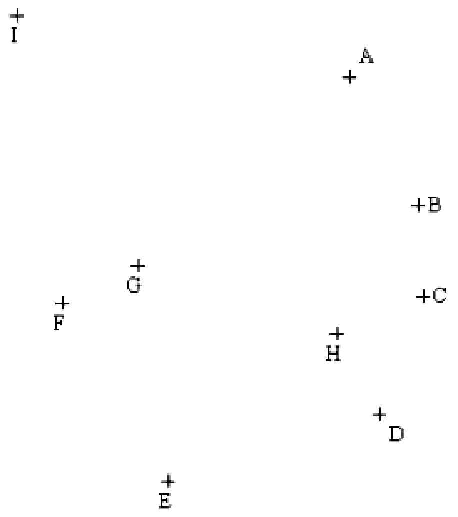
Dessin illustrant cette propriété.



Les points D, F et B sont sur le cercle de centre A car la distance de D à A, de F à A et de B à A est la même. Cette distance est égale à la longueur du rayon du cercle.
Le point E est dans le disque de centre A car la distance de E à A est plus petite que la longueur du rayon du cercle.
Le point H est à l'extérieur du disque de centre A car la distance de H à A est plus grande que la longueur du rayon du cercle.

Exercice 1

Les points A, B, C et D sont sur un même cercle.
Le centre de ce cercle est l'un des points de la figure.
En utilisant **ta règle graduée**, trouve le centre de ce cercle.



Le centre du cercle est le point : ....
Explique comment tu as trouvé :

Phase 2 bis (collective) ***: mise en commun et résolution de l'exercice***

L'énoncé agrandi de l'exercice est accroché au tableau.

- Les élèves donnent leurs réponses et argumentent sur la validité de leurs procédures. L'ensemble de la classe participe au débat sur la validité des résultats.
- L'enseignant propose de vérifier la réponse en prenant le compas.

Conclusion : Retour sur la propriété caractéristique des points du cercle introduite à la séance 1.

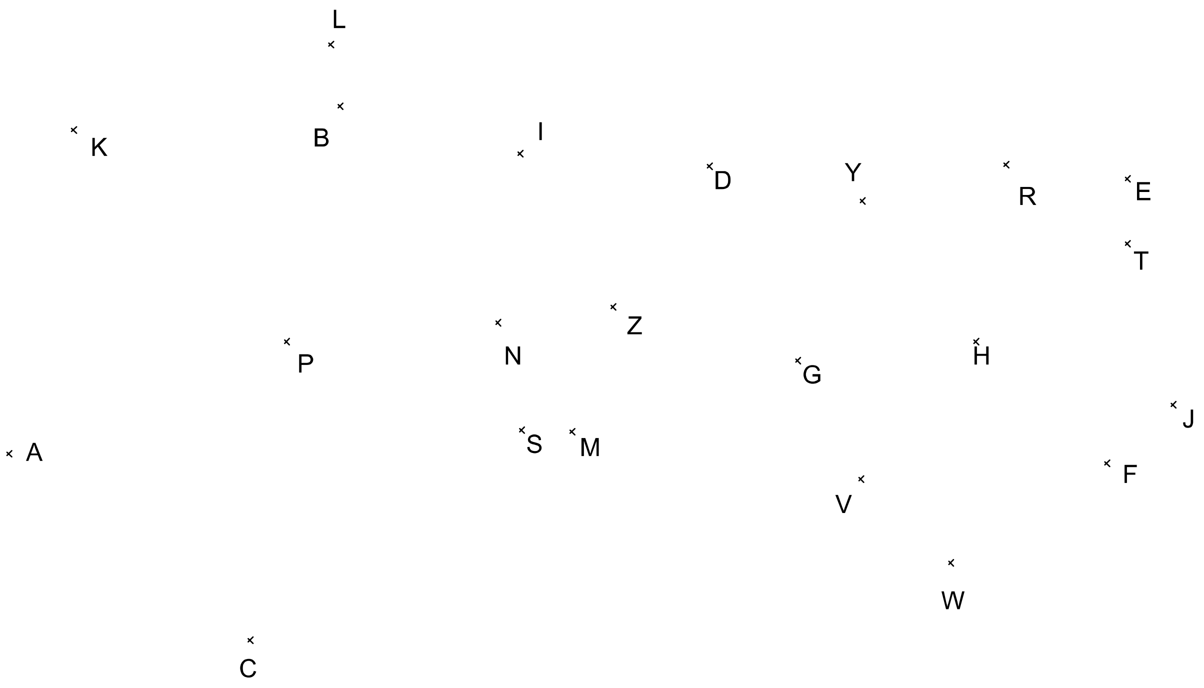
Phase 3 (individuelle) ***: résolution de [l'exercice 2]()***

Matériel : l'ensemble des outils de construction est laissé à la disponibilité des élèves.

L'objectif de cet exercice est de réinvestir le lien entre les points d'un cercle et la notion d'équidistance.
Même déroulement que pour l'exercice 1.

Exercice 2

1) Parmi les points tracés sur la feuille, repasse en rouge tous ceux qui sont situés à 5 cm du point **P**. Explique comment tu les as trouvés.



2) Parmi les points tracés sur la feuille, repasse en bleu tous ceux qui sont situés à 3 cm du point **H**. Explique comment tu les as trouvés.

Phase 4 (individuelle) ***: résolution de [l'exercice 3]***

Matériel : seul le compas est laissé à la disposition des élève

Même déroulement que pour l'exercice 1.

Exercice 3

On a tracé le segment [KL]. Sa longueur est de 5 cm.

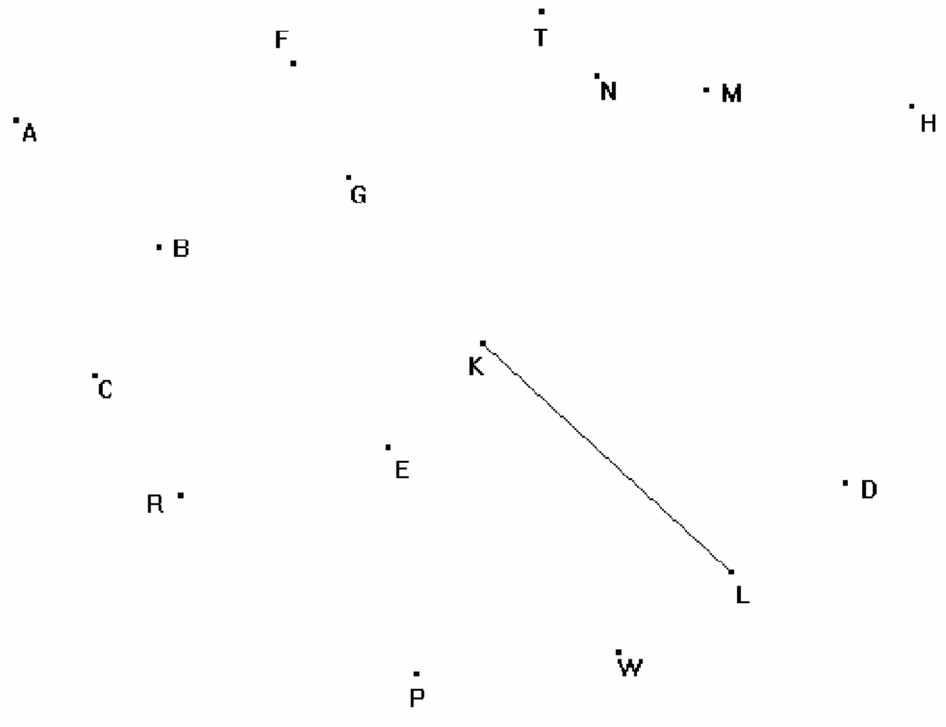
Sans utiliser la règle graduée, peux-tu donner la longueur des segments :

[KB] : . [KA] : . [KM] : .[KE] : .. [HD] : .

[KT] : . [KR] : . [BC] : . [KF] : . [GE] : .

Explique ta méthode : ..

Peux-tu donner les longueurs d'autres segments ? si oui lesquelles ?........................



Remarque : suite à l'analyse a posteriori nous proposons une modification de l'énoncé de l'exercice 3 : **exercice 3 modifié.**

Exercice 3 modifié

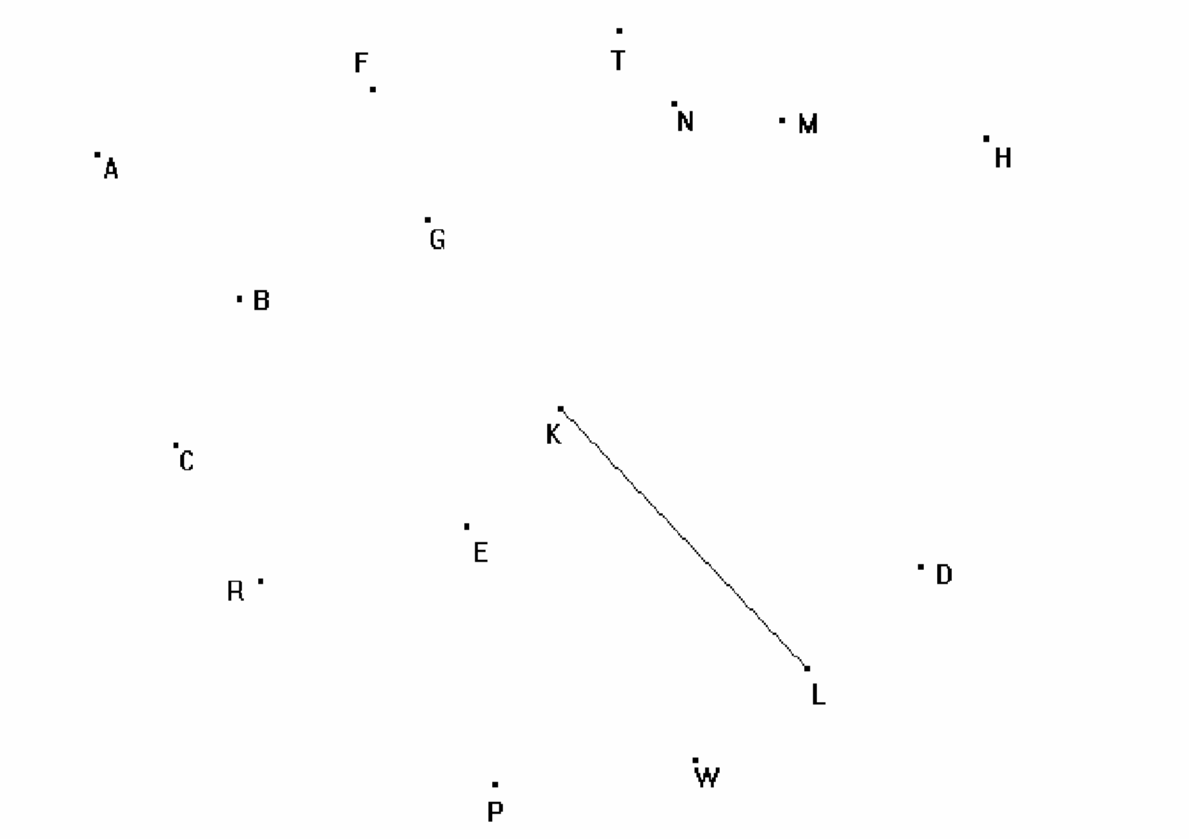
On a tracé le segment [KL]. Sa longueur est de 5 cm.

Sans utiliser ta règle graduée, range, dans les colonnes ①②③, les segments suivants [KB];[KA];[KM];[KE];[HD] ;[KT];[KR];[BC];[KF];[GE] selon leur longueur :

①	②	③
Les segments dont la longueur est plus petite que 5 cm.	Les segments dont la longueur est exactement 5 cm.	Les segments dont la longueur est plus grande que 5 cm.

Explique ta méthode :

Peux-tu donner d'autres longueurs de segments ? si oui lesquelles ?....................................



Phase 4 bis (collective) ***: mise en commun et résolution de l'exercice***

Même démarche que pour l'exercice 1.

Phase 5 (collective) ***: synthèse de la séance***

Faire formuler par les élèves les notions travaillées pendant cette séance et insister sur le rôle des instruments de construction. Montrer que la propriété d'équidistance des points d'un cercle permet de résoudre des problèmes de distance sans avoir à recourir nécessairement à des instruments de mesurage, mais uniquement en s'appuyant sur un raisonnement. Ainsi il est possible de résoudre vite et sûrement des problèmes de distance qui prendraient du temps si on utilisait une règle graduée par exemple.

Séance 3.

Objectifs

- Introduire des dessins à main levée.
- Donner du sens à la propriété caractéristique du cercle en la faisant fonctionner sur des dessins à main levée.

Tâche des élèves

Résoudre des problèmes.

Matériel

Différent selon les phases du déroulement de la séance.

Organisation

Travail individuel, avec mise en commun.

Déroulement

Phase 1 (collective) ***: énoncer les enjeux de la séance***

Consigne : *« Pendant les séances précédentes, nous avons vu la propriété des points d'un cercle. Quelle est-elle ? »*
Le maître attend que les élèves énoncent le fait que tous les points d'un cercle sont à égale distance du centre de ce cercle. Il peut renvoyer à **l'affiche de référence** de la séance 1.

Puis *« Aujourd'hui, nous allons utiliser cette propriété pour trouver la longueur de segments sans avoir recours aux instruments. Vous aurez à résoudre deux exercices. »*

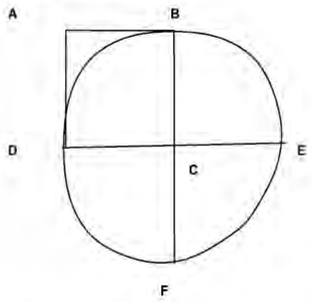
Phase 2 (collective puis individuelle) ***: résolution de l'exercice 1***

- Distribuer **l'exercice 1** et laisser les élèves prendre individuellement connaissance de l'énoncé. La même figure est reproduite agrandie au tableau.
- Puis faire reformuler par les élèves le problème posé en aidant à l'appropriation de celui-ci par un questionnement étayé :
  « Qu'est-ce qu'un dessin à main levée ? »
  C'est un dessin qui n'est pas précis mais qui permet de raisonner grâce à des informations qui sont données en plus.
  « De quoi est composée cette figure ? »
  Un cercle de centre C et de rayon (ou d'un diamètre) et d'un carré ABCD
  « Qu'elle est l'unité de mesure utilisée dans cet exercice ? »
  L'unité de mesure est « le carreau ».
  « Pour la question 1, que devez-vous trouver ? » etc.
- Préciser que les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé.

*Remarque concernant **le matériel*** : le maître peut ne donner aucune consigne concernant le matériel autorisé et il observera son usage pendant le travail des élèves. Il peut aussi décider d'interdire dès le début l'usage de la règle graduée en rappelant que sur un dessin à main levée il est impossible de mesurer puisque les tracés ne sont pas précis.

Exercice 1

On a dessiné à main levée la figure suivante :

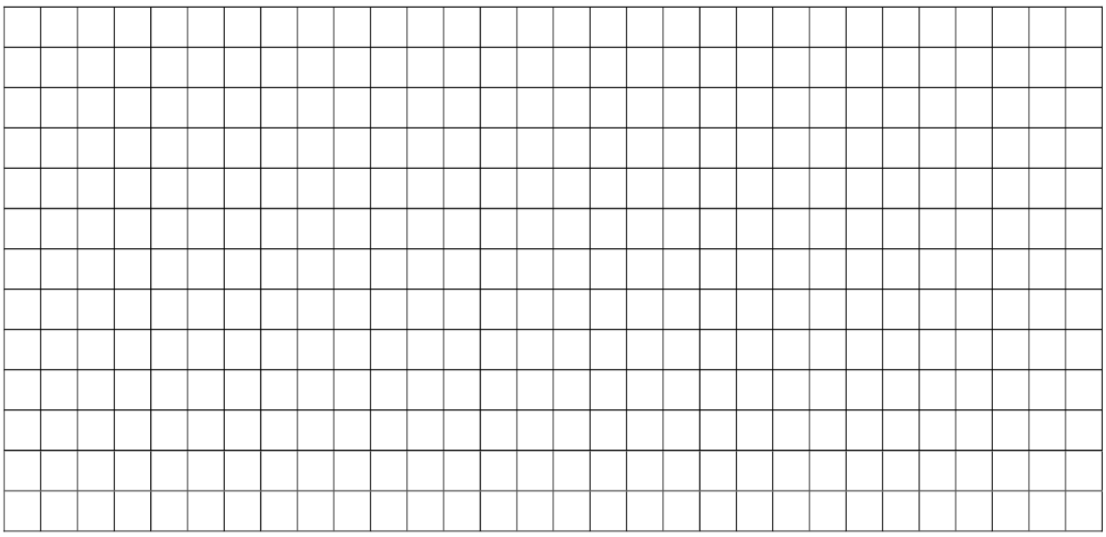


On sait que :

- ABCD est un carré dont la longueur des côtés est de 5 carreaux ;
- Le cercle est de centre C et de rayon CD ;
- Les points B, C et F sont alignés ;
- Les points D, C et E sont aussi alignés.

1) Peux-tu donner la longueur du segment [CF] ? du segment [CE] ? du segment [DE] ? du segment [BF] ?
Explique tes réponses

2) Construis aux vraies dimensions la figure sur le papier quadrillé ci-dessous.



Phase 3 (collective) ***: mise en commun***

Les observations des procédures des élèves durant la résolution vont permettre au maître de choisir une stratégie pour la mise en commun.
Les réponses attendues concernant les longueurs des segments sont uniques mais risquent d'être très diverses de la part des élèves, il faudra donc bien savoir, d'une part, qui a raison et d'autre part, comment en être sûr.
Il sera alors pertinent de faire un « listing » des valeurs trouvées pour la longueur d'un même segment, de demander aux élèves de présenter leurs procédures et de faire argumenter sur la validité de leurs réponses. La construction, sur papier quadrillé et aux vraies dimensions, de la figure permet une validation pour tous (réponse à la question 2).

Phase 4 (collective et individuelle) :***réinvestissement de l'usage de la propriété d'équidistance pour l'exercice 2***

Cet exercice est issu des évaluations nationales de 6^{e} (1997 et 1998).
Le déroulement de cette phase est identique à celui de la phase 2.

Séance 4

Objectif du maître

Faire découvrir l'usage du cercle et l'usage du disque pour résoudre des problèmes d'équidistance.

Tâche des élèves

Modéliser une situation de la vie réelle et la résoudre.

Institutionnalisation

Le cercle est un outil pour résoudre des problèmes d'équidistance.

Matériel

- Le compas, règle non graduée et papier calque
- Les mêmes énoncés agrandis au tableau pour le maître

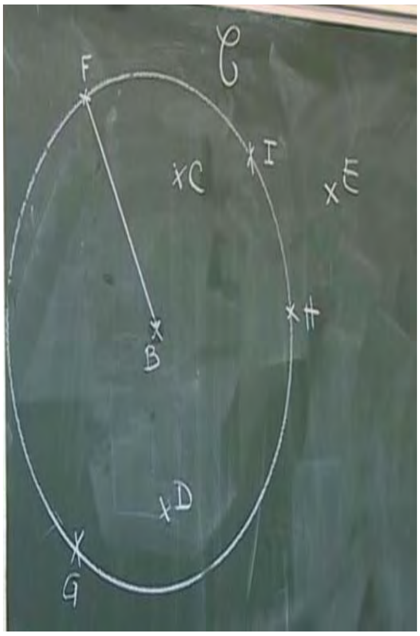
Organisation

Travail individuel, échange avec les voisins de proximité puis mise en commun.

Déroulement

***Phase 1** : rappel des propriétés des points du cercle*

À partir d'une figure constituée d'un cercle et de points situés sur le cercle, de points situés sur le disque et de points situés hors du disque, faire rappeler les liens avec la position et la distance de ces points au centre du cercle.
« Que peut-on dire des longueurs BF, BI, BH et BG ? »
« Où est situé le point E ? Que peut-on dire de la longueur BE ? »
etc.



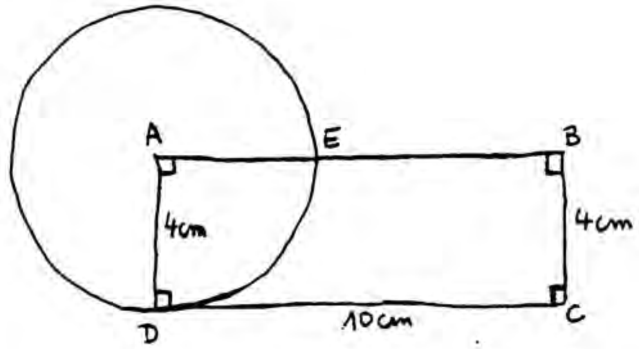
Phase 2 : le problème de la recherche des bijoux

Le plan agrandi est reproduit au tableau

- Faire lire silencieusement l'énoncé puis faire reformuler la tâche.
- Vérifier la compréhension de la situation et du plan représenté dans l'énoncé.
- Mettre les élèves au travail tout en observant les différentes procédures.

Exercice 2

Sur ce dessin à main levée, on a représenté un rectangle ABCD et le cercle de centre A qui passe par D.
Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.



Quelle est la longueur du segment [EB] ? ....

Justifie ta réponse : ....

....

....

Phase 5 (collective) ***: mise en commun***
Identique à la phase 3.

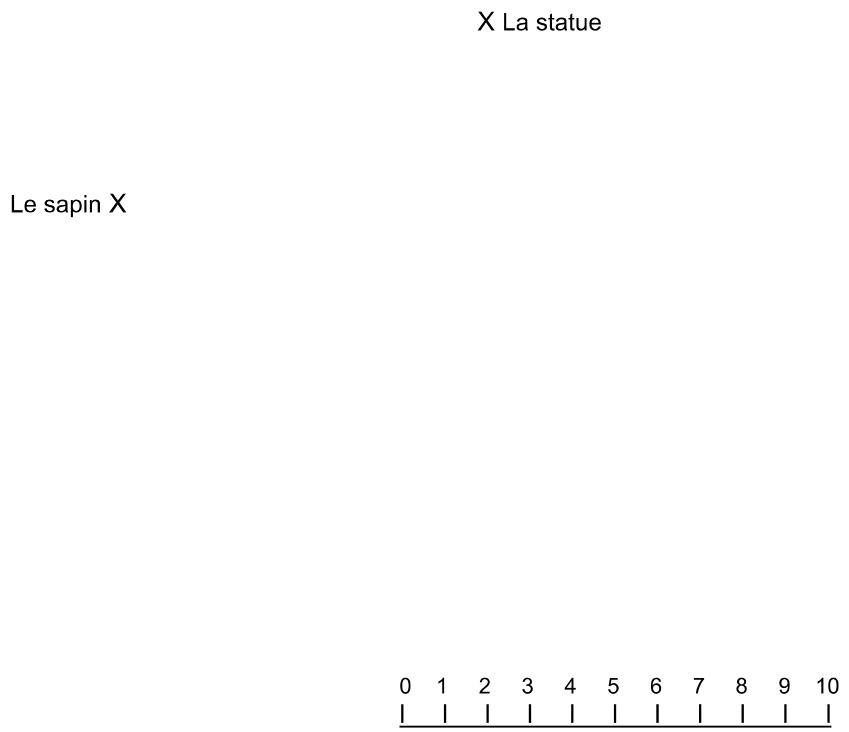
Phase 6 (collective) ***: synthèse***

La synthèse portera sur le fait que grâce à la propriété de l'équidistance des points appartenant à un même cercle, il est possible de donner la longueur de segments sans avoir besoin de les mesurer. Cela sera aussi l'occasion de mettre en évidence la validité d'un résultat à partir d'un raisonnement, ce qui incite les élèves à ne plus utiliser la perception ni les instruments pour résoudre un problème de géométrie et ce qui les prépare à la géométrie pratiquée au collège.

C'est aussi l'occasion de retravailler sur le statut des dessins à main levée.

Les bijoux

Un plan a été retrouvé dans la cave désignant l'emplacement des bijoux cachés par des familles pendant la 2ème guerre mondiale. Voici le plan et les indications fournies.
« *Aller au jardin du Luxembourg. Les bijoux sont enterrés à 4 mètres du grand sapin et à 7 mètres de la statue du Dieu Apollon.* »
Voici un plan du Luxembourg et une échelle des longueurs. Où faut-il creuser pour récupérer les bijoux ?



échelle des longueurs en mètres

Phase 2 bis : mise en commun et synthèse

Présentation des différentes procédures en argumentant la validité des solutions trouvées (deux endroits sont possibles pour trouver les bijoux).

La synthèse mettra en évidence que les points cherchés sont situés à l'intersection des deux cercles : celui de centre *le sapin* et de rayon 4 m et celui de centre *la statue* et de rayon 7 m. Cette synthèse devrait permettre de généraliser la construction de points qui sont situés à deux distances données de deux autres points.

Phase 3 : le problème du placement de la mangeoire des chèvres[5]

Une feuille de papier quadrillé est affichée au tableau

- Faire lire silencieusement l'énoncé puis faire reformuler la tâche.
- Vérifier la compréhension de la situation et répondre aux questions des élèves.
- Mettre les élèves au travail tout en observant les différentes procédures.

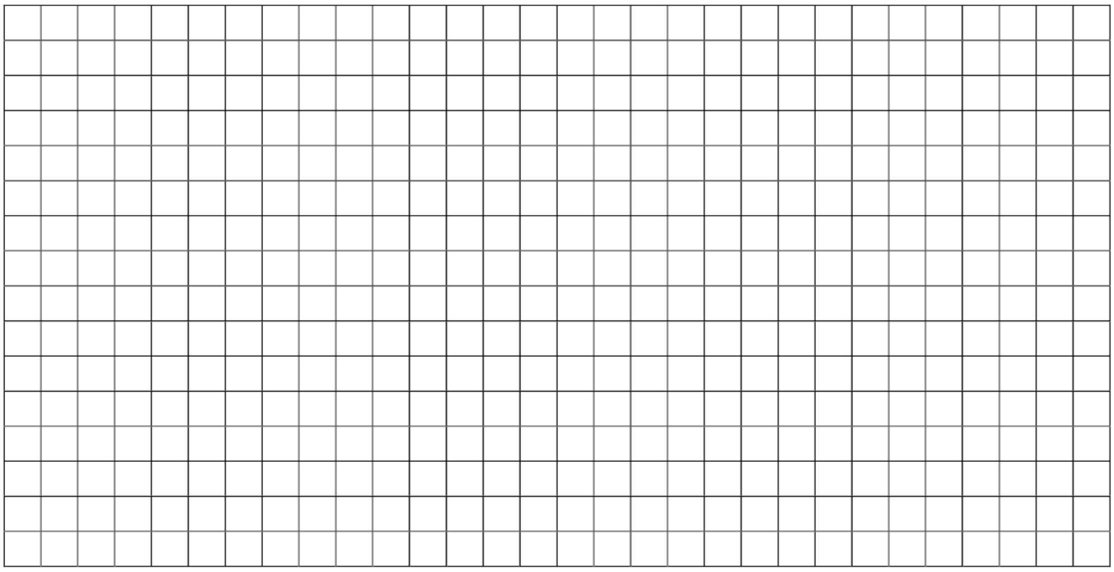
En fonction des difficultés rencontrées par les élèves durant la recherche, donner une aide concernant la représentation de la situation afin de relancer la recherche.

La mangeoire des chèvres

Dans un enclos, deux chèvres sont attachées chacune, par une corde, à un piquet différent. Le fermier ne dispose que d'une mangeoire. Il se demande où il pourrait la placer pour que ses deux chèvres puissent aller y manger en même temps. Pourriez vous l'aider ?

Voici des informations

Les deux piquets sont espacés de 16 carreaux. La corde d'une des chèvres est longue de 9 carreaux et l'autre corde est longue de 10 carreaux.
Faire un croquis qui donne l'emplacement possible de la mangeoire.



Phase 3 bis : mise en commun et synthèse

Présentation des différentes procédures en argumentant la validité des solutions trouvées : ici ce ne sont plus des points isolés qui sont solutions mais une surface du plan, intersection des deux disques.
Analyse de ces solutions en fonction de celles trouvées dans l'exercice précédent, rôle du cercle et rôle du disque.

Reprendre ce même problème en modifiant des longueurs :
« Et si la corde de la deuxième chèvre avait pour longueur 4 carreaux au lieu de 10 que se passerait-il ? »
ou bien
« Et si les deux cordes avaient pour longueur 8 carreaux que se passerait-il ? »
etc.

La mangeoire des chèvres (énoncé modifié)

Dans un pré, deux chèvres sont attachées chacune, par une corde, à un piquet différent. Le fermier ne dispose, comme mangeoire, que d'un petit seau pour nourrir ses animaux. Il se demande où il pourrait le placer pour que ses deux chèvres puissent aller y manger en même temps. Pourriez vous l'aider ?

Voici des informations
Les deux piquets sont espacés de16 mètres. La corde d'une des chèvres est longue de 9 mètres et l'autre corde est longue de 10 mètres.
En utilisant l'échelle des longueurs ci dessous, faire un croquis précis qui donne les emplacements possibles de la mangeoire.

Séance 7.

Objectifs du maître :

- Réinvestir la propriété caractéristique du cercle pour faire construire des triangles dont la longueur des côtés est donnée.
- Présenter le compas comme un outil de report de distance.

Tâche de l'élève :

Construire à l'aide du compas des triangles de dimension donnée.

Institutionnalisation :

- Construction de triangles à l'aide du compas
- Le compas : outil de report de distance.

Déroulement

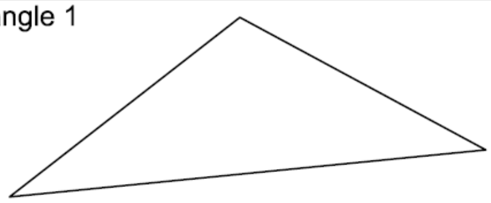
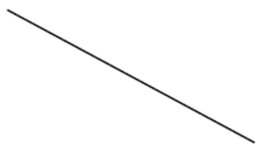
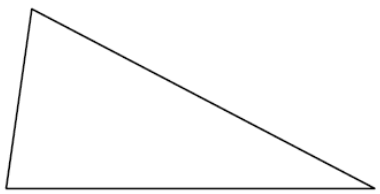
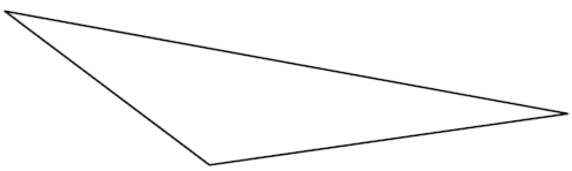
Matériel : Compas, règle non graduée, feuille quadrillée, crayon à papier.

***Phase 1* : rappel de la propriété caractéristique du cercle et présentation de l'enjeu de la séance.**

« Où sont situés tous les points équidistants de ? »
« Pendant cette séance nous allons apprendre à construire des triangles. »

***Phase 2* : reproduire des triangles**

Sur papier uni, trois triangles sont tracés et les élèves doivent finir leur reproduction à partir de l'élément déjà tracé en utilisant le compas et la règle non graduée.

Triangles à reproduire	Continue la reproduction du triangle
Le triangle 1 	Le triangle 1 
Le triangle 2 	Le triangle 2 
Le triangle 3 	Le triangle 3 

Mise en commun
Le calque permet de valider la justesse des constructions. Chaque élève dispose donc d'un morceau de papier calque et effectue la validation de sa construction.

Synthèse
Elle portera sur la façon de reproduire un triangle à l'aide du compas en faisant le lien avec les points équidistants et le cercle.
On privilégiera le fait de dire aux élèves que l'on construit deux cercles dont les centres sont les extrémités du segment déjà construit et que l'on obtient deux triangles possibles, symétriques l'un de l'autre.

<u>Phase 3</u> : construire des triangles

On donne aux élèves du papier quadrillé et on leur demande de construire des triangles dont les dimensions sont données par la longueur des côtés en carreaux.

L'enseignant proposera une aide en faisant le lien avec la situation précédente : faire un dessin à main levée, indiquant les informations données dans le texte.

Trace les triangles dont les côtés font :
- triangle n°1 5 carreaux, 7 carreaux, 8 carreaux
- triangle n°2 4 carreaux, 5 carreaux, 4 carreaux
- triangle n°3 3 carreaux, 4 carreaux, 5 carreaux

Validation à l'aide du papier calque sur lequel le maître aura photocopié les solutions.

Synthèse

Expliciter la méthode de construction des triangles à l'aide du compas en favorisant, avant de se lancer dans la construction, l'utilisation de dessins à main levée sur lesquels les élèves reportent les longueurs données des côtés des triangles.

Atelier 33, Colloque de la Copirelem 2014

Les plots

Sophie veut placer 3 plots sur le terrain de sport.
Elle sait que :
- le plot **A** doit être à 5mètres du plot **B** et à 8 mètres du plot **C.**
- le plot **B** doit être à 6 mètres du plot **C.**

En utilisant l'échelle des longueurs, représente, sur la feuille, la disposition des 3 plots.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Pour réaliser cette construction, il suffit de construire un triangle dont l'ensemble des longueurs des côtés a été fourni. La difficulté réside dans la compréhension du problème et dans sa modélisation. Le maître doit encourager les élèves à avoir recours au dessin à main levée, sur lequel toutes les informations données pourront être indiquées.

La modélisation étant réalisée par le dessin, la solution au problème n'est qu'un réinvestissement de la construction de triangle.

LES CONSTRUCTIONS A LA REGLE A BORDS PARALLELES EN FORMATION INITIALE DES PROFESSEURS DES ECOLES. POURQUOI ? COMMENT ?

Valentina CELI
ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux
E3D – LACES,
valentina.celi@espe-aquitaine.fr

Françoise JORE
Université Catholique de l'Ouest
Equipe PESSOA, Département de Sciences humaines et sociales
jore@uco.fr

Résumé
Avec une stratégie d'homologie-transposition (Kuzniak, 1993), nous cherchons à proposer à nos étudiants de Master, futurs professeurs des écoles, des situations riches permettant de revisiter ou de construire des savoirs en géométrie plane, mais aussi en pédagogie et didactique. À partir de problèmes de constructions géométriques, l'idée est ainsi venue de concevoir pour des groupes d'étudiants de Master 1 MEEF une première situation exploitant la règle à bords parallèles (Berthe & Cazier, 2000).
Dans cet atelier, à partir de la mise en activité des participants et de la présentation des expérimentations qui ont pu être menées, nous avons proposé de réfléchir ensemble à des questions posées par ce travail à ses débuts. Dans le cadre d'une formation qui vise également la préparation d'un concours et compte tenu des spécificités de la règle à bords parallèles comme instrument de construction, est-il pertinent de proposer à des étudiants de Master 1 des situations exploitant cet instrument ? Quelles sont les conditions pour un « bon » fonctionnement de cette situation ?

AVERTISSEMENT ! Avant d'entreprendre la lecture de cet article, nous invitons le lecteur à jouer le jeu comme s'il était un participant à l'atelier. Nous lui proposons donc de se munir d'une règle à bords parallèles (RBP par la suite), d'une feuille de papier uni et d'un crayon : après avoir placé deux points A et B tel que la distance AB soit supérieure à la largeur de la RBP, construire le milieu de [AB] et justifier la construction. La RBP n'a pas de graduation, ni de côtés perpendiculaires, ni d'épaisseur, elle permet juste de tracer des droites parallèles d'écart fixé par sa largeur. Plusieurs constructions sont possibles, il serait donc intéressant de ne pas s'arrêter à la première trouvée. Ce travail préalable est utile pour mieux suivre les analyses et les réflexions qui feront l'objet d'une bonne partie de ce texte.

I - LE CONTEXTE

La population avec laquelle nous travaillons est celle des étudiants de première année des masters MEEF (Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation), population spécifique à plusieurs titres.

1 Un concours en fin d'année

La première de ses particularités est de préparer un concours en fin d'année, concours qui depuis la session 2014, comporte en mathématiques des questions notionnelles et des questions didactiques. On peut critiquer la réelle valeur didactique des questions effectivement posées dans les sujets mais il est certain que la préparation à ce concours nécessite de travailler avec les étudiants à la fois les concepts mathématiques, qui rappelons-le relèvent tous du collège, et quelques concepts de didactique des mathématiques.

2 Une formation professionnelle

Parallèlement à cette préparation du concours, les étudiants sont engagés dans une formation professionnelle. Nous ne pensons pas qu'il faille attendre la seconde année du master pour commencer cette formation. Il nous semble important de permettre aux étudiants de réfléchir sur ce qu'est l'activité mathématique d'une part, et sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire d'autre part dès la première année de master. Pour beaucoup d'étudiants, leur conception des mathématiques et de leur enseignement mérite fortement d'être questionnée, voire remise en cause. Leur modèle d'apprentissage, souvent très transmissif, est peu adapté à l'école primaire.

3 Une population très hétérogène

Si quelques étudiants sont issus de filières scientifiques, ce n'est pas la majorité. Beaucoup d'entre eux ont un faible bagage mathématique, et un rapport aux mathématiques parfois très douloureux. Pour eux, l'enjeu est, simultanément, de leur permettre de construire des savoirs mathématiques et didactiques, et de leur faire changer leur rapport à la discipline, afin qu'ils puissent découvrir le plaisir de résoudre des problèmes de mathématiques, qu'ils puissent envisager de faire des mathématiques autrement. En revanche, pour les étudiants scientifiques, l'enjeu majeur est de leur proposer des situations nouvelles, pour lesquelles ils n'ont pas d'automatismes, qui vont les obliger à réfléchir, à construire des procédures de résolution inédites, à mettre en œuvre leurs savoirs mathématiques, vérifiant ainsi qu'ils ne sont pas seulement *mobilisables* mais aussi *disponibles* (Robert, 1995). Il s'agit donc de disposer de situations qui puissent être pertinentes simultanément pour tous ces étudiants très différents.

4 Un volume horaire annuel limité

Les contraintes de la formation sont multiples, mais l'une d'elles vient tout particulièrement se heurter aux éléments précédents : le volume horaire annuel est (très, trop) limité et il est donc indispensable de disposer d'activités qui permettent de travailler simultanément plusieurs aspects.

II - OUTILS THEORIQUES ET PROBLEMATIQUE

Dans le cadre institutionnel précisé ci-dessus, il s'agit donc pour nous de proposer aux étudiants des situations qui leur permettent tout à la fois de :

- voir ou revoir un maximum de savoirs géométriques indispensables pour le concours ;
- développer des savoirs didactiques et pédagogiques en vue de l'épreuve de mathématiques du concours mais aussi de leur métier futur d'enseignant de l'école primaire ;
- faire évoluer leur rapport aux mathématiques et à leur enseignement.

Comment y parvenir ?

1 Des stratégies d'homologie et de transposition

En observant les stratégies qu'un formateur d'enseignants met en place pour gérer la transmission de savoirs mathématiques, didactiques et pédagogiques, Kuzniak (1994) identifie et caractérise deux grands types de stratégies de formation. Nous rappelons ci-après les définitions qui intéressent de plus près notre recherche actuelle.

Parmi les stratégies axées sur la professionnalisation, celle d'homologie est une stratégie *où le professeur utilise (ou tente d'utiliser) un mode de transmission identique à celui qu'il souhaite voir utiliser par ses étudiants lorsque ceux-ci enseignent dans les classes élémentaires* (Kuzniak, 1994, p. 51)[1].

Dans la même classe, la stratégie de transposition se propose de *transmettre des savoirs de référence portant sur la pratique de la classe* (Kuzniak, 1994, p. 48). Plus précisément, on pourrait parler d'une stratégie d'homologie enrichie par des réflexions d'ordre didactique, notamment :

[1] Nous nous tenons aux définitions de l'auteur. Notons cependant que le terme « transmission » ne nous paraît pas adapté à une démarche volontairement plus constructiviste que transmissive.

« *[…] Elles tentent de lier l'action sur les représentations des mathématiques, propre aux stratégies d'homologie, et la distanciation par rapport à la pratique que permet la théorisation didactique* » (Kuzniak, 1994, p. 54).

Pour des raisons que nous précisons plus loin, parmi les stratégies qui ne visent pas particulièrement la formation professionnelle, nous retenons aussi la définition de stratégie culturelle :

« *Les stratégies culturelles […] privilégient l'accroissement des connaissances dans le domaine mathématique sans préjuger de la mise en œuvre opérée dans les classes par les étudiants […] Ces stratégies intègrent avant tout le savoir qui fait l'objet de tous les efforts des formateurs : les mathématiques* » (Kuzniak, 1994, p. 47).

2 La problématique

À partir de problèmes de constructions géométriques, l'idée est venue de concevoir des situations où la RBP est le seul instrument de tracé disponible. Dans les constructions à la règle et au compas, les étudiants utilisent souvent des procédures de manière automatique et il est difficile de leur faire se poser la question de leur justification mathématique. Avec la RBP, aucun automatisme n'est en place puisque la situation est nouvelle pour tous. Les étudiants disposent en outre de savoirs géométriques dont ils ne disposaient pas lorsqu'ils ont appris à construire avec les instruments usuels. Cela peut représenter un levier pour les encourager autant à effectuer des constructions nouvelles qu'à les justifier. La situation est inédite pour eux, ce qui est également un gage de motivation pour un certain nombre d'étudiants qui n'ont ainsi pas la sensation de faire et refaire toujours la même chose.

Nous sommes ainsi amenées à nous poser la question suivante : **dans le cadre de la formation des étudiants de M1 du master MEEF, des situations exploitant la RBP avec des stratégies d'homologie et de transposition peuvent-elles être pertinentes ?**

Un de nos objectifs est de faire évoluer le rapport de nos étudiants aux mathématiques et à leur enseignement. Comme nous l'avons signalé plus haut, une des difficultés est que beaucoup gardent un souvenir des mathématiques, au collège ou au lycée, très négatif. Nous constatons malgré tout qu'une grande majorité d'entre eux prend du plaisir à résoudre les problèmes proposés. Selon nous, de telles situations seraient susceptibles de les réconcilier avec les mathématiques, en leur permettant à la fois d'éprouver la satisfaction de la résolution et de se rendre compte qu'eux aussi sont capables de résoudre des problèmes de mathématiques. Il resterait bien sûr à vérifier que cette réconciliation n'est pas éphémère mais qu'elle est durable.

Afin qu'ils construisent des savoirs mathématiques, nous pensons qu'il est efficace de proposer aux élèves des problèmes dans lesquels plusieurs procédures sont possibles, qui leur laissent une marge d'autonomie, qui permettent à chacun de s'investir dans la tâche, même avec des savoirs minimes au départ, etc. De telles situations, en faisant vivre aux étudiants ce type de problèmes, pourraient alors nous servir pour les convaincre qu'il n'y a pas que le modèle transmissif pour enseigner les mathématiques, mais que des problèmes riches sont motivants pour les élèves et permettent de construire et structurer des savoirs. Cette stratégie relève des stratégies d'homologie.

Parallèlement, notre second objectif est de faire travailler un maximum de savoirs géométriques indispensables pour le concours. Afin que le problème soit véritablement adapté à nos étudiants et aux savoirs mathématiques que nous visons (les propriétés de géométrie du collège pour le concours de professeurs des écoles), *la situation présentée aux étudiants n'est pas susceptible d'un transfert simple à l'école primaire* (Kuzniak, 1994, p. 52). Il ne s'agit pas en effet de proposer la règle à bords parallèles à l'école comme nouvel instrument de construction. Notons que l'importance que nous accordons au travail mathématique peut nous permettre de faire également relever notre stratégie des stratégies culturelles. Ce qui n'acquiert pas forcément une connotation négative dans la mesure où elle s'articule avec des stratégies d'homologie et de transposition[2].

Enfin, notre troisième objectif est de développer des savoirs didactiques et pédagogiques en vue de l'épreuve de mathématiques du concours et conjointement de leur métier futur d'enseignant de l'école

[2] Remarquons aussi que, dans le contexte actuel, nos étudiants sont là aussi pour valider un master, ce qui n'était pas le cas à l'époque où Kuzniak menait ses recherches sur les stratégies de formation d'enseignants.

primaire. Or, le seul fait de vivre de telles situations ne permet pas nécessairement aux étudiants de construire ces savoirs, il nous semble nécessaire de prévoir une phase d'institutionnalisation et, par conséquent, pertinent de mettre en place un temps particulier d'explicitation de la manière dont la séance s'est déroulée. Si le premier temps de la séance, comme nous le verrons plus loin, est essentiellement centré sur le travail mathématique et *métamathématique* (cf. paragraphe VI), le second est lui organisé pour mettre au jour des éléments didactiques et pédagogiques. Cet aspect fait relever notre stratégie des stratégies de transposition.

3 D'autres outils théoriques

Le sujet de notre recherche, qui est à ses débuts, se situe dans le domaine de la géométrie plane. Nous serons ainsi amenées à utiliser les paradigmes géométriques, au sens de Parzysz (2002), pour interpréter certaines questions d'étudiants. Ils seront également un outil d'analyse des tâches qui sont proposées aux élèves et des procédures que ces derniers utilisent. Ils peuvent également devenir l'objet d'un enseignement didactique afin d'aider à l'analyse des tâches proposées aux élèves.

Nous nous questionnons sur la pertinence de la RBP comme outil à exploiter dans des problèmes de constructions géométriques, sans oublier qu'il ne s'agit pas d'un outil *routinier* pour nos étudiants ni pour nous. Cela nous conduit à davantage nous questionner en termes d'*artefact* et d'*instrument*, au sens de Rabardel (1995), en nous intéressant notamment aux schèmes d'utilisation de cet instrument, ainsi qu'au passage de l'artefact à l'instrument pour l'étudiant.

Les diverses appréhensions de la figure de Duval (1994), *perceptive*, *discursive*, *séquentielle*, mais surtout *opératoire* avec ses diverses modifications *méréologiques*, *optiques*, *positionnelles* seront également convoquées pour l'analyse du problème.

III - UN PROBLEME DE CONSTRUCTION AVEC LA REGLE A BORDS PARALLELES

Avant de présenter un problème de construction géométrique pouvant se réaliser à l'aide de la RBP, nous nous attardons sur quelques caractéristiques et fonctionnalités de cet instrument.

1 Présentation de la règle à bords parallèles : caractéristiques et fonctionnalités

Voici ci-dessous une image de RBP :

Cet instrument n'a pas de graduations, il ne peut donc servir pour mesurer. Il n'est pas non plus *informable*, à savoir qu'il n'est pas porteur d'information, l'information consisterait par exemple en trait(s) rectiligne(s) que l'on trace sur l'instrument pour permettre des reports de longueur ou des reports d'angles et de direction (Duval & Godin, 2005). On ne peut s'en servir pour tracer des cercles. Ses extrémités ne sont pas significatives (elles sont découpées de manière quelconque). C'est une règle « plate », on ne peut se servir de son épaisseur.

On peut se servir de la RBP comme une règle *non graduée* habituelle. On utilise alors un seul bord de cet instrument pour tracer :
- une droite ou un segment ;
- une droite parallèle à une droite donnée à une distance de celle-ci égale à la largeur de cet outil ;
- une droite passant par deux points donnés ou un segment joignant deux points donnés ;
- tracer deux droites sécantes en un point ou un point comme intersection de deux droites.

On peut se servir des deux bords de cet instrument et considérer sa largeur L pour tracer :
- un couple de droites parallèles à une distance L l'une de l'autre,
- deux points A et B étant données tels que AB > L, une droite passant par l'un des deux points et telle que A soit sur l'un des deux bords de la règle et B sur l'autre bord,
- deux points A et B étant donnés tels que AB > L, deux droites parallèles telles que A soit sur l'une (un des deux bords de la règle) et B sur l'autre droite (l'autre bord).

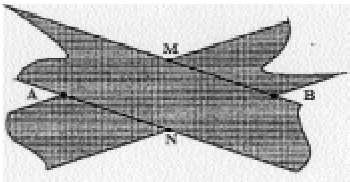


Figure 1

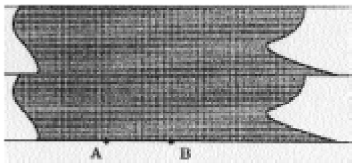


Figure 2

Ces divers usages de la RBP conduisent à identifier deux schèmes d'utilisation (Rabardel, 1995). Comme nous le verrons plus loin, dans les diverses constructions réalisables avec la RBP, deux configurations de base correspondent en effet à deux manipulations différentes de l'instrument. Étant donnés deux points A et B tels que AB soit supérieure à la largeur de la RBP, on peut construire[3] :

- un *losange* (Figure 1) en traçant deux couples de droites parallèles telles que, pour chaque couple, A soit sur l'une (un des deux bords de la règle) et B sur l'autre droite (l'autre bord), nous désignons par la suite SU1 le schème d'utilisation associé ;
- un *réseau de droites parallèles équidistantes* (Figure 2) en utilisant les deux bords de l'instrument de telle sorte que, en traçant le premier couple de droites parallèles, l'une passe par les deux points donnés, nous désignons par la suite SU2 le schème d'utilisation associé.

2 Un problème de construction : le milieu d'un segment dont on connait les extrémités

Que l'on exploite un seul des deux schèmes ou que l'on exploite la combinaison des deux, l'éventail des constructions possibles avec une RBP est riche[4]. Nous nous focalisons ici sur la construction du milieu d'un segment, problème qui a fait l'objet de nos expérimentations avec nos étudiants et que nous avons proposé aux participants à notre atelier. Notamment, après avoir distribué des RBP, la consigne formulée a été la suivante : « *Vous disposez d'une RBP. Placez deux points A et B dont la distance est supérieure à la largeur de votre règle. Tracez le milieu du segment [AB]. Justifiez la construction réalisée et listez les savoirs mathématiques mis en œuvre. Recommencez éventuellement avec une autre construction* ».

Munis de tout le matériel nécessaire, les participants à l'atelier se sont aussitôt investis. Comme cela a été le cas avec nos étudiants, dans les premières propositions de construction, les deux schèmes d'utilisation de la RBP évoqués ci-dessus sont assez vite apparus.

Nous avions aussi prévu des aides : dans un premier temps, nous avons montré au tableau la Figure 1 et la Figure 2 sans faire de commentaires. Dans un second temps, localement, nous avons proposé aux participants en difficulté des *cartes aides*, nous en parlerons plus loin dans la partie consacrée à nos expérimentations.

De cette phase de recherche à propos du problème posé, ce qui nous semble important de faire ressortir concerne les différentes façons de l'aborder. Dans les premières solutions trouvées, il y a souvent une phase de tâtonnement où l'instrument et les propriétés s'articulent sans intention explicite : c'est là que l'on découvre les deux schèmes d'utilisation évoqués ci-dessus.

Ce n'est que par la suite que l'on cherche **à partir** d'une propriété ou d'une configuration connues, plus ou moins étroitement liées au problème, pour développer **ensuite** une construction possible. Dans le

[3] La Figure 1 et la Figure 2 sont extraites de Berthe & Cazier (2000).

[4] Selon Berthe & Cazier (2000), on peut réaliser toutes les constructions qui sont réalisables avec la règle et le compas

paragraphe qui suit, nous allons présenter les principales constructions que nous avons rencontrées jusqu'ici, et nous indiquerons celles qui sont apparues lors de l'atelier.

IV - ESQUISSE D'UNE ANALYSE MATHEMATIQUE DU PROBLEME POSE

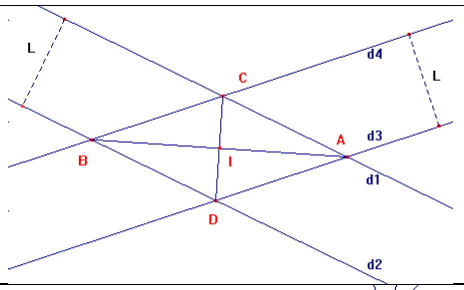
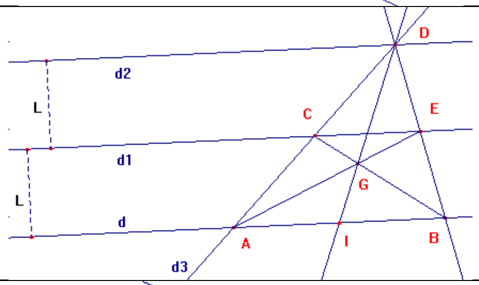
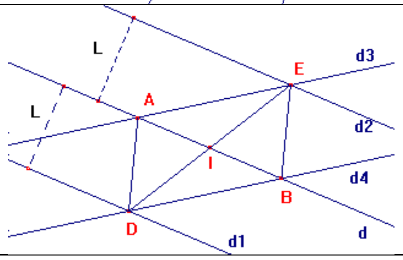
En respectant la dynamique de l'atelier, nous ne donnons pas ici les programmes de construction ni les démonstrations : nous invitons le lecteur à les faire lui-même et ainsi s'approprier la situation pour mieux saisir les réflexions et les analyses qui vont suivre.

Nous présentons les diverses constructions dans un tableau en deux colonnes : à gauche, le dessin final de la construction[5] ; à droite, la liste des principales propriétés permettant de la justifier.

Nous traitons d'abord le problème de la construction du milieu d'un segment dont on connaît les extrémités. En nous focalisant sur la première construction présentée (CM1 dans la suite, pour construction du milieu), nous traitons ensuite le problème de la construction d'un losange, problème qui demeure lié au schème d'utilisation SU1 et dont la justification s'avère intéressante, dans le cadre de notre recherche, dans la mesure où elle peut d'appuyer sur des savoirs géométriques très variés.

1 Problème de construction du milieu d'un segment dont on connait les extrémités

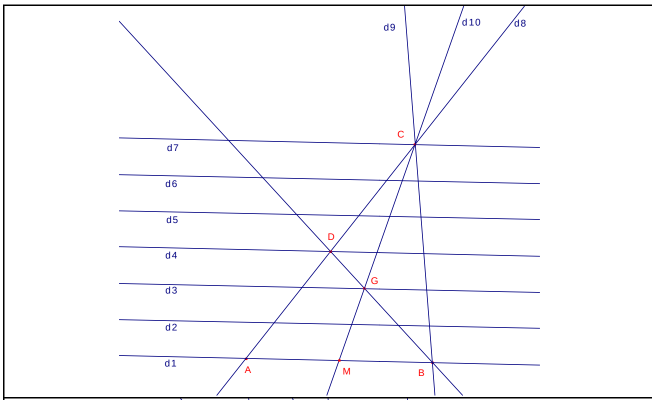
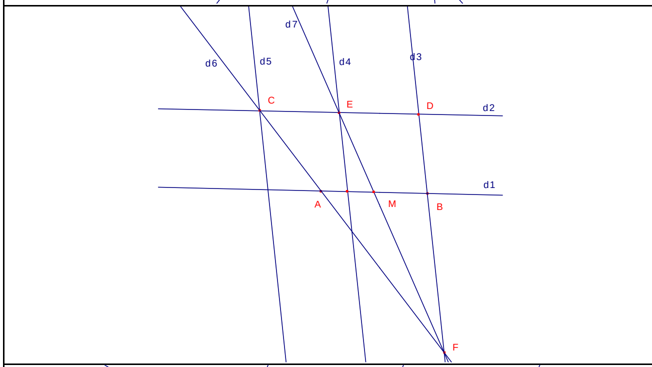
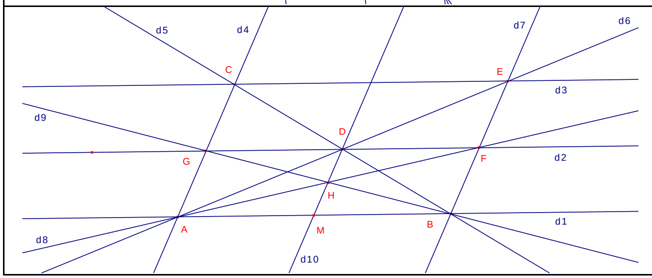
Les trois constructions ci-après sont effectivement apparues dans les expérimentations avec les étudiants. Les participants n'ont pas eu trop de mal à les trouver.

	**CM1** Droites parallèles Parallélogramme : définition (côtés opposés parallèles) et propriété des diagonales
	**CM2** Droites parallèles équidistantes et équipartition Triangle : milieux des côtés, centre de gravité
	**CM3** Droites parallèles équidistantes et équipartition Parallélogrammes : définition, propriété caractéristique des côtés et propriété des diagonales

Dans le cas des constructions CM2 et CM3, on recourt à une propriété non routinière : *toute sécante qui coupe une famille de parallèles équidistantes est partagée en segments de même longueur*. Nous y revenons plus loin.

Ce qui est intéressant, et qui nous interroge, porte sur d'autres procédures trouvées après l'expérimentation ou par les participants à l'atelier[6].

[5] Les numéros des droites et l'ordre alphabétique des noms des points indiquent leur ordre de construction.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>CM4
Droites parallèles équidistantes et équipartition
Triangle : milieux des côtés, propriété du centre de gravité</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>CM5
Partage d'un segment en n segments de même longueur
Théorème de Thalès (dans un triangle)</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>CM6
Parallélogrammes : définition, propriété caractéristique des côtés et propriété des diagonales
Droites parallèles équidistantes et équipartition</td>
</tr>
</table>

Comme nous l'avons indiqué plus haut, ces constructions naissent d'une réflexion *a priori* sur des savoirs (propriétés ou constructions de base) plus ou moins étroitement liés au problème et permettant de réaliser une construction valide. Dans la construction CM4 par exemple, une participante est partie de la propriété relative à la position du centre de gravité d'un triangle sur chacune de ses médianes et a ensuite cherché une construction qui utilise cette propriété. De même, les deux autres constructions s'appuient respectivement sur deux constructions de base connues[7]. Dans le cas de la construction CM5, nous avons exploité la construction permettant de partager un segment en n segments de même longueur, dans le cas où n = 2. Dans la construction CM6, un participant a utilisé une construction de base, à savoir celle de la droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné[8] : il s'agit ici de la droite d7 parallèle à d4 et passant par B.

De toutes les constructions envisagées dans ce texte (le lecteur en aura peut-être trouvées d'autres), la construction CM1 s'appuie sur le schème d'utilisation SU1 ; la construction CM3 exploite les deux schèmes mis en évidence ; toutes les autres constructions s'appuient sur le schème SU2. Le schème SU1, moins spontané que l'autre, ne fait pas vraiment obstacle à la recherche de solutions au problème posé.

---

[6] Nous remercions les participants pour nous avoir suggéré les constructions CM4 et CM6.

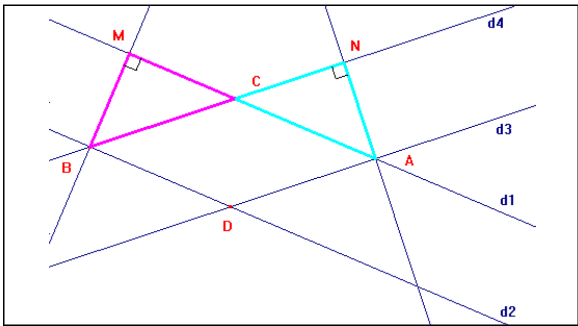
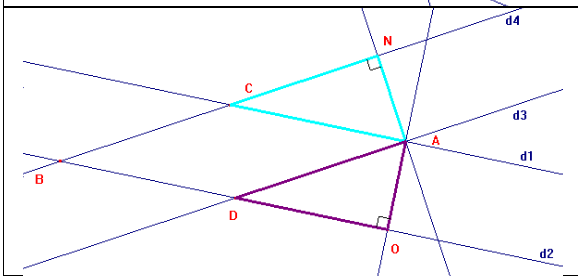
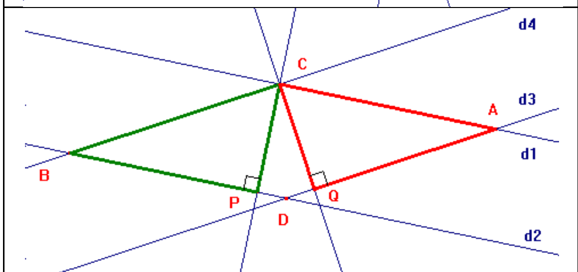
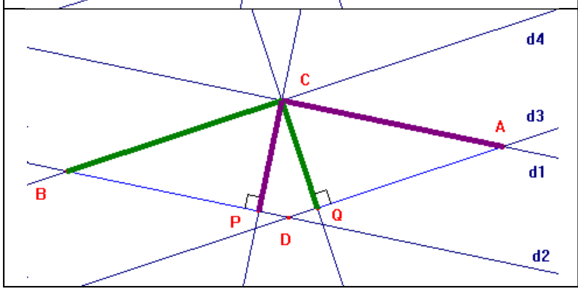
[7] Pour plus de détails sur les constructions de base exploitées ici, cf. Berthe & Cazier (2000).

[8] Nous n'avions évoqué cette construction à aucun moment de l'atelier mais le participant en question avait dit connaître les constructions avec la RBP.

2 Problème de construction d'un losange

Lorsque les étudiants découvrent la construction CM1, ils parlent soit de parallélogramme (ce qui suffit pour la justifier), soit de losange. Dans le second cas, ils se fient à ce qu'ils voient. Nous profitons de leur affirmation qu'il s'agit d'un losange pour leur proposer d'effectuer la démonstration, avec laquelle ils ont quelques difficultés. Cette étape nous semble intéressante d'autant plus que l'on peut s'appuyer sur des propriétés variées selon la manière dont on analyse le dessin produit et selon les propriétés dont on dispose.

Dans tous les cas, on parvient à retenir une propriété non routinière : *un losange est un parallélogramme dont les hauteurs sont de même longueur*.

	Angles opposés par le même sommet Triangles (rectangles) isométriques
	Angles correspondants Triangles (rectangles) isométriques
	Parallélogramme : angles opposés Triangles (rectangles) isométriques
	Formule de calcul de l'aire d'un parallélogramme

3 Intérêt de la situation : les savoirs mathématiques en jeu

Nous venons de voir que, dans cette situation, les définitions et les théorèmes de la géométrie plane convoqués sont nombreux. Elle permet en effet de faire émerger une bonne partie des savoirs de géométrie plane à maîtriser en vue du concours.

La construction du milieu d'un segment dont on connaît les extrémités permet, par exemple, de revisiter des propriétés liées aux parallélogrammes et au triangle.

En partant de la construction CM1, pour prouver que le parallélogramme ACBD est un losange, l'un des cas des triangles isométriques devient un outil efficace. On peut alors revisiter diverses propriétés sur les angles – angles opposés par le même sommet, angles correspondants, somme des angles dans un triangle, etc. – en produisant un éventail assez riche de démonstrations. Sans compter que l'on a aussi l'occasion de faire ressortir un exemple de preuve exploitant les aires[9].

La réciproque du théorème (de la droite) des milieux est aussi un résultat utile dans cette situation. Par exemple, lorsque l'on trace un réseau de droites parallèles et équidistantes, elle permet de prouver que *toute droite coupant ce réseau est partagée en segments de même longueur*, propriété fondamentale car strictement liée au schème d'utilisation SU2.

Une fois prouvé que le parallélogramme ACBD est un losange, on pourra en déduire d'autres constructions immédiates : la médiatrice d'un segment, une droite perpendiculaire à une droite donnée, la bissectrice d'un angle donné. Et déduire encore comment construire les points remarquables d'un triangle, le centre d'un cercle donné, etc.

Les participants ont partagé avec nous l'idée que la situation est certainement riche. Le regard porté sur les figures est aussi varié : droites, segments, points, points comme intersections de droites ou de segments, surfaces.

Mais l'entrée dans l'activité ne risque-t-elle pas d'être coûteuse ?, se sont-ils demandés. Le moment était alors venu de présenter le déroulement que nous avons retenu pour nos expérimentations, en motivant aussi certains de nos choix.

V - PRESENTATION DE NOS EXPERIMENTATIONS

Comme nous l'avons vu, lorsque l'on utilise la RBP, le schème SU1 conduit assez vite au losange qui devient ainsi une figure de base pour diverses constructions. Dans Berthe & Cazier (2000), les auteurs choisissent d'introduire l'usage de cet instrument à travers *une voie naturelle mais plus dynamique en épuisant, dans un premier temps, tout ce qu'on peut tirer des parallèles équidistantes*. Dans leur progression, ils privilégient donc le schème SU2 et proposent d'abord le problème de la construction d'une droite parallèle passant par un point donné.

En guise de pré-expérimentation, nous avons conçu une séance en partageant ce même choix. Nous avons en plus demandé au groupe d'étudiants concernés d'utiliser leur règle graduée. Les résultats ont été quelque peu décevants, ce qui ne nous a pourtant pas découragées mais nous a conduit à mener une analyse plus approfondie en jouant davantage sur les différentes variables didactiques de la situation.

En répertoriant les principaux problèmes que l'on peut traiter à l'aide de cet instrument, nous nous sommes alors rendues compte que celui de la construction du milieu d'un segment est le plus riche en termes de stratégies possibles : on y parvient en exploitant le schème SU1 ou bien le schème SU2 ou encore avec une combinaison des deux[10]. Comme nous l'avons déjà évoqué plus haut, il permet en outre de faire découler d'autres constructions immédiates. Nous avons donc choisi de proposer ce problème en premier aux étudiants.

Une autre question à aborder portait ensuite sur la nature de l'artefact. Pour éviter les manipulations illicites rencontrées dans la pré-expérimentation, nous avons construit nous-mêmes des lattes de longueurs et de largeurs variables n'ayant que deux bords parallèles, ceci afin de prendre en compte les différents aspects de l'instrument que ces lattes doivent incarner (cf. § III).

Pour permettre aux étudiants de découvrir plus rapidement le schème SU1, nous avons décidé d'une rapide présentation des possibilités offertes par la RBP (cf. annexe 2, étape 1).

En anticipant l'éventualité que les étudiants soient encore bloqués comme dans la phase pré-expérimentale ou que la motivation s'estompe et qu'ils aient envie d'abandonner, nous avons conçu des aides : elles sont proposées si les étudiants en demandent ou bien si on en repère qui seraient en

[9] C'est ici probablement la démonstration la plus rapide mais elle est loin d'être spontanée pour les étudiants !

[10] Pour les détails, cf. Berthe & Cazier (2000).

difficulté ou en train de se démotiver. Dans les deux cas, soit ils choisissent l'aide qui leur semble convenir soit on leur donne une aide selon les difficultés rencontrées ou les pistes essayées.

En effet, deux sortes d'aides sont prévues : l'une sous forme de texte, l'autre sous forme de dessin. Dans chacun des deux cas, la construction évolue selon trois phases (cf. Annexe 1). Comme un jeu de cartes, ces aides sont disponibles sur des petits cartons posés sur le bureau du professeur. L'étudiant ayant recours à une aide, quelle que soit sa forme, pourra se contenter de la première carte ou bien demander au fur et à mesure les deux suivantes. Dans la conception de ce matériel, la difficulté majeure consiste à faire en sorte de fournir des indications tout en laissant une place à l'initiative de l'étudiant.

Ces aides pourraient aussi être utilisées au bénéfice du groupe classe : dans ce cas, afin d'enrichir la mise en commun, l'enseignant choisirait de fournir à un groupe une construction qui n'a pas été découverte ou utilisée par d'autres groupes.

Nous sommes finalement parvenues à structurer une séance en quatre étapes :

- Étape 1. Présentation de la RBP : *Que peut-on faire avec cet instrument ?*

Lors de la mise en commun de cette étape, on se limite à mimer au tableau les propositions de quelques étudiants afin de ne pas laisser de traces suggérant trop des usages possibles lors de l'étape suivante.

- Étape 2. Le problème de la construction du milieu d'un segment.
- Étape 3. Zoom sur la construction CM1 : *Peut-on prouver qu'il s'agit d'un parallélogramme particulier ? Lequel ?*

Les étapes 2 et 3 comportent chacune un moment de travail de groupes suivi d'une mise en commun qui servira aussi pour revisiter les savoirs géométriques que nous avons évoqués plus haut. La phase 3 peut se conclure avec une réflexion sur d'autres constructions possibles et immédiates ainsi qu'un problème classique d'application.

- Étape 4. Retour sur la situation : analyses « méta ».

Le lecteur trouvera en Annexe 1 des précisions supplémentaires sur chacune des quatre étapes.

Dans l'atelier, après avoir discuté avec les participants autour des savoirs mathématiques mis en jeu par la situation, nous avons orienté les discussions sur des points qui demeurent cruciaux dans cette phase de la recherche.

Dans la suite de ce texte, nous allons donc traiter ces différents aspects en croisant nos réflexions avec celles des participants à l'atelier dont la contribution a été forte enrichissante.

VI - LES SAVOIRS METAMATHEMATIQUES, DIDACTIQUES ET PEDAGOGIQUES EN JEU

Nous désignons par *savoirs métamathématiques* les savoirs qui sont destinés aux étudiants eux-mêmes afin qu'ils améliorent leurs compétences en mathématiques. Nous parlons de savoirs pédagogiques ou didactiques pour ceux qui pourraient leur servir en tant qu'enseignants. Les savoirs didactiques demeurent liés à la discipline, en l'occurrence les mathématiques ; les savoirs pédagogiques sont des savoirs communs à différentes disciplines scolaires.

Quels savoirs de ces types pourraient émerger au travers de cette situation en relation avec le scénario que nous avons conçu et mis en place ? Et comment les faire émerger ?

Cette première réflexion nous a encouragées à analyser, avec la complicité des participants, la structure de ce scénario : est-elle pertinente ? Les choix opérés sont-ils judicieux ?

Nous présentons ci-après une synthèse des échanges que nous avons eus avec les participants sur les différents savoirs en question : lesquels pourraient faire avec les étudiants l'objet d'un travail de relecture, voire d'une institutionnalisation ?

1 Savoirs métamathématiques

1.1 *Prise de conscience des* savoirs mobilisables *et non* disponibles

Les étudiants sont souvent capables de réciter des propriétés, par exemple celle de la position du centre de gravité d'un triangle sur ses médianes. Mais aucun ne pense à utiliser cette propriété pour effectuer la construction, comme a pu le faire une des participantes de l'atelier. De la même manière, certains peuvent réciter la formule du calcul de l'aire d'un parallélogramme, mais aucun ne l'utilise pour effectuer une démonstration. On peut faire prendre conscience de cela aux étudiants et introduire à ce propos les concepts de savoirs *mobilisables* ou *disponibles*, au sens de Robert (1995), comme outils d'interprétation de ces phénomènes.

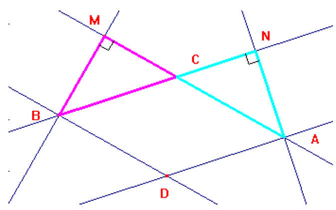
1.2 *Appréhender une figure géométrique*

Deux étapes bien distinctes apparaissent dans la consigne proposée aux étudiants : d'une part effectuer une construction, d'autre part démontrer que la construction effectuée produit bien le résultat demandé. La première étape demande une articulation entre les propriétés géométriques de la figure à construire et les contraintes techniques de l'instrument à disposition. Ici, on cherche un point, le milieu d'un segment, mais pour ce faire il faudra passer par des éléments de dimensions supérieures, des droites et des surfaces sans compter que le point cherché sera obtenu par l'intersection de droites.

Une fois ce premier obstacle franchi, les étudiants doivent parvenir à trouver l'idée d'une solution pour la démonstration cherchée. Pour cela, il faut qu'ils prennent conscience qu'il faudra modifier le regard sur la figure en l'enrichissant de tracés supplémentaires et en focalisant l'attention sur certaines de ses parties On voit ici l'intérêt de la description de Duval (1994) de l'appréhension d'une figure géométrique, pour interpréter les différentes difficultés qui se présentent à chacune des étapes. A ce stade de notre recherche, cet aspect reste à développer.

1.3 *Dialectique dessin/figure et paradigmes géométriques*

Comme nous venons de l'évoquer, au moment de la démonstration, il peut être utile d'introduire des points, des droites, etc. Par exemple, lorsque l'on veut montrer que la construction CM1 permet d'obtenir un losange, on peut par exemple tracer des perpendiculaires à main levée pour obtenir la figure ci-contre. La question qui est alors posée par quelques étudiants est : « mais comment fait-on pour tracer une perpendiculaire avec la RBP ? ». Un pas de côté peut alors être fait sur les différents statuts du dessin.



Dans la construction avec la RBP, on peut considérer que l'on est dans G1 (au sens de Houdement & Kuzniak, 2006), le dessin est l'objet géométrique sur lequel on travaille. Au moment de la démonstration, on passe dans G2 (Houdement & Kuzniak, 2006) et le dessin n'est plus qu'un représentant d'un objet théorique. Il peut alors tout aussi bien être fait à main levée. La perpendiculaire à (BC) passant par B existe, je peux donc la tracer.

Il est intéressant de faire repérer aux étudiants ces différents statuts du dessin, ces différents paradigmes géométriques, mettre en évidence que l'on n'arrête pas de naviguer entre les deux paradigmes, expliciter ce que l'on attend d'eux dans l'épreuve de mathématiques du concours[11].

Ces paradigmes sont aussi un outil pour leur expliquer pourquoi on ne les laisse pas, par exemple, affirmer que le quadrilatère obtenu dans la construction CM1 est un losange et qu'on leur demande de le démontrer : on attend d'eux non pas une justification perceptive (« je vois sur le dessin ») qui relèverait de G1, mais une démonstration de type hypothético-déductif, qui relève de G2.

1.4 *La difficulté de la rédaction des programmes de construction*

On connaît les difficultés que les étudiants rencontrent lors de la rédaction d'un programme de construction, difficultés qu'eux-mêmes sont souvent amenés à sous-évaluer. Dans cette situation, les

[11] Houdement & Kuzniak (2006, p 196) et JORE (2006, p 121) mettent en évidence que certains sujets de concours obligent les étudiants à travailler tantôt dans G1, tantôt dans G2, et ce de manière totalement implicite.

étudiants peuvent être invités à dicter un scénario de construction à l'enseignant au moment de la mise en commun. Celui-ci peut alors mettre en évidence que :

- il est nécessaire de nommer les objets construits (droites, points) au fur et à mesure, pour pouvoir les réutiliser ensuite ;
- il faut utiliser le vocabulaire approprié, et donc maîtriser le vocabulaire géométrique ;
- il faut prendre conscience des tracés effectués et mémoriser l'ordre dans lequel on les a effectués (*appréhension séquentielle*, au sens de Duval, 1994).

Une réflexion à ce propos peut être l'occasion pour avancer vers des réflexions pédagogiques et didactiques sur la classe. Lorsque l'on travaille en classe avec des élèves d'école primaire, si on veut qu'ils se souviennent de ce qu'ils ont fait et ne reconstruisent pas autre chose, il ne faudra pas différer cette mise en commun. Ou alors, en la différant, on pourrait faire prendre conscience aux élèves de l'intérêt de nommer les objets construits, de l'utilité d'un programme de construction et, par conséquent, de l'importance de connaître et partager un vocabulaire approprié.

2 Les savoirs didactiques et pédagogiques en jeu

Le postulat de notre stratégie de formation, entre homologie et transposition, est en effet que, après avoir fait vivre aux étudiants une situation riche, ici la construction du milieu d'un segment avec la RBP, on peut introduire des éléments de didactique de manière contextualisée, de sorte que ces éléments apparaissent comme des outils permettant de mieux analyser les activités qui ont été vécues.

2.1 Le passage de l'artefact à l'instrument

D'après Offre et *al.* (2006), les difficultés dans l'utilisation des instruments semblent moins être liées à la manipulation de ceux-ci qu'à la capacité à isoler une propriété géométrique dont l'instrument est porteur. L'usage des instruments par les élèves nécessite donc l'apprentissage des schèmes qui les gouvernent. Le sujet de notre atelier a spontanément orienté nos discussions dans ce sens : nous avons ainsi partagé nos avis à propos des difficultés à prendre en compte dans le passage de l'artefact à l'instrument (Rabardel, 1995).

On met du temps à s'approprier la RBP, dit une participante, comme l'élève qui découvre une équerre pour la première fois et qui se demande ce qu'il peut en faire et comment l'utiliser. Il a fallu un temps à certains pour apprivoiser la manipulation de la RBP, un temps pour tous pour découvrir ses deux schèmes d'utilisation. De la même manière, il faut un temps aux élèves pour apprendre à positionner correctement l'équerre, un temps pour comprendre ce que l'on peut faire avec cet instrument.

Si on s'intéresse au compas à l'école, il nous semble qu'un autre aspect peut être mis en évidence. En début de cycle 3, les élèves doivent apprendre à utiliser le compas pour tracer des cercles. Plus tard, le compas va servir à reporter et comparer des longueurs. Cette nouvelle fonctionnalité de l'instrument est difficile à mettre en place chez les élèves. De la même manière, nos étudiants comme les participants à l'atelier ont pu vivre la difficulté à changer leurs habitudes. Quand deux points A et B sont sur la feuille, il va falloir du temps pour apprivoiser le schème d'utilisation SU1 car l'artefact spécifique que nous avons construit pour l'activité pourra aussi être utilisé en tant que règle ordinaire.

Le repérage de cette difficulté étant fait avec les étudiants, on peut introduire les concepts d'artefact et d'instrument, pour mettre des mots sur ces observations. Il ne suffit pas de donner un artefact aux élèves pour qu'il devienne ipso facto un instrument : il faut du temps, résoudre des problèmes avec, pour que les schèmes d'utilisation de l'instrument se construisent. Une question s'est alors posée au groupe, qui reste pour le moment sans réponse définitive : faut-il montrer dès le départ les deux schèmes d'utilisation aux étudiants, ou faut-il prendre le temps de les leur laisser construire ?

2.2 Le travail de groupe

Cette activité peut être l'occasion d'une analyse de la situation du travail de groupes. Différents fonctionnements apparaissent :

- dans certains groupes, l'un trace, les autres regardent et discutent, proposent ;
- dans d'autres groupes, chacun effectue sa construction et les étudiants échangent après.

On voit, ou non, apparaître un fonctionnement espéré : l'un des étudiants lance une piste, reprise par un autre, qui aboutit avec un troisième. La collaboration prend alors toute sa valeur. On a réussi ensemble ce que l'on n'aurait pas réussi à faire seul. Il peut être intéressant de faire échanger les étudiants sur le fonctionnement de leur groupe, pour faire émerger des conditions de bon fonctionnement du travail de groupes, de sorte que les étudiants puissent ensuite oser proposer des travaux de groupes à leurs élèves.

2.3 Les cartes aides

Comme nous l'avons déjà évoqué plus haut, les *cartes aides* ont été conçues comme un dispositif de différenciation, pour relancer le travail de l'étudiant en difficulté. Dans ce cas, notre intention est de remplacer l'enseignant qui ne peut aider tous les groupes en même temps ; mais aussi de *doser* les informations fournies car l'enseignant, s'il est là, pourrait en dire trop.

En concevant un dispositif en trois étapes, nous avons pensé à aider l'étudiant en lui fournissant d'abord les premiers éléments de la construction et en l'encourageant ensuite à poursuivre de façon autonome. L'étudiant en grande difficulté peut toutefois profiter de la totalité des cartes. Nous pensons qu'il lui reste alors encore du travail à sa charge car, qu'il s'agisse du dessin ou du texte, il devra l'interpréter.

À l'issue des discussions eues dans l'atelier, une question a surtout été soulevée à l'égard de ces aides. Vaut-il mieux des photographies avec la présence de l'instrument plutôt qu'un dessin ? Dans ce cas, l'aide conceptuelle serait accompagnée d'une aide gestuelle.

Ces mêmes réflexions pourraient faire l'objet d'une discussion avec les étudiants où, en considérant les aides comme étant une des variables didactiques de la situation, on pourrait se demander quelle est leur influence sur les stratégies que les élèves pourraient mettre en œuvre. Et puis, spontanément, orienter leurs réflexions sur des savoirs davantage pédagogiques et didactiques, par exemple : quels dispositifs de différenciation dans des activités de géométrie avec les élèves ? sur quelles variables jouer pour les mettre en place ?

2.4 Typologie de problèmes

Une autre variable didactique que les étudiants doivent pouvoir utiliser est la nature des problèmes que les enseignants proposent aux élèves, en étant conscients que, pour un même énoncé, cette nature dépend de plusieurs facteurs, notamment des savoirs disponibles des élèves. Il est possible de réfléchir avec les étudiants sur le type de problème qui leur a été posé. Est-ce un problème ouvert ? ou un problème de réinvestissement ?

Si on reprend les caractéristiques des problèmes ouverts de Arsac et al. (1991), il s'agit bien *d'un problème d'énoncé court et compréhensible, ne contenant ni la méthode ni la solution, permettant à chacun qui le cherche de faire des essais*. L'objectif des problèmes ouverts est principalement la démarche de résolution. Elle est ici intéressante. Il s'agit de faire émerger qu'une manière de trouver, c'est de choisir une configuration, un théorème, qui permet d'effectuer la construction demandée. A défaut, on obtient le tracé un peu par hasard. C'est aussi de faire fonctionner les différentes appréhensions de la figure (Duval, 1994). C'est encore de travailler alternativement dans G1 pour effectuer les tracés et émettre une conjecture, et dans G2 pour effectuer la démonstration de la pertinence du tracé.

Mais quand le formateur propose cette activité, il attend également des étudiants qu'ils utilisent des propriétés de géométrie plane au programme du concours. Le contenu mathématique est central, généralement déjà connu des étudiants (même si mal maîtrisé). C'est alors de ce point de vue également un problème de réinvestissement des savoirs antérieurs.

VII - CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

1 Conclusions

Les participants à l'atelier nous ont confortées dans l'idée que cette situation est pertinente en formation des M1, tant sur le plan mathématique, que sur les plans métamathématique, pédagogique et didactique. Certains souhaitent d'ailleurs l'utiliser, avec des M1, des M2, et même en formation continue. Pour notre population, des questions demeurent cependant, que nous allons ici synthétiser.

La construction des schèmes d'utilisation de la RBP, en particulier le schème SU1, peut s'avérer longue. La pré-expérimentation que nous avons faite, tout comme la mise en activité des participants à l'atelier, a montré que certains pouvaient ne jamais penser au SU1. Comme nous l'avons signalé précédemment, une question reste alors posée : quel peut être l'inconvénient à présenter dès le départ les deux schèmes d'utilisation de la RBP ?

Deux possibilités s'offrent au formateur : utiliser cette situation en début de formation, ou en fin de formation. Dans le premier cas, elle est l'occasion de revisiter les théorèmes de géométrie plane, dans le second cas, il s'agit plutôt d'une activité de révision de ces mêmes contenus. Il semble que la majorité des participants envisagent de l'utiliser plutôt en début de formation mais la question reste ouverte.

En nous concentrant sur la RBP en tant qu'instrument, plusieurs aspects méritent d'être approfondis.

Tout d'abord, à propos du matériau de la RBP : faut-il qu'il soit opaque ou transparent ? Car, lorsqu'elle posée sur la feuille, la règle opaque cache le segment ou une partie de la construction, ce qui représente une difficulté dans l'utilisation.

Par ailleurs, la RBP est-elle un simple prétexte pour faire de la géométrie plane, voire de la didactique de la géométrie, ou peut-elle devenir un nouvel instrument dans la trousse de l'étudiant ? Qu'advient-il si, lors du concours et alors qu'on lui demande d'effectuer une construction sans indiquer les instruments autorisés, il utilise la RBP ? Remarquons, à ce propos, que certaines constructions de base telles que, par exemple, le milieu d'un segment ou la bissectrice d'un secteur angulaire sont moins coûteuses à réaliser avec la RBP qu'avec la règle et le compas.

L'utilisation de la RBP dans le cadre du concours suggère une autre question. Les démonstrations des constructions effectuées amènent à utiliser des propriétés qui n'ont pas forcément l'habitude d'être institutionnalisées. Citons par exemple : *Toute sécante qui coupe une famille de droites parallèles équidistante est partagée en segments de même longueur, la propriété caractéristique du losange comme parallélogramme avec des hauteurs égales,* ou encore *les cas d'isométrie pour les triangles rectangles.* Peut-on sans inconvénient institutionnaliser ces propriétés et laisser les étudiants les utiliser dans l'écrit du concours ?

La situation de la construction du milieu d'un segment a été la seule exploitée dans les premières expérimentations. Serait-il intéressant de travailler avec les étudiants sur d'autres constructions à l'aide du même et seul instrument ? Nos objectifs à court terme nous encouragent à rester encore sur la construction du milieu d'un segment mais l'éventualité d'en introduire d'autres n'est pas à écarter car, par exemple, des activités de réinvestissement pourraient être proposées aux étudiants en cours d'année. Ce serait un prétexte pour réviser encore le chapitre de la géométrie plane.

2 Perspectives

Ces questions encore ouvertes vont être au cœur de nos prochaines expérimentations et analyses. Certaines constructions feront l'objet de nouvelles expérimentations auprès d'étudiants de première année pour l'année universitaire à venir : elles enrichissent en effet nos perspectives de travail sur le sujet en nous permettant d'envisager d'autres types de consignes et d'activités, par exemple : partir d'une bande dessinée et demander aux étudiants de retrouver la construction et de la justifier ; partir d'un programme de construction pour effectuer la construction et la justifier ; partir d'une propriété et trouver une procédure qui l'exploite.

Mais nous envisageons aussi un travail avec un groupe d'étudiants de deuxième année : avec ce public, nous viserions davantage un questionnement qui les conduirait à mettre en question et/ou élargir leurs savoirs pédagogiques et didactiques.

Un problème de construction conduit à un travail d'analyse et de synthèse où les savoirs géométriques s'articulent avec ce que l'instrument à disposition permet (ou ne permet pas) de faire. Dans ce contexte, il nous semble important d'observer plus finement les étudiants en activité, au travers des vidéos réalisées et à réaliser, afin d'étudier leurs difficultés en relation avec les différentes manières d'appréhender une figure (Duval, 1994) et aux déconstructions dimensionnelles que l'on est conduit à opérer selon le savoir géométrique mis œuvre (Duval & Godin, 2005).

BIBLIOGRAPHIE

ARSAC G. & AL (1991), *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.

BERTHE D. & CAZIER B. (2000), La règle à bords parallèles, *Repères-IREM*, **40**, TOPIQUES éditions

DUVAL R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères-IREM*, **17**

DUVAL R. & GODIN M. (2005), Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, 76, 7-27

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **11**, IREM de Strasbourg

KUZNIAK A. (1994) Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Actes du XXIe Colloque Inter-Irem des professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres*, *16-18 mai 1994, Chantilly*

JORE F. (2007), Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique. Thèse de l'université Paris 7.

OFFRE B., PERRIN-GLORIAN M.-J., VERBAERE O. (2006), Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, *Grand N*, **77** et *Petit x*, **72**

PARSYSZ B. (2002) : Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, *Actes du 28ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres*, Tours, mai 2001, éd. Presses Universitaires d'Orléans.

RABARDEL P. (1995). Qu'est-ce qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mises en situation, *Outils pour le calcul et le traçage de courbes*, CNDP–DIE (http://www.cndp.fr/archivage/valid/13420-1126-1194.pdf, consulté le 13 juillet 2014)

ROBERT A. (1995), *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques, Tome I, Géométrie*, éd. Ellipses

ANNEXE 1. UN EXEMPLE DE *CARTES AIDES* : LA CONSTRUCTION CM2

Aide « Texte T »

Tracez la droite d passant par A et B.

Tracez une droite d_1 parallèle à d.

Tracez une droite d_2 parallèle à d_1 et distincte de d.

Tracez une droite d_3 sécante à d en A. Elle coupe d_1 en C et d_2 en D.

Aide « Suite Texte T »

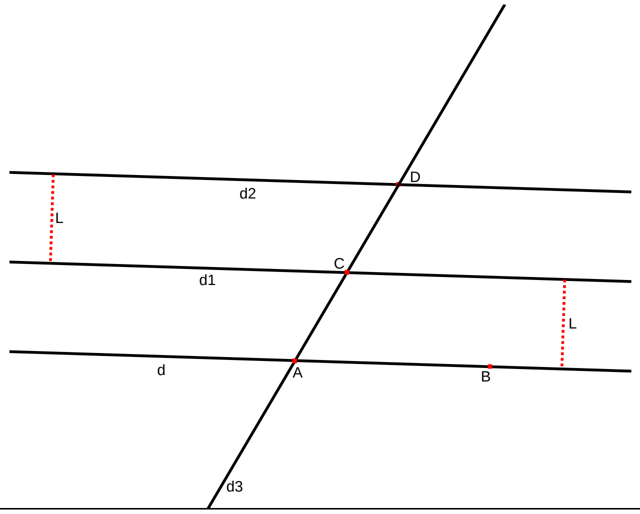
Tracez la droite (BD).

Travaillez dans le triangle ABD.

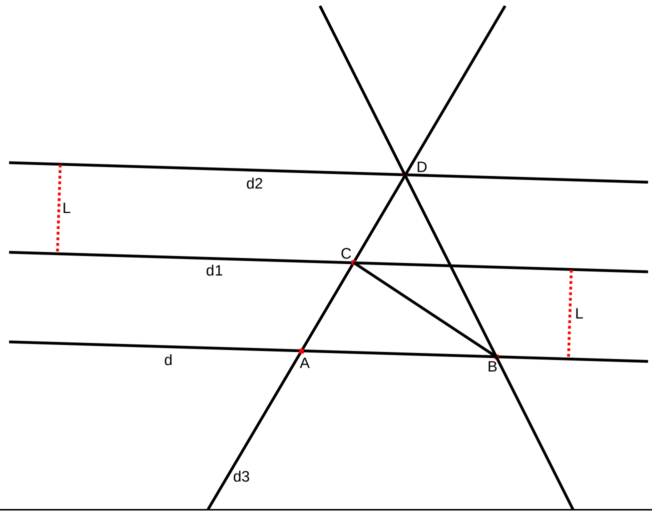
Aide « Fin Texte T »

Tracez les médianes du triangle ABD.

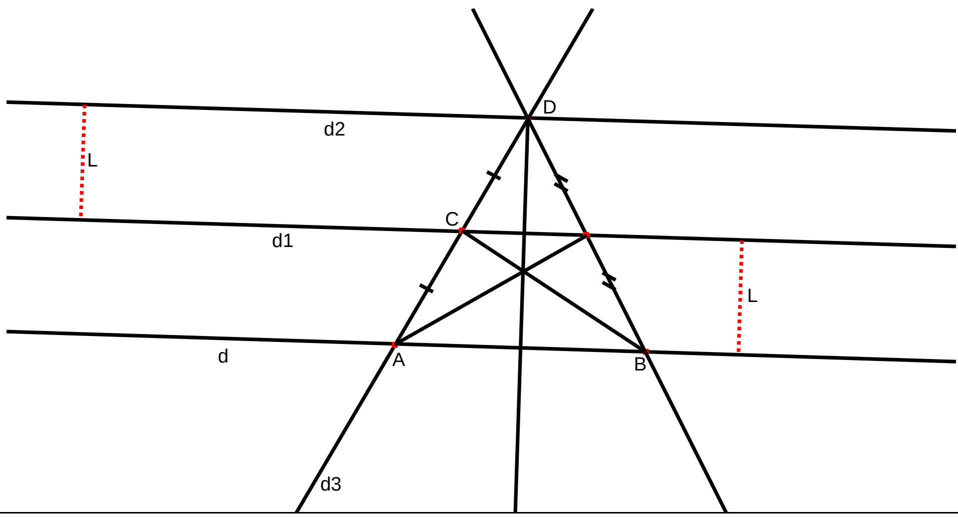
Aide « Dessin T »



Aide « Suite Dessin T »



Aide « Fin Dessin T »



VIII - ANNEXE 2. LES QUATRES ETAPES DE LA SEANCE EXPERIMENTEE

Étape 1

On montre aux étudiant(e)s, sans les nommer, deux règles à bords parallèles (une petite qui sera distribuée plus tard, et une grande qu'on utilisera au tableau) : ***Voici un instrument de géométrie. Que peut-on faire avec cet instrument ?***

On pose la question aux étudiant(e)s. On les laisse réfléchir quelques minutes et on fait aussitôt une mise en commun en ***mimant*** *au tableau leurs propositions à l'aide de la grande règle et un faux feutre (seuls les points donnés, les droites données seront tracés, à main levée). Une liste des usages possibles est donnée dans le texte, § III.1. Les usages exploitant les deux bords de cet instrument sont sans doute moins connus mais il faudra les faire ressortir car utiles pour le problème proposé en étape 2.*

A chaque binôme d'étudiant(e)s, on distribue du papier uni, format A4 et A3, et des règles à bords parallèles. On leur demande de se munir d'un crayon à papier.

Étape 2

« Vous disposez d'une règle à bords parallèles, d'un crayon papier et de feuilles de papier uni. Placez deux points A et B distincts, tels que AB > L (L étant la largeur de la règle).
Tracez le milieu de [AB].
Démontrez que le point ainsi construit est bien le milieu de [AB].
Vous ne pouvez pas vous servir de la gomme pour effacer. Nous vous demandons également de numéroter au fur et à mesure les différents traits de construction afin de retrouver plus facilement la chronologie des tracés ».

On peut construire le milieu de [AB] de différentes manières, ce qui conduit à envisager des aides variées qui seront mises à disposition des étudiant(e)s au bout de x min depuis le moment où on a proposé l'énoncé de l'exercice.

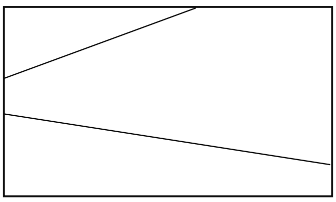
Étape 3

A partir de là, on retient la construction amenant à tracer un « parallélogramme » et ses diagonales et on s'interroge sur sa nature : ***Peut-on prouver qu'il s'agit d'un parallélogramme particulier ? Lequel ?***

Les étudiant(e)s ont peut-être déjà affirmé qu'il s'agit d'un losange mais on les conduit à prouver que, par cette construction, on obtient bien un losange.

À partir de là, on demanderait aux étudiant(e)s de déduire d'autres constructions possibles et immédiates (cf. § IV.3).

Un problème classique pourrait ainsi être proposé : ***à l'aide d'une règle à bords parallèles, sans sortir du cadre, tracez la bissectrice du secteur angulaire dont on n'a pas le sommet.***



Étape 4

Retour sur certains moments de la séance : une analyse didactique.

ANALYSER UNE RESSOURCE POUR FORMER A L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

Catherine Taveau
Formatrice ESPE Aquitaine
COPIRELEM
Catherine.taveau@espe-aquitaine.fr

Résumé
Cet article reprend, en grande partie, celui édité dans les actes du XXXXè colloque de la COPIRELEM puisque l'atelier, qui en est l'origine, a été de nouveau proposé à ce colloque. Le titre était alors « Analyser la pertinence d'une ressource pour la construction de modules de formation dans le domaine de la géométrie plane ». Entre temps, la ressource a évolué, s'est enrichie et les réactions des participants à l'atelier ont été différentes.

Les travaux actuels de la COPIRELEM se sont orientés sur les contenus mathématiques et didactiques « incontournables » pour enseigner la géométrie à l'école primaire et également sur des situations de formation « consistantes » souvent reprises dans l'ouvrage Concertum (2003).
Pour cela, nous avons construit une ressource ouverte, évolutive et susceptible de s'adapter à des dispositifs de formation très variables (formation initiale ou continue).
Cette ressource met en lien, dans une carte mentale (construite à partir du logiciel libre « xmind »), ces contenus d'enseignement et ces situations de formation. L'entrée par les situations de formation a été privilégiée et est complétée par des analyses de manuels, de productions d'élèves, de vidéos de classe,…

Lors de l'atelier, les participants vont découvrir et s'approprier cette ressource pour essayer de concevoir une trame de formation.

Après avoir présenté l'origine du projet et rappelé les objectifs assignés à la formation des maîtres en géométrie, nous explicitons la forme de la ressource construite et nous évoquons les critiques et les exemples d'utilisation ébauchés par les participants au cours de l'atelier.

L'ORIGINE DU PROJET

1 Évolution des structures de formation

Depuis une dizaine d'années, la formation initiale destinée aux Professeurs des Écoles au sein des IUFM n'a cessé d'être modifiée afin de s'adapter aux plans de formations successifs, à l'évolution des contenus et de la structure du concours de recrutement (CRPE) puis aux différentes maquettes d'enseignement dans le cadre de la « mastérisation ».

Ainsi, en quelques années, les heures de formation sont passées de 150 h en moyenne pour deux années (PE1-PE2) à moins de 80 h (M1-M2) dans la plupart des Masters et l'intégration des IUFM au sein des universités a souvent entraîné des changements de format de cours : les cours intégrés de 3 h devenant des TD de 2 h accompagnant des cours magistraux.

De plus, depuis la « mastérisation », une nouvelle contrainte très forte s'est imposée, celle de valider les différents enseignements répartis en UE à travers des épreuves écrites en temps limité et communes. Cette contrainte pèse sur le travail des formateurs qui doivent penser la cohérence de l'ensemble et l'articulation entre TD, cours magistraux et évaluation des UE semestrielles, problématique inexistante auparavant puisque seule l'obtention du CRPE validait l'année de PE1.

Ces contraintes institutionnelles ont obligé les formateurs à faire des choix, souvent dans l'urgence, et jamais satisfaisants. Il s'agit d'adapter les contenus d'enseignement, tout en essayant de conserver les mêmes objectifs : revisiter, en donnant du sens, les savoirs mathématiques nécessaires pour enseigner à l'école primaire.

Ce nouveau cadre, et notamment le découpage imposé en cours magistraux et TD, a parfois favorisé le développement de démarches d'enseignement dont la cohérence interne est plus que floue : les savoirs mathématiques n'étant plus revisités d'un point de vue professionnel, articulant savoirs savants et savoirs didactiques et pédagogiques, mais plutôt présentés comme une succession de notions indépendantes illustrées par un cours magistral suivi de travaux dirigés d'application.

2 Un manque de formation des nouveaux formateurs

Au niveau de la COPIRELEM, nous nous sommes interrogés sur notre propre capacité à développer une formation mathématique professionnelle dans cette nouvelle structure universitaire et nous nous sommes rendu compte que, en s'appuyant sur notre culture commune, nous pouvions plus facilement concilier les contraintes institutionnelles avec une formation mathématique professionnelle de qualité.

Cette culture commune, constamment interrogée et enrichie des réflexions à différents niveaux (notamment depuis les travaux de thèses de Kuzniak (1994), Houdement (1995), etc.), a été pendant 10 ans (de 1997 à 2009) diffusée et partagée au sein du réseau des formateurs non seulement au moment des colloques, mais plus spécialement dans le cadre des séminaires de formation de nouveaux formateurs, organisés par la COPIRELEM.

Lors de ces séminaires, au-delà des échanges et des questionnements liés à leur nouvelle fonction, les nouveaux formateurs étaient confrontés aux situations de formation, les vivaient, les analysaient et pouvaient ainsi se les approprier. Les situations de formation privilégiées dans ce cadre étaient le résultat d'une co-construction par les formateurs de la COPIRELEM qui les avaient auparavant mises à l'épreuve en formation et en avaient analysé le potentiel.

Beaucoup de ces situations, s'appuyant souvent sur des démarches d'homologie (Kuzniak 1994), visent l'acquisition des contenus mathématiques destinés à des Professeurs des Écoles et abordent simultanément les notions didactiques liées à l'enseignement de ces notions.

Or le changement structurel que représente la « mastérisation », accompagné par le recrutement de nouveaux formateurs de profils très différents (enseignant-chercheurs ou enseignants issus du second degré), a vu souvent disparaître le recours à ces situations de formation au profit de pratiques très universitaires, plus économiques en temps, non porteuses de sens pour des étudiants bien souvent en grande difficulté concernant les savoirs mathématiques.

Il nous a semblé opportun de mobiliser notre énergie pour réorganiser et enrichir notre « patrimoine culturel », issu du travail dans le réseau des IREM, concernant les situations de formation construites par la COPIRELEM (Concertum (2003)) et donc d'élaborer une première ressource qui mette en évidence la richesse et la complémentarité de ces situations consistantes et porteuses de sens pour la formation initiale ou continue des Professeurs des Écoles.

Nous nous sommes, dans un premier temps, focalisés sur l'enseignement de la géométrie plane.

II - LES OBJECTIFS PRIORITAIRES DANS LA FORMATION DES MAÎTRES DANS LE DOMAINE DE LA GÉOMÉTRIE

1 Qu'est-ce que « faire » de la géométrie à l'école primaire ?

L'une de nos priorités est de préciser auprès des enseignants en formation une certaine conception de l'enseignement et de l'apprentissage de la géométrie et des idées relativement partagées à ce sujet.

La géométrie n'est pas une leçon de choses…

Il ne suffit donc pas de présenter les objets géométriques les uns après les autres ou d'illustrer leurs définitions par quelques exemples pour atteindre les objectifs visés. La construction de concepts géométriques nécessite des actions concrètes sur du matériel.

L'activité géométrique suppose la mobilisation « en actes » de certaines connaissances plus ou moins explicitables selon l'âge des élèves mais néanmoins opérationnelles. Par exemple, à l'école maternelle, les élèves peuvent reconnaître un rond en le faisant pivoter sur lui-même et utiliser ainsi implicitement la propriété d'invariance d'un cercle par rotation.

L'enseignant favorisera l'entrée de ses élèves dans la géométrie en faisant vivre les concepts, c'est-à-dire en les confrontant à certaines situations. Ainsi, il nous semble important d'insister auprès des enseignants (en formation initiale ou continue) sur la nécessité de **"faire faire de la géométrie"** aux élèves plutôt que d'enseigner de manière ostensive des connaissances géométriques.

Faire de la géométrie, c'est résoudre des problèmes.

Les situations proposées aux élèves doivent être suffisamment riches pour les amener à entrer dans une réelle démarche de résolution de problèmes. Ainsi, comme pour toute résolution de problème, l'élève devra prendre des initiatives, il aura à sélectionner des informations (par exemple, lors de l'analyse d'une figure) pour ensuite organiser sa démarche de résolution (par exemple, rédiger les étapes nécessaires de la construction).

2 Spécificités de la géométrie et de son enseignement

Une autre de nos priorités vise à attirer l'attention des enseignants en formation sur les spécificités de la géométrie et de son enseignement. Il existe une complexité intrinsèque à la géométrie qui, selon nous, se manifeste à travers différents aspects de l'activité géométrique.

Les modes de validation

L'activité géométrique requiert des modes de validation spécifiques et évolutifs dans la mesure où l'élève est amené, lors de la résolution d'un problème, à se référer, plus ou moins directement (ne serait-ce que mentalement), à l'espace sensible. Par conséquent, du cycle 1 au cycle 3, l'enseignement de la géométrie participe à l'apprentissage du raisonnement mathématique, à l'initiation au débat et à l'argumentation.

L'importance du langage

Une autre spécificité de l'enseignement de la géométrie est le rôle joué par le langage dans l'acquisition des concepts (Gobert 2005). Le vocabulaire géométrique présente certaines difficultés liées notamment à la polysémie de certains termes. Il est important d'attirer l'attention des enseignants sur la nécessité de choisir, au moment de la préparation de la séance, les définitions à donner aux élèves et le vocabulaire à employer. C'est à travers la mise en mots de certaines actions sur le matériel que se construisent les concepts géométriques. De plus, ce vocabulaire évoluant au fil de la scolarité, il est nécessaire pour l'enseignant de s'interroger sur les mots à utiliser et/ou à exiger en fonction de l'âge de ses élèves. Il faut aussi insister sur l'existence pour un concept donné d'une pluralité de définitions renvoyant à des conceptions différentes (exemples : le cercle ; les droites parallèles…) et de la nécessité de la mise à disposition des élèves de plusieurs conceptions ou de conceptions adaptées à leur niveau (Duval & Godin 2005).

L'usage d'instruments

Enfin, l'activité géométrique nécessite le recours à divers instruments dont l'usage ne va pas de soi et nécessite également un apprentissage.

L'enseignant doit en particulier avoir conscience des spécificités des instruments du commerce. La règle graduée est à la fois instrument de géométrie (outil pour vérifier l'alignement ou pour réaliser des tracés (relier des points, prolonger des segments, tracer des droites parallèles particulières…)) mais aussi instrument de mesure (y compris lorsque la règle est cassée…). Grâce aux graduations figurant en général sur l'un de ses côtés, l'équerre peut servir non seulement de gabarit pour construire ou vérifier un angle droit mais aussi d'instrument pour tracer des lignes ou encore mesurer des longueurs… Cette multiplicité de fonctions des instruments est souvent source de confusions. Il est nécessaire d'accompagner les élèves dans la découverte de ces instruments afin de les aider à établir des liens entre leur usage, les relations voire les concepts en jeu (exemple : la règle est l'instrument privilégié pour faire vérifier l'alignement de points, cet alignement définissant la notion de droite).

3 Enseigner la géométrie nécessite certaines connaissances

Il est souvent "douloureux" pour les étudiants de travailler eux-mêmes la géométrie. De plus, leurs représentations de ce domaine et des connaissances à acquérir restent très liées à leur parcours scolaire. Les étudiants identifient spontanément un certain nombre de manques, ils ressentent non seulement la nécessité d'une prise de recul relative aux connaissances à enseigner mais également un manque par rapport aux tâches à proposer aux élèves. Il est donc indispensable de les aider à re-donner du sens à l'activité géométrique.

Rappelons que les étudiants doivent tout à la fois revoir certaines notions dans la perspective des épreuves du concours mais également acquérir des connaissances mathématiques et didactiques pour enseigner.

Enseigner la géométrie nécessite des connaissances disciplinaires pour pouvoir dominer les notions à enseigner.

Voici une liste de notions géométriques de base :

Les objets et leurs propriétés : le point, les droites, les segments, les polygones, les non polygones, les lignes, secteur angulaire, diagonale, axe de symétrie, médiatrice, hauteur, bissectrice...

Les relations entre objets : alignement, parallélisme, perpendicularité, intersection, centre, milieu, symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation, rotation, avoir même longueur, représenter le même angle, agrandissement-réduction.

Enseigner la géométrie nécessite des connaissances relatives au maniement des instruments

Tout instrument de construction est d'abord un objet technologique. Analyser le lien entre l'objet technologique et l'objet géométrique peut permettre de mieux comprendre le maniement de ces instruments.

Enseigner la géométrie nécessite des connaissances didactiques

Il s'agit non seulement de connaissances issues de la didactique générale des mathématiques (exemple : variables didactiques liées aux instruments et aux supports) mais aussi des connaissances issues de la didactique de la géométrie (ex : espaces, paradigmes géométriques, …).

Le formateur permet aux futurs enseignants de s'approprier un certain nombre de connaissances et d'en percevoir leur opérationnalité dans la pratique de leur métier. Celui-ci sélectionne ainsi des résultats issus de la recherche dans le but d'une transposition visant à donner aux enseignants des outils pour enseigner. Citons ici les principales recherches dans le domaine de la géométrie.

Les travaux de Houdement et Kuzniak (1999) ont mis en évidence différents paradigmes géométriques qui permettent de :

- donner des repères dans une progressivité des apprentissages, identifier les objectifs visés et saisir les enjeux des programmes ;

- donner des repères par rapport aux attentes vis à vis des élèves aux différents moments de leur scolarité ;

- aider à la construction de séances qui balisent cette progression.

La définition des différents niveaux d'espaces - micro, méso et macro - (Berthelot-Salin - 1999) aide à :

- faire prendre conscience de l'intérêt de proposer des activités aux élèves dans différents niveaux d'espaces ;

- établir des liens entre connaissances spatiales et connaissances géométriques.

Concernant le rapport aux figures géométriques, Duval (registres des représentations sémiotiques) (Duval, Godin, 2005) et Perrin-Glorian (2012) proposent un cadre qui peut aider à :

- décrire différentes manières de « voir » une figure ;
- faire prendre conscience de la nécessité d'accompagner le changement de regard sur les figures ;
- concevoir des tâches spécifiques pour apprendre à travailler et à manipuler des objets autres que points, droites, segments (retour sur des objets 3D, puis 2D, puis 1D, voire 0D).

Nous avons donc choisi de construire une ressource ouverte, évolutive qui illustre la richesse et la variété des travaux de la COPIRELEM dans le domaine de la géométrie. Il est aussi essentiel que cette ressource puisse être utilisée par un formateur peu familier de ces situations.

III - UNE CARTE MENTALE POUR ORGANISER LES SITUATIONS DE FORMATION

Notre principale difficulté a été de trouver un moyen d'organiser la diversité des situations de formation, de les compléter par des outils permettant d'enrichir un cours et aussi d'intégrer des éléments théoriques issus de la recherche sur le domaine.

Pour cela, nous avons choisi d'utiliser un logiciel libre de carte mentale (*xmind*), disponible et fonctionnant sur tout système d'exploitation.

1 L'entrée par les situations

Un logiciel de carte mentale, nécessite dans un premier temps de prendre une option concernant l'arborescence : quel sujet principal ? quels sujets secondaires ?

Concernant les choix sur le type d'entrées et sur la cohérence dans l'organisation des branches de cette carte, plusieurs options étaient possibles :

- Entrer par les savoirs mathématiques (triangles, théorème de Thalès, quadrilatères, médiatrice,…) ;
- Entrer par les compétences des programmes de l'école primaire (reconnaître, reproduire, décrire, construire) ;
- Entrer par les situations de formation.

Pour rester en cohérence avec notre projet, nous avons choisi une entrée par ***les situations de formation*** déjà éprouvées qui représentent pour nous, formateurs, une culture commune, partagée et souvent fondamentale dans le cadre de la formation des Professeurs des Écoles.

Au fur et à mesure de l'élaboration de cette ressource, nous nous sommes demandé quelles ressources supplémentaires pourraient être pertinentes pour tout formateur débutant ou chevronné.

En listant les supports que les uns et les autres utilisaient en formation après avoir proposé les situations déjà évoquées et qui pouvaient constituer un ensemble cohérent, nous avons alors décidé de compléter la ressource notamment par des analyses de productions d'élèves, des analyses de manuels scolaires, des analyses de scénarios de classe et des extraits de vidéos.

Les documents proposés dans la ressource sont quasiment tous issus des travaux de la COPIRELEM, enrichis par des articles de recherche sur le domaine de la géométrie et complétés par des liens vers des sites institutionnels (académiques ou ESPE).

Une dernière question, non banale, a été de savoir si cette ressource pouvait être lisible, pertinente, exploitable pour un formateur n'ayant pas participé à la conception de cette ressource.

Une des solutions pour obtenir des réponses à cette question était de tester l'opérationnalité de la ressource lors d'un atelier, ce qui est donc l'objet de cet article.

Au moment de la rédaction de ce compte-rendu, cette ressource a déjà évolué et s'est enrichie par la construction d'autres branches de la carte mentale.

IV - MISE À L'ÉPREUVE DE LA RESSOURCE LORS DE L'ATELIER

1 Le travail dans l'atelier

Suite à une présentation de l'origine du projet et des questions soulevées précédemment, les consignes de travail sont ainsi énoncées :

Dans un premier temps, vous allez essayer de vous approprier cette ressource. Elle est construite sous la forme d'une carte mentale, mais chaque branche ne constitue pas un parcours obligatoire.

Puis par binôme, vous allez essayer de construire un module de formation pour lequel vous choisirez le format (public visé : formation initiale, formation continue ; durée du module choisie) tout en vous aidant de la ressource proposée.

Pendant cette élaboration de module, il s'agit de questionner la ressource : ses manques, sa pertinence, ses difficultés d'appropriation…

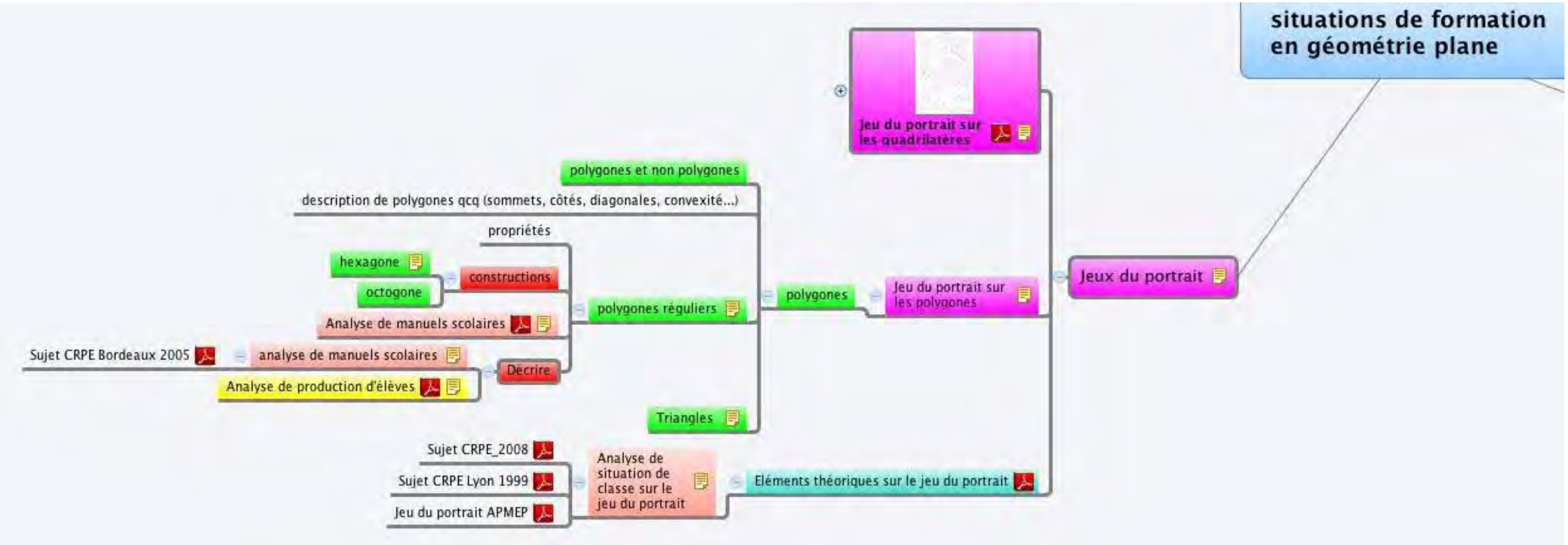
Pour terminer, nous mettrons en commun vos analyses afin de pouvoir améliorer notre ressource pour une utilisation plus pertinente.

2 Présentation de la ressource[1]

Deux images successives de la ressource proposée aux participants de l'atelier sont représentées ci-dessous : l'une illustrant une vue générale de la ressource et l'autre développant en détail la branche concernant la situation *jeu du portrait*.

[1] La ressource interactive, sous le logiciel *xmind*, est disponible sur le CD des actes. Pour la lire, il suffit d'installer le logiciel en utilisant la version adaptée à votre système d'exploitation.

Lors du colloque de Mont-de-Marsan, l'ensemble de la ressource est disponible sur clé USB.


situations de formation en géométrie plane
Jeu du portrait sur les quadrilatères
polygones et non polygones
description de polygones qcq (sommets, côtés, diagonales, convexité...)
propriétés
hexagone
constructions
octogone
polygones réguliers
polygones
Jeu du portrait sur les polygones
Jeux du portrait
Analyse de manuels scolaires
Sujet CRPE Bordeaux 2005
analyse de manuels scolaires
Décrire
Analyse de production d'élèves
Triangles
Sujet CRPE_2008
Analyse de situation de classe sur le jeu du portrait
Eléments théoriques sur le jeu du portrait
Sujet CRPE Lyon 1999
Jeu du portrait APMEP

3 Une ressource très riche mais peut être difficilement accessible en l'état

Contrairement à l'atelier de l'an passé, les participants de cette année n'ont pas réussi, dans le temps impartis, à concevoir des trames de scénarios de formation. La ressource étant beaucoup plus complète, ils ont choisi de l'explorer dans sa totalité pour mieux répondre à notre demande qui était de mettre cette ressource à l'épreuve.

Après avoir exploré les différentes branches et leurs contenus, les participants s'accordent sur l'intérêt et la grande richesse d'une telle ressource. L'appropriation de la carte mentale semble simple, mais néanmoins, de nombreuses remarques surgissent :

- Il est difficile de retrouver les notions mathématiques qu'un formateur souhaite aborder avec ses étudiants (Pythagore, droites des milieux, constructions à la règle et au compas) ;

- Les intitulés des situations de formation peuvent être trompeurs (assemblages de triangles équilatéraux qui entraînent vers les polygones par exemples) ou peuvent ne pas donner de sens à un formateur non habitué à utiliser ces situations appartenant, entre autres, à la culture de la COPIRELEM.

- Face à la richesse de cette ressource, il manque une indexation concernant :

  - les contenus mathématiques à travailler ;
  - les analyses de productions d'élèves ;
  - des analyses d'extraits de manuels scolaires ;
  - le nom des activités possibles à mener en formation ;

Des mots-clés devraient apparaître pour faciliter la recherche.

Certains participants se sont demandé ce dont ils auraient besoin pour une formation destinée à des enseignants de cycle 2. Ils ont alors cherché dans la ressource ce qui pouvait manquer : introduction du vocabulaire, le type de traces écrites. On constate que les documents de la ressource sont principalement destinés à l'enseignement de la géométrie au cycle 3, il serait donc souhaitable de l'enrichir par des documents destinés à l'enseignement au cycle 2 ou adapter ceux du cycle 3 au cycle 2.

4 Quelle suite possible pour ce type de projet ?

Les différentes remarques des participants de l'atelier ont fait apparaître la difficulté d'adapter une ressource.

En construisant cette carte mentale, la COPIRELEM avait pour objectif de faire connaître une façon de penser la formation, une façon de concevoir des enseignements auprès d'étudiants se destinant à devenir enseignant à l'école primaire.

Elle illustre une palette des possibles pour penser une formation de qualité en géométrie, notamment en évitant d'entrer par les contenus, ce qui nous semble réducteur et peu adapté à un public souvent en difficulté en mathématiques et plus particulièrement en géométrie.

Elle réunit finalement un ensemble de ressources de nature différente, organisées selon des choix pas toujours explicites pour un formateur lambda. Elle nécessite donc une bonne connaissance de la totalité des documents proposés pour une utilisation efficace.

Si un travail se poursuit, il semble nécessaire alors de faire des propositions de parcours de formation utilisant cette ressource.

V - BIBLIOGRAPHIE

BERTHELOT R., SALIN M-H. (1999). L'enseignement de l’espace à l’école, in *Grand N* n° 65, pp. 37-61

COPIRELEM, (2003). Concertum, Carnet de route de la COPIRELEM, éd. Arpeme.

DUVAL R., GODIN M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures, *in Grand N* n° 76, pp. 7-27.

GOBERT S. (2005). Quelles formulations pour les savoirs géométriques ?, in *Grand N* n° 76, pp. 29-44.

HOUDEMENT C. (1995). Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies, Thèse Université Paris-Diderot.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (1999). Réflexions sur l’enseignement de la géométrie, in *Grand N* n° 64, pp. 65-78.

KUZNIAK A. (1994). Étude des stratégies de formation en mathématiques des enseignants du premier degré, Thèse Université Paris-Diderot.

PERRIN-GLORIAN M-J. (2012). Vers une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie plane du CP à la fin du collège ? Les mathématiques en marche au long de la scolarité obligatoire : L'exemple de la symétrie axiale, in *Bulletin de l'APMEP.* n° 499. pp. :25-332.

UNE SITUATION D'HOMOLOGIE-TRANSPOSITION : LE SOLIDE CACHE

Jean-Claude AUBERTIN

Formateur, Espe Aquitaine
Copirelem
jclaub@gmail.com

Yves GIRMENS
Formateur, Espe Montpellier 2
Copirelem
Yves.girmens@free.fr

Résumé
La situation « le solide caché » est un problème à résoudre proposé dans la brochure «Travaux géométriques en cycle 3 » du CRDP de Lille (2000). L'enjeu de l'atelier est de réfléchir sur l'intérêt d'utiliser cette situation, à l'origine conçue pour des élèves de cycle 3, dans le cadre de la formation initiale ou continue des maîtres. En plaçant les participants en situation de résoudre eux-mêmes le problème, l'atelier a permis de réfléchir sur les mécanismes et les bénéfices d'un processus « d'homologie » en vue de la mise en œuvre de la situation en formation des maîtres puis de sa transposition en classe, avec des élèves de cycle 3.
Cette réflexion s'appuie sur les concepts d' « homologie » et de « transposition » issus des travaux d'Alain Kuzniak dans sa recherche sur «les stratégies utilisées pour former les maîtres du 1er degré en mathématiques ».

Les participants doivent résoudre de manière coopérative un problème sur les solides. Dans un deuxième temps, en s'appuyant sur leur vécu, ils sont invités à faire un pas de côté pour dégager et analyser certains aspects mathématiques, didactiques et pédagogiques dans le but d'utiliser eux-mêmes cette situation en formation des maîtres et de permettre à ces maîtres de mettre en œuvre à leur tour la situation en la transposant dans leur classe.

I - PRESENTATION ET DEROULEMENT

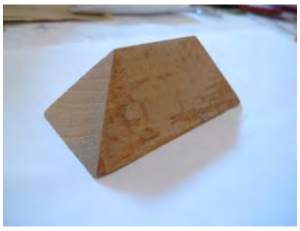
Un solide est caché dans une boîte. Les participants doivent réaliser un patron pour fabriquer un solide « identique » au solide caché en formulant une suite de questions auxquelles des personnes connaissant le solide répondent par oui ou par non (voir l'annexe 1 pour une présentation détaillée du descriptif et du déroulement de la situation).

1 Choix du solide

D'emblée, nous avions sélectionné deux solides possibles, « le toit » et « l'antitoit » qui nous semblaient bien adaptés à une mise en situation de formateurs : ce sont des polyèdres, leur nombre de faces est petit, leurs faces sont des polygones simples.

Chacun des deux solides retenus a comme faces : un carré, deux triangles équilatéraux isométriques, deux trapèzes isocèles isométriques dont la « grande base » est le double de la « petite base ».

« L'antitoit »



« Le toit »

Nous avons opté pour le solide « antitoit » car nous voulions éviter que les participants, une fois qu'ils auraient identifié les natures des différentes faces, envisagent spontanément le solide de forme « toit », sans se poser la question de la manière dont les faces sont « attachées ». Il nous a paru intéressant d'observer si les participants se posent la question sans se laisser entraîner vers la forme « toit » qui est « culturellement » très familière.

En formation initiale et continue des maîtres, la séance a été menée en choisissant le solide « toit ».

Pour évacuer la question de la détermination des dimensions des arêtes qui n'entrait pas dans notre projet, nous avons précisé que « solide identique » devait être interprété comme « un solide de même forme », pas nécessairement à la même échelle que le solide référent caché.

2 Déroulement de l'Atelier

<u>**Premier temps**</u> : Exposé des stratégies de formation des maîtres repérées et théorisées par Alain Kuzniak (voir Annexe 2)

Il est précisé que la situation qui va leur être proposée sera étudiée dans une perspective de stratégie d'homologie et de transposition.

<u>**Deuxième temps**</u> : Mise en œuvre de la situation

Un solide est caché dans une poche. Il s'agit de réaliser un patron pour fabriquer un solide identique au solide caché par une suite de questions auxquelles on ne peut répondre que par « oui » ou par « non ».

Première phase : Un groupe de 3 personnes, nommé G1 est constitué. Le solide référent lui est confié sans que les autres participants le voient. Le groupe G1 se retire avec le solide et doit imaginer les questions qui peuvent lui être posées et quelles réponses il doit donner.

Les autres participants sont répartis en deux autres groupes G2 et G3 pour réfléchir et se mettre d'accord sur les questions qu'ils décideront de poser.

Chaque groupe notera ses questions sur une feuille.

Deuxième phase : Formulation des questions

Chacun des groupes pose à tour de rôle une question à laquelle le groupe G1 répond « oui » ou « non » ou bien « on ne peut pas répondre » si la question appelle une réponse autre que « oui » ou « non » ou porte sur un nom de solide.

Un animateur note au tableau les questions avec la réponse apportée dans l'ordre où elles apparaissent. Quand il l'estime utile, il peut proposer des pauses afin de permettre à chaque groupe de se concerter pour faire le point et ajuster son questionnement.

3 Le questionnement produit au cours de la recherche

G2 : Est-ce que c'est un polyèdre régulier ? Réponse : Non.

G3 : Est–ce que c'est un polyèdre ? Réponse : Oui.

G2 : Le solide a-t-il au moins 2 faces identiques ? Réponse : Oui.

G3 : Est-il convexe ? Réponse : Oui.

G2 : A-t-il 3 faces ? Réponse : Non.
G3 : A-t-il plus de 10 faces ? Réponse : Non.

G2 : A-t-il moins de 6 faces ? Réponse : Oui.
G3 : A-t-il moins de 3 faces ? Réponse : Non.

G2 : A-t-il 3 faces identiques ? Réponse : Non.

Une première pause est alors proposée, chaque groupe ayant assez d'éléments pour faire une synthèse sur le nombre de faces et passer en revue de premiers solides possibles.

G3 : Est-ce que 3 faces sont des parallélogrammes ? Réponse : Non.
G2 : Le solide a-t-il deux paires de faces identiques ? Réponse : Oui.

G3 : Le solide a-t-il 4 faces triangulaires ? Réponse : Non.
G2 : La face identique à aucune autre est-elle un parallélogramme ? Réponse : Oui.

G3 : Est-ce que 2 faces sont des parallélogrammes ? Réponse : Non.
G2 : Y–a-t-il une paire de triangles ? Réponse : Oui.

G3 : Pas de question.
G2 : Est-ce que la paire de faces non parallélogrammes sont des quadrilatères ? Réponse : Oui.

G3 : Les 2 faces quadrilatères sont-elles des trapèzes ? Réponse : Oui.

A ce stade, une deuxième pause est proposée pour que chaque groupe fasse une synthèse des caractéristiques des faces à partir des informations recueillies.

G2 : La face identique à aucune autre est-elle un carré ? Réponse : Oui.
G3 : Les trapèzes sont-ils exactement superposables ? Réponse : Oui.

G2 : Les triangles sont-ils isocèles ? Réponse : Oui.
G3 : Les trapèzes sont-ils particuliers ? Réponse : Oui.

G2 : Les triangles sont-ils équilatéraux ? Réponse : Oui.
G3 : Les 2 triangles équilatéraux sont-ils superposables ? Réponse : Oui.

Les animateurs proposent une 3e pause pour permettre aux groupes de réfléchir s'ils ont assez d'informations pour proposer un patron.

G2 : Le petit côté du trapèze fait-il la moitié du grand côté ? Réponse : Oui.
G3 : Les trapèzes sont-ils rectangles ? Réponse : Non.

G2 : La petite base du trapèze touche-t-elle le carré ? Réponse : Oui.

G3 : Les deux trapèzes sont-ils isocèles ? Réponse : Oui.

Troisième phase : Résolution

Une pause est proposée pour que chacun des groupes G2 et G3 se concerte pour construire un patron.

Quatrième phase : Mise en commun - chaque groupe présente le patron qu'il a élaboré. Un échange a lieu entre les deux groupes autour des informations utilisées.

Cinquième phase : Validation et bilan

Le solide caché est dévoilé par le groupe G1 et est confronté aux patrons proposés par les groupes G2 et G3.

Les participants sont invités à un retour réflexif sur les questions posées, l'exploitation des informations recueillies pour ajuster le questionnement, les modes de raisonnement mis en oeuvre…

4 Quelques remarques formulées lors de l'échange de la 5e phase

La situation proposée est la résolution coopérative d'un problème qui s'appuie sur la mise en œuvre de la plupart des opérations logiques.

Un groupe explique qu'à certains moments, il a tenté des questions « coup de poker » dans l'espoir de « récupérer d'un coup » un maximum d'informations.

Un autre raconte qu'il a écarté d'emblée l'hypothèse d'une sphère puisqu'il s'agissait de construire un patron pour chercher un polyèdre « relativement simple ».

L'un des groupes exprime qu'il a cherché à organiser et hiérarchiser les questions, animé par le désir de trouver la solution le plus rapidement possible.

Bien que le terme « solide identique » ait été explicité comme « solide de même forme » par les animateurs au moment de la formulation de la consigne, l'un des groupes avoue qu'il a été gêné par ce terme, se demandant s'il renvoyait à des longueurs « exactement superposables » ou homothétiques.

Les participants du groupe G2 précisent qu'au moment de la 3e pause, ils étaient certains d'avoir toutes les informations et que c'est lors d'une tentative de faire le patron qu'ils se sont aperçus qu'il leur manquait le rapport entre les bases du trapèze.

Le groupe G3 déclare que sa recherche s'est plutôt centrée sur une représentation du solide en 3 dimensions.

Le groupe G3 précise qu'ils ont posé la dernière question pour se « rassurer », bien que la réponse à cette question puisse être déduite des informations recueillies précédemment.

Le groupe G1, détenant la solution et chargé de répondre aux questions des autres groupes, révèle que lors de la préparation, il avait envisagé des questions relatives à des symétries et des sections, qui n'ont été posées par aucun des groupes.

Suite à une question d'un participant de ce groupe, les deux groupes de recherche déclarent qu'ils n'ont pas ressenti une compétition entre eux, en particulier grâce aux pauses successives.

II - RETOUR SUR LE VECU DE LA SITUATION

Les animateurs proposent ensuite aux participants de faire un retour réflexif sur la situation qu'ils ont vécue selon deux perspectives : la mise en œuvre de cette situation en formation initiale de professeurs des écoles puis la transposition de la situation dans une classe de cycle 3.

Les participants sont invités en groupes à réaliser une affiche à partir des deux consignes suivantes :

1) En imaginant que vous avez fait vivre cette situation en formation initiale ou continue de professeurs des écoles, quels savoirs vous semble t-il possible d'en dégager ensuite sur les plans mathématique, didactique, pédagogique ?

2) Dans la perspective d'une mise en œuvre dans une classe de cycle 3, quels seraient les objectifs d'apprentissage mathématiques possibles et quels seraient les choix didactiques et pédagogiques pour les atteindre ?

1 Les savoirs mathématiques, didactiques et pédagogiques

Les participants ont proposé les aspects suivants pouvant être mis en évidence, selon eux, par des personnes en formation après avoir « vécu » cette situation.

1.1 Aspects mathématiques

- Des savoirs de géométrie plane et le langage associé : triangles et quadrilatères particuliers, polygones, rapport de longueurs des côtés.
- L'utilisation des instruments de géométrie pour tracer, mesurer, reporter une longueur.
- La relation d'Euler pour contrôler la pertinence des informations recueillies sur le nombre de faces, d'arêtes et de sommets.
- Des savoirs de géométrie dans l'espace : notions de faces, côtés, arêtes, sommets, position relative des faces, nombre de faces, de sommets, notion de gabarit, invariance d'un solide par rapport à son orientation, critère de classement de solides.
- Sur le patron : le concept, le passage solide/patron et inversement, la pluralité des patrons.
- Les propriétés des figures planes et des solides.
- Les formes de raisonnement : raisonnement par induction (émission et test d'hypothèses), par disjonction de cas, par déduction à partir d'une corrélation d'informations, à partir de négations de propositions.
- Des mises au point sur le sens d'expressions utilisées telles que « moins de 6 faces », « deux paires de faces superposables », « faces identiques ».

1.2 Aspects didactiques

- Le choix du matériel mis à disposition : règle, compas …
- Les critères de choix du solide par rapport aux connaissances supposées acquises et aux objectifs d'apprentissage.
- La notion de solide prototypique.
- Le processus de recherche : allers-retours entre réflexion théorique et expérimentations.
- La place de cette situation dans une séquence d'apprentissage : reprise d'un savoir ancien ou bien savoir nouveau.
- Le principe d'une situation qui permet de créer une référence.
- Les conceptions d'apprentissage en rapport avec la résolution du problème.
- La notion de variable didactique : nature du solide, choix des instruments disponibles…
- Différents moments d'action, de formulation, de validation repérés dans les diverses phases (en référence à la théorie des situations de Guy Brousseau).
- La situation de résolution coopérative d'un problème.

1.3 Aspects pédagogiques

- La préparation matérielle, la mise en place et le lancement de l'activité.
- Le déroulement de la séance (les différentes étapes et leur enchaînement).

- La position et le rôle de l'enseignant au cours des différentes phases.
- La constitution des groupes et notamment le choix du groupe qui répond aux questions (experts…).
- Le rôle et la place des pauses ; en particulier les pauses pour réguler le sentiment de compétition entre les groupes.
- Le rôle de l'expression orale aux différents moments.
- Le rôle du travail en groupes : écoute, prise en compte de l'apport d'un autre, échange, débat.

Les animateurs reviennent sur le rôle important des « pauses », à un moment où une concertation entre les membres de chaque groupe est nécessaire pour actualiser et ajuster le questionnement, chaque pause contribuant aussi à tempérer un esprit de compétition qui pourrait perturber l'enchaînement des questions.

2 Conditions et modalités d'une mise en œuvre de la situation en classe de cycle 3

La situation peut être mise en œuvre en classe de cycle 3 en respectant des modalités identiques et un scénario similaire.

La résolution de ce problème en formation des maîtres puis dans une classe est porteuse d'apprentissage de connaissances géométriques et de raisonnements assez similaires, tant pour les enseignants en formation que pour les élèves dans une classe.

Lors de la transmission de la consigne aux élèves, il semble nécessaire d'illustrer la notion de« solide identique » ou « solide de même forme » à une échelle différente par la présentation d'exemples : deux cubes de tailles différentes, de deux pavés droits de tailles différentes, ayant les mêmes proportions.

Les adaptations principales concernent les variables en lien avec le choix du solide.

En premier lieu, les connaissances sur la forme des faces et leur articulation doivent être « disponibles ».

En relation avec l'objectif d'apprentissage, deux variantes sur la nature du solide : le solide choisi est déjà connu et l'enjeu de l'apprentissage sera un approfondissement ou bien le solide choisi est nouveau et sa détermination se fera par un processus de rapprochement/différenciation par rapport aux solides déjà connus.

Deux variantes concernant le dispositif : le solide que l'on cherche à déterminer peut être « caché » comme dans la situation expérimentée ou bien il est présent (mais non identifié) dans une collection visible (référentiel).

Pour une mise en œuvre dans une classe de cycle 3, il est nécessaire de réfléchir à une synthèse de savoirs à l'issue de la résolution.

Dans la perspective de la transposition de cette situation en classe, il paraît opportun, en formation de professeurs des écoles, de lancer la réflexion par des questions telles que :

-D'après vous qu'est-ce que les élèves ont appris suite à cette activité ?

-Quelles sont les différentes phases que vous avez repérées et pour chacune de ces phases, quel est le rôle de l'élève et le rôle de l'enseignant ?

-Le dispositif choisi vous semble-t-il pertinent ? Pourquoi ? Quelles modifications proposeriez-vous ?

III - RETOUR SUR UNE SITUATION D'HOMOLOGIE-TRANSPOSITION

En référence à la typologie établie par Alain Kuzniak dans sa recherche (cf Annexe 2), une situation relevant d'une stratégie de formation par homologie consiste à faire vivre une situation de résolution d'un problème selon les **conceptions et choix didactiques et pédagogiques** qu'on souhaite voir mis en œuvre **dans leur enseignement** par les personnes qui l'expérimentent**.**

L'homologie visée par cette situation concerne tout à la fois une activité mathématique (la résolution d'un problème sur les solides), des aspects didactiques (par exemple le choix du solide par rapport à l'objectif d'apprentissage, la place de cette situation dans une séquence…) et des modalités pédagogiques (par exemple le dispositif, le déroulement et la gestion par l'animateur).

Dans le cadre de l'atelier, et en se référant à la grille d'analyse d'une situation de formation présentée en annexe 3, **l'homologie concerne trois « étages ».** En effet, cette situation a été mise en œuvre avec des formateurs dans le but qu'ils la mettent, à leur tour, en œuvre avec des professeurs des écoles en formation pour qu'eux-mêmes, dans leurs classes, fassent vivre cette situation à leurs élèves, ceci moyennant une adaptation au niveau où ils enseignent de certains aspects mathématiques (le choix du solide par exemple), didactiques et pédagogiques (travail de transposition).

La mise en œuvre d'une telle situation de formation relevant d'une stratégie d'homologie mais aussi de transposition fait intervenir des activités intellectuelles se situant à différents niveaux, facilement repérables dans le déroulement de l'atelier.

Le niveau 0 est relatif à l'activité mathématique pour résoudre le problème, dans ses différents aspects : l'apprentissage de connaissances relatives aux solides et à l'espace ainsi que différentes formes de raisonnement constituant les étapes de la démarche pour résoudre le problème.

Cette activité mathématique a été pratiquée par les participants de l'atelier (i.e. des formateurs), comme elle sera pratiquée par des maîtres en formation (lors de la mise en œuvre de la situation en formation) puis par des élèves (lors de la mise en œuvre de la situation transposée dans une classe de cycle 3).

Pour des formateurs (dans cet atelier) et des maîtres en formation, le fait de résoudre le problème comme s'ils étaient des élèves, leur permet de saisir les enjeux de la situation et son potentiel mathématique ; pour des maîtres en formation ainsi que pour leurs élèves en classe, la résolution du problème génère des apprentissages de connaissances et de raisonnements mathématiques qui seront dégagés au cours d'un moment d'institutionnalisation.

Au niveau 1, il s'agit, pour les participants de l'atelier et les maîtres en formation, une fois qu'ils ont résolu le problème, de faire un pas de côté pour repérer et analyser des aspects mathématiques, didactiques et pédagogiques de la situation qu'ils ont « vécue », afin d'identifier des savoirs et savoir-faire sur les plans mathématique, didactique et pédagogique potentiellement présents dans la situation.

Au niveau 2, en se plaçant en position d'enseignant, il s'agit de réfléchir, en s'appuyant sur les éléments dégagés aux niveau précédent, sur les modalités de mise en œuvre de cette situation et sur les adaptations possibles dans une perspective de mise en pratique de l'activité, en formation pour un formateur ou dans une classe pour un professeur d'école.

C'est à ce niveau qu'un enseignant en formation est amené à envisager les conditions de la « transposition », pour ses propres élèves, de la situation « vécue ».

Au niveau 3, toujours en position d'enseignant, tant pour les participants de cet atelier que pour les maîtres en formation, il s'agit d'identifier, au delà du contexte, des aspects génériques présents dans la « situation vécue » qu'ils pourront utiliser en tant qu'enseignant pour enrichir leurs pratiques d'enseignement : par exemple, la manière de gérer une activité de recherche en groupes, de gérer un déroulement complexe d'une activité en différentes phases, la manière d'organiser et d'animer une mise en commun à partir d'affiches, etc…

La réflexion au niveau 4 consiste, dans une position s'apparentant à celle d'un chercheur, à problématiser certains aspects mathématiques, didactiques ou pédagogiques pour initialiser une démarche de recherche. Ce niveau d'analyse n'a pas été abordé lors de cet atelier.

Lors de la mise œuvre de la situation en formation initiale ou continue des maîtres, le **retour réflexif** sur **la situation vécue**, doit permettre de conduire des analyses aux niveaux 1, 2, 3.

IV - BIBLIOGRAPHIE

KUZNIAK A (2003) Les stratégies utilisées pour former les maîtres du 1er degré en mathématiques, *Carnets de Route de la Copirelem*, *Concertum tome 3*, *COPIRELEM,* 7-22

BRACONNE-MICHOUX A. & ZUCHETTA H. (2011) Intérêts et limites pour la formation d'une situation d'homologie, in *Actes du XXXVIIIe colloque COPIRELEM*, IREM de Dijon.

AUBERTIN J C. (2005) & GIRMENS Y & MAURIN C & ROYE L (2005) A propos de l'enseignement des solides : quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour la formation des maîtres ? p 153, in *Actes du XXXIIe colloque COPIRELEM*, IREM de Strasbourg.

ROYE L (2000). Le solide caché, *Travaux géométriques en cycle 3 : Apprendre à résoudre des problèmes*, p 150, CDDP Lille.

V - ANNEXES

Annexe 1 : Description et déroulement de la situation

Tâche : Un solide est caché dans une boîte. Il s'agit de réaliser un patron pour fabriquer un solide identique au solide caché par une suite de questions auxquelles on ne peut répondre que par oui ou par non.

Dispositif :

- Un groupe G1 de trois personnes connaît le solide caché. Il répondra par « oui » ou par « non » aux questions qui sont posées.

- Les autres personnes sont réparties en plusieurs groupes. Chacun des groupes pose à tour de rôle une question demandant une réponse « oui » ou « non ». La question ne doit pas porter sur un « nom » de solide.

Phase 1 : Préparation de la situation :

- Le groupe G1 de 3 personnes reçoit le solide et se retire de la salle pour imaginer les questions qui peuvent être posées et quelles réponses il doit donner (*le solide ne sera plus visible pendant le questionnement)*

- Les autres groupes réfléchissent pour se mettre d'accord sur les questions qui vont être posées. Ces questions sont notées par écrit.

Phase 2 : Collecte d'informations :

- Chaque groupe pose, à tour de rôle, une question.

- Le porte-parole du groupe G1 répond « oui » ou « non ». S'il ne peut pas répondre par « oui ou non », il dit « on ne répond pas ».
  En cas de doute, le groupe G1 peut se retirer pour se concerter et prendre une décision.

- L'animateur écrit toutes les questions au tableau avec les réponses fournies. Il décide de faire des « pauses » pour permettre à chaque groupe de faire le point et de réajuster son questionnement.
-

Phase 3 : Résolution

- Au bout de plusieurs tours, l'animateur demande aux groupes qui questionnent s'ils estiment avoir assez d'informations pour construire un patron.
  S'il y a consensus, il propose à chaque groupe de se concerter pour construire le patron.

Phase 4 : Mise en commun des patrons proposés par les groupes

Chaque groupe présente sa proposition de patron. La confrontation des différentes propositions peut faire naître un débat sur l'interprétation, la corrélation des informations, leur insuffisance. ..

Phase 5 : Validation et bilan

Le groupe G1 dévoile le solide caché qui est confronté aux différents patrons (validation matérielle). Un bilan permet de revenir sur la suite des questions posées : nature, redondance, ordre…

V- ANNEXES

Annexe 2 : Stratégies de formation repérées par Alain Kuzniak

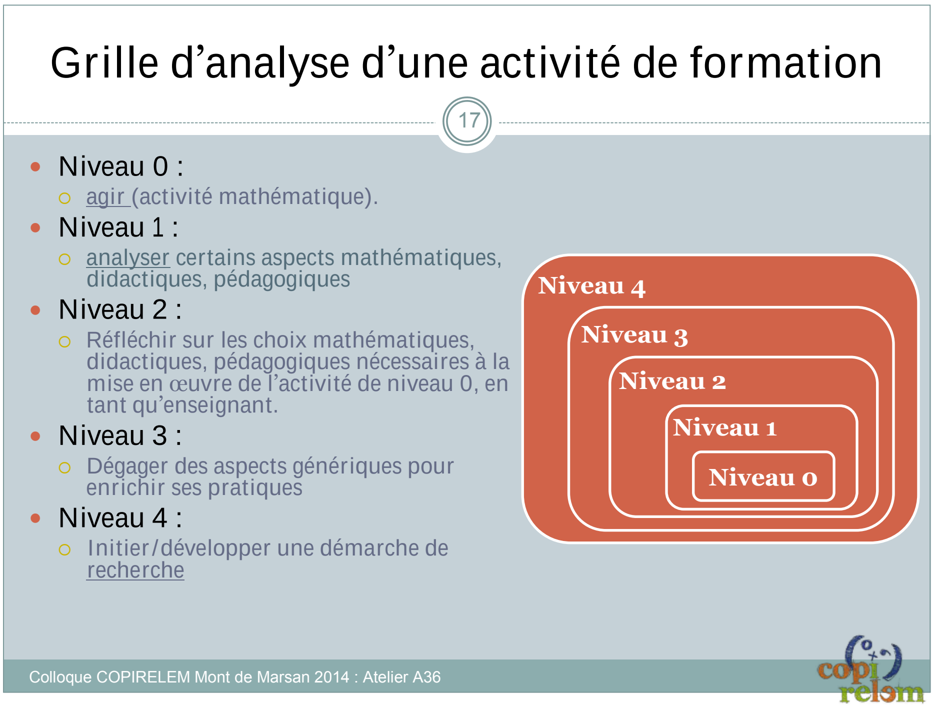
- **Stratégies culturelles** : le formateur diffuse une information ; il veut accroître le savoir mathématique (ou éventuellement didactique) de l'étudiant, sans se préoccuper de la mise en œuvre ultérieure par l'étudiant dans les classes.

- **Stratégies de « monstration » :** le formateur cherche à transmettre une pratique d'enseignement, en montrant la mise en œuvre effective dans les classes, soit in vivo, soit via une vidéo …
  L'étudiant regarde un maître qui fait la classe en visant un objectif mathématique**.**

- **Stratégies d'homologie :** le formateur cherche à transmettre sa propre conception de l'enseignement des mathématiques, en la mettant en œuvre dans son enseignement, ainsi que des habiletés de gestion d'un groupe classe ; il construit des séances à visée mathématique ou didactique ; il attend que les étudiants utilisent dans leurs classes, des mises en œuvre proches de celles des séances qu'ils ont vécues comme élèves.

- **Stratégies de transposition :** le formateur cherche à transmettre un savoir de référence sur l'enseignement et tente de maîtriser le phénomène d'adaptation opéré par les étudiants**.**

Annexe 3 : Grille d'analyse d'une activité de formation



Liste des communications

C11	**Présentation du LéA Saint Charles. Mise en œuvre d'une ingénierie de la soustraction.**	Céline GIORDANO Karine MILLON-FAURÉ
C12	**Coopération entre professeurs d'école et chercheurs au sein d'une ingénierie didactique concernant les premiers apprentissages numériques.**	Mireille MORELLATO Dominique TRUANT
C13	**Étude des effets d'une formation d'initiation à la recherche sur la dynamique du développement des pratiques de professeurs des écoles stagiaires.**	Brigitte GRUGEON-ALLYS Julie HOROKS Monique CHARLES-PÉZARD Julia PILET
C14	**Penser le travail mathématique en formation des maîtres.**	Alain KUZNIAK
C15	**Une ressource à restaurer : un usage commun des mots grandeur, quantité, nombre, numéro, cardinal, ordinal, etc.**	Rémi BRISSIAUD
C16	**Une ressource pour enseigner la numération décimale de position. Des apports essentiels pour la formation des enseignants.**	Frédérick TEMPIER
C21	**Recherche collaborative : questions d'intégration d'une ingénierie didactique broussaldienne aux pratiques enseignantes.**	Michèle COUDERETTE Valérie MARROU Carine CONSTANT Anne ICHES
C22	**La narration d'un jeu de tâches : une ressource pour la formation des enseignants primaires ?**	Christine DEL NOTARO,
C23	**Quelles ressources les enseignants utilisent-ils afin de trouver des énoncés de problèmes ouverts en mathématiques au cycle 3 ?**	Christine CHOQUET
C24	**Enseigner les mathématiques avec des écoliers non ou peu francophones.**	Catherine MENDONÇA DIAS
C25	**Mallettes de ressources mathématiques pour l'école, cycle 1- cycle 2.**	Laetitia BUENO-RAVEL Pierre EYSSERIC Gwenaëlle RIOU-AZOU Sophie SOURY-LAVERGNE
C26	**Analyse de la programmation mathématique au CP de six professeurs d'école.**	Aline BLANCHOUIN
C27	**Quoi de neuf dans la numération au CP ? Une nouvelle ressource pour la classe.**	Eric MOUNIER Nathalie PFAFF,
C28	**Quels critères de validité, quelle appropriation par les enseignants de ressources issues de recherches en didactique ?**	Jacques DOUAIRE Fabien EMPRIN

LE LEA SAINT CHARLES PRESENTATION D'UNE INGENIERIE SUR LA SOUSTRACTION

Céline GIORDANO
PEMF école St Charles 1, l'ESPE Marseille
EA ADEF 4671 Aix-Marseille Université
giordano.celine@neuf.fr

Karine MILLON-FAURE
Chargée d'étude à l'IFE
EA ADEF 4671 Aix-Marseille Université
karine.MILLON-FAURE@univ-amu.fr

Résumé
Dans cette communication à deux voix, nous nous intéressons à l'usage qui peut être fait des ingénieries didactiques non seulement dans le cadre de la recherche mais également pour la formation des enseignants. Après nous être interrogés sur la finalité de certaines ingénieries didactiques, nous présentons les Lieux d'Éducation Associés (LéA) encadrés par l'Institut Français de l'Éducation (IFE) et nous cherchons à montrer l'intérêt que ce dispositif peut présenter à la fois pour les chercheurs et pour les enseignants. Pour illustrer ce point de vue, nous nous focalisons sur un exemple particulier, le LéA Saint Charles, dans lequel nous travaillons toutes deux depuis plusieurs années, et nous détaillons une des réalisations que cette collaboration entre enseignants et chercheurs a permise : une ingénierie didactique sur l'enseignement de la soustraction au CE1. Nous étudions alors l'activité mathématique que cette forme d'enseignement a impulsée dans la classe ainsi que le point de vue de l'enseignante en charge de la classe, afin de mieux comprendre quels ont pu être les changements provoqués par la mise en place de ce dispositif, notamment du point de vue des possibilités d'apprentissage des élèves. Ceci nous amène à nous interroger sur l'intérêt que ce LéA peut représenter non seulement pour les didacticiens, mais également pour les enseignants qu'ils soient ou non associés à cette collaboration.

I - INTRODUCTION

En lien avec la problématique du colloque qui s'intéressait aux ressources susceptibles d'enrichir les pratiques des enseignants et les apprentissages des élèves, nous questionnons dans cette communication, le rôle que pourraient jouer sur ce point les didacticiens. C'est pourquoi nous interrogeons dans une première partie les finalités de certaines ingénieries didactiques emblématiques et nous étudions les obstacles qui peuvent freiner la diffusion de ces ressources auprès des enseignants. Nous présentons ensuite un dispositif soutenu par l'Institut Français de l'Education et qui repose sur la collaboration entre enseignants et chercheurs : le LéA St Charles. L'objectif de ce LéA est de réfléchir à l'amélioration de l'enseignement de la numération et du calcul à l'école primaire en concevant des scénarios de séances susceptibles d'accroître les possibilités d'apprentissage des élèves. Nous illustrerons notre discussion en détaillant une de ces réalisations : une ingénierie de la soustraction au CE1. Après en avoir expliqué les différentes étapes, nous montrons, en nous appuyant sur des travaux d'élèves, en quoi l'usage de cette ingénierie peut enrichir les pratiques enseignantes et améliorer les apprentissages. Ceci nous amènera enfin, à statuer sur l'intérêt que peut représenter le LéA St Charles, d'une part pour les recherches en didactique, mais également pour la production de ressources susceptibles d'être diffusées auprès des enseignants ordinaires.

II - IMPACT DES INGENIERIES DIDACTIQUES SUR L'ENSEIGNEMENT ORDINAIRE

1 Les finalités des ingénieries didactiques

Artigue (1990) définissait les ingénieries didactiques comme étant « un schéma expérimental basé sur des réalisations didactiques en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation et l'analyse de séquences d'enseignement.» (Artigue, 1990, pp. 285-286). Brousseau (2008) précise que « l'ingénierie didactique consiste à déterminer des dispositifs d'enseignement communicables et reproductibles ». Il s'agit donc de la conception par des didacticiens de scénarios, plus ou moins longs, qui sont ensuite expérimentés dans des classes et analysés par les chercheurs. Ceci souligne la dialectique de l'aspect recherche et expérimentation mise en œuvre dans les ingénieries didactiques.

Les premières ingénieries ont été créées dès les années 70 au COREM, sous la direction de Guy Brousseau. Le COREM était formé de chercheurs mais également de professeurs des écoles qui mettaient en place les ingénieries conçues par les didacticiens et contribuaient à l'analyse des séances. Beaucoup d'autres ingénieries ont vu le jour depuis, avec quelques variantes. Citons par exemple les ingénieries de Grenier (1988), de Perrin-Glorian (1992), mais également les parcours d'étude et de recherche de Chevallard (2009 et 2011). De nombreux scénarios, s'appuyant sur des principes issus de recherches en didactiques ont ainsi été créés, puis expérimentés en classe. Les analyses a posteriori de ces séances ont généralement permis de mettre en évidence la richesse de l'activité mathématique auxquelles ces ingénieries didactiques donnaient accès.

Il ne faut toutefois pas croire que l'objectif de toutes ces ingénieries didactiques était de créer des scénarios susceptibles d'améliorer l'enseignement dans les classes, comme le précise Chevallard (2011) :

> « On pourrait distinguer ici, d'emblée, une ingénierie didactique de recherche d'une ingénierie didactique de développement. On saisit en tout cas l'existence d'une tension entre deux pôles, que je désignerai, provisoirement, comme l'ingénierie didactique pour l'usage et l'ingénierie didactique pour la connaissance, tension bipolaire qui existerait donc, à suivre Guy Brousseau, à l'intérieur même de ce qu'il nomme 'l'ingénierie à visée phénoménotechnique' » (Chevallard, 2011).

Perrin-Glorian (2009) distingue également les ingénieries « construites par la recherche et pour la recherche » et celles pour l'enseignement. Les ingénieries du COREM faisaient notamment partie des ingénieries didactiques pour la recherche puisque Brousseau s'est appuyé sur ces observations pour concevoir la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). Son objectif, n'était pas d'améliorer de manière directe l'enseignement mais plutôt d'obtenir des observations nécessaires à ses recherches sans toutefois empêcher qu'enseignant et élèves n'atteignent les objectifs fixés par l'institution : « Dans le cadre des recherches scientifiques, l'ingénierie à visée phénoménotechnique a pour objet de concilier les obligations normales de tout enseignement à des élèves avec la reproduction et l'étude de phénomènes didactiques bien déterminés. » (Brousseau, 2008, p.3)

Pour ces chercheurs, les ingénieries didactiques constituent avant tout un moyen incontournable d'éprouver leurs théories. Ainsi Brousseau disait : « [l'ingénierie didactique] est indispensable pour étudier systématiquement et expérimentalement des modèles théoriques de dispositifs d'apprentissage et d'enseignement (les situations). » (Brousseau, 2008, p.3). De même, citant Chevallard (préparation à la 2e école d'été 1982), Artigue (2011) insistait sur « l'incapacité où nous nous trouvons étant donné le faible développement de notre théorie du système didactique et par conséquent la faiblesse du contrôle par la théorie des opérations de recherche de rencontrer notre objet de connaissance autrement que sous les espèces ou du moins hors du contrôle 'empirique' de l'objet réel dont l'élaboration théorique nous occupe» (Artigue, 2011, p.19). Nous voyons donc que pour beaucoup de didacticiens une ingénierie didactique a pour finalité première de permettre une avancée dans ses recherches. Dans ces conditions, on peut se demander si elles ont également pu être reprises dans les classes ordinaires afin de permettre un enrichissement des pratiques.

2 Diffusion des ingénieries

Au de-là de son utilisation par le chercheur qui l'a conçue, que devient ensuite une ingénierie didactique ? On peut constater que plusieurs d'entre elles jouissent d'une assez bonne diffusion auprès des autres chercheurs : tout didacticien, ou presque, a entendu parler de 'rationnels et décimaux' et de 'la course à 20' de Brousseau (1987 et 1998 respectivement). La diffusion auprès des enseignants par contre, se révèle beaucoup plus difficile. Ces ingénieries ne sont quasiment jamais reprises dans les classes ordinaires et on peut regretter que tout ce travail de recherche ne soit pas également utilisé par les praticiens.

Plusieurs raisons peuvent être évoquées pour expliquer cette réticence des enseignants à s'emparer du travail des chercheurs :

Certains reprochent notamment aux didacticiens de ne pas suffisamment prendre en compte les contraintes pratiques auxquelles ils doivent faire face et donc de concevoir des activités très difficiles voire impossibles à mettre en place dans des classes ordinaires.

Par ailleurs, la mise en place d'une ingénierie didactique va généralement nécessiter une réelle remise en cause de l'enseignant. Il va devoir transformer ses pratiques : modifier par exemple sa gestion de classe en travaillant davantage en groupe, en laissant les élèves manipuler plus souvent, faire davantage confiance au potentiel d'apprentissage des élèves en étant à certains moments, moins directif. On ne peut pas mettre en place une ingénierie didactique de la même manière qu'une activité d'un manuel ordinaire.

Troisième point important qui peut expliquer la faible diffusion des ingénieries didactiques auprès des enseignants : les difficultés de communication entre chercheurs et professeurs. Brousseau disait : « Alors que la description [des phénomènes didactiques] demande des efforts considérables, toutes ces précisions apparaissent comme superflues et même offensantes pour le lecteur, elles sont reçues comme un discours de cuistre. […] En résumé, les enseignants attendent la didactique sur un terrain où ils règnent en 'maîtres' (c'est bien le mot) et où rien ne les prépare ni les motive à la recevoir pour ce qu'elle est. » (Brousseau, 1990)

Ainsi, les didacticiens fournissent des précisions jugées inutiles, voire même offensantes par les professeurs mais oublient certaines informations pratiques que les enseignants jugent indispensables à l'appropriation de ces ingénieries. Il y a donc réellement un problème de communication entre chercheurs et praticiens.

III - LE LEA SAINT CHARLES

1 Les lieux d'Education Associés

C'est certainement la raison pour laquelle les ingénieries collaboratives se développent actuellement et notamment les LéA. Les LéA – Lieux d'éducation associés - ont été créés par l'IFE (Institut Français de l'Education) en 2011. Cette formule a remporté un certain succès puisqu'il y a à ce jour 31 LéA établis et beaucoup d'autres en cours de création. Parmi ces LéA, un seul porte sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Il s'agit du LéA Saint Charles dans lequel nous travaillons toutes deux depuis plusieurs années.

Quelles sont les caractéristiques de ces LéA ? Trois points nous paraissent importants et nous laissent penser que les LéA permettront de surmonter les difficultés précédemment évoquées concernant la diffusion des ingénieries didactiques auprès des enseignants :

- tout d'abord, le LéA est défini dès le départ comme une collaboration entre enseignants et chercheurs, collaboration qui nécessitera la mobilisation des compétences propres à chacune des instances. Ainsi est reconnu l'intérêt de l'expertise des enseignants qui va permettre une meilleure prise en compte des contraintes pratiques.

- deuxième point, cette collaboration s'inscrit dans un temps long. Il ne s'agit plus de demander à un enseignant de mettre en place une ingénierie ponctuelle durant une ou deux séances. Enseignants et chercheurs s'engagent à travailler ensemble pendant plusieurs années. A partir de là, des habitudes de travail vont pouvoir s'installer. La communication va s'améliorer, chacune de ces deux instances apprenant progressivement à connaître l'autre : peu à peu l'enseignant acquerra quelques appuis théoriques lui permettant de mieux appréhender les analyses didactiques qui accompagnent les scénarios d'ingénieries et le chercheur aura une meilleure vision des contraintes pratiques de l'enseignement.

- enfin, l'objectif est clairement double : il doit s'agir d'ingénierie de recherche *et* de développement. L'équipe dans son ensemble s'engage à ce que le fruit de son travail puisse être exploitable à la fois pour la recherche en didactique mais également pour la formation des enseignants. Chaque instance a donc quelque chose à gagner dans cette collaboration.

Comme le disaient Monold-Ansaldi & Favelier (2013) : « Plus que de recherches « sur » l'éducation, il s'agit de recherche « avec » les acteurs, « pour » le développement des acteurs, de la profession, de l'institution… ». Dans le même ordre d'idée, Sensevy (2013) ajoutait :

> « Une assertion synthétique pourrait être la suivante : contre la dichotomie recherche fondamentale/recherche appliquée, les LéA permettent une recherche fondamentale de meilleure qualité parce qu'en meilleure articulation avec l'objet même de la recherche, c'est-à-dire l'apprentissage des élèves à travers l'enseignement des professeurs. » (Sensevy, 2009, p.2)

2 Etude d'un cas particulier

Pour mieux comprendre le fonctionnement d'un LéA, nous allons parler à présent d'un LéA particulier : Le LéA St Charles. Ce projet a été initié en 2010 et il est devenu en 2011 l'un des premiers LéA. Il s'agit d'une collaboration entre des chercheurs de l'IFE et tous les enseignants d'une école primaire de Marseille : l'école St Charles.

Nous travaillons sur des ingénieries réécrites par Serge Quilio à partir des travaux de Guy Brousseau et qui portent toutes sur l'enseignement du numérique à l'école primaire. Ainsi nous réfléchissons à l'enseignement des nombres et des algorithmes opératoires pour chaque classe : notamment l'ingénierie sur la soustraction au CE1, qui sera plus longuement présentée par la suite.

Cela demande de la part des chercheurs un accompagnement de la mise en place des ingénieries. Il ne s'agit pas seulement de donner aux enseignants les scénarios de nos ingénieries mais de réfléchir aux contraintes pratiques, de répondre à leurs questions… Nous filmons ensuite la plupart des séances et nous analysons ces vidéos.

À partir de ces analyses et du vécu de la séance, enseignants et chercheurs repèrent d'éventuels problèmes, réfléchissent à de possibles améliorations. Ces échanges peuvent avoir lieu par mails, par téléphone, au cours d'entretiens individuels ou de réunions d'équipe. Il y a donc au sein de ce LéA, des interactions riches et régulières entre enseignants et chercheurs. Ensemble nous imaginons des améliorations de nos ingénieries que nous expérimentons l'année suivante. C'est là l'un des intérêts de travailler sur un temps long.

IV - ANALYSE D'UNE DES INGENIERIES DIDACTIQUES CONÇUE DANS LE LEA SAINT CHARLES

Cette partie a pour objectif de montrer en quoi l'ingénierie de la soustraction constitue une ressource didactique dont l'usage peut enrichir les pratiques de l'enseignant et améliorer les apprentissages des élèves. Après un bref rappel des Programmes Officiels de 2008, la démarche générale de l'ingénierie est exposée. Puis, un moment crucial, à savoir la construction du modèle théorique des problèmes soustractifs, sera développé.

1 Rappel du Programme Officiel (2008)

Dans le domaine Nombres et calcul, le Programme Officiel de 2008 indique p. 18 :

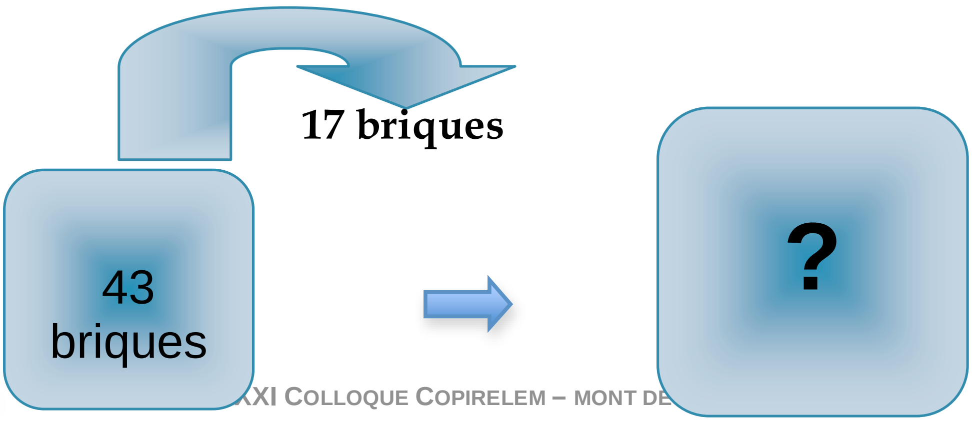
> « [les élèves] mémorisent les tables d'addition, […] apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction, […] et apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations. L'entraînement quotidien du calcul mental permet une connaissance plus approfondie des nombres et une familiarisation avec leurs propriétés.
>
> La compétence 3 du socle commun Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique précise que l'élève doit être capable de calculer mentalement en utilisant des additions, des soustractions […] à l'issue du cycle 2. »

L'ingénierie que nous avons expérimentée, propose une approche différente de celle habituellement utilisée pour l'enseignement de la soustraction mais s'astreint tout de même à respecter les objectifs du programme officiel précédemment cités.

2 Présentation de l'ingénierie de la soustraction : la progression générale

Les problèmes travaillés sont de type partition ou retrait dynamique.

Exemple 1 : Dans la boite, il y a 43 briques. J'en enlève 17. Combien en reste-t-il ?



Exemple 2 : Dans la boite, il y a 43 briques. 17 sont bleues. Les autres sont rouges. Combien y en a-t-il de rouges ?

La démarche de l'ingénierie peut se résumer par ces étapes : l'élève apprend à

1. identifier une situation soustractive grâce à la modélisation de problèmes : cette modélisation se réalise par une simulation du problème avec une boite et des briques, celles-ci pouvant s'imbriquer pour représenter des dizaines ou bien des unités ; ainsi, l'élève se construit une représentation des situations soustractives,

2. résoudre le problème de manière empirique : par dénombrement, en modélisant la situation avec la boite, l'élève résout le problème,

3. résoudre le problème de manière intellectuelle : le matériel n'est plus à la disposition de l'élève ; l'enseignant peut alors observer diverses procédures de résolution :

- par le dessin : l'élève représente de façon plus ou moins abstraite la boite et les briques ; la modélisation de la situation est donc représentée schématiquement
- par le calcul : l'élève utilise des stratégies personnelles : approximation, essais-erreurs, décompositions-recompositions du nombre en dizaines et unités.

L'étape 3 sera illustrée par des productions d'élèves dans la partie II.4.a de cet exposé.

4. vérifier un résultat de manière empirique : le statut de la boîte change ; d'outil de résolution, elle devient moyen de vérification ; en ouvrant la boite, l'élève vérifie le nombre de briques restant à l'intérieur.

5. vérifier un résultat de manière intellectuelle par l'addition : le surcomptage (1 par 1 puis par groupement), très vite remplacé par des recompositions, amène l'élève à écrire sa proposition sous forme d'écriture additive, l'addition devenant ainsi l'opération vérifiant la soustraction : 17 + … = 43.

6. réajuster son résultat, s'il est erroné, en utilisant l'addition pour atteindre le nombre total : au-delà du moyen de vérification, l'addition devient outil de résolution par réajustements et tâtonnements ; c'est la méthode de la fausse position

Les étapes 5 et 6 seront développées par des productions d'élèves dans la partie III.4.b de cet exposé.

7. améliorer l'efficacité de son réajustement en obtenant le résultat exact en deux coups, en un coup

8. améliorer l'efficacité de son algorithme : il s'agit de passer de l'addition à trou à la soustraction (opérations posées en colonnes) et notamment avec un traitement efficace du retrait des dizaines et des unités (commencer par les unités, gérer la retenue).

3 Présentation de l'ingénierie de la soustraction : les principes de l'ingénierie

Dans l'article *Hétérogénéité et attentes différentielles : une approche de didactique comparée* (2012), Leutenegger et Quilio exposent l'idée fondatrice de cette ingénierie : l'enseignement repose, bien sûr, sur le savoir antérieur des élèves, c'est-à-dire l'addition, pour construire les différents sens de la soustraction, repérer et résoudre les problèmes qui peuvent se résoudre avec une soustraction mais aussi pour fonder une technique. Ainsi dans la genèse de l'apprentissage envisagé, deux rôles sont assignés à l'addition : elle joue un rôle dans la construction des sens de l'opération de soustraction et elle fonde la recherche d'un moyen économique de calcul des différences.

Comme dans *Le cas de Gaël* (2001), de Brousseau et Warfield, texte fondateur de l'ingénierie sur la soustraction, « [dans la situation proposée], les définitions constructives de la soustraction [sont remplacées] par une définition algébrique (la différence) » « On ne cherche plus à construire un terme, explique Guy Brousseau, mais à comprendre une relation et à rechercher un objet qui satisfait une condition. C'est le prototype des situations avec lesquelles on a exploré les possibilités de remplacer l'arithmétique par l'algèbre à l'école primaire. » (Brousseau & Warfield, 2001).

Yves Chevallard (1989), dans *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège*, expose que le calcul algébrique correspond à la syntaxe à laquelle le domaine de calcul associé fournit une sémantique. Il montre que la dialectique entre numérique et algébrique peut se reconstruire grâce à la modélisation mathématique. L'algèbre constitue le langage privilégié des modélisations car il assure une économie de moyens sémiotiques et donc un gain d'efficacité. Le raisonnement se réalise à travers le calcul algébrique qui conserve aussi une trace de ce raisonnement. Donc, l'algèbre est à la fois un outil qui permet de travailler le modèle mais aussi un langage qui assure la construction du modèle.

A l'école primaire, l'ingénierie de la soustraction permet cette rencontre avec l'algèbre et le fonctionnement de la dialectique entre algèbre et numérique : les élèves ne font pas de l'algèbre précocement mais raisonnent algébriquement grâce à un modèle lié aux situations mises en place.

4 Un moment crucial de l'ingénierie : la construction du modèle théorique

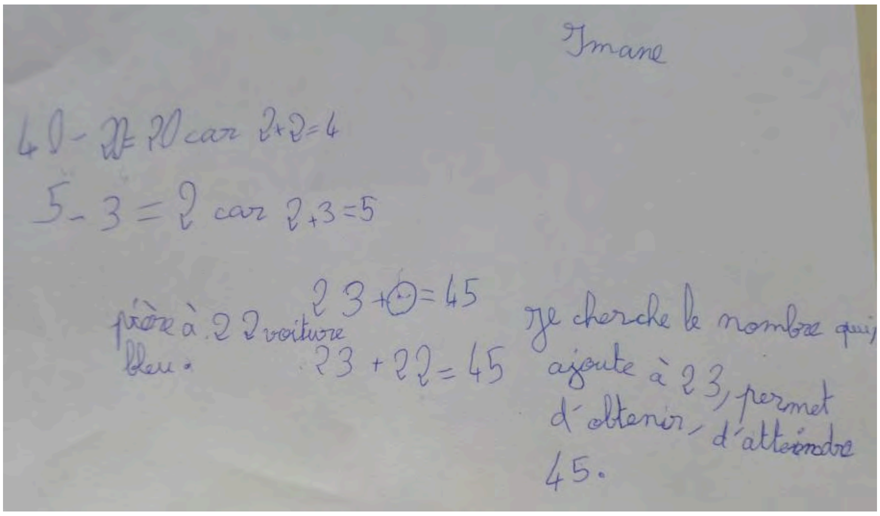
Un moment crucial de l'ingénierie est présenté plus en détails : celui qui correspond aux étapes 5 et 6 de la progression : vérifier de manière intellectuelle une proposition et éventuellement la réajuster. Cette vérification et ce réajustement, qui se réalisent par la méthode de fausse position, assurent la construction du modèle théorique des problèmes.

Après une phase d'action (la recherche de réponses provisoires), les élèves sont en phase de validation.

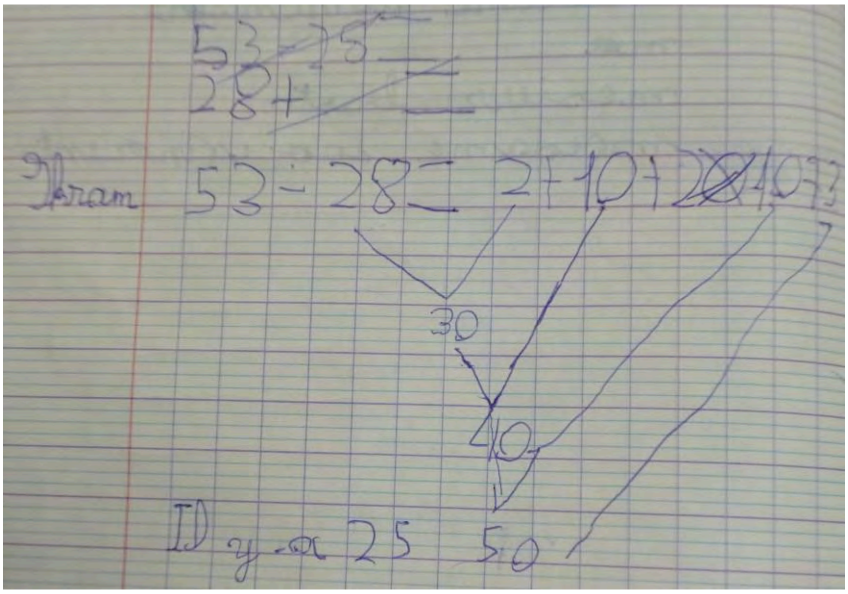
4.a Résolution des problèmes : obtention des premières réponses provisoires

Lors de la résolution des problèmes, les réponses provisoires des élèves sont obtenues à partir de stratégies personnelles. En voici deux exemples :

- Sur la production d'élève qui suit, nous pouvons observer après décompositions, le retrait des dizaines et des unités ; ces retraits sont justifiés par le répertoire ; puis l'élève recompose les nombres pour déterminer celui qui ajouté à 23 permet d'atteindre 45.



- Sur cette deuxième production d'élève, nous observons une écriture algébrique permettant de déterminer la différence par recomposition du nombre 53 à partir d'une partition 28 de la collection totale ; à chaque fois, l'élève cherche à atteindre la dizaine supérieure.

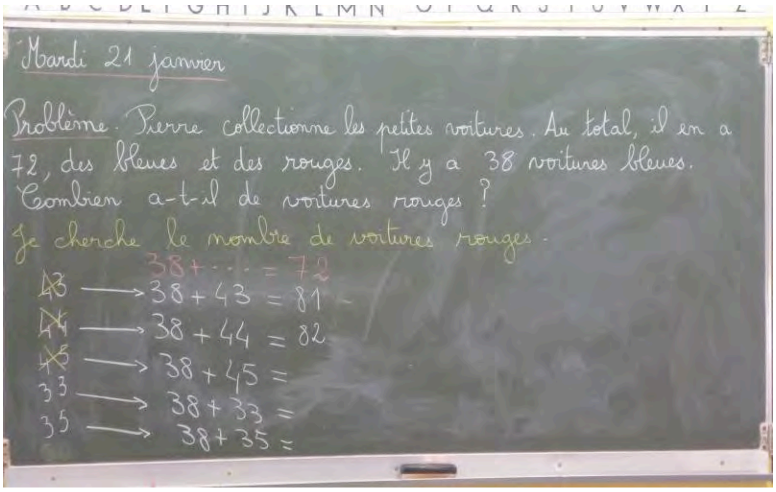


4.b Vérification des réponses provisoires

Les élèves avaient à résoudre le problème suivant :

Problème 1. Pierre collectionne les petites voitures. Au total, il en a 72, des bleues et des rouges. Il possède 38 voitures bleues. Combien a-t-il de voitures rouges ?

Le milieu est constitué des réponses provisoires suivantes: 43, 44, 45, 33, 35.



- Après avoir testé 43 par l'addition 38 + 43 et obtenu 81, Imane et Malika invalident cette proposition
- Ikram et Amina rejettent également 45 parce que « déjà avec 43 on a dépassé 72, ça va encore plus dépasser »
- le même raisonnement est mené pour 44
- puis, à partir de cette réponse 44, Soheib propose un premier réajustement : il explique qu'avec 44 « on a trouvé une dizaine de trop 82 je dois enlever une dizaine »
- les élèves augmentent le milieu d'une nouvelle proposition qu'ils veulent tester : 34.

Ainsi, à partir des premières réponses proposées, les élèves sont capables:

- d'éliminer certaines réponses
- de réajuster une réponse par modification des dizaines ou des unités
- d'augmenter le milieu de nouvelles propositions sans recommencer complètement les calculs.

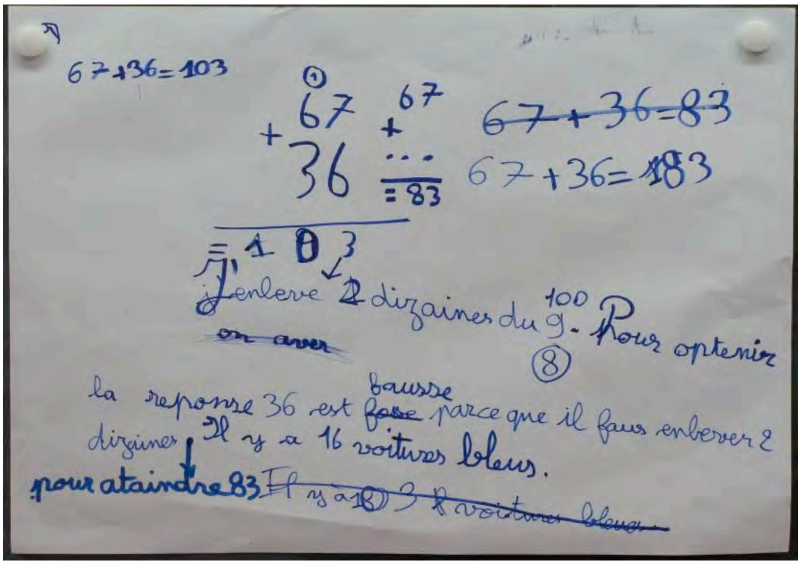
Le même problème est conservé en variant les nombres (83 et 67) mais cette fois-ci la première partie de la consigne (résoudre le problème) est supprimée. C'est l'enseignant qui fournit des réponses factices à la classe afin de les choisir assez proches de la solution et ainsi induire chez les élèves des procédures de réajustement : une ou deux unités d'écart, une ou deux dizaines, supérieures ou inférieures ou bien les deux cumulées.

Après avoir vérifié les réponses, l'objectif est d'être capable de réajuster la réponse pour atteindre le total initial. La classe utilise pleinement la méthode de la fausse position.

Problème 2. Marc a 83 voitures, des rouges et des bleues. 67 sont rouges. Combien en a-t-il de bleues ?

Les réponses fournies à la classe sont: 35 37 36 25 26 27 15 17. Chaque groupe a une réponse à tester.

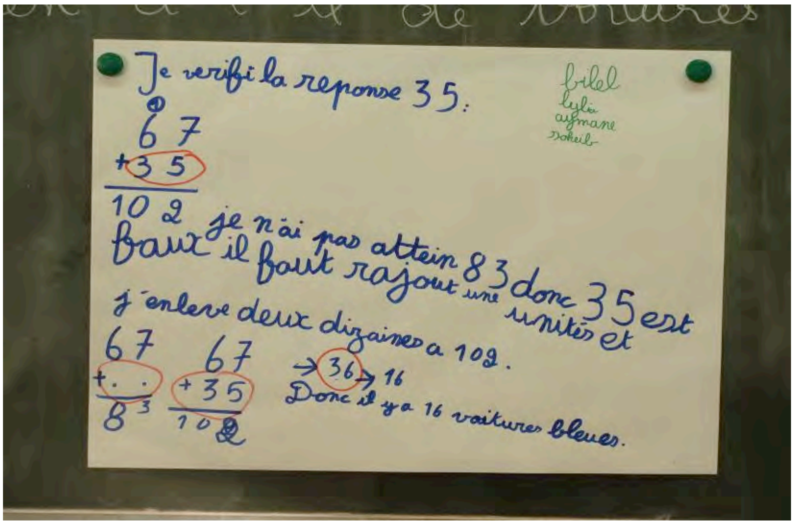
Regardons tout d'abord <u>le travail d'Amina et d'Ikram</u> qui testent la réponse 36.



Les élèves écrivent l'addition à trou qui montre quel total doit être atteint. Puis, ils effectuent l'addition 67 + 36. A partir du total obtenu, 103, ils déduisent que la proposition est erronée et qu'ils doivent enlever 2 dizaines à 103 pour retrouver 83. Le décompte des dizaines à partir de 103 est écrit (sur le film, Ikram explique qu'il a enlevé deux dizaines à 103 et obtenu 93 puis 83, et non pas 9 et 8 comme ce qui est noté).

Enfin, ils concluent en annonçant la solution du problème, 16 voitures bleues, mais sur l'affiche le retrait des dizaines à 36 est implicite.

Examinons à présent <u>le travail de Soheib, Lylia, Aymane et Bilel</u>



De même, sur cette affiche, les élèves posent en colonne les additions à trous et cherchent le nombre qu'il faut ajouter à 67 pour atteindre 83. Lors de la phase de formulation, les élèves explicitent comment ils déterminent la solution du problème par la méthode de fausse position qui fonctionne par réajustements.

Le réajustement effectué sur les dizaines et les unités est ici cumulé, comme nous avons pu l'observer en analysant une vidéo de séance de classe. Voici un extrait de la retranscription de la vidéo :

> Lylia : en fait on a posé en colonne 67 + 35 et on a trouvé au total 102 et 102 c'était pas...
>
> Bilel : fallait retrouver 83
>
> Soheib : il fallait enlever 2 dizaines et rajouté 1 unité
>
> P: pourquoi ?
>
> Soheib : pour que ça fait 103 et que ça fait 83
>
> [...]
>
> Soheib : donc on a compté jusqu'à 36 et on a enlevé 2 dizaines et ça fait 16

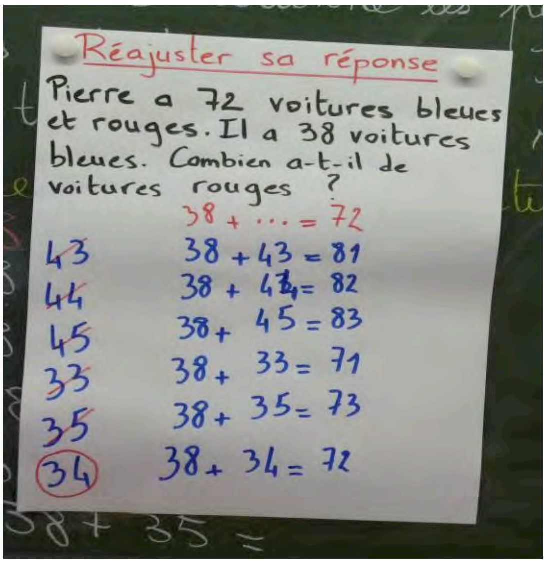
Le questionnement de l'enseignante permet aux élèves, cette fois-ci, d'expliciter la « manipulation » qu'ils mènent sur leur première réponse car les élèves expliquent le réajustement sur le total mais passent sous silence celui sur la réponse provisoire.

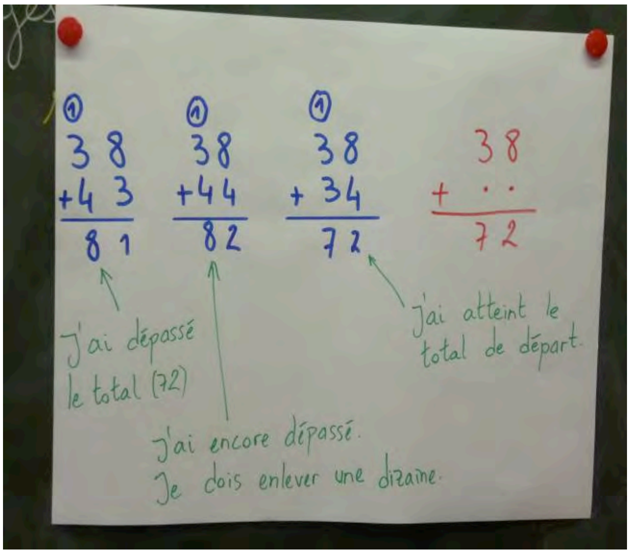
> P: vous avez posé 67 + 35 égal 102. Si la réponse 35 était exacte vous auriez dû retrouver quel...
>
> Aymane : 83
>
> P: et 83 ça représente quoi ?
>
> Aymane : c'est le nombre de voitures rouges et bleues
>
> P: c'est le nombre total de voitures. On veut atteindre 83. Mais vous, vous avez atteint 102. […] Vous avez ajouté 1 unité et enlevé 2 dizaines à quel nombre ?
>
> Les élèves : à 102
>
> P: Est-ce que 35 est la réponse exacte ?
>
> Les élèves : non
>
> P: Comment vous avez trouvé 16 à partir de 35 ?
>
> Soheib : dans 35 on doit ajouter 1 unité et enlever 2 dizaines
>
> P: quelle est la réponse au problème ?
>
> Aymane : il y a 16 voitures bleues.

Ainsi, la validation des propositions par addition et la méthode de fausse position qui s'en suit permettent de construire le modèle théorique du problème : a + … = b.

Le relevé de toutes les additions que nous gardons en mémoire sur une affiche participe à cette construction. En effet, lister les additions, comme nous le voyons sur les deux affiches suivantes, présente un double intérêt :

- en ligne, l'affiche permet aux élèves d'observer les données du problème (les constantes) et la variable ; la dialectique algèbre-numérique est ici mise en évidence,
- en colonne : les élèves gardent une trace du réajustement.





Remarque : l'algorithme qui se déduit naturellement des procédures personnelles des élèves est celui de l'emprunt de dizaines et non pas celui qui utilisent la propriété d'invariance de la différence par ajout d'un terme à chaque membre.

5 Bilan de cette ingénierie

L'usage de cette ingénierie dans la pratique enseignante présente des points communs avec tout enseignement de la soustraction : le recours à des problèmes pour identifier une classe de problèmes, la nécessité de construire et mémoriser un répertoire, également la construction d'un algorithme.

Sa spécificité vient de l'usage de la méthode de fausse position. Celle-ci présente un double intérêt : elle rend les élèves experts sur l'utilisation en acte des propriétés du code numérique et par conséquent sur les stratégies de résolution personnelle ; au-delà de cette expertise, les élèves apprennent à procéder en suivant une démarche mathématique fondamentale : déterminer la solution d'une équation à partir d'une approximation voire d'une erreur pour s'en approcher jusqu'à l'obtention de la solution exacte.

V - INTERET DU LEA SAINT CHARLES POUR LES ENSEIGNANTS ET LES CHERCHEURS

1 Du point de vue des enseignants

Regardons à présent ce que le LéA St Charles a pu apporter aux enseignants et notamment à ceux associés à notre équipe. Cela leur a notamment permis de découvrir dans des conditions privilégiées des activités résultant de recherches en didactique et d'en ressentir les avantages pour leur enseignement et les apprentissages de leurs élèves. Ainsi, une enseignante qui a travaillé avec nous sur l'ingénierie du CE2 continue d'utiliser ces mêmes activités dans sa nouvelle école d'affectation.

Cela leur a également permis de s'initier à la didactique et de mieux comprendre ce que cette science pouvait apporter à leurs pratiques. D'ailleurs, deux des enseignantes de cette école ont déjà commencé une thèse en didactique.

Plus largement, le fait de pouvoir travailler avec l'ensemble des enseignants de cette école nous a amené à réfléchir à la compatibilité de nos ingénieries d'une année à l'autre et donc de concevoir un enseignement du numérique plus homogène. Par ailleurs, leur collaboration nous a permis de mieux prendre en compte les contraintes pratiques et donc de concevoir des ingénieries didactiques plus faciles à mettre en place dans les classes. Ceci nous a également amené à améliorer le discours accompagnant les ingénieries afin de donner effectivement aux enseignants toutes les informations nécessaires à leur mise en place. A partir de ce travail il est à présent envisageable de diffuser nos ingénieries auprès d'autres enseignants. Cette étape a déjà été amorcée pour l'ingénierie développée au CP, sous le nom de projet ACE. C'est d'ailleurs l'objet de la communication de Mireille Morellato et Dominique Truant dans ce colloque *(« Coopération entre professeurs d'école et chercheurs au sein d'une ingénierie didactique concernant les premiers apprentissages numériques »)*. Nous réfléchissons actuellement à une possible accélération du processus, en formant éventuellement non pas les enseignants mais les formateurs d'enseignants.

2 Du point de vue des chercheurs

Ce dispositif a également permis de recueillir de précieuses données pour les chercheurs de l'équipe. Tout d'abord, nous avons trouvé là une sorte de terrain d'expérimentation pour nos ingénieries. La collaboration des enseignants de l'école Saint Charles, habitués à exploiter dans leurs classes les scénarios que nous leur proposons, garantit une mise en œuvre la plus fidèle possible de nos *desideratas*. Ceci nous permet de réellement observer les effets de nos ingénieries, de juger de leur pertinence et de repérer les points à améliorer.

Par ailleurs, alors que chaque enregistrement vidéo d'une séance de classe nécessite habituellement des démarches fastidieuses (discussion avec l'enseignant, le directeur de l'école, demande d'autorisation pour les droits à l'image…), nous pouvons, dans le LéA St Charles, facilement effectuer plusieurs films par semaine. Toutes ces ressources constituent des supports intéressants pour observer divers phénomènes didactiques et mettre en place des méthodologies généralement délicates à utiliser. C'est ainsi que ce dispositif facilite le suivi de *biographies didactiques* d'élèves (Mercier, 1995). Il s'agit en effet de repérer et d'étudier les moments (appelés *biographèmes)* attestant d'une évolution dans les apprentissages d'un élève particulier. Les très nombreux films que nous enregistrons régulièrement dans chaque classe, nous permettent de suivre les réactions, les propos ainsi que les stratégies utilisées par l'élève choisi. Nous avons ainsi pu suivre pendant un an le travail d'un élève de CE2 concernant l'apprentissage de la multiplication et nous avons pu étudier les facteurs (issus du milieu ou des interactions avec l'enseignant ou les pairs) qui ont pu influer sur cette progression dans ses apprentissages. Ceci a donné lieu à un article, encore en cours d'expertise (Quilio, Millon-Fauré, à paraître). Nous avons également entrepris de suivre pendant deux ans une élève durant les tâches de résolution de problèmes. L'objectif est de déterminer les éléments qui guident ses choix lors de la détermination des opérations à effectuer et de voir si le travail effectué en classe facilite cette étape. Un autre chercheur, Alain Yaïche, a décidé de consacrer ses recherches de thèse au suivi (pendant deux ans) du travail de plusieurs élèves lors d'activités numériques.

La mise en place du LéA St Charles nous permet enfin d'effectuer des *suivis de cohortes.* Il s'agit cette fois d'observer sur un temps long, tout un groupe d'élèves. Or, le fait de travailler avec l'ensemble des enseignants de cette école, nous permet de mettre en place dans chaque niveau, des évaluations régulières. Nous pouvons ainsi surveiller les apprentissages de tout un groupe d'élèves à courts et à longs termes et réfléchir ainsi aux faiblesses des ingénieries que nous avons proposées. Nous voudrions d'ailleurs prolonger ce suivi jusqu'au collège de secteur, voir jusqu'au lycée.

3 Quelques obstacles à surmonter

Il faut bien reconnaître toutefois que certains obstacles demeurent. La mise en place de ces ingénieries nécessite pour l'enseignant beaucoup plus de temps et d'investissement pendant les séances de classes : en effet, nos activités se déroulent l'essentiel du temps sous forme de travail de groupes, ce qui demande une régulation particulière durant les phases de recherche et une gestion spécifique des temps de mise en commun. C'est une des raisons pour lesquelles, le temps didactique avance moins vite dans nos ingénieries qu'avec des activités ordinaires. Mais l'enjeu de cette forme de travail est également d'installer des savoirs plus solides et plus facilement transférables dans d'autres contextes, ce qui pourrait éventuellement permettre de gagner un peu de temps les années suivantes. Par ailleurs, ces activités devraient permettre de travailler d'autres compétences, directement en lien avec l'activité mathématique (comme la méthode de fausse position lors de l'ingénierie sur la soustraction) ou bien transdisciplinaires (autonomie, travail de groupes…).

Les enseignants signalent également que l'appropriation de ces ingénieries leur demande davantage de temps et d'investissement que la préparation d'activités ordinaires. Les scénarios comportent en effet de nombreuses indications sur la régulation attendue de la part des enseignants, celle-ci étant particulièrement délicate. Ceci rend la lecture et l'appropriation de ces consignes particulièrement longue. Enfin, la participation au LéA nécessite également un travail supplémentaire : les enseignants doivent effectuer des comptes rendus de leurs séances, assister aux réunions et participer à nos échanges par mails ou téléphone…

Signalons toutefois qu'aux dires des enseignants associés, ces difficultés apparaissent essentiellement la première année, puis s'estompent avec le temps. Ainsi, une fois l'ingénierie bien en main, l'enseignant peut l'intégrer sans problème dans sa gestion de classe, ce n'est que dans un premier temps qu'elle peut déstabiliser les pratiques.

En outre, en ce qui concerne plus spécifiquement le problème de la diffusion, là encore de nombreux obstacles subsistent : la conception d'un document d'accompagnement qui contienne très précisément les informations nécessaires à un enseignant ordinaire pour une mise en place satisfaisante de nos ingénieries reste un défi de taille, même si ce travail collaboratif nous a grandement aidés dans cette entreprise. De plus, cet accompagnement des enseignants ne peut se cantonner à l'élaboration d'un document écrit. Une régulation directe de l'activité de l'enseignant demeure nécessaire, au moins au départ. Reste à réfléchir à un mode de transmission suffisant pour que des enseignants extérieurs à notre expérimentation puissent s'approprier nos ingénieries, mais tout de même moins exigeant que celui mis en place au sein du LéA St Charles.

VI - CONCLUSION

En examinant le LéA St Charles, nous avons pu observer l'intérêt qu'un tel dispositif pouvait représenter : l'analyse détaillée d'une de ses conceptions (l'ingénierie sur la soustraction) a permis d'illustrer la richesse de l'activité mathématique que celle-ci avait provoquée dans la classe. De manière plus générale, nous avons insisté sur le rôle qu'avait joué ce projet dans la formation des enseignants associés, ainsi que sur les recherches qu'il avait rendues possibles en facilitant l'accès à certaines données, difficiles à récoltées habituellement.

Ainsi, même si nous disposons encore de peu de recul sur cette expérimentation, ces premières considérations sur les LéA paraissent encourageantes. Ces collaborations, sur un temps long, entre didacticiens et enseignants semblent en mesure d'atteindre le double objectif qu'elles se sont fixés : constituer une avancée à la fois pour la recherche et pour l'enseignement ordinaire.

Toutefois il reste encore à surmonter le problème de la diffusion auprès des enseignants. Si les scénarios que nous avons créés constituent déjà des outils intéressants pour les enseignants associés à notre expérimentation, nous aimerions à présent diffuser ces ressources locales auprès d'un plus large public.

Il convient alors de réfléchir aux moyens à mettre en œuvre pour que tous les enseignants volontaires puissent s'approprier ces ingénieries sans les dénaturer. Ceci permettrait à chacun de disposer de ressources qui s'appuient sur des résultats de la recherche en didactique tout en étant réellement utilisables dans une classe ordinaire.

VII - BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In, C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gilel, F. Vandebrouck, F. Wozniak (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XVe école d'été de didactique des mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage Editions. 15-26.

ARTIGUE, M. (1990). Ingénierie didactique. Recherches en didactiques des mathématiques, 9, 3, 282-307.

BROUSSEAU G. & BROUSSEAU N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* IREM de Bordeaux Collaboration(s).

BROUSSEAU G. (1990). Utilité et intérêt de la didactique. *Grand N,* 47, 93-114.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble, La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. & Warfield V. (2001) *Le cas de Gaël.* P.3

BROUSSEAU G. (2008). Premières notes sur l'observation des pratiques de classes. http://visa.inrp.fr/visa/presentation/Seminaires/Journees_inaugurales/premieres_notes_observation.pdf

CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, **19.**

CHEVALLARD Y. (2009). La notion de PER : problèmes et avancées. *Texte d'un exposé présenté à l'IUFM de Toulouse le 28 avril 2009.*

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf

CHEVALLARD Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In, C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gilel, F. Vandebrouck, F. Wozniak (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XVe école d'été de didactique des mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage Editions. 81-108.

GRENIER D. (1988) *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en 6ème*. Thèse, Université Joseph Fourrier, Grenoble 1.

LEUTENEGGER F. & QUILIO S. (2012) Hétérogénéité et attentes différentielles : une approche de didactique comparée. *Revue suisse des Sciences de l'Education. Academic Press Fribourg,* **34 (3)**.

MERCIER A. (1995) La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 15 (1), 97-142.

MONOLD-ANSALDI, R. & FAVELIER, N. (2013). Les lieux d'éducation associés à l'IFE ; des laboratoires pour l'action conjointe des chercheurs et des enseignants. Journal de l'IFE de Mars 2013.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1992). *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6e.* Thèse de doctorat. Paris : université de Paris 7.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. In, C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gilel, F. Vandebrouck, F. Wozniak (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques. XVe école d'été de didactique des mathématiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage Editions. 57-78.

QUILIO S. & MILLON-FAURE K. (à paraître) Quels sont les éléments qui peuvent influer sur l'évolution des stratégies utilisées dans la classe ? Etude d'une biographie d'élève**. (ou)**

SENSEVY, G. (2013). Neuf propositions pour les LéA. Journal de l'IFE de Mars 2013.

COLLABORATION ENTRE PROFESSEURS D'ECOLE ET CHERCHEURS : UN EXEMPLE DE DIALOGUE DANS LE CADRE D'UNE INGENIERIE DIDACTIQUE COOPERATIVE EN MATHEMATIQUES

Mireille MORELLATO
PEMF, école St-Charles 1 (Marseille)
CREAD (Rennes)
mireille@syrah.fr

Résumé Dans cette communication, issue d'un travail de thèse en cours sous la direction de Gérard Sensevy et Serge Quilio, nous présentons l'étude de certaines modalités d'un travail coopératif entre professeurs d'école et chercheurs dont la finalité est la construction et la mise en œuvre d'une ingénierie pour l'enseignement et l'apprentissage des nombres à l'entrée de l'école élémentaire obligatoire (CP). Cette expérimentation s'inscrit dans le cadre d'une recherche nationale intitulée « Arithmétique et Compréhension à l'Ecole élémentaire » (ACE). La spécificité des développements produits repose sur une ingénierie didactique coopérative dans laquelle le travail collaboratif amène professeurs et chercheurs à dialoguer afin de proposer une construction de l'ingénierie plus pertinente aussi bien au plan ingénierique (transformer le dispositif) qu'au plan fondamental (comprendre la pratique).

I - INTRODUCTION

Nous proposons de présenter l'étude de certaines modalités de travail mises en œuvre récemment dans une ingénierie didactique de type coopératif (Sensevy, Forest, Quilio, & Morales, 2013) portant sur la construction du numérique au Cours préparatoire (CP). Cette expérimentation, implémentée de septembre 2011 à juin 2014 (soit 3 années scolaires), s'inscrit dans le cadre d'une recherche nationale intitulée « Arithmétique et Compréhension à l'Ecole élémentaire » (ACE). Dans ce contexte, le travail du collectif professeurs/chercheurs porte sur la mise en œuvre en classe de situations didactiques dans la lignée des travaux de Guy Brousseau (Brousseau, 2004). Les éléments de l'étude montrent qu'une telle mise en œuvre nécessite de nouvelles pratiques d'enseignement car elle implique une direction de l'étude des élèves par les enjeux de la situation, imposant aux professeurs une vigilance accrue aux enjeux mathématiques. Nous présentons dans ce texte un moment de travail coopératif entre professeurs et chercheurs sur l'enrichissement d'une ressource concernant les représentations de la situation didactique et l'analysons dans le cadre de la *Théorie de l'action conjointe* (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2005), (Sensevy & Mercier, 2007), (Sensevy, 2011).

II - CADRES THEORIQUES ET METHODOLOGIQUES

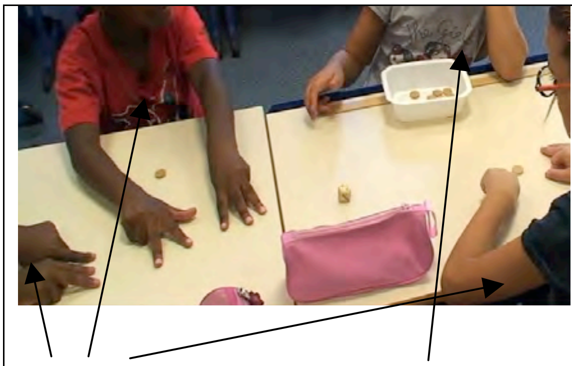
1 Une ingénierie didactique de type coopératif

Une ingénierie didactique est un dispositif crée par et pour la recherche (cf les travaux de Michèle Artigue, Yves Chevallard, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Aline Robert publiés dans les actes de la 15^{e} école d'été organisée par l'ARDM, (Margolinas et *al.*, 2009)). Nous nous inscrivons dans le cadre d'une ingénierie didactique de type coopératif telle que décrite par Gérard Sensevy, Dominique Forest, Serge Quilio et Grace Moralès (2013). Les modalités qui organisent le travail entre les membres du collectif suivent un processus itératif. La première année, des séances d'enseignement-apprentissage sont mises en œuvre dans des classes d'étude à partir d'un document princeps décrivant succinctement la situation didactique. Une analyse des mises en œuvre est produite collectivement. Elles permettent l'élaboration d'un document présentant une progression de séquences d'enseignement. La deuxième année, les mises en œuvre s'effectuent dans des classes expérimentales et les classes d'étude à partir de ce document. A nouveau, des analyses collectives des mises en œuvre sont menées et le document réécrit partiellement ou complété. Le processus est reproduit la troisième année avec des classes supplémentaires. Chacun, en fonction de ses compétences, propose des stratégies, des gestes, des outils pour l'enseignement car chacun est « connaisseur de la chose » selon son point de vue et peut dire ce qui est envisageable, ce qui est nécessaire, indispensable… Collectivement des choix sont faits et les décisions qui en découlent assumées. De telles ingénieries de type coopératif permettent ainsi le partage des fins éducatives et des moyens entre professeurs et chercheurs, favorisent la co-conception et l'acquisition de connaissances mathématiques, didactiques, épistémologiques.

2 La situation fondatrice de l'ingénierie didactique et ses représentations

2.1 Description rapide de la situation didactique du « Jeu des annonces »

La situation didactique du *Jeu des annonces*[1] repose sur un jeu dans lequel les élèves doivent « annoncer » avec les doigts de leurs mains le score qui va s'afficher sur le(s) dé(s) avant le lancer de ce(s) dé(s). Le nombre obtenu par les annonces est ensuite comparé avec le score du/des dé(s) afin de déclarer une égalité ou une inégalité entre les valeurs obtenues.

 Joueurs Arbitre (Photo 1 - Capture d'écran d'une vidéo tournée lors d'une séance du *Jeu des annonces*)	Sur la photographie 1, nous observons une partie : nous pouvons voir que chacun des trois joueurs a réalisé une annonce avec ses deux mains. Par exemple, le joueur du centre a annoncé « 6 » sous la forme « 3 et 3 » (notée par la suite « D3G3 » pour 3 doigts sur la main droite et 3 doigts sur la main gauche). Chacune de ces annonces est comparée avec le score d'un dé à six faces, lancé par l'arbitre après que les annonces ont été produites et immobilisées sur la table. Le joueur du centre ainsi que celui de droite ont déjà gagné un pion (placé devant eux) lors de parties précédentes car leur annonce était égale au lancer du dé. C'est l'arbitre qui valide les annonces et distribue les pions.

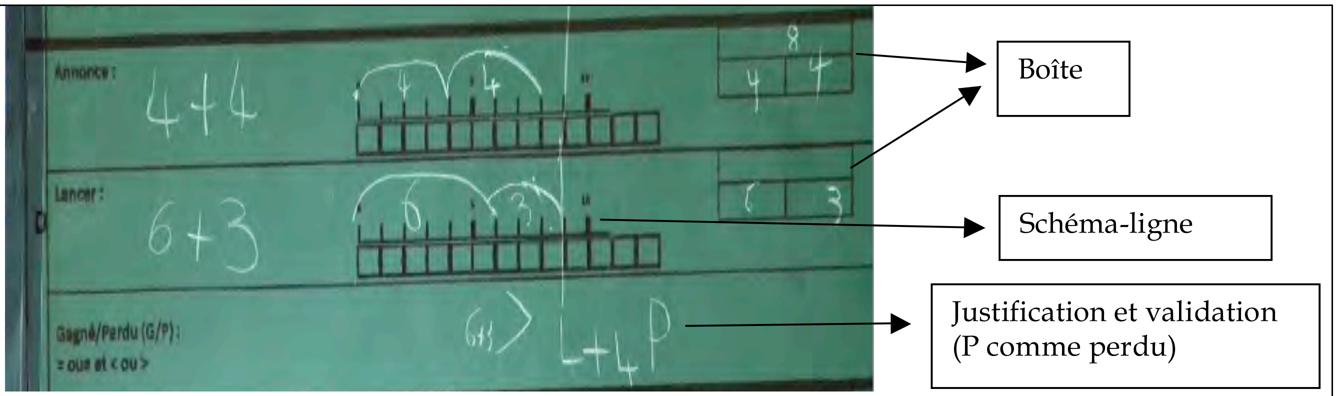
Lors de la partie, les élèves désignent la grandeur « quantité de points » à l'aide des doigts comme c'est l'usage dans l'environnement culturel et social. Cette pratique de désignation de quantité avec les doigts est faite au moyen d'une seule main, puis de l'autre si nécessaire. Ici la règle contraint à utiliser les deux mains. Le nombre à désigner se retrouve alors sous la forme d'une combinaison additive. Cette nouvelle pratique, mise en œuvre lors de nombreuses parties, permettra d'explorer les multiples modalités d'écriture des nombres à désigner puis à les comparer. La situation didactique construit ainsi l'étude pour l'apprentissage d'une pratique de mesure (la quantité associée à la grandeur nombre d'objets) qui utilise la propriété des ensembles à pouvoir se partitionner en sous-ensembles qui ne nécessitent pas de comptage. En effet, au début de l'année scolaire du CP, les quantités appréhendables sont inférieures à 6 et convoquent une forme spontanée de dispositions naturelles (configurations des points du dé, des doigts de la main). Cette étude prend pour les élèves une dimension expérientielle car ils doivent se

[1] La situation didactique a été initialement proposée, dans le cadre de la recherche ACE sous la forme d'un document de travail, par A. Mercier et S. Quilio (ENS-IFé).

construire une expérience pour cette pratique de mesure à partir de leurs connaissances. Les professeurs ont à diriger cette étude.

2.2 Représentations de la situation

Selon Raymond Duval, les notions, concepts, idées en mathématiques ne sont pas accessibles perceptivement et pour les étudier ou pour raisonner avec, il faut passer par des représentations sémiotiques rudimentaires ou complexes qui peuvent relever d'un registre oral, écrit, graphique, gestuel ou matériel (Duval, 2006). Voici un exemple des représentations utilisées dans la situation didactique du *Jeu des annonces* :



(Photo 2 - Capture d'écran d'une vidéo tournée lors d'une séance du *Jeu des annonces*)

Sur la photo 2 ci-dessus, une partie est ainsi représentée :
-en haut, l'élève a annoncé D4G4 (4 doigts sur sa main gauche et 4 doigts sur sa main droite) qu'il représente sous trois formes : (i) une écriture additive « 4+4 », (ii) un schéma-ligne (un pont de 4 et un autre pont de 4) et (iii) une boîte (représentation « semi-algébrique » des parties et du tout) où il écrit le total car il connaît le résultat (« 4 et 4 font 8 ») ;
-en-dessous, il représente les lancers de deux dés (6 et 3) sous les formes d'écriture additive, de schéma-ligne et boîte. Remarquons que l'élève semble ne pas connaître le résultat de 6+3 ; il ne l'écrit pas dans la boîte.
L'élève peut cependant comparer annonce et lancer et écrire 6+3>4+4 puis « P » (la partie est perdue (P) car l'annonce n'est pas équivalente au lancer du dé) car il peut constater cette non-équivalence (et même la préciser : le lancer est supérieur à l'annonce) grâce au schéma-ligne, en utilisant l'analogie avec les longueurs.

Il s'agit de reconnaître une même situation mathématique dans des représentations dont les contenus sont apparemment différents ou de jouer sur des registres différents dans les procédures de résolution. Dans une situation didactique, toute représentation permet d'en éprouver l'économie. Elle se réfère à la situation mathématique et la dénote (Matheron & Mercier, 2004). Autrement dit, un dialogue est possible entre les différentes représentations. Guy Brousseau dirait que « l'intérêt des représentations réside dans ce qui peut être fait dans un univers et qui ne peut pas être fait dans l'autre » (Brousseau, 2004, p. 254) : je peux comparer 4+4 et 6+3 grâce au schéma-ligne même si je ne connais pas la somme de 6+3.

Nous pourrions remarquer que dans cet exemple, nous nous situons à la charnière entre un travail dans la numérosité et un travail sur le nombre et avec les nombres. En effet, au début de la mise en place de la situation didactique, les élèves ont à désigner une quantité avec des nombres : ils agissent dans la numérosité en distinguant une quantité et en la dénotant. Quand les élèves ont à comparer deux écritures additives, ils opèrent sur les représentations de ces quantités.

3 Question étudiée

Après avoir lu et travaillé le document présentant la progression des séquences d'enseignement, document élaboré conjointement par les chercheurs et les professeurs des classes d'étude la première année d'implémentation du dispositif (2011-12), et après avoir mis en œuvre dans leur classe la situation didactique proposée, les professeurs des classes expérimentales (2012-13) ont une relecture du document (c'est-à-dire de la situation didactique). Cette relecture véhicule à la fois l'expérience de la mise en œuvre qu'ils ont réalisée et les questions qu'ils se posent, notamment sur la direction de l'étude des élèves dont ils ont la charge. En effet, nous avions décrit la situation didactique comme une étude expérientielle de la situation mathématique par les élèves, étude que les professeurs doivent diriger. Les réunions entre les professeurs et les chercheurs sont des moments où ils partagent ces réflexions.

Comment professeurs et chercheurs vont-ils partager leurs points de vue, leurs expériences et leurs questionnements ? Nous considérons qu'il s'agit d'une question didactique que nous aborderons ici au travers des échanges dans le collectif à propos des usages des représentations dans la situation didactique.

4 Méthodologie

Notre travail d'analyse s'effectue dans le cadre de la *Théorie de l'action conjointe* (Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2005), (Sensevy & Mercier, 2007), (Sensevy, 2011). Nous nous intéressons aux transactions entre chercheurs et professeurs autour des enjeux (qui sont objets de savoir dans cette recherche ACE). Le travail d'analyse empirique repose sur les enregistrements vidéo des réunions du collectif ; ils constituent des traces de la réalisation effective et des questionnements à l'œuvre.

Le contenu des enregistrements des réunions a permis de produire un corpus de transcriptions. Nous avons procédé à une reconstruction du vécu par un découpage du corpus en épisodes. Nous avons opté pour une approche s'intéressant aux épisodes didactiques biographiques du collectif (Mercier, 1999) qui ont la particularité d'être significatifs par rapport aux enjeux de savoir tout en adoptant le point de vue des actants. Nous avons ainsi conduit une réduction des données (Sensevy, 2011) : il s'agit de comprendre les enjeux des interactions langagières à travers la production d'une vision synoptique des épisodes. La vision synoptique, concept de Ludwig Wittgenstein, est une vision d'ensemble qui consiste en « un arrangement possible des faits en vue de les penser », p.585 (Glock, 2003). Nous tentons d'analyser le mécanisme d'équilibration qui se joue au cours de ces épisodes entre le contrat et le milieu (Sensevy, 2011) c'est-à-dire entre un arrière-plan partagé (le contrat) dont le collectif dispose et un problème d'ingénierie (ou milieu-problème) qu'il aborde avec cet arrière-plan. Ce problème permet alors de faire évoluer l'arrière-plan partagé c'est-à-dire le système de connaissances du groupe.

III - ANALYSE DES TRANSACTIONS

Pour cette communication le choix s'est porté sur les transactions au sujet des usages des représentations (et non l'utilisation technique, sujet également et largement abordé dans le collectif) dans la situation didactique.

1 Des échanges autour des usages des représentations

Les épisodes ont été extraits de la seconde réunion de l'année (24 octobre 2012) entre chercheurs et professeurs ; c'est la première fois que le sujet est abordé. Il est à noter que le document de la progression de l'ingénierie ne mentionne pas quels sont les usages de ces représentations dans la version disponible à ce moment-là ; elles sont seulement présentées et le document engage à les utiliser « dans un langage écrit commun pour comparer leur annonce avec le lancer » sans plus d'autres précisions (cf. annexe 1).

Chaque épisode sera présenté de manière à rechercher le plus possible le sens de l'action pour qui serait un familier de cette action c'est-à-dire en respectant le sens que ces épisodes pourraient prendre pour les actants. La transcription des échanges est placée en annexe 2. Nous proposerons ensuite la synthèse de cette série épisodique.

1.1 Vue synoptique des épisodes

Dans le premier épisode, le chercheur présente de manière générale l'usage des représentations dans la situation didactique : mettre en évidence la composition de l'annonce en deux ou trois termes afin de permettre un raisonnement sur la situation mathématique (« les boîtes de Fischer / le schéma / la représentation avec des segments / c'est pour raisonner » Tour de Parole 150). Il anticipe sur le fait que le schéma-ligne, la boîte et les configurations de doigts et dé(s) forment un système de relations qui se réfèrent à la situation du jeu : « les manipulations qu'il va y avoir vont pouvoir être référées à ce système / à cette référence commune que sont les annonces et les usages qu'on a pu faire relativement aux annonces » (TdP 154).

Dans le deuxième épisode, un professeur (le professeur A) s'interroge sur l'usage des représentations mises en œuvre (« j'ai cherché à voir l'utilité » TdP 171). Il partage son expérience sur le rôle des représentations : pour le professeur A, la boîte sert à anticiper le nombre à atteindre (« je peux me rendre compte avant qu'on lance le dé si j'ai dépassé 6 ou pas » TdP 171) et le schéma-ligne à vérifier cette somme : si je place 2 puis 3 alors la composition doit correspondre au repère 5 (TdP 173). Il évoque également son interrogation sur le rôle et les limites du schéma-ligne dans la vérification : selon le professeur A, dans le cas d'élèves sachant compter, la vérification n'est pas nécessaire car les élèves sont sûrs du résultat de l'annonce (ils ont vérifié en comptant sur leurs doigts), dans le cas d'élèves ne sachant pas effectuer une somme, le schéma-ligne qui ne fait pas encore sens pour eux ne permet pas la validation du gain.

Dans le troisième épisode, un professeur (le professeur C) exemplifie l'usage des représentations. Il rebondit ainsi sur les propos tenus par le chercheur (TdP 150) au sujet de la fonction de raisonnement sur la situation mathématique en relatant sa propre mise en œuvre : « on travaille en fait sur les différences de ponts là-dessus / mais jamais pour vérifier » (TdP 180). En « visualisant » sur le schéma-ligne les ponts représentant les deux (ou trois) mains de l'annonce et le lancer du dé, les élèves peuvent tirer des informations de la situation (par exemple en cherchant de combien l'annonce est supérieure ou inférieure au lancer). Le professeur propose aussi des fictions de parties : combien aurait dû faire le dé pour qu'annonce et lancer soient égaux.

Dans le quatrième épisode, un professeur (le professeur B) discute le rôle du schéma-ligne comme outil de vérification. Pour ce professeur, le schéma-ligne est utile surtout pour la vérification du résultat de l'annonce dans un jeu à trois mains car les élèves ne peuvent plus utiliser leurs deux mains pour compter la somme (« ils vont utiliser leurs deux mains et vérifier l'annonce en direct / mais à trois mains ils ne peuvent plus le faire / et là le schéma ligné va servir de vérification » TdP 188). Le schéma-ligne permet alors d'agir là où l'on ne peut plus le faire matériellement. Mais pour les professeurs D et E, le schéma-ligne n'est pas assez fiable dans cette fonction de vérification car les élèves peuvent faire des erreurs en l'utilisant.

Dans un cinquième épisode, les professeurs D et F considèrent les représentations schéma-ligne, boîte et écriture comme répétitives (« c'est trois façons de faire la même chose » TdP 197)

Dans un sixième épisode, le chercheur montre que les représentations se réfèrent à la situation didactique du *Jeu des annonces* au départ mais qu'elles sont le modèle additif de nombreuses autres situations. A partir de l'évocation par le professeur G d'une autre situation qu'il utilise en calcul mental (il propose une référence à une quantité de billes provenant de deux poches de pantalon), le chercheur précise que les représentations du modèle additif que sont boîte, schéma-ligne et écriture additive sont bâties en référence à une situation mais transférables à d'autres. Il montre que l'usage des représentations pour anticiper sur une situation possible doit être sous le contrôle de la situation ; contrôle à construire par les élèves : « l'usage de cette représentation pour anticiper fictivement ce qui pourrait apparaître concrètement c'est un grand pas pour les élèves / c'est pas spontané / ça se construit / il faut apprendre à la contrôler » (TdP 403). Le contrôle consiste alors à mettre en lien situation empirique et représentations qui sont des modèles de la situation : « il [le contrôle] doit référer aux usages que vous avez construits précédemment / ou qui pourront apparaître avec les billes / avec les fleurs / avec les élèves de la cour / y a des tas de situations où on pourrait utiliser convoquer / utilisez-le dans vos usages courants / combien on est aujourd'hui / et bien on est 4 filles plus 12 garçons » (TdP 403).

Dans un septième épisode, un professeur (le professeur H) rapporte au collectif une observation qu'il a faite dans sa classe. Il a observé chez des élèves un raisonnement par anticipation sur la situation didactique à trois mains : quelle troisième annonce pourrait-on proposer connaissant les deux premières ? (« ils ont réfléchi collectivement à ce que le troisième pouvait annoncer pour ne pas dépasser 6 » TdP 442). Le chercheur rappelle alors l'apport des représentations dans cette action d'anticipation qui permet de raisonner sur la situation et encourage à leur utilisation (« voilà une opportunité / n'hésitez pas à utiliser les représentations à ce moment-là / c'est là que ça va jouer fort » TdP 445).

Dans le huitième et dernier épisode de la série, professeurs et chercheur débattent sur les différentes fonctions de la boîte. Ils ne la considèrent pas de la même façon : pour le professeur C la boîte joue le rôle de répertoire additif (TdP 901) et n'autorise pas les manipulations telles que les décompositions et compositions (« ça enlève le côté malin du truc quoi moi j'ai des gamins qui cassent un nombre pour le mettre avec l'autre parce que c'est plus utile et avec la boîte tout est emboîté quoi » TdP 903), pour le professeur I elle permet de représenter la composition de l'annonce sans utiliser les signes opératoires « + » et « = » (« c'est une autre manière d'envisager l'addition » TdP 902), pour le chercheur elle aura un intérêt dans la désignation de la différence (« je vois des intérêts par rapport à la main manquante » TdP 904). Le chercheur rappelle alors que la représentation symbolique sous forme de nombres et de signes opératoires est la seule qui permet les calculs.

1.2 Synthèse

Cette série épisodique nous renseigne sur l'évolution des conceptions du groupe sur les représentations lors de la première année d'implémentation de l'ingénierie (2012-2013). La manière de considérer le schéma-ligne va s'enrichir au cours des transactions : d'outil de vérification le schéma-ligne est peu à peu construit comme un objet sur lequel raisonner pour anticiper ou imaginer une partie de jeu, et qui peut être un modèle pour d'autres situations additives. La fonction de vérification du schéma-ligne dont l'utilité est interrogée dès le départ par un professeur est remise en question par le groupe : en effet, des erreurs dans son utilisation technique le rendent non fiable, les élèves connaissent de manière plus sûre le résultat de leur annonce en utilisant leurs deux mains (ou le répertoire additif). Le schéma-ligne permet cependant selon un professeur de soutenir la vérification dans une situation de jeu à trois mains en l'absence de techniques de composition encore pas ou peu installées à ce stade de l'apprentissage. En orientant les transactions, dès le début des échanges, sur la diversité des fonctions des représentations (« c'est pour raisonner […] les usages qu'on a pu faire relativement aux annonces » - Ch, TdP 146), le chercheur suscite la narration d'expériences de mises en œuvre autour des représentations dans les classes qui ne seraient pas de l'ordre de son usage technique (par exemple : « combien il y a de plus combien aurait dû faire le dé pour qu'il y en pour que ça soit égal et on travaille en fait sur les différences de ponts là-dessus » - prof C, TdP 180). Les différentes représentations (schéma-ligne, boîte mais aussi écritures) sont à la fois vues comme redondantes par certains professeurs et comme particulières dans le sens où ces représentations autorisent ou pas, et certaines plus que d'autres suivant les cas, l'expression d'une réponse au service d'une question posée dans et par la situation (par exemple mettre en évidence la composition d'une annonce ou le nombre à atteindre pour gagner au jeu ou la différence entre annonce et lancer). Le chercheur relève aussi que les représentations sont construites en un système qui se réfère à la situation du *Jeu des annonces*, situation qui les contrôle en retour, et, de par le modèle additif qu'elles figurent, sont transposables à d'autres situations.

2 Un mécanisme d'équilibration didactique à l'œuvre

L'arrière-plan concernant les représentations que les membres du collectif partageaient au départ était concrétisé par le document de la progression de l'ingénierie. Ce document (cf. annexe 1) indique les différentes représentations et l'importance de les mettre en lien. Mais ce sont les mises en œuvre dans les classes expérimentales et les questionnements (utilité du schéma-ligne, schéma-ligne comme outil de vérification), les points de vue (sur le rôle de la boîte), les observations (d'actions d'élèves) et les constats (limites du schéma-ligne) qui ont permis qu'une discussion émerge, vive et soit appréhendée par tous. Autrement dit, les mises en œuvre et ce qui en découle ont fait milieu. Les transactions ont été rendues possibles et fructueuses car le chercheur a indiqué la direction du travail collectif (les représentations servent à raisonner) et a fourni des apports didactiques et épistémiques (fonctionnement des représentations en système, importance de la référence à la situation du jeu, modèle additif). Les transactions ont été aussi rendues possibles et fructueuses par les apports des professeurs qui ont donné à voir leur pratique (professeurs A, C et G), ont donné à voir leur compréhension (professeurs D et F), ont partagé des observations (professeurs B, D, E et H). Le chercheur a exprimé une hypothèse de travail (le jeu entre représentations) et les professeurs, en appui sur le milieu (en constitution) de leur pratique, lui donnent vraiment sa chair à la fois empirique et conceptuelle. De tels échanges ont permis que le système de connaissances du groupe sur ce point de l'ingénierie devienne plus riche et par là commence à se transformer.

IV - CONCLUSION

Les transactions ont permis aux membres du collectif de progresser dans leur connaissance de l'ingénierie et de sa mise en œuvre. Nous avons vu que le travail du collectif met au jour et met à jour ce qu'il faudrait montrer et faire et qui se trouve dans la pratique effective et non seulement dans le texte du savoir. En effet, dans une ingénierie de type coopératif, les ressources sont constituées dans et par le dispositif même, c'est-à-dire grâce au travail coopératif : les ressources ne sont pas uniquement constituées par le texte de la progression des séquences d'enseignement (même s'il est co-construit et réécrit ou complété) mais aussi par le style de pensée (Fleck, 2008) qui se constitue au fil de l'expérience et par l'expérience partagée entre les membres du groupe.

V - BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU G. (2004) *Théorie des situations didactiques* (2e éd.). Grenoble: La pensée sauvage.

DUVAL R. (2006) Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *Relime*, numéro spécial, 45-81.

FLECK L. (2008) *Genèse et développement d'un fait scientifique* (3e éd.). Paris: Flammarion.

GLOCK H.-J. (2003). *Dictionnaire Wittgenstein*. Paris: Gallimard.

MARGOLINAS C., ABBOUD-BLANCHARD M. & BUENO-RAVEL L. (2009) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

MATHERON Y. & MERCIER A. (2004) Les usages didactiques des outils sémiotiques du travail mathématique : étude de quelques effets mémoriels. *Revue des sciences de l'éducation*, **30(2)**, 355-377.

MERCIER A. (1999) *Sur l'espace-temps didactique. Etudes du didactique, en Sciences de l'Education.* Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. Université de Provence, France.

SCHUBAUER-LEONI M.-L. & LEUTENEGGER, F. (2005) Une relecture des phénomènes transpositifs à la lumière de la didactique comparée. *Revue suisse des sciences de l'éducation*, 27(3), 407-429.

SENSEVY G. (2011) *Le sens du savoir: éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles: De Boeck.

SENSEVY G., FOREST D., QUILIO S. & MORALES G. (2013) Cooperative Engineering as a Specific Design-Based Research in Joint Action Theory in Didactics. *ZDM*, 45(7), 1031-1043.

SENSEVY G. & MERCIER A. (2007) *Agir ensemble. L'action didactique conjointe*. Rennes: Presses universitaires de Rennes.

VI - ANNEXE 1

Extrait du document support de l'ingénierie – version du 24 septembre 2012 – p 8

Présentation des représentations à utiliser dans la situation didactique

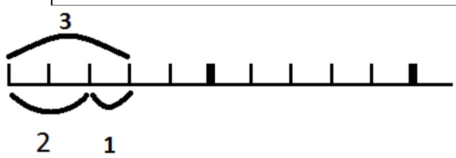
Le professeur lors de cette mise en commun notamment au cours de la première séance introduit les deux systèmes de représentation, le segment et la boîte, systèmes qui sont réinvestis lors des parties fictives (séances 3 et 4 de ce module et dans les modules suivants).

L'objectif est que les élèves puissent passer d'un système de représentation à un autre. Par exemple, à partir d'un segment représenter la boîte puis écrire l'addition correspondante.

L'introduction rapide des représentations segments et boîtes permet d'entraîner tous les élèves dans un langage écrit commun pour comparer leur annonce avec le lancer.

Par exemple, le professeur propose au tableau à partir d'une annonce choisie, de la représenter de plusieurs façons.

Annonce : 2+1
Lancer : 4
Gagné/Perdu (G/P) : P



3	
2	1

VII - ANNEXE 2

Transcription des épisodes concernant l'enjeu « représenter les quantités » - Usages des représentations

Episodes biographiques - Extraits transcription ou résumés - Réunion du 24 octobre 2012
Episode 1 (31 min 26 – 34 min 21) Chercheur : entre nous on va adopter un vocabulaire entre nous on appelle ça les boîtes de Fischer le schéma la représentation avec des segments je ne souhaite pas qu'on appelle ça règle […] *c'est pour raisonner* pour raisonner […] c'est une représentation qui est liée et qui va être >j'avance un petit peu par rapport à ça< dont les usages vont être réglés par les usages soit avec les doigts soit avec les boîtes et la boîte va être réglée soit avec le schéma ligné soit avec les annonces et donc *les*

manipulations qu'il va y avoir vont pouvoir être référées à ce système à cette référence commune que sont les annonces et les usages qu'on a pu faire relativement aux annonces (TdP 146-154)

Episode 2 (épisode 36 min 19 – 37 min 53)

Prof A : le premier problème pour moi et je pense c'est aussi celui de nos élèves c'est pourquoi je remplis ça ça ne sert à rien pour jouer et du coup après au retour *j'ai cherché à voir l'utilité* alors la boîte c'est venu assez rapidement la boîte je mets les résultats de mon calcul et *je peux me rendre compte avant qu'on lance le dé si j'ai dépassé 6 ou pas euh:: la boîte* après c'est venu très naturellement pour la droite vérifier la somme de:: voilà son annonce et quel était le nombre et la droite graduée alors je sais pas si c'est bien ou pas mais ça a une utilité j'ai vu *c'est une vérification du calcul effectué*

Prof B : moi j'ai vu comme toi

Prof A : ils font leur calcul pour moi 3+2 ça fait 5 d'accord je mets le 5 et sur ma droite je vais vérifier alors je mets 3 points après je mets 2 points et je vérifie que ça fait bien 5 et que je me suis pas trompé

Prof B : c'est ça oui

Prof A : alors après évidemment c'est qu'ils comptent mais d'un autre côté ils le faisaient aussi ils vérifiaient avec leurs doigts des fois *ils sont sûrs ils avaient pas besoin de le faire mais du coup ceux-là je leur impose quand même de remplir quand même la droite et ça ça me gêne* et euh:: par contre ceux qui arrivaient pas à faire la somme il fallait bien 3+2 combien ça fait ils me regardent avec des yeux comme ça comment je fais et tu te rappelles pas non je me rappelle pas et *alors comment je fais pour euh pour savoir si j'ai gagné ou pas* (TdP 171-175)

Episode 3 (épisode 37 min 53 – 40 min 47)

Prof C : le sens du schéma ligné moi je l'ai introduit comme une comparaison entre une annonce et un lancer voilà mon annonce on compte pas forcément combien de ponts il y a ou combien mais *on voit tout de suite si c'est différent ou si c'est égal* et après on a beaucoup enfin moi *j'insiste toujours sur combien il y a de plus combien aurait dû faire le dé* pour qu'il y en pour que ça soit égal et *on travaille en fait sur les différences de ponts là-dessus* mais jamais pour vérifier (TdP 180)

Episode 4 (épisode 42 min 20 – 43 min 35)

Prof B : moi j'ai fait plutôt comme la collègue [Prof A] le schéma ligné et c'est encore plus flagrant sur le module 4 ouais sur le module 4 il sert de vérification parce que les élèves dans le module 2 ils n'en ont pas besoin dans le sens où ils vont utiliser leurs deux mains et vérifier l'annonce en direct mais *à trois mains ils ne peuvent plus le faire et là le schéma ligné va servir de vérification* c'est-à-dire qu'ils vont remplir la boîte ils vont écrire le résultat dans le haut de la boîte et le schéma ligné va leur permettre de vérifier ce résultat de la boîte en fait […]

Prof D : parce que *parfois ils font des erreurs sur le schéma ligné* qu'ils font pas dans la boîte

Prof E : ça j'ai vu moi aussi (TdP 188-195)

Episode 5 (épisode 43 min 36 – 43 min 55)

Prof D : ils s'en servent pour représenter enfin c'est vraiment on refait trois fois le même truc je fais une annonce j'écris je fais une addition je fais la boîte je fais la ligne

Prof F : c'est trois façons de faire la même chose (TdP 196-197)

Episode 6 (épisodes 1h 12min 46 – 1h 19min 06 et 1h 25min 03 – 1h 29min 13)

A partir d'un constat par les professeurs de difficultés des élèves de transférer la situation du *Jeu des annonces* pour donner la somme de deux termes (sur la feuille de calcul prévue dans le domaine calcul mental), un professeur (G) propose une référence à une quantité de billes provenant de deux poches de pantalon. Le chercheur rappelle le système de référence construit avec le *Jeu des annonces* et demande de considérer l'écriture additive *comme modèle pour d'autres situations*.

Chercheur : l'usage de cette représentation *pour anticiper fictivement ce qui pourrait apparaître concrètement* c'est un grand pas pour les élèves c'est pas spontané ça se construit *il faut apprendre à la contrôler* voyez le contrôle sur ces représentations il est pas spontané donc *il doit référer aux usages que vous avez construits précédemment* ou qui pourront apparaître avec les billes avec les fleurs avec les élèves de la cour *y a des tas de situations où on pourrait utiliser convoquer utilisez-le dans vos usages courants* combien on est aujourd'hui□ et bien on est 4 filles plus 12 garçons (TdP 403)

Episode 7 (épisode 1h 29min 13 - 1h 32min 12)

Prof H : j'en ai un qui a fait une annonce à un moment donné donc le premier a annoncé quelque chose le deuxième annonce autre chose et j'ai vu le troisième réfléchir alors *ils ont réfléchi collectivement à ce que le troisième pouvait annoncer pour ne pas dépasser 6*

Chercheur : c'est bon ça

Prof H : c'est génial

Chercheur : alors est-ce que tu as utilisé alors *voilà une opportunité n'hésitez pas s'il vous plaît à utiliser les représentations* à ce moment-là c'est là que ça va jouer fort (TdP 442-445)

Episode 8 (épisode 2h 43min 10 – 2h 44min 27)

Prof C : elle [la boîte] me gêne pour un truc alors je suis persuadée que les gamins quand ils ont 3 et 2 si on met le 5 en haut la seule utilité que j'y vois *c'est d'avoir un répertoire additif* >c'est pas inintéressant hein< effectivement mais ils vont chercher ils vont toujours compter quoi avec cette boîte

Prof I : pas spécialement non c'est une autre manière d'envisager l'addition

Prof C : *ça enlève le côté malin du truc* quoi moi j'ai des gamins qui cassent un nombre pour le mettre avec l'autre parce que c'est plus utile et avec la boîte tout est emboîté quoi

Chercheur : *je vois des intérêts par rapport à la main manquante* […] il faut faire attention ce ne sera pas une représentation qui permet de calculer faut être très vigilant par rapport à ça *la* *représentation qui permet de calculer c'est le nombre et les signes opératoires* (TdP 901-907)

ÉTUDE DES EFFETS D'UNE FORMATION D'INITIATION À LA RECHERCHE SUR LA DYNAMIQUE DU DÉVELOPPEMENT DES PRATIQUES DE FUTURS PROFESSEURS EN DÉBUT DE CARRIÈRE

Brigitte GRUGEON-ALLYS
PR, ESPE de Créteil, Université Paris Est Créteil
LDAR, Université Paris Diderot
brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

Julie HOROKS
MCF, ESPE de Créteil, Université Paris Est Créteil
LDAR, Université Paris Diderot
julie.horoks@u-pec.fr

Résumé
La recherche présentée vise à évaluer l'impact d'une initiation à la recherche en didactique des mathématiques, dans le cadre du master MEEF Premier degré à l'ESPE de l'académie de Créteil, sur la formation des futurs enseignants, et plus particulièrement, sur leur façon d'enseigner les mathématiques. Nous examinons le dispositif de formation (contenu et tâches de formation) puis nous présentons les éléments méthodologiques développés pour analyser et mettre en relation les pratiques réelles des enseignants débutants mises en place au cours des séances de mathématiques et les pratiques attendues après la formation reçue, en particulier la vigilance didactique (Grugeon-Allys 2008, Charles-Pézard 2010). Dans le cadre de la double approche (Robert & Rogalski, 2002), nous cherchons à interpréter le développement professionnel des étudiants de M2 en lien avec leur composante personnelle et les contraintes de travail de l'établissement où ils enseignent. Nous présentons les premiers résultats portant sur une année d'exercice à partir de l'analyse d'un questionnaire et des observations menées en classe.

Dans le cadre du master « Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation du premier degré » (MEEF) à l'ESPE de l'académie de Créteil – Université Paris Est Créteil, les étudiants suivent pendant deux ans une–initiation à la recherche pour « entamer un travail qui permettra au futur enseignant de s'inscrire dans une dynamique de développement professionnel ». Le programme de formation indique aussi que « s'initier à la recherche en produisant un travail personnel de recherche, rend(ra) mieux capable de lire des travaux de recherche, de s'en approprier les résultats, de les mettre en relation avec les connaissances déjà disponibles et de développer une attitude réflexive. » C'est cette affirmation que nous questionnons ici et essayons de tester. La discipline de recherche dans laquelle s'effectuera cette initiation est choisie parmi plusieurs options relevant de propositions rattachées à des laboratoires de recherche. Cette initiation porte sur environ 140h réparties sur deux ans et doit permettre aux étudiants de produire un mémoire de recherche, qui sera évalué dans le cadre du master.

Le projet–que nous présentons ici est réalisé dans le cadre de la recherche en éducation organisée à l'ESPE - Université Paris Est Créteil. Il implique des enseignants chercheurs du laboratoire LDAR – UPEC[1], qui sont aussi des formateurs intervenant dans l'initiation à la recherche en didactique des mathématiques analysée ici. Ce projet vise à évaluer l'impact de cette initiation sur la formation et la

[1] Nadine Grapin, Brigitte Grugeon-Allys, Julie Horoks, Eric Mounier, Cécile Ouvrier-Buffet, Monique Pézard-Charles et Julia Pilet

dynamique de développement des pratiques des futurs enseignants, sur le court terme en stage et sur le moyen terme dans les deux premières années d'exercice. C'est l'aspect développement des pratiques enseignantes en germes, hors de la classe et en classe, qui est ici analysé, dans un domaine spécifique, celui de l'enseignement des mathématiques. Dans cette communication, nous étudions le développement des pratiques enseignantes d'anciens étudiants de M2, ayant suivi l'option de recherche OR1 « Apprentissages mathématiques à l'école : approche didactique », au cours de leur première année d'exercice.

Nous présentons d'abord la problématique et le cadre théorique puis la méthodologie développée, en particulier pour analyser des contenus de formation et leur évolution. Nous illustrons ensuite l'expérimentation réalisée et des résultats portant sur les effets de la formation sur le développement des pratiques enseignantes et sur l'évolution de la maquette. Pour terminer, après une brève conclusion, nous projetons quelques perspectives de recherche.

I - PROBLÉMATIQUE ET CADRE THÉORIQUE

Nous cherchons à évaluer l'impact d'une initiation à la recherche en didactique des mathématiques sur la formation et le développement professionnel des futurs enseignants, et plus particulièrement, sur leur façon d'enseigner les mathématiques. Qu'entend on par évaluer l'impact d'une formation ?

1 Problématique

Des recherches ont déjà porté sur l'évaluation des formations initiales des professeurs stagiaires du premier degré (Butlen 2002, Peltier-Barbier 2004) ou du second degré, en particulier sur celles de professeurs de mathématiques (Grugeon-Allys 2008, 2010). Certaines ont porté sur l'étude du rôle du mémoire. Mais ces recherches ont principalement eu lieu avant l'évolution du dispositif de formation dans le cadre de la "masterisation". Depuis 2010, la réforme de la formation des futurs enseignants, avec la mise en place des masters d'enseignement et de formation, a modifié les contenus et modalités de la formation. Des unités d'enseignement ont été attribuées à l'initiation à la recherche pour transformer la perception et la pratique du métier, avec des objectifs très variables selon les académies, voire à l'intérieur d'une même académie (Grugeon-Allys 2012).

Pour aborder cette question difficile et complexe, sous différentes facettes et de manière plus générale, nous nous demandons :

- Qu'est-ce qu'une recherche sur la formation et comment peut-on la mener ?
  1. Comment en analyser les contenus et modalités ?
  - Qu'évalue-t-on en termes d'effets potentiels ou réels, et comment ?
  - Quels moyens, théoriques et méthodologiques, peut-on se donner ?

Pour tenter de construire un cadre d'analyse permettant de répondre à ces questions, et suite aux recherches de Grugeon-Allys (2008, 2010), nous cherchons alors à définir une référence pour caractériser la formation en relation avec les pratiques enseignantes visées.

Pour aborder l'évaluation de l'impact de l'initiation à la recherche en didactique des mathématiques sur la formation des futurs enseignants, nous nous demandons :

- Quels éléments dans la dynamique de développement professionnel des étudiants ont évolué au cours de la formation par la recherche, puis des premières années d'exercice du métier ? Quelles régularités dans les pratiques ? Quelles variabilités ?
- Quelles relations entre ces régularités et les effets potentiels de la formation par la recherche définis *a priori* à partir du choix des contenus et des modalités de formation ?

- En quoi les conditions mises en place favorisent-elles l'entrée des étudiants dans une démarche de pratique réflexive (Altet 1998) portant aussi bien, sur les savoirs tant disciplinaires (ici mathématiques) que didactiques mobilisés pour enseigner, et sur leur opérationnalisation dans les pratiques développées aussi bien hors de la classe qu'en classe ?

2 Présentation de la formation à et par la recherche dans l'OR1

Les contenus de l'initiation à la recherche en didactique des mathématiques sont inspirés de théories de la recherche en didactique des mathématiques française, et plus particulièrement de résultats liés à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. L'initiation doit permettre de familiariser les étudiants avec quelques résultats marquants sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Elle a aussi pour objectif de leur donner les outils nécessaires pour pouvoir réaliser un mémoire de recherche à l'issue des deux années de master. Les contenus privilégiés sont en particulier ceux relatifs aux objets mathématiques enseignés à l'école : découverte du nombre, des décimaux et fractions, calcul mental et posé, travail sur les grandeurs et la mesure, premiers apprentissages géométriques, ou encore résolution de problèmes.

La grille suivante donne la chronologie des différentes séances de l'initiation, qui seront analysées plus en détails par la suite[2] :

1ère année de master	**2ème année de master**
Introduction aux théories de DDM (TSD, TAD)	Rappel des cadres de la didactique des mathématiques
Quelques exemples de situations didactiques	Méthodologie pour le mémoire
Analyse de tâches, variables didactiques, etc.	Analyse de protocoles
Recherche bibliographique	Présentation d'un outil d'analyse de tâche
Lectures d'articles	Méthodologie pour le mémoire
L'évaluation en DDM	Gestion de l'hétérogénéité
Analyse de travaux d'élèves, pistes pour problématique	Méthodologie pour le mémoire
Gestion des élèves en difficulté	Méthodologie pour le mémoire
Méthodologie pour le mémoire	Analyse des pratiques enseignantes
Analyse de travaux d'élèves, pistes pour problématique	Analyse de vidéo
Analyse de vidéos (1)	Méthodologie pour le mémoire
Analyse de vidéos (2)	Analyse des pratiques enseignantes
Numération	Classifications/définitions

[2] Cette grille concerne l'initiation proposée à la promotion d'étudiants ayant suivi le master en 2011-2012 et 2012-2013, elle a évolué depuis, en particulier en lien avec la réflexion menée pendant cette étude.

Méthodologie pour le mémoire	Méthodologie pour le mémoire
Résolution de problèmes	L'enseignement de la soustraction
Calcul mental	Analyse de manuels
Maternelle	Méthodologie pour le mémoire
Méthodologie pour le mémoire	Situations de recherche : Maths à modeler
Méthodologie pour le mémoire	

Tableau 1 : Contenus de l'OR1

Certaines séances sont introduites à travers un contenu mathématique spécifique (calcul mental, numération), d'autres tournent autour d'un axe de recherche particulier (élèves en difficulté, pratiques enseignantes telles que l'évaluation ou la gestion de l'hétérogénéité) ou d'un outil de recherche lié aux données recueillies (vidéo, manuel, protocoles, productions d'élèves). Quelques cours s'articulent autour de l'exposition d'éléments théoriques et de leur illustration par des exemples de recherches et de résultats. Enfin, de nombreuses séances sont consacrées au suivi méthodologique du travail personnel des étudiants.

En terme de modalités de formation, dans le cadre de l'OR1, on peut considérer qu'elles diffèrent probablement des stratégies des formateurs utilisées dans le reste de la formation (cf. homologie, monstration et transposition, Houdement et Kuzniak 1996), puisque ce sont des activités liées à l'initiation à la recherche et non à l'enseignement. Par exemple, lorsque les étudiants sont amenés à « faire une analyse *a priori* fondée sur les concepts de TSD», nous les incitons à développer une pratique liée à la recherche. Un des enjeux visés est d'amener les étudiants à transférer cette démarche d'analyse *a priori* dans des situations professionnelles.

3 Cadres théoriques : plusieurs niveaux à questionner

L'enjeu de cette recherche est de mettre en relation le scénario de formation développé dans l'OR1 « Apprentissages mathématiques à l'école : approche didactique » et les pratiques en classe développées lors des deux premières années d'exercice, par les étudiants de deuxième année de master ayant suivi cette formation. Le phénomène didactique étudié est complexe et comporte de multiples facettes, tant du côté de la formation - système « savoir de formation/enseignant/formateur » - et du côté des pratiques enseignantes que du côté des apprentissages - système « savoir mathématique/élève/enseignant » - et il est donc nécessaire de les prendre en compte pour éclairer les différents aspects du phénomène.

Différentes théories didactiques sous-tendent donc nos analyses à tous les niveaux de cette étude : celles qui guident les choix effectués pour la formation, celles qui guident sa mise en œuvre et nous permettent d'analyser ce qui se passe en formation, celles qui nous permettent d'analyser les pratiques des stagiaires dans leurs classes, ou encore celles qui sont enseignées comme objets et outils dans le cadre de l'initiation à la recherche.

La conception du scénario de formation dépend d'hypothèses sur la formation mais aussi des contraintes de la formation liées à l'organisation générale du Master MEEF (cours répartis dans trois volets disciplinaire / professionnel / recherche, horaires, stages, formateurs, etc.). Les principales hypothèses qui fondent le scénario de formation portent à la fois sur les pratiques enseignantes visées par la formation et sur les contenus, les tâches et les modalités de formation qui peuvent contribuer à permettre un « pas de côté » pour favoriser une pratique réflexive.

L'analyse des pratiques des enseignants en classe (pratiques déclarées par les enseignants lors d'entretiens ou à partir de questionnaires ou pratiques effectives observées en classe), doit prendre en compte les contraintes personnelles et les contraintes du métier.

Pour tenir compte de cette complexité de la formation et des pratiques, il nous paraît donc nécessaire d'organiser une étude multidimensionnelle en mobilisant plusieurs cadres théoriques en fonction des objets de recherche, formation ou pratiques enseignantes, du grain d'analyse global ou local, du statut de l'enseignant générique ou spécifique.

3.1 Hypothèses sur la formation et double approche didactique et ergonomique

Les hypothèses portant sur la formation et les contraintes du métier relèvent de la double approche didactique et ergonomique (Robert et Rogalski, 2002) qui imbrique une approche didactique où les activités du professeur sont analysées en fonction des apprentissages potentiels des élèves en mathématiques et une approche ergonomique où le professeur est considéré comme un individu dans l'exercice du métier d'enseignant. Les activités des professeurs sont constitutives de leurs pratiques.

Ce point de vue prend en compte la complexité et la cohérence des pratiques, associant les apprentissages des élèves et des déterminants du métier, pour dégager des logiques d'action de l'enseignant. Les pratiques enseignantes se stabilisent rapidement au cours de la formation et des premières années d'exercice (Montmollin 1984, Robert 2005). La double approche didactique et ergonomique permet une interprétation diachronique et globale du développement des pratiques, pour un enseignant spécifique donné, à partir de leur recomposition *via* cinq composantes des pratiques, cognitive et médiative, personnelle, institutionnelle et sociale. De plus, des cohérences sont observables à différents niveaux de l'activité du professeur, aux niveaux global (préparations et stratégie d'enseignement), local (organisation et gestion des situations, gestion des interactions et des improvisations), micro (gestion des gestes).

D'autres hypothèses sur la formation nous viennent de recherches déjà effectuées : l'importance de s'appuyer sur le collectif et d'organiser des mises en commun (cf. double régulation, Rogalski 2008), de partir des pratiques presque déjà là des enseignants (Robert, Roditi et Grugeon 2008), de leur proposer des analyses de ressources en prise avec la réalité du métier pour développer l'expérience (mais dans un contexte de recherche), de leur apporter non pas des méthodes à appliquer mais plutôt des alternatives pour enseigner (Robert et Horoks 2007).

3.2 Outils d'analyse de la conception et de la mise en œuvre de la formation

La conception et la mise en œuvre de la formation s'appuient sur plusieurs cadres en fonction des aspects étudiés et de différents grains d'analyse. Les contenus de la formation définis *a priori* prennent en compte des apports de la recherche en didactique des mathématiques en particulier des concepts issus de la théorie des situations didactiques - TSD : situation didactique, situation a didactique, situation d'action, de formulation ou de validation, variable didactique, contrat didactique, dévolution, institutionnalisation, milieu, stratégie optimale, rétroaction du milieu, analyse *a priori* / *a posteriori*, conception, mais aussi de concepts issus de la théorie anthropologique du didactique - TAD : transposition didactique. Les contenus portent aussi sur des résultats de recherche relatifs à l'enseignement de notions mathématiques (notamment la numération, le calcul mental, la géométrie), aux difficultés des élèves, aux pratiques enseignantes (Butlen et al. 2003, Charles-Pézard 2010). Ces concepts sont mobilisés comme outils conceptuels, dont on peut caractériser deux grands types suivant leur usage par les étudiants. Certains des concepts abordés sont utiles, plus ou moins directement, pour la classe, par exemple les concepts de variables didactiques ou de différentes phases d'une séance. D'autres outils ne voient leur présence ici justifiée que pour engager les étudiants dans l'initiation à la recherche, notamment pour concevoir des situations, des questionnaires leur permettant de tester des hypothèses. Nous considérons que ces deux types d'outils conceptuels pourront participer au développement des pratiques de ces futurs enseignants.

La formation à l'ESPE a pour objectif d'accompagner les étudiants à développer différents niveaux de l'activité de l'enseignant en lien avec les compétences professionnelles à construire. Pour modéliser les niveaux de l'activité de l'enseignant visées dans l'OR1 il nous semble nécessaire de caractériser les types de tâches (Chevallard 1999) proposés et les modalités de formation. Les tâches ainsi caractérisées devraient permettre de motiver les raisons d'être des concepts travaillés et d'amener les étudiants à mobiliser les concepts outils transposés de la didactique des mathématiques (essentiellement ceux de la TSD) pour les résoudre. L'usage de ces outils devrait conduire les étudiants à construire dialectiquement une « certaine » prise de distance par rapport à une pratique professionnelle et une première construction d'expérience professionnelle en prise sur la réalité de l'enseignement (Cf. hypothèses sur la formation 2.1). Ce choix théorique reposant sur une approche multidimensionnelle permet de définir une référence en termes de types de tâches / activités enseignantes visées[3], pour caractériser la formation en relation avec les activités visées (relativement aux pratiques enseignantes ou pratiques liées à l'initiation à la recherche). De cette référence, nous construisons deux grilles d'analyse des pratiques :

- La liste des activités enseignantes visées *a priori* par la formation mise en relation avec une grille d'analyse des contenus de formation

- L'échelle de développement *a priori* des pratiques pour évaluer les pratiques effectives des professeurs d'école[4] en lien avec les activités enseignantes développées en classe. Nous présentons les types de tâches et l'échelle de développement au paragraphe II.

3.3 L'analyse des effets de la formation sur les pratiques enseignantes

L'analyse des pratiques enseignantes durant les deux premières années d'exercice doit permettre de mettre en perspective les pratiques visées par la formation et les pratiques effectives des enseignants en classe.

Pour comparer les pratiques visées en formation et les pratiques effectives, nous utilisons la double approche, fondée sur la théorie de l'activité de Vygotsky, qui permet de distinguer tâche prescrite / tâche effective d'une part et donc pratique visée (prescrite)/pratique effective d'autre part (Robert 2008). L'évolution des pratiques est étudiée à partir de l'étude des écarts entre les pratiques visées en formation et celles effectivement mises en place en classe, en termes de différents types de savoirs pour l'enseignement, des différentes compétences professionnelles développées, de régularités ou de variabilités de pratiques effectives (Robert, Pariès et Rogalski 2008). Les régularités sont mises en perspective des choix réalisés en formation, notamment des types de tâches développés en lien avec les concepts de la DDM mobilisés. Les variabilités sont mises en perspective des contraintes liées soit à la composante personnelle, soit aux composantes institutionnelle ou sociale (notamment l'établissement d'exercice).

Pour construire une grille d'analyse des pratiques, nous nous appuyons sur les trois i-genres définis par Butlen et al. (2003).

Les enseignants de l'i-genre 1 ou 2 se caractérisent par :

- des scénarios ne présentant pas ou très rarement de problèmes consistants aux élèves,
- des temps de recherche très réduits,
- une baisse quasi systématique des exigences de la part du professeur,

[3] Quand on parle d'activité, il s'agit d'activité engendrée par une tâche, au sens de la théorie de l'activité. Quand on parle d' « activité visée », on entend avec une technique relevant de la technologie et théorie visée, c'est-à-dire les activités enseignantes mettant en jeu les concepts transposés et les outils de la didactique des mathématiques. Les pratiques sont la résultante de toutes ces activités enseignantes.

[4] Professeur d'école stagiaire (PES) la première année d'exercice.

- une individualisation non contrôlée de l'enseignement,
- la mise en œuvre d'une certaine forme de pédagogie différenciée rendant le plus souvent impossible l'existence de phases de synthèse et d'institutionnalisation,
- une difficulté à gérer le temps didactique . (Butlen, Charles-Pézard, Masselot 2011).

Les pratiques enseignantes visées par la formation relèvent principalement de l'i-genre 3 :

- proposition de problèmes consistants,
- organisation de phases de recherche pour les élèves,
- organisation de temps de synthèse et d'institutionnalisation suivies d'activités de réinvestissement,
- gestion collective des apprentissages et des comportements
- maintien des exigences en termes d'apprentissages.

Les pratiques d'enseignants du i-genre 3 sont caractérisées sur une échelle à quatre niveaux :

Niveau 1	proposition de problèmes consistants et aménagement d'un temps de recherche
Niveau 2	organisation d'un temps permettre aux élèves d'expliciter les procédures
Niveau 3	organisation d'un temps pour hiérarchiser les procédures
Niveau 4	organisation d'une institutionnalisation des savoirs visés

Tableau 2 : Les 4 niveaux des pratiques du i-genre 3

La mise en place de ces quatre niveaux permet à un enseignant d'exercer une vigilance didactique, définie « comme un ajustement didactique permanent de la part du professeur faisant appel aux deux composantes cognitive et médiative des pratiques et s'exerçant dans les trois niveaux global, local et micro. » (Butlen et al. 2012b). Pour exercer une certaine vigilance didactique, les enseignants doivent mobiliser des connaissances mathématiques et didactiques en situation, en particulier « des outils permettant de lire le réel, issus de la didactique des mathématiques mais transformés en vue de l'action d'enseigner ». Ces outils issus en partie de la TSD peuvent permettre la mise en œuvre d'une analyse *a priori* pour identifier le savoir mathématique en jeu dans une situation d'apprentissage, le choix de variables didactiques et l'incidence de leurs valeurs sur les procédures et les résultats des élèves, pour mieux anticiper la mise en actes du projet. Pendant la classe, ces outils peuvent aider au repérage de phénomènes et à la prise de décisions.

4 Hypothèses de recherche

Nous formulons deux hypothèses de recherche :

- Hypothèse 1 : Une entrée par la recherche dans la formation à partir de types de tâches s'appuyant sur l'usage d'outils conceptuels liés à des résultats de recherche en didactique, peut favoriser le développement chez l'étudiant, futur PE, d'une « appréciation critique argumentée ».
- Hypothèse 2 : La mobilisation de ces outils conceptuels, sous certaines conditions organisées pendant la formation, peut contribuer à enrichir et à favoriser l'acquisition de certains savoirs pour l'enseignement ainsi que l'exercice d'une vigilance didactique (Charles-Pézard 2010, Butlen et al. 2012a), élément constitutif d'une pratique réflexive, chez les futurs enseignants.

II - METHODOLOGIE

Nous examinons maintenant les pratiques visées *a priori* par la formation.

1 Pratiques visées *a priori* par la formation

Les pratiques visées sont listées *a priori* (et non en fonction des contenus de l'option) à partir du référentiel national de compétences des pratiques enseignantes (cf. BO du 25 juillet 2013) et des résultats de recherche sur les pratiques. Elles prennent en compte les contenus mathématiques visés et leurs spécificités, à partir des résultats de la recherche en didactique des mathématiques pour le 1er degré. Nous distinguons les pratiques d'enseignant des pratiques de chercheur, visées par la formation.

1.1 Pratiques d'enseignant visées a priori par la formation

Nous listons ci-dessous différentes activités constituant les pratiques d'enseignant visées :

- Repérer les enjeux d'un apprentissage pour choisir une situation adaptée
- Construire une situation adaptée (par rapport aux objectifs, à la séquence)
- Choisir et utiliser de façon pertinente un manuel ou d'autres ressources
- Connaître les savoirs mathématiques et leur didactique
- Gérer différents types de séances (Introduction, institutionnalisation, entraînement, réinvestissement, évaluation)
- Gérer les différentes phases d'une séance (dévolution, recherche, mise en commun (formulation, validation et hiérarchisation des procédures), institutionnalisation)
- Evaluer les élèves
- Gérer l'hétérogénéité des procédures des élèves
- Faire un retour réflexif sur le déroulement d'une séance
- Continuer à se former et innover.

Pour mettre en relation les activités enseignantes visées et les types de tâches mis en place pour développer ces activités, nous nous demandons :

- Pour chaque tâche proposée dans le cadre de l'initiation à la recherche *via* l'option OR1 « Apprentissages mathématiques à l'école : approche didactique », quelles sont les activités enseignantes potentiellement visées ?
- Pour chaque activité enseignante visée, quelles sont les tâches proposées dans le cadre de l'option OR1, et les contenus de DDM relatifs à ces tâches, qui peuvent avoir une influence particulière sur le développement de cette pratique ?

Quelle prise en compte du reste de la formation par rapport aux tâches proposées et à la formation de ces pratiques ?

1.2 Des types de tâches travaillés

De même, nous listons les types de tâches conçus dans la formation en OR1 pour développer les pratiques d'enseignant visées.

- Analyser des tâches et des situations
- Analyser des productions d'élèves

- Analyser des manuels
- Faire des analyses *a priori* / *a posteriori* de séances
- Analyser des vidéos au regard d'une problématique
- Rechercher et analyser des articles
- Problématiser et formuler des hypothèses de recherche
- Construire une méthodologie pour répondre à un questionnement

Nous remarquons que certains types de tâches peuvent être proposés dans les autres volets de la formation. Quels sont ceux qui sont spécifiques à l'initiation à la recherche ? Par exemple, pour ce qui concerne l'analyse de vidéos dans les autres volets de la formation, on peut imaginer qu'elle est proposée aux étudiants, mais probablement pas au regard d'une problématique définie en amont.

1.3 Des différences avec les autres UE contenant (de la didactique) des mathématiques

Même si les types de tâches peuvent être communs avec les autres UE mobilisant des contenus de didactique des mathématiques, nous pouvons faire l'hypothèse qu'ils ne sont probablement pas équivalents pour autant. Plusieurs éléments se conjuguent pour distinguer les tâches mises en œuvre dans d'autres UE. En voici des illustrations.

Les tâches proposées dans les autres UE utilisent différents types de ressources mais rarement, voire jamais, les articles de recherche utilisés dans une UE d'initiation à la recherche. D'autre part, préparer et mener une séance dans sa classe relève du développement de pratiques professionnelles alors que définir et mener une expérimentation en classe pour tester des hypothèses de recherche amène à prendre de la distance par rapport à des choix didactiques définis a priori, même si ce type de tâche permet aussi de développer des pratiques d'enseignant.

Nous pointons ici la différence entre question professionnelle et problématique de recherche même si les limites restent assez floues. Dans un mémoire de recherche, un étudiant de M2 va tester par exemple si « l'utilisation régulière du calcul mental dans des calculs additifs et soustractifs, sous certaines conditions, va favoriser la résolution de problèmes du champ des structures additives », hypothèse formulée à partir de l'étude des travaux de Butlen et Pézard (1992) Même si cette étude va de façon incontournable amener l'étudiant à rencontrer des questions professionnelles, l'enjeu visé n'est pas de même nature.

De même, l'analyse de données (productions d'élèves, vidéo) ne se fait pas avec les mêmes objectifs que pour une UE de formation professionnelle. Dans le cas d'une analyse de vidéo en lien avec une question de recherche, l'enjeu visé par l'analyse d'une vidéo conçue et enregistrée à cet effet, est de tester une hypothèse de recherche, avec une certaine généralité liée aux résultats mobilisés des travaux de recherche déjà étudiés. Ce ne serait pas le cas dans une analyse de vidéo, où l'enjeu serait d'analyser relativement à une analyse *a priori* (nécessaire aussi), les gestes professionnels réalisés par un enseignant, leur écart par rapport aux enjeux visés, au niveau de l'activité de l'enseignant (global, local et micro) puis de proposer localement des alternatives pour cette séance, à ces trois niveaux d'intervention possibles.

Il n'est pas toujours facile de faire ce pas de côté, pour des étudiants qui visent le métier d'enseignant, sans l'avoir encore vécu, et pour des chercheurs qui forment aussi et surtout de futurs enseignants !

1.4 Pratiques de chercheur visées a priori par la formation

Au-delà des pratiques d'enseignants, d'autres pratiques sont aussi développées : les pratiques de chercheur. Voici des activités qui relèvent de celles-ci et qui sont visées *a priori* par la formation.

- Élaborer une recherche bibliographique
- Problématiser dans le cadre de la DDM

- Formuler des hypothèses de recherche
- Diffuser des résultats de recherche en lien avec les problématiques du métier d'enseignant
- Définir une méthodologie d'analyse et recueillir des données
- Faire une analyse *a priori* / *a posteriori* fondée sur des concepts de la DDM en lien avec les savoirs en jeu, en s'appuyant sur les concepts de la TSD (Brousseau, 1998), de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1989)
- Mettre en place ou adapter une ingénierie didactique.

Ces activités sont nécessaires pour mener à bien un mémoire dans le champ de la didactique des mathématiques, ce qui est l'évaluation demandée au semestre 4 du master.

2 Niveau d'échelles des pratiques enseignantes

Pour étudier la dynamique de développement professionnel des professeurs d'école stagiaires débutants pour les étudiants ayant suivi l'OR1 en 2012-2013, il nous est nécessaire de définir une grille permettant d'analyser, de comparer et d'évaluer les pratiques des PES en dehors de la classe et en classe. Pour ceci, nous avons caractérisé *a priori* une échelle des pratiques enseignantes.

Nous nous référons au cadre de la double approche pour prendre en compte les contraintes institutionnelles, sociales et personnelles. Nous prenons aussi en compte les trois i-genres définis par Butlen et al. (2003). Cependant, l'échelle définie ne prend pas en compte le niveau global des pratiques. Aussi, nous avons donc croisé les activités enseignantes visées pendant la formation en lien avec les tâches travaillées en formation et les niveaux d'échelles définis. Nous obtenons, pour chacune des activités listées, 3 niveaux, C, B et A. Le niveau C relève du i-genre 1, le niveau A d'un i-genre 3 de référence. Le niveau B indique la connaissance de savoirs didactiques partiels, peu structurés et mobilisés de façon isolée. On peut aussi envisager un niveau A-, entre B et A, qui relèverait d'un i-genre 3 ne comporte pas de hiérarchisation des procédures, ni d'une institutionnalisation complète mais locale, et permettrait au chercheur de noter une pratique en voie de construction.

Illustrons notre propos. Qu'en est-il pour l'activité « construire une situation adaptée (par rapport aux objectifs, à la séquence) » ?

	C	B	A
construire une situation adaptée (par rapport aux objectifs, à la séquence)	* Situation isolée, non adaptée aux objectifs * au cycle 1, les ateliers conduisent majoritairement à de l'occupationnel	* Situation adaptée par rapport aux objectifs visés, située plus ou moins dans une progression, mais sans variables didactiques qui permettraient de faire évoluer les procédures * au cycle 1, au moins 1 atelier présentant des enjeux d'apprentissage par rapport aux objectifs visés	* Situation adaptée par rapport aux objectifs visés, située dans une progression, avec un milieu riche lié à des variables didactiques qui permettent de faire évoluer les procédures * au cycle 1, les ateliers visent des apprentissages et sont situés dans une progression

Tableau 3 : Les trois niveaux pour l'activité « construire une situation adaptée »

Les différents niveaux tiennent compte des pratiques visées par la formation, pour atteindre avec le niveau A une pratique « de référence » selon nous. Le niveau B conduit à une situation adaptée par rapport aux objectifs visés, rarement située dans une progression, et sans variables didactiques qui permettraient de faire évoluer les procédures.[5] Entre A et B, on pourrait ici envisager un niveau A- avec un milieu matériel pertinent mais peu explicité.

Un autre exemple, avec l'activité « gérer les différentes phases d'une séance », permet de voir comment les différents éléments théoriques évoqués précédemment, ici tirés de la TSD servent aussi à définir ici les différents niveaux possibles :

	C	B	A
gérer les différentes phases d'une séance dévolution, **recherche,** **mise en commun** **institutionnalisation**	* Pas de phases clairement identifiées (oral collectif, exercices individuels écrits avec faible mise en commun, usage dominant de fichier) * Peu d'initiatives laissées aux élèves, validation à la charge du professeur	* Des phases sont organisées mais pas forcément gérées pour engager les élèves dans la recherche et la comparaison des procédures * Initiatives partagées mais peu de validation à la charge des élèves, ou qui ne visent pas la construction d'une rationalité mathématique * au cycle 1, les phases sont gérées au sein des ateliers	* Organisation d'une phase de lancement (reformulation ou autre) * Organisation d'un temps de recherche * Organisation d'une mise en commun (formulation, validation et hiérarchisation des procédures), avec des initiatives partagées et des validations visant à la construction d'une rationalité mathématique * Organisation de bilans conduisant à une institutionnalisation (dépersonnalisation, décontextualisation) en lien avec l'activité * au cycle 1, les phases sont gérées aussi au sein du collectif

Tableau 4 : Les trois niveaux pour l'activité « gérer les différentes phases d'une séance : dévolution, recherche, mise en commun, institutionnalisation »

Ici encore, un niveau intermédiaire entre A et B pourrait être défini, lorsqu'on observe une prise en compte des élèves pour organiser la formulation et la validation des procédures, mais sans prendre en compte leur hiérarchisation, et que des bilans oraux sont faits par l'enseignant, mais sans dépersonnalisation ni décontextualisation pour le moment, ni de traces écrites et d'affichages

Nous présentons maintenant l'expérimentation réalisée et comment nous avons mobilisés ces outils pour étudier le développement professionnel des étudiants lors de la première année d'exercice.

III - EXPÉRIMENTATION ET PREMIERS RÉSULTATS

1 Expérimentation réalisée et données recueillies

1.1 Expérimentation

L'UE d'initiation à la recherche a été mise en place depuis septembre 2010 dans le cadre du master MEEF de l'ESPE de Créteil. Nous avons étudié la dynamique de développement des pratiques des premiers étudiants ayant choisi l'OR1 « Apprentissages mathématiques à l'école : approche didactique » comme

[5] Dans le cadre de la TAD, on chercherait à identifier les techniques associées aux types de tâches et les technologies concernées, ce qui a été fait par Grugeon-Allys (2008).

UE d'initiation à la recherche et l'ayant suivie sur 2 ans : en 2011-2012 pour le M1 et 2012-2013 pour le M2 et 21 d'étudiants l'ont suivie. Nous avons fait passer un questionnaire aux étudiants en fin de M2, avant les soutenances, pour appréhender leurs points de vue sur la formation reçue. Nous ne présenterons pas cette partie de la recherche ici, même si elle nous permet de repérer des évolutions éventuelles du regard que les étudiants portent sur leur formation et son utilité.

En 2013-2014, nous avons organisé le suivi de 12 professeurs d'école stagiaires[6] (PES, première année d'exercice) issus de cette promotion de M2, nommés dans des écoles dans les trois départements de l'académie de Créteil[7]. Au delà des PES ayant suivi l'OR1, nous avons aussi suivi huit étudiants ayant participé à une autre option de recherche. Ces étudiants constituaient un groupe témoin. Nous cherchons des régularités dans les pratiques des PES ayant suivi l'OR1, aspects non présents dans les pratiques des autres PES.

Pour accéder à des éléments des pratiques de ces PES hors classe et en classe, pendant cette première année d'exercice, nous avons organisé la méthodologie suivante. Nous avons réalisé les deux visites prévues dans le cadre de l'accompagnement des PES par les professeurs de l'ESPE. Nous avons explicité le protocole de visite avant les deux visites aux PES (protocole conçu pour que tous les chercheurs respectent les mêmes modalités de visite, avant, pendant et après l'observation, et annoncent les mêmes objectifs aux PES) et avons précisé que nous exploiterions les données recueillies dans une recherche en cours[8], indépendamment du processus de titularisation. Les étudiants nous ont fourni leurs préparations de séances (certains ne les ont pas fournies d'eux mêmes). Nous avons organisé l'observation en classe et les entretiens formatifs, comme indiqué dans le protocole. Les comptes rendus de visites et les bilans de formation ont été pris en compte lors des deux commissions de titularisation. Aussi, la mise en place du protocole de visite nous a semblé essentielle pour expliciter les conditions de la visite afin d'éviter au maximum d'interférer avec le processus d'évaluation des étudiants. Nous présentons ci-dessous les données recueillies dans ce contexte.

1.2 Données recueillies

La formation dans l'OR1

Nous analysons d'abord les contenus de formation, types de tâches et modalités de l'OR1 mise en place en M1 (2011-2012) et en M2 (2012-2013), pour en lister toutes les tâches et les activités qui ont pu en découler.

Les réponses au questionnaire en fin de M2

Nous analysons les réponses aux questionnaires passés en fin de M2 pour obtenir leurs points de vue sur la formation reçue et des éléments portant sur leurs pratiques déclarées. Quinze étudiants ont répondu au questionnaire. Plusieurs thèmes étaient abordés, parmi lesquels l'intérêt porté aux contenus de l'OR1, le lien entre ces contenus et ceux des autres UE, la place du mémoire. Les étudiants ont aussi fourni leur note à l'épreuve orale de mathématique du concours de professeur des écoles, ainsi que les rapports de visites effectuées pendant leur stage et les écrits professionnels associés à ces stages.

Les données recueillies sur les pratiques des PES

Pour recueillir les données relatives aux 20 PES observés en classe (dont 12 issus de l'OR1), nous avons défini une grille d'observation commune à l'ensemble des chercheurs impliqués dans la recherche, permettant d'organiser et d'harmoniser le recueil d'informations suite à l'observation, lors de chaque visite. Cette grille retrace à la fois dans le détail ce qui s'est passé lors des séances observées, mais comporte aussi des éléments plus généraux (établissement, nombre d'élèves, affichages dans la classe, participation à des projets d'école, etc). Entre les deux visites effectuées pour chaque PES, nous avons

---

[6] Nous avons sollicité tous les étudiants de l'OR1 ayant validé leur Master, et suivi en stage dans l'académie tous ceux qui avaient accepté de l'être

[7] 6 PES dans le 93, 4 PES dans le 94 et 2 PES dans le 77.

[8] Nous avions présenté la recherche dans laquelle nous étions engagés depuis l'année de M2.

construit une grille d'analyse relative à l'échelle de leur développement. Nous avons ainsi décrit la dynamique de développement à l'œuvre en fin de première année d'exercice, à partir des niveaux sur l'échelle de développement des pratiques, pour chaque activité visée a priori dans la formation, indiqués après chaque visite. La comparaison de ces grilles doit permettre ainsi de repérer des régularités à mettre en relation avec la formation et de faire apparaître des variabilités à mettre en relation avec d'autres déterminants des pratiques (institutionnel, social et personnel), notamment l'établissement dans lequel les PES ont exercé, l'équipe pédagogique avec laquelle ils ont travaillé.

Nous avons aussi réalisé un entretien après la deuxième visite pour obtenir des traces de la formation suivie pendant l'OR1, sur des points qui n'auraient pas été spontanément abordés lors des entretiens formatifs de visite.

L'enjeu de l'analyse de ces données est de tester les hypothèses de recherche présentées à la fin du paragraphe 1.

Nous présentons maintenant les premiers résultats de la recherche, relatifs au suivi des étudiants pendant leur première année en classe à l'issue de la formation.

2 Effets de la formation sur le développement des pratiques enseignantes

Nous avons fait l'hypothèse qu'une entrée par la recherche dans la formation à partir de types de tâches s'appuyant sur l'usage d'outils conceptuels fondés sur des résultats de recherches en didactique peut favoriser le développement d'une « appréciation critique argumentée ».

2.1 Des régularités pour les étudiants ayant suivi l'option

Des premiers résultats

Pour les 12 PES ayant suivi l'option, nous avons réalisé une synthèse des niveaux sur l'échelle de développement par type d'activité :

Activités	C	B	A
Repérer les enjeux d'un apprentissage pour choisir une situation adaptée	1	5	6
Construire une situation adaptée (par rapport aux objectifs, à la séquence)	1	6	5
Choisir et utiliser de façon pertinente un manuel ou d'autres ressources	1	8	3
Connaître les savoirs mathématiques et leur didactique en lien avec leur enseignement	1	8	3
Connaître les savoirs mathématiques et leur didactique en lien avec les apprentissages des élèves	1	9	2
Gérer différents types de séances	1	7	4
Gérer les différentes phases d'une séance (dévolution, recherche, mise en commun institutionnalisation)	1	4	7
Evaluer les élèves	1	8	3
Gérer l'hétérogénéité des procédures des élèves	1	9	2
Faire un retour réflexif sur une séance	1	4	7

Continuer à se former et innover	1	4	7

Tableau 5 : niveaux de développement professionnel des PES issus de l'OR1, pendant leur première année en classe

Il apparaît clairement des régularités dans l'analyse des niveaux de développement. Les niveaux se situent entre A et B, selon les activités visées *a priori* par la formation, à l'exception d'une PES qui était en grande difficulté et n'arrivait pas à gérer la paix scolaire dans sa classe, les origines de ces difficultés relevant certainement d'éléments extérieurs à la formation. Nous indiquons des points saillants.

Les PES ont construit des situations qui globalement ont du sens pour les élèves. Lors de leur préparation, ils ont anticipé plus ou moins implicitement les procédures et les erreurs envisageables dans la résolution des tâches proposées en mathématiques, sans toujours faire explicitement référence aux concepts de la didactique lors de l'entretien.

En ce qui concerne la gestion des différentes phases d'une séance, nous constatons que, à l'exception de la stagiaire en difficulté, les PES laissent un temps de recherche assez conséquent aux élèves, puis prennent en compte les procédures pendant une phase de mise en commun mais certains n'organisent pas encore leur hiérarchisation. Nous remarquons que les phases de synthèse sont davantage menées collectivement, ce qui entraîne que la validation reste encore souvent prise en charge par l'enseignante.

Un exemple : Carole

Nous illustrons la dynamique de développement à partir de l'exemple de Carole. Carole est une PES nommée en Grande Section de maternelle dans une ZEP difficile du département de la Seine Saint Denis. En fin de M2, elle avait donné un avis assez négatif sur la formation reçue dans l'UE d'initiation à la recherche.

Dès la première visite, Carole propose des situations qui ont du sens pour les élèves, mais ne s'appuient pas assez sur des situations vécues par eux. Elle organise une mise en commun rapide en regroupement sur l'atelier dirigé. Lors de la deuxième visite, elle a pris en compte des conseils : dans la séquence proposée, elle a d'abord proposé des situations vécues avant des situations plus abstraites ; les variables didactiques étaient prévues *a priori* implicitement, ainsi que les procédures et les difficultés envisageables ; elle a construit une grille pour les repérer qu'elle a utilisé en situation ; lors du regroupement, pour l'atelier correspondant à l'évaluation finale, elle a organisé une mise en commun des procédures en les faisant verbaliser par les élèves puis en les hiérarchisant et a terminé par une institutionnalisation. Voici la grille récapitulant la dynamique de développement des pratiques de Carole :

	1ère visite	**2ème visite**				
NIVEAUX DE DÉVELOPPEMENT DES PES	**C**	**B**	**A**	**C**	**B**	**A**
repérer les enjeux d'un apprentissage pour choisir une situation adaptée		x			x	
construire une situation adaptée (par rapport aux objectifs, à la séquence)		x				x
choisir et utiliser de façon pertinente un manuel ou d'autres ressources		x			x	
connaître les savoirs mathématiques et leur didactique en lien avec leur enseignement		x			x	

connaître les savoirs mathématiques et leur didactique en lien avec les apprentissages des élèves		x			x	
gérer différents types de séances		x				x
gérer les différentes phases d'une séance (dévolution, recherche, mise en commun, institutionnalisation)		x				x
évaluer les élèves		x				x
gérer l'hétérogénéité des procédures des élèves		x			x	
faire un retour réflexif sur une séance		x				x
continuer à se former et innover			x			x

Tableau 6 : Niveau de développement de Carole pour deux visites

Lors de l'entretien en fin de visite, le formateur a questionné Carole pour l'amener à mettre en relation les pratiques développées comme PES et la formation reçue lors du Master MEEF. Carole a en effet exprimé les apports qu'elle a trouvés dans sa formation, et en particulier grâce aux outils pour analyser ce qui se passe en classe, elle souligne l'analyse *a priori* qui lui permet, de prévoir et d'analyser les écarts entre ce qui était prévu et ce qui s'est effectivement passé. Elle dit le faire de manière instinctive, « sans y penser ». Pourtant Carole avait répondu de manière assez négative au questionnaire posé en fin de formation, ce qu'elle , moins d'un an plus tard, à des difficultés à concilier toutes les demandes du Master et du concours de professeur des écoles, et en particulier le travail « énorme » lié au mémoire. Cela met un peu en lumière des apports possibles de la formation, exprimées par Carole mais aussi des conditions de travail en formation très difficiles au vu des contraintes liées à la réalisation parallèle du Master, des stages et du concours, ce qui pourrait expliquer les réponses de Carole en fin de M2.

2.2 Des variabilités liées aux contraintes

Nous identifions des variabilités entre les PES qui peuvent être liées à différents types de contraintes. Suite aux entretiens, nous associons des contraintes à la composante personnelle.

Ces variabilités peuvent relever du rapport des PES au rôle de l'école, de leur rapport au savoir mathématique, d'une maturité plus ou moins grande, d'une posture ayant eu plus ou moins de mal à s'installer. De plus, nous avons relevé une grande différence entre les PES, selon qu'ils aient ou non réalisé en M2 leur stage en alternance.

Ces variabilités peuvent aussi dépendre du type d'établissement dans lequel les PES ont effectué leur première année d'exercice : nomination en maternelle ou en élémentaire, nomination en ZEP ou non, existence d'un projet d'école ou non, travail d'équipe possible avec des collègues installés ou non depuis longtemps dans l'établissement, d'i-genre 1 ou 3. Ces conditions d'exercice vont favoriser plus ou moins leur intégration dans leur nouveau métier.

Revenons sur le cas de Carole. Les déterminants liés à sa composante personnelle sont favorables à une entrée rapide dans le métier : « (Elle est) *issue d'un milieu humble.* (Elle insiste sur le) *rôle fondamental de l'école pour pouvoir réussir.* (Elle a développé) *une éthique et une forte conscience du rôle et des missions de l'enseignant.* (Elle porte) *une ambition pour les élèves et une volonté de développer leur sens des responsabilités* »

Carole a été nommée dans un établissement qui offre des conditions favorables à son intégration rapide dans ce métier. L'école développe un projet d'école autour de plusieurs entrées : « *l'étude des différents continents, la construction d'un abécédaire autour des lettres définies à partir du nom des continents étudiés*

(Afrique, Asie, ..), la construction d'un livre à compter ». L'établissement développe un travail d'équipe. Au début, Carole a eu des difficultés à s'insérer dans le travail d'équipe et a favorisé des discussions sur sa progression avec les enseignants nommés en Grande Section. Elle a participé au travail d'équipe et aux projets d'école après la deuxième visite : « (Il y a une) *très bonne atmosphère.* (C'est une) *grande aide.». En Grande Section,* « (il y a) *échange des fiches. Pas sur les préparations mais sur les activités ».*

Nous faisons l'hypothèse que, au delà de la formation, ces déterminants, à analyser dans le cadre de la double approche, ont été autant de catalyseurs pour favoriser une dynamique de développement des pratiques chez Carole.

2.3 Résultats

En ce qui concerne les hypothèses formulées, l'analyse des données recueillies suite à la première année d'exercice des PES ayant suivi l'UE d'initiation à la recherche à partir de l'OR1 « Apprentissages mathématiques à l'école : approche didactique », met en évidence qu'une entrée par la recherche dans la formation peut avoir des effets favorables :

- un changement probable du regard des PES sur la formation, malgré des contraintes très fortes lors de l'année de formation,
- le développement d'une appréciation critique argumentée, en lien avec l'usage des d'outils conceptuels fondés sur des résultats de recherche en didactique, mobilisés pour résoudre les types de tâches proposés dans l'OR1, même si ce résultat reste à étayer.

Il est important d'étudier la stabilité d'un tel développement à moyen terme puis à plus long terme puis de le comparer aux PES du groupe témoin, ce que nous n'avons pas encore réalisé.

La recherche engagée a déjà apporté des effets concrets sur la formation. En effet, elle nous a conduit à faire évoluer la maquette de l'OR1 pendant l'année 2013-2014, pour prendre en compte davantage le développement potentiel des pratiques enseignantes visées.

IV - CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Il nous faut tout d'abord souligner les nombreuses limites à notre étude : en premier lieu le faible nombre d'étudiants, qui ne permet pas de résultats très généraux, surtout si on considère que certains de ces étudiants, qui ont choisi l'OR1 parmi d'autres options, pouvaient avoir déjà une prédilection pour les mathématiques et leur enseignement, ce qui influence peut-être leurs pratiques en classe. D'autre part, le nombre et les rôles des chercheurs impliqués dans cette recherche est aussi à questionner : le grand nombre d'intervenants dans le cadre des cours de l'OR1 a rendu difficile la possibilité d'avoir une vision globale des contenus proposés et stratégies adoptées lors des séances, malgré un travail important pour essayer de reconstituer les objectifs de chacun, mais sans avoir accès au déroulement précis des séances ; quant aux différents rôles des chercheurs, qui sont aussi formateurs et évaluateurs, ils ne facilitent pas l'objectivité, ni du côté des chercheurs, ni de celui des étudiants PES.

Il nous semble cependant avoir observé chez les PES issus de l'OR1, malgré des contraintes extérieures fortes qui ont pu influencer leurs choix, des pratiques plus développées que les autres en ce qui concerne la gestion des phases d'une séance, ce qui semble cohérent avec le travail effectué dans le cadre de l'option, en particulier sur l'analyse de situations et de vidéos. Nous avons repéré chez eux aussi des capacités à faire une analyse pertinente de leur propre pratique et à continuer à se former, sans forcément utiliser de manière explicite les concepts travaillés lors de l'OR1, mais avec un certain recul. Bien entendu, il ne nous est pas possible de distinguer ce qui provient des apports de l'option par rapport au reste de la formation, même si les questionnaires proposés en fin de M2 nous ont permis de mesurer, pour chaque étudiant, l'originalité plus ou moins grande des tâches proposées dans l'OR1 par rapport aux tâches proposées par ailleurs. Enfin, il nous faudra analyser finement les observations réalisées chez les PES issus d'autres options pour pouvoir effectuer une comparaison plus poussée.

Cette réflexion sur les contenus et modalités de la formation par l'initiation à la recherche, et leurs effets potentiels, nous a aussi amenés à faire évoluer notre offre de formation, en ayant plus que jamais à l'esprit, pour chaque séance proposée, les activités enseignantes visées et les besoins des futurs PES.

V - BIBLIOGRAPHIE

ALTET, M. (1998) Quelle formation professionnalisante pour développer les compétences de " l'enseignant professionnel " et une culture professionnelle d'acteur, in Tardif, M., Lessard, C. et Gauthier, C. (dir.) *Formation des maîtres et contextes sociaux. Perspectives internationales*, Paris, PUF, pp. 71-86

ASSUDE T., GRUGEON B. (2006) Développement d'ingénieries de formation des enseignants pour l'intégration de logiciels de géométrie dynamique. *Revue Quadrante*, 13(2) 31-50.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BUTLEN D., CHARLES-PÉZARD M., MASSELOT P. (2012a) Quelques pistes de réflexion à l'issue de deux années de mise en place des Masters préparant à la profession de Professeur des Ecoles. In R. Lozi & N. Biagioli (Eds). *Actes des 2èmes rencontres des chercheurs en interdidactique*, (254-264).

BUTLEN D., CHARLES-PÉZARD M., MASSELOT P. (2012b) Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique *in actes du colloque « Espace Mathématique Francophone »* Genève, Suisse

BUTLEN B., CHARLES-PÉZARD M., MASSELOT P. (2011) Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. In actes du Colloque international INRP, 16, 17 et 18 mars 2011 « Le travail enseignant au XXIe siècle Perspectives croisées : didactiques et didactique professionnelle ».

BUTLEN D., MASSELOT P., PÉZARD M. (2003) De l'analyse des pratiques effectives de professeurs d'école débutants nommés en ZEP/ REP à des stratégies de formation, *Recherche et formation*, n°44, 45-61.

BUTLEN D., PÉZARD M. (1992) Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du C.P. au CM2, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Grenoble vol 12, n°2.3, 319-368.

CHARLES-PÉZARD M. (2010) Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique, *Recherches en Didactique des mathématiques,* Vol 30-2, 197- 261

CHARLES-PEZARD M., BUTLEN D., MASSELOT P. (2012) *Professeurs des écoles débutants en ZEP : quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble, La pensée sauvage

CHEVALLARD Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, Vol. 19, n° 2, 221-266.

GRUGEON-ALLYS B. (2012) L'initiation à la recherche dans le Master Enseignement et Formation (M.E.E.F.) à l'IUFM d'Amiens In R. Lozi & N. Biagioli (eds) *Acte des Deuxièmes rencontres des chercheurs en interdidactique : L'initiation à la recherche dans la formation des enseignants à l'université.* Université de Nice Sophia-Antipolis, 25-26 octobre

GRUGEON-ALLYS B. (2010) Evolution des pratiques des professeurs débutants de mathématiques pendant les premières années d'exercice, In R. Goigoux, L. Ria et M.C.Toczek-Capelle (eds), *Les parcours de formation des enseignants débutants,* Presses Universitaires Blaise Pascal. ISBN 978-2-84516-401-7.

GRUGEON B. (2008) Quelle évolution des pratiques d'un professeur stagiaire de mathématiques pendant son année de formation à l'IUFM, in F. Vandebrouck (eds), *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants* pp. 328-366. Toulouse : Octarès. ISBN 978-2-915346-59-6

GRUGEON-ALLYS B (2006) Conception et évaluation de la formation des professeurs stagiaires de collège et lycée, in Chiocca et Laurençot (eds), *DVD des actes de la CORFEM*. ENFA, Toulouse, 20-21 juin 2006.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, Vol. 16, n° 3, 287-322.

.MONTMOLLIN (DE) M. (1984) *L'intelligence de la tâche,* Berne : Peter Lang.

ROBERT A. (2005) Des recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* Vol 10, 209-250.

ROBERT A. (2008) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques des professeurs de mathématiques. In *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des professeurs,* F. Vandebrouck (eds) (45-52). Collection Formation, Octarès Editions.

ROBERT A., ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne des sciences, des mathématiques et des technologies,* vol 2.4, 505-528.

ROBERT, A., HOROKS, J. (2007) Tasks Designed to Highlight Task-Activity Relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 279–287.

ROBERT A., RODITI E., GRUGEON B. (2008) Diversité des offres de formation et travail du formateur d'professeurs de mathématiques du secondaire. *Petit x* n°74, 60-90.

ROGALSKI J., (2008) Le cadre général de la théorie de l'activité : une perspective de psychologie ergonomique, In *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des professeurs,* F. Vandebrouck (eds) (23-30). Collection Formation, Octarès Editions.

SAYAC N. & DELARUE-BRETON C. (2012) Recherche, rapport au savoir et (pré)professionnalisation des enseignants. In R. Lozi & N. Biagioli (eds) *Acte des Deuxièmes rencontres des chercheurs en interdidactique : L'initiation à la recherche dans la formation des enseignants à l'université.* Université de Nice Sophia-Antipolis, 25-26 octobre.

VERGNAUD G. (1989) Psychologie et développement cognitif et didactique des maths : un exemple : les structures additives. *Petit x*, 22, 51-69.

WENTZEL B. (2008) « Formation à la recherche et postures réflexives d'enseignants en devenir ». *Recherche et formation, 59, Formation* à *la recherche, formation* par *la recherche,* 89-103.

PENSER LE TRAVAIL MATHEMATIQUE EN FORMATION DES MAITRES

Alain KUZNIAK
Professeur, Université Paris Diderot
LDAR (EA 1547)
alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr

Résumé
. Pilotées par les grandes évaluations internationales, les réformes de l'enseignement des mathématiques au niveau européen modifient peu à peu, mais radicalement, les contenus et les visées de cet enseignement. Le travail mathématique attendu se trouve ainsi transformé et il n'est pas aisé de le situer entre les attentes traditionnelles mises en place dans le champ de la recherche mathématique et celles utilitaristes relevant des attentes sociétales.

Dans cette communication, nous avons montré comment la notion d'Espace de Travail Mathématique (ETM) permettait d'éclairer précisément cette question des formes et des enjeux de l'activité mathématique en situation scolaire.

I - LES ESPACES DE TRAVAIL MATHEMATIQUE

En effet, les ETM ont notamment été développés pour décrire et définir la nature et la circulation du savoir mathématique dans la classe et l'activité mathématique effective de l'élève en relation avec celle du professeur.

L'essentiel de la communication a été consacré à une présentation de notre modèle qui articule approches épistémologique et cognitive. Nous avons envisagé les différentes entrées possibles dans le travail géométrique :

- *entrée perceptive* en lien avec le travail de visualisation ;
- *entrée expérimentale* articulée sur les outils technologiques ;
- entrée discursive couplée avec la question de la preuve.

Nous avons proposé une articulation de ces différentes entrées autour de la constitution d'un travail géométrique cohérent basé, d'une part, sur la gestion de l'approximation et, d'autre part, sur un travail sémiotique sur les figures.

Pour une présentation complète du modèle, nous renvoyons plus particulièrement aux comptes-rendus des ateliers de Kuzniak et Rauscher (2003, 2004) lisibles dans les actes des colloques de la COPIRELEM du colloque d'Avignon et de La Roche-sur-Yon ainsi qu'à l'article de Kuzniak (2011).

Quant au modèle des ETM, son usage en formation des enseignants est notamment illustré dans l'article de Gomez-Chacon et Kuzniak (2011).

Enfin, nous avons aussi exploré la pertinence et les usages possibles des ETM dans la formation des enseignants du premier et du second degré notamment pour penser la constitution de planification. Cet aspect a fait l'objet d'un travail d'atelier avec Assia Nechache : ***Penser une progression en en formation des enseignants***. Une présentation détaillée de l'atelier figure sur le CDROM des actes de ce colloque **Atelier 33.**

II - BIBLIOGRAPHIE.

Les références ci-dessous sont disponibles en ligne.

Gomez-Chacon, I. & Kuzniak, A. (2011). Les Espaces de Travail Géométriques de futurs professeurs en contexte de connaissances technologiques et professionnelles, Annales de didactique et de sciences cognitives, 16, 187-216.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail mathématique et ses genèses, Annales de didactique et de sciences cognitives, 16, 19-24.

https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc/#c62294

Kuzniak, A. & Rauscher, J-C (2003). Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école, Actes du Colloque de la COPIRELEM, mai 2002, La Roche sur Yon.

Kuzniak, A. & Rauscher, J-C (2004). Un exemple de sensibilisation des étudiants PE1 à la géométrie en tant qu'objet à enseigner. Actes du Colloque de la COPIRELEM, mai 2003, Avignon.

www.arpeme.fr/index.php?id_page=4

UNE RESSOURCE À RESTAURER : UN USAGE COMMUN DES MOTS GRANDEUR, QUANTITÉ, NOMBRE, CARDINAL, ORDINAL ET DÉNOMBREMENT

Rémi Brissiaud
Chercheur au Laboratoire Paragraphe, EA 349 (Université Paris 8)
Équipe « Compréhension, Raisonnement et Acquisition de Connaissances »
Membre du conseil scientifique de l'AGEEM
remi.brissiaud@univ-paris8.fr

Résumé
Pourquoi l'école a-t-elle enseigné le comptage-numérotage pendant près de 30 années ?[1] Il est en effet montré que la pérennité de l'enseignement du comptage-numérotage en France a été rendue possible par un incroyable laxisme chez de nombreux psychologues et de nombreux didacticiens dans l'emploi des mots *grandeur*, *quantité*, *nombre*, etc. Ainsi, une confusion regrettable est celle entre la représentation numérique d'une quantité et la nominalisation de la représentation de cette quantité par une suite de numéros : 6 vaut pour 1, 2, 3, 4, 5, 6. De plus, les nombres (6, par exemple), y compris quand on considère des « nombres de… » (6 chaises, par exemple) étant le résultat de la mise en relation des quantités, considérer « les aspects cardinaux du nombre » par opposition à ses « aspects ordinaux » conduit à l'usage d'oxymores et à des erreurs didactiques graves.

I - LA COMPRÉHENSION DU NOMBRE COMMENCE AVEC CELLE DE L'ITÉRATION DE L'UNITÉ

Le projet de programme et de recommandations pour l'école maternelle (Conseil Supérieur des Programmes 2014–1, p. 54) indique que « Les enfants doivent comprendre que toute quantité s'obtient en ajoutant un à *la quantité précédente (ou en enlevant un à la quantité supérieure) et que sa dénomination s'obtient en avançant de un dans la suite des noms de nombres ou dans l'écriture des chiffres* ». Il faut se réjouir que cette propriété qu'on appelle le plus souvent **l'itération de l'unité** (Pierre Gréco, 1960, 1962, 1963), soit présente dans ce projet parce qu'elle n'était mise en avant ni dans le programmes de 2002 lui-même, ni dans ses documents d'accompagnement, ni dans les programmes de 2008. Or, nous allons voir que les psychologues développementalistes s'accordent aujourd'hui pour considérer qu'on ne peut pas parler de représentation *numérique* de la quantité de 6 voitures par exemple tant que l'enfant ne sait pas construire une collection correspondante en utilisant cette propriété de proche en proche : « 2 voitures, c'est 1 voiture et encore 1 », « 3 voitures, c'est 2 voitures et encore 1 », « 4 voitures, c'est 3 voitures et encore 1 »…

1 Le comptage-dénombrement : un comptage qui théâtralise l'itération de l'unité

Considérer la compréhension de la propriété d'itération de l'unité comme critère de l'entrée dans le nombre, c'est considérer que le comptage ne donne accès au nombre que lorsqu'il peut être interprété ainsi : « 1 ; et-encore-1, 2 ; et-encore-1, 3 ; et-encore-1, 4… ». On appellera « *comptage-dénombrement* » une façon d'enseigner le comptage qui théâtralise l'itération de l'unité, c'est-à-dire telle que l'éducateur crée les conditions pour que l'enfant comprenne que chacun des mots *deux, trois, quatre…* **réfère** à la *pluralité* d'unités qui résulte de l'ajout d'une nouvelle unité. En effet, quand on prononce un mot devant un jeune enfant en montrant quelque chose avec le doigt, comme c'est le cas lors d'un comptage, la signification

[1] Une version plus longue de ce texte a été mise en ligne sur le site de Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques sous le titre : « *Pourquoi l'école a-t-elle enseigné le comptage-numérotage pendant près de 30 années ?* » et comme sous-titre « *Une ressource à restaurer : un usage commun des mots grandeur, quantité…* » : http://www.cfem.asso.fr/debats/premiers-apprentissages-numeriques.

que l'enfant va attribuer aux mots utilisés, dépend évidemment de ce que l'on montre avec le doigt (Markman, 1989, 1990).

Envisageons le cas où les unités qu'il s'agit de dénombrer sont des objets déplaçables et supposons par exemple que la tâche consiste à former une collection de 6 cubes à partir d'un tas de cubes situé en bord de table. Pour montrer à un enfant comment l'on compte, l'enseignant va les déplacer du bord de la table vers son centre. Il n'y a qu'une façon de commencer : l'enseignant dit « un » en déplaçant un cube. Pour continuer, en revanche, il y a deux possibilités de coordination entre le pointage du doigt et la prononciation du mot « deux » : soit l'éducateur dit « deux » dès le moment où il pose le doigt sur un nouveau cube, c'est-à-dire avant que celui-ci soit déplacé, et l'enfant comprendra qu'il va déplacer un cube qui s'appelle « le deux », le mot « deux » fonctionnant comme une sorte de numéro ; soit l'éducateur ne dit « deux » qu'après que le cube a été déplacé, c'est-à-dire après que la collection de deux cubes a été formée, ce qui favorise la compréhension du fait que le mot « deux » désigne une pluralité. Les deux mêmes possibilités existent avec le cube suivant, évidemment : soit le mot « trois » est prononcé dès le moment où le doigt est posé sur un nouveau cube, soit il l'est seulement après que la nouvelle collection a été formée, etc. C'est la seconde façon de faire, à savoir ne prononcer le nouveau mot-nombre que lorsque la pluralité correspondante a été formée, qui correspond à ce qu'on appelle l'enseignement du comptage-dénombrement.

L'enseignement du comptage-dénombrement est encore plus explicite, c'est-à-dire « mieux porté par le langage », quand l'enseignant s'exprime ainsi (on laisse le lecteur imaginer ce que fait le doigt au moment où chacun des noms de nombres est prononcé) : « 1 », « et-encore-1, 2 », « et-encore-1, 3 »… Enfin, la forme la plus explicite qui soit est celle où, de plus, le nom de l'unité est prononcé : « 1 cube ; et-encore-1, 2 cubes ; et-encore-1, 3 cubes… ». En effet, dans l'expression « 3 cubes », par exemple, la syntaxe de ce petit groupe nominal fait que le mot 3 réfère à une pluralité, il n'est pas un numéro. Or, la signification des mots-nombres que le comptage-dénombrement cherche à privilégier est celle de quantités, c'est-à-dire de pluralités. Que l'on prononce ou non l'unité, et il est souhaitable de le faire souvent, il est clair que le comptage-dénombrement ne conduit pas d'emblée au « *nombre naturel* » qu'utilisent les mathématiciens, le « *nombre naturel 6* » par exemple, mais à un « nombre de… » : 6 cubes, 6 crayons, 6 images… Un enfant de maternelle, qui rentre dans le nombre, se l'approprie évidemment sous une forme plus contextualisée que celle que manie l'expert. Cependant, nous verrons qu'il ne faut pas confondre ce « nombre de… » avec la quantité correspondante car le « nombre de… », grâce à l'itération de l'unité, renvoie à des relations entre quantités et pas seulement la quantité elle-même.

Lorsque les unités sont alignées et non déplaçables (une file de points dessinés par exemple), enseigner le comptage-dénombrement consiste à entourer avec le doigt chacune des nouvelles quantités engendrées : « 1 point ; et-encore-1, 2 points (la collection des 2 points est entourée avec le doigt) ; et-encore-1, 3 points (idem) ; et-encore-1, 4 points (idem)… » (Brissiaud, 2007, p. 70).

La recommandation d'enseigner le comptage-dénombrement n'est pas nouvelle. On la trouve par exemple en 1962 sous la plume de René Brandicourt, instituteur d'école d'application et pédagogue dont la renommée était bien établie à l'époque puisqu'il est co-auteur d'un ouvrage consacré aux premiers apprentissages numériques avec Jeanne Bandet, Inspectrice Générale des écoles maternelles et Gaston Mialaret, l'un des créateurs des Sciences de l'Education en France. Il écrit dans cet ouvrage : « *À ce sujet, comme pour d'autres exercices qui suivent, nous signalons le danger qu'il y a, dans le comptage, à énoncer les nombres en prenant les objets un à un. C'est en posant la 2ème assiette sur la 1ère que je dis 2, non en la prenant en mains (la 2ème n'est pas 2, elle est 1)* ; ibid. *pour la 3ème, la 4ème… C'est en examinant la pile constituée que j'énonce 2, 3 , 4… 6.* »

Et, quelques lignes plus loin dans le même texte : « *C'est la même raison qui nous fait écarter, dans cette période d'acquisition de la notion de nombre, les exercices cependant amusants qui consistent à enregistrer par audition : 6 coup à l'horloge, 6 chocs à la porte, 6 chutes d'objets… Car on n'entend jamais qu'un bruit à la fois, et on a beau compter les bruits un à un, on ne perçoit que le 1er, le 2ème, le 3ème… le 6ème, jamais les 6 ensemble, qu'on ne pourrait d'ailleurs pas distinguer.* » Il est important de noter que, selon René Brandicourt, ces recommandations valent pour l'école maternelle comme pour le début du CP.

2 Théâtraliser la correspondance 1 mot – 1 unité, c'est enseigner le comptage-numérotage

Si la propriété d'itération de l'unité est si cruciale, on comprendrait mal que l'on enseigne à l'école une autre forme de comptage que le comptage-dénombrement. Or, vers la fin des années 1980, l'école française a renoncé à enseigner le comptage-dénombrement pour favoriser la façon de compter qui était rejetée par Brandicourt, celle où chacun des mots *un, deux, trois, quatre…* réfère à une unité et une seule parce que l'enseignant théâtralise la correspondance 1 mot – 1 unité. En fait, c'est cette façon d'enseigner le comptage qui est le plus souvent privilégiée dans les familles, c'est donc la façon de sens commun. Ainsi, supposons qu'un parent demande à son enfant (de 3 ans, par exemple) de compter les cubes d'une collection qui en contient quatre. Il est fréquent d'observer l'enfant toucher chacun des cubes avec l'index tout en récitant la comptine numérique mais sans aucune coordination entre les deux, ce qui peut conduire l'enfant à dire : « 1, 2, 3, 4, 5, 6 » alors qu'il n'y a que quatre cubes. Dans ce cas, la plupart du temps, le parent prend le doigt de l'enfant en lui disant qu'il va lui montrer comment on compte, il pose le doigt sur l'un des cubes et dit « un » en appuyant sur le doigt de l'enfant, il pose ensuite le doigt sur le cube suivant et dit « deux » en appuyant à nouveau sur le doigt, etc. Il théâtralise ainsi la correspondance 1 mot – 1 unité. Lorsque le comptage est enseigné ainsi, les mots-nombres fonctionnent comme des sortes de numéros : « *le un, le deux, le trois, le quatre…* » et, donc, l'on peut parler de l'enseignement d'un comptage-numérotage (Brissiaud, 1989, 1995).

Depuis la deuxième partie des années 1980, depuis près de 30 ans donc, c'est l'enseignement du comptage-numérotage qui est recommandé par le ministère et non celui du comptage-dénombrement. La diffusion de cette recommandation a commencé avant l'année 1990 mais cette date est importante parce que c'est celle de la publication d'un ouvrage qui va d'emblée devenir une référence dans les centres de formation des maîtres : Ermel, Grande Section de maternelle (Charnay & al., 1990). Dans le chapitre 3 de cet ouvrage, intitulé « *Nos choix didactiques* », les nombres sont présentés comme des « *mémoires des quantités* » qui nécessitent des « *actions de correspondance objet-nombre : à chaque objet doit être associé un mot-nombre et un seul* » (p. 44). Cet ouvrage a joué un rôle considérable dans la diffusion de la recommandation d'enseigner le comptage-numérotage. Et cette recommandation s'est longtemps maintenue. Ainsi, en 2010, le ministère a mis en ligne sur le site *eduscol* une évaluation de fin de GS (MEN/DEGESCO, 2010) qui s'accompagnait de conseils pédagogiques afin que les enfants progressent dans leurs comptages. Les auteurs de l'évaluation suggéraient d'organiser « *une réflexion sur « les critères d'un bon comptage (ne rien oublier, ne pas compter 2 fois, faire correspondre les éléments au fur et à mesure du comptage), sur la base de discussions entre élèves sur les stratégies employées (cocher les éléments au fur et à mesure du comptage,* ***numéroter****…)* ». Notons que la mise en gras du mot « numéroter » est de notre fait. Cette évaluation, avec la recommandation précédente, est restée présente sur le site *eduscol* jusqu'en 2013.

Cependant, comme nous l'avons signalé au début de ce texte, ce choix didactique est en cours d'évolution puisque le projet de programme maternelle recommande d'éviter l'enseignement du comptage-numérotage (Conseil Supérieur des Programmes, 2014-1, p. 48). Malheureusement, nous verrons que, dans le même temps, le ministère collabore à l'élaboration de « ressources numériques » qui conduisent à enseigner le comptage en théâtralisant la correspondance 1 mot – 1 unité. Comment expliquer une telle confusion ?

3 Restaurer un usage commun des mots quantité, nombre, numéro, cardinal, ordinal…

Comment expliquer le basculement vers l'enseignement du comptage-numérotage à la fin des années 1980 et comment expliquer la confusion actuelle ? Une première explication a été avancée dans un ouvrage précédent (Brissiaud, 2013) : les chercheurs en sciences de l'éducation et en didactique n'étudient pas de façon suffisamment précise les choix didactiques qui étaient ceux des instituteurs et des corps d'inspection entre la naissance de l'école de la République vers 1880 et la réforme dite des « mathématiques modernes » en 1970. Ils considèrent trop souvent que la critique développée au moment de cette réforme discrédite définitivement ces choix. Si bien que les ouvrages destinés à la formation des maîtres qui contiennent une partie historique remontent rarement à la période précédant 1970 et, quand ils le font, la critique est souvent expéditive, considérant souvent que la seule préoccupation des enseignants pendant cette période aurait été de « *remplir des têtes vides* » et que leurs élèves sachent résoudre les problèmes pratiques de la vie quotidienne. Or, la lecture du *Dictionnaire Pédagogique* de Ferdinand Buisson (1882) ou d'ouvrages tel que celui dont Mialaret a dirigé la publication en 1955 permet d'accéder à une pensée didactique beaucoup plus complexe et intéressante que cela. Bref, une première explication est l'existence d'une sorte d'amnésie de ce qu'était réellement la didactique du nombre après la naissance de l'école de la République et pendant ses 90 premières années.

Mais une autre explication, fondamentale, doit être avancée : le basculement vers la préconisation du comptage-numérotage et la confusion qui règne aujourd'hui résultent avant tout d'un incroyable laxisme dans la façon de s'exprimer tant chez les psychologues que chez les didacticiens depuis plus de 30 ans. Les uns comme les autres se sont mis à parler de « *nombres* » ou de « *dénombrement* » alors que seules des « *quantités* » étaient en jeu. Par ailleurs, ils ont été insuffisamment attentifs au fait que les situations-problèmes où il s'agit de repérer un rang sont la plupart du temps résolues par les jeunes enfants sans aucune utilisation des nombres parce qu'ils ne font qu'utiliser des « *numéros* », etc. Or, nous allons voir qu'une analyse théorique un peu précise (en se rapportant par exemple à la définition des nombres qui était celle de Newton, d'Alembert, Condorcet…) et l'examen de l'ensemble des résultats empiriques disponibles montrent de façon éloquente que l'usage des mots-nombres en tant que numéros fait obstacle à l'accès au nombre. Cette mise au point devrait permettre d'en finir avec les hésitations.

Ainsi, le progrès dans la didactique du nombre dépend aujourd'hui du rétablissement d'une ressource commune : un usage consensuel des mots quantité, nombre, numéro, cardinal, ordinal, etc. Afin d'avancer vers un consensus dans la définition et l'usage de ces différentes notions, une possibilité aurait été l'écriture d'un « *Vocabulaire critique pour enseigner les nombres à l'école* » avec, comme entrées, les différents mots concernés. Cependant cette forme d'ouvrage se parcourt en l'abordant par telle ou telle entrée selon la préoccupation du moment et l'une des logiques d'exposition se trouve alors reléguée à un rôle subalterne : la logique historique. Or, comme dans bien d'autres domaines, la perspective historique est une façon privilégiée de comprendre l'état actuel des idées parce qu'elle permet d'en retracer l'évolution tout en s'efforçant d'en expliquer la dynamique.

C'est la raison pour laquelle ce texte continuera comme il a commencé en adoptant un mixte des deux logiques : les notions (comptage-dénombrement, comptage-numérotage, etc.) seront présentées tantôt au sein de sections qui leur sont explicitement consacrées, tantôt au sein d'autres sections adoptant une perspective historique plus affirmée dont la ligne directrice sera toujours une tentative de réponse aux questions : pourquoi le basculement vers l'enseignement du comptage-numérotage, il y a 30 ans environ ? Pourquoi tant de confusion aujourd'hui ?

Sur le sujet qui nous intéresse ici, nous allons voir que, sur le versant psychologie, il convient de remonter au minimum à un ouvrage publié par Gelman et Gallistel en 1978 (Rochel Gelman est une psychologue développementaliste alors que Charles Randy Gallistel est plutôt spécialiste des apprentissages chez l'animal). En fait, il est préférable de remonter aux travaux de Piaget et Gréco, vers le milieu du siècle dernier : nous serons donc conduit à un survol de plus de 50 années de recherche en psychologie des apprentissages numériques. Sur le versant épistémologie, nous nous appuierons principalement sur l'*Encyclopédie* de d'Alembert, Bossut, de la Lande, Condorcet et collègues, ainsi que sur les travaux de Cantor.

En français, les mots *grandeur*, *quantité* et *nombre* ont un sens assez bien établi et ces mots, en anglais, se traduisent respectivement par *magnitude*, *quantity* et *number*. Mais on trouve dans un grand nombre de textes pédagogiques francophones, dont le projet de programme maternelle, d'autres mots qui sont des anglicismes : le mot « cardinalité », par exemple. L'usage d'anglicismes est courant en science et, donc, l'usage de ce mot en particulier ne doit pas être considéré comme un tabou, mais il conviendrait, dans ce cas, de mettre en rapport la notion correspondante avec celles qui sont déjà appréhendées par notre langue : grandeur, quantité et nombre. Rien n'est possible, donc, sans avoir au préalable une vision à peu près claire de la différence entre grandeur, quantité et nombre. C'est ce que visent les deux sections qui suivent, d'abord de manière intuitive, en présentant ce que l'on doit considérer comme des représentations analogiques de la quantité et du nombre respectivement, puis en se référant aux « grands anciens » : Euclide, Newton, les encyclopédistes, etc.

II - GRANDEUR, QUANTITÉ ET NOMBRE : UNE APPROCHE INTUITIVE

1 Un symbole quantitatif : la collection-témoin

Considérons un berger qui, il y a plusieurs milliers d'années, aurait été amené à prendre possession d'un troupeau de moutons. Il était capable d'en apprécier la grandeur visuellement, mais cela était du plus grand intérêt qu'il accède à une meilleure connaissance de cette grandeur en réalisant une correspondance terme à terme : 1 mouton – 1 caillou. En procédant ainsi, en effet, on obtient une collection de cailloux (ou de billes d'argile) qui symbolise la quantité, ce qu'on peut appeler une collection-témoin de la quantité :

Qu'apporte cette représentation de la *quantité* de moutons par rapport à la simple perception de la *grandeur* du troupeau ? Elle est définie à « une unité près » : on n'est plus dans l'approximation. En utilisant une correspondance terme à terme, le propriétaire des moutons aura la possibilité, au retour du berger, de savoir s'il rapporte moins, autant ou plus de moutons. Alors que la notion de grandeur évoque l'idée d'approximation, la notion de quantité, elle, évoque l'idée d'exactitude à une unité près (Cf. le « *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* » d'André Lalande, 1926-1988, par exemple). Donnons un autre exemple : on sait qu'à sa naissance le bébé différencie les grandeurs discrètes lorsque celles-ci ont des tailles suffisamment différentes (Dehaene, 1997-2010). Le bébé utilise évidemment un traitement approximatif de ces grandeurs, il ne traite ni les quantités, ni les nombres.

La collection-témoin de cailloux précédente représente une quantité de moutons mais peut-on dire qu'elle en représente le nombre ? Le moins que l'on puisse dire est qu'en présence d'une telle quantité de cailloux, on connaît très mal le nombre de moutons ou, du moins, on ne le connaît pas immédiatement. On est donc face à un symbole quantitatif qui n'est pas encore un symbole numérique.

2 Un symbole numérique : la collection-témoin organisée

La situation change du tout au tout lorsqu'on utilise cet autre symbole pour représenter la même quantité de moutons :

Avec une collection-témoin organisée (cas de celle ci-dessus), la quantité est toujours représentée à « une unité près » mais, de plus, l'accès à la quantité ne nécessite plus une longue correspondance terme à terme, il est direct. Il n'y a aucun risque de confondre la quantité correspondante avec celle qui la précède ou celle qui la suit. Avec une collection-témoin organisée, ce n'est pas seulement la quantité qui est symbolisée, ce sont aussi les différences de « un » entre deux quantités successives, c'est-à-dire l'itération de l'unité. Dans ce cas, on peut parler de symboles qui fonctionnent de manière numérique.

Ces dernières années, de manière générale, les différents auteurs n'accordaient guère le qualificatif de « numérique » à ce type de représentation analogique (l'auteur de ces lignes n'est pas irréprochable de ce point de vue), mais c'est une erreur. D'une part, en effet, ce type de représentation est celui que les mathématiciens pythagoriciens, puis Pascal, Fermat… appelaient des « nombres figuraux » et ceux-ci leur ont permis de démontrer des théorèmes de haute volée en théorie des nombres (on pourra, sur ce sujet, se reporter à un très bel article de François Bresson, 1987). D'autre part, il est clair que lorsque les enseignants et les enfants utilisent de telles collections-témoins organisées, ils commentent verbalement l'usage qu'ils en font : les pratiques verbales correspondantes consistent alors en l'explicitation des décompositions sous-jacentes, il s'agit bien de pratiques numériques au sens où les pédagogues les ont longtemps définies.

On notera en effet qu'une telle collection-témoin organisée ne donne pas seulement accès à la décomposition correspondant au dernier ajout de 1 (seize-et-encore-1) parce que l'évocation d'autres décompositions est facilitée : c'est dix-et-encore-7, c'est trois-fois-5-et-encore-2 et, en dénombrant successivement les points de la ligne du haut, celle du bas et du milieu, c'est deux-fois-7-et-encore-3… Or, dans les années 1880, Buisson considérait que comprendre un nombre c'est « *pouvoir le comparer avec d'autres, le suivre dans ses transformations, le saisir et le mesurer, le composer et le décomposer à volonté* ». Lorsqu'on met ainsi l'accent sur les décompositions, comprendre le nombre 8, par exemple, c'est s'être forgé la conviction que pour construire une collection de 8 unités, on peut en ajouter 1 à une collection de 7, on peut en ajouter 3 à une collection de 5, on peut réunir deux collections de 4, on peut enlever 2 à une collection de 10, etc. Et plus tard dans la scolarité, c'est savoir que 200 est égal à 8 fois 25, que 1000 est égal à 8 fois 125… Comprendre un nombre, c'est savoir comment on peut le former à l'aide de nombres plus petits que lui et c'est savoir l'utiliser pour en créer de plus grands. Rappelons que Buisson fut le directeur de l'enseignement primaire de Jules Ferry, dirigea le célèbre Dictionnaire de Pédagogie et d'Instruction primaire et occupa une chaire de Pédagogie à la Sorbonne. Il fut donc le pédagogue le plus influent lors de la création de l'école de la République. Cette définition du nombre a été reprise par les pédagogues qui, à la Libération, s'inscrivaient dans le mouvement de l'Éducation Nouvelle : Henri Canac (1955), Suzanne Herbinière-Lebert, Brandicourt, etc. Aujourd'hui, c'est celle qui est derrière la distinction que fait Pierre Arnoux (2012) entre « nombres vivants » et « nombres inertes ».

III - LE NOMBRE N'EST PAS LA QUANTITÉ, IL NAIT DE LA MISE EN RELATION DES QUANTITÉS

1 Newton : l'unité numérique est plus abstraite que l'unité quantitative

Dès le XVIIe siècle, Isaac Newton insistait sur le fait que les nombres et les quantités sont des entités différentes (on trouve plus loin une traduction du propos ci-dessous, sous la plume des encyclopédistes) : « *By number we understand not so much a multitude of unities, as the abstracted ratio of any quantity to another quantity of the same kind, which we take for unity* » (Newton, 1728-1967). Ainsi, distinguait-il la quantité et le nombre, insistant sur le fait que la notion de nombre est plus abstraite que celle de quantité parce qu'elle doit être située du côté de *la mise en relation ou la comparaison des quantités*. De manière plus précise, il définissait le nombre comme un rapport de deux quantités.

La définition de Newton est reprise dans la partie Mathématiques de l'*Encyclopédie* méthodique par d'Alembert, Bossut, de la Lande et Condorcet (1784), au début du texte qui figure à l'entrée NOMBRE (T2, p. 464) : « *M. Newton définit plus précisément le nombre, non pas comme une multitude d'unités, comme Euclide, mais le rapport abstrait d'une quantité à une autre de la même espèce, que l'on prend pour l'unité* »

L'*Encyclopédie* conserve donc la définition de la quantité qui était celle d'Euclide, à savoir une « *multitude d'unités* » mais, dans le même temps, cet ouvrage est explicite sur le fait que le nombre est de nature différente parce qu'il n'est pas une multitude d'unités quantitative. En fait, l'*Encyclopédie* adopte une définition du nombre qui permet de comprendre que ces deux sortes d'unités doivent être distinguées : le rapport 8 chaussures / 2 chaussures est le nombre 4, c'est-à-dire une entité qui ne renvoie plus à des chaussures seulement. Cela met en évidence que l'unité numérique est plus abstraite que celle des quantités et, donc, le nombre plus abstrait que la quantité. Précisons ce point.

Face à une collection de chaussures, par exemple, on n'a pas accès à la même quantité selon que l'unité est une chaussure ou une paire de chaussures. Une *quantité* est toujours une « *quantité de…* ». D'un point de vue pédagogique, le plus souvent, ce point de vue est insuffisamment pris en compte : en effet, il convient d'aider les enfants à s'approprier la notion d'unité, afin qu'ils comprennent celle de quantité et, donc, celle de nombre. Ce sujet, crucial, est abordé ailleurs (Brissiaud, 2007), bien qu'il mériterait d'être approfondi. Et cela d'autant plus que le projet de programme maternelle (Conseil supérieur des Programmes 2014-1 et 2014-2) est muet sur cette question. La définition du nombre de Newton, quant à elle, présente l'avantage de souligner la nature plus abstraite du nombre lorsqu'on le compare à la quantité : si une quantité est toujours une « *quantité de…* », le nombre, lui, peut être considéré en tant que tel et pas seulement en tant que « *nombre de…* ». En effet, lorsque deux quantités ont la même unité, le fait d'en considérer le rapport fait « disparaître » cette « unité quantitative » de sorte que le « 1 » numérique vaut pour 1 chaussure, 1 lunette, 1 raisin, 1 paire de chaussures, 1 paire de lunettes, 1 grappe de raisins, 1 cm, 1 dm, 1 dizaine, 1 centaine…

Travailler sur les *rapports entre quantités* est évidemment un moyen de les mettre en relation mais il existe un autre moyen de le faire, c'est d'*ordonner leurs différences* : telle quantité étant jugée différente de telle autre du fait qu'elles ne peuvent pas être mises en correspondance terme à terme, de combien diffèrent-elles ? Peut-on les ordonner selon leurs différences ? C'est ce type d'approche qui a inspiré les travaux de Jean Piaget vers le milieu du siècle dernier (Piaget et Szeminska, 1941). Dans cette perspective, les différences égales à l'unité jouent évidemment un rôle crucial parce que dans le cas de quantités dites discrètes ou discontinues, il n'y a pas de différence plus petite que l'unité et l'on comprend qu'il faille dès lors viser la compréhension de la propriété d'itération de l'unité : « *Les enfants doivent comprendre que toute quantité s'obtient en ajoutant un à la quantité précédente (ou en enlevant un à la quantité supérieure) et que sa dénomination s'obtient en avançant de un dans la suite des noms de nombres ou dans l'écriture des chiffres.* » (Conseil Supérieur des Programmes, 2014-1, p. 54).

Remarquons enfin que le comptage-dénombrement, celui qui théâtralise l'itération de l'unité, aide les enfants à progresser vers la prise en compte d'une unité **plus abstraite** que l'unité des quantités. En effet, lorsqu'on compte des cubes sous la forme : « 1 cube ; et-encore-1, 2 cubes ; et-encore-1, 3 cubes… » ou des jetons sous la forme : « 1 jeton ; et-encore-1, 2 jetons ; et-encore-1, 3 jetons… », il est possible, en accentuant la prononciation de « et-encore-1 », par exemple, d'attirer l'attention de l'enfant vers une action indépendante de la nature de l'unité quantitative (cube ou jeton) : celle d'en ajouter une nouvelle. Cela aide l'enfant à progresser vers la prise en compte d'une unité numérique.

2 Les encyclopédistes : les nombres sont les « raisons » des quantités

Cette définition du nombre en tant que résultat de la comparaison des quantités au moyen de leurs différences, est-elle présente dans l'*Encyclopédie* ? Elle l'est effectivement, mais pour s'en rendre compte, il faut mettre en relation plusieurs entrées de cet ouvrage. En effet, à l'entrée NOMBRE de l'*Encyclopédie*, la définition adoptée est celle de Newton : le nombre est présenté comme le *rapport* de deux quantités. Cependant, lorsqu'on cherche à préciser ce qu'est un *rapport* en se reportant à l'entrée RAPPORT du même ouvrage, on trouve un court texte (7 lignes, p. 727) qui commence ainsi :

« *RAPPORT* : *C'est le résultat de la comparaison de deux quantités l'une avec l'autre, relativement à leur grandeur. On se sert aussi du mot* raison *…/… Voyez RAISON* ».

Le texte consacré à la notion de rapport étant particulièrement court, le lecteur est motivé à chercher également à l'entrée RAISON de l'*Encyclopédie*, comme cela est recommandé. Là, on trouve un long texte (3 pages à partir de la p. 725) qui commence ainsi :

« *RAISON* : *C'est le résultat de la comparaison que l'on fait entre deux grandeurs homogènes, soit en déterminant l'excès de l'une sur l'autre, ou combien de fois l'une contient l'autre, ou y est contenue.* »

Et, plus loin dans le texte de cette entrée, la première forme de comparaison est qualifiée de recherche de la « *différence* » ou encore de la « *raison arithmétique* » alors que la seconde forme de comparaison est dite conduire à la « *raison géométrique* » ou « *simplement raison* ». Au final, on trouve dans cet ouvrage l'idée que le nombre est la raison de deux quantités, celle-ci pouvant prendre deux formes : la raison arithmétique (ou différence) et la raison géométrique (ou rapport).

Commentons plus précisément les propos tenus dans cette entrée *RAISON*. La première phrase dit que le nombre est « *le résultat de la comparaison de deux quantités l'une avec l'autre, relativement à leur grandeur* » : on peinerait à mieux définir les relations entre grandeurs, quantité et nombre en une seule phrase. Par ailleurs, présenter le nombre comme la *raison* des quantités, pour peu que l'on revienne à l'étymologie du mot *raison*, renvoie vers l'idée que le nombre est la *mesure* ou encore *l'explication* des quantités. Encore une proposition qui invite à bien distinguer le nombre et la quantité ! Derrière la double définition du nombre qui est avancée, d'une part en tant que raison arithmétique et d'autre part en tant que raison géométrique des quantités, il y a évidemment la difficulté que les mathématiciens avaient à l'époque à penser l'articulation entre les nombres naturels, les rationnels et ceux que l'on appellera ensuite les réels (chez Euclide, la théorie des rapports était une théorie dont les fondements étaient géométriques).

Ici, nous nous en tiendrons évidemment à considérer les nombres comme des raisons arithmétiques des quantités (plus loin dans ce texte, nous verrons cependant que les notions de « *nombre ordinal* » et de « *nombre cardinal* » sont le résultat d'un prolongement historique des débats créés par l'existence de deux raisons pour les quantités, l'une arithmétique et l'autre géométrique). Considérer le nombre comme la raison arithmétique des quantités nous ramène évidemment au caractère crucial de l'itération de l'unité, c'est-à-dire au caractère crucial de l'enseignement du comptage sous la forme d'un « comptage-dénombrement » : « une unité ; et-encore-une, deux unités ; et-encore-une, trois unités ; et-encore-une, quatre unités… » Comment expliquer que vers la fin des années 1980, l'école française ait renoncé à enseigner cette forme de comptage ? Un ouvrage a joué un rôle considérable (voir Brissiaud, 2013), celui que Gelman et Gallistel (1978) ont intitulé : « *The Child's Understanding of Number* ».

IV - SELON GELMAN ET GALLISTEL, LE COMPTAGE-NUMÉROTAGE DONNE ACCÈS À LA « NUMEROSITY », MAIS QU'EST-CE QUE LA « NUMEROSITY » ?

Le titre de l'ouvrage de Gelman et Gallistel est leurrant parce qu'il y est très peu question du nombre, du moins au sens où les encyclopédistes définissaient cette notion. Pour l'essentiel, ces chercheurs se sont livrés à une analyse du comptage selon ce qu'ils appellent des « *principes* » dont les trois premiers sont, de leur point de vue, les principes du « *Comment compter* ». Le premier principe est celui de correspondance 1 unité – 1 mot : il faut veiller à bien dire un mot-nombre différent chaque fois qu'une nouvelle unité est pointée, le deuxième le principe de suite stable : les mots-nombres doivent être engendrés dans le même ordre à chaque comptage et un troisième, un principe qu'ils appellent le « *principe cardinal* » : le dernier mot-nombre prononcé lors d'un comptage permettrait précocement à l'enfant d'accéder à ce que ces chercheurs dénomment en américain la « *numerosity* ».

Ainsi la forme de comptage que ces chercheurs analysent est celle où l'éducateur théâtralise la correspondance 1 mot – 1 unité : « le un ; le deux ; le trois ; le quatre… », c'est-à-dire le « comptage-numérotage ». C'est celle que les parents enseignent le plus souvent mais aussi celle qui, selon Brandicourt, ne devrait jamais être favorisée à l'école. À aucun moment ces auteurs n'envisagent que l'enseignement du comptage pourrait prendre une autre forme : cela semble aller de soi que c'est ainsi qu'il faut enseigner « *comment compter* ».

D'après Gelman et Gallistel, les enfants auraient une connaissance précoce du fait qu'à l'issue d'un comptage-numérotage, s'ils respectent bien l'ordre des mots-nombres, le dernier mot prononcé désigne la « numerosity ». Mais qu'est-ce que la « numerosity » ? S'agit-il de la grandeur, de la quantité ou du nombre ?

La section qui suit contient plusieurs passages en anglais mais il était difficile de faire autrement : l'un des principaux problèmes que l'on rencontre aujourd'hui pour penser les apprentissages numériques est l'emploi fréquent d'anglicismes tels que « numerosity » traduit « numérosité » ou « cardinality » traduit « cardinalité » sans que nous sachions ce que les chercheurs qui les utilisent veulent dire de manière précise. Or, traduire les passages des articles originaux sur lesquels nous allons nous appuyer aurait conduit à préjuger des interprétations qui sont les nôtres.

1 Présentation d'une recherche particulièrement éclairante

Une recherche récente de Mathieu Le Corre (2014), intitulée « *Children acquire the later-greater principle after the cardinal principle* », est particulièrement instructive et incontournable pour répondre à la question : qu'est-ce que la numerosity ? Il faut d'abord noter que ce chercheur retient comme critère d'accès au « principe cardinal » la réussite à la tâche « *Donne-moi N objets* » lorsque N est inférieur ou égal à 5, c'est-à-dire un critère bien plus strict que celui utilisé par Gelman et Gallistel (répéter le dernier mot d'un comptage lors de la tâche « *Combien y a-t-il de…* » ou changer d'intonation lorsque ce dernier mot est prononcé). La tâche « *Donne-moi N objets* » est le plus souvent retenue aujourd'hui depuis que Sarnecka & Carey (2008) ont montré que lorsque des enfants états-uniens la réussissent jusqu'à 5, ils la réussissent aussi loin qu'ils savent compter-numéroter, ce qui atteste d'une certaine généralisation et, donc, que le comportement des enfants n'est pas une pure mécanique. Le Corre s'adresse à des enfants (3 ans 8 mois en moyenne) qui viennent de découvrir le « principe cardinal » (52 enfants ont été testés et 30 seulement ont été retenus), ils savent tous compter verbalement jusqu'à 10 au moins, ce qui garantit qu'ils réussissent la tâche « *Donne-moi N objets* » jusqu'à 10 au moins.

Le Corre propose deux autres tâches aux enfants : 1°) Une tâche d'estimation-comparaison de la « numerosity » : des cartes contenant 6, 8 ou 10 points sont montrées et l'enfant doit dire combien il y en a sans les compter ; cette tâche est qualifiée ici d' « estimation-comparaison » parce que le chercheur ne va pas s'intéresser à la qualité des estimations lorsque celles-ci sont évaluées indépendamment les unes des autres mais il va chercher à savoir si l'enfant face à une collection de 10 points, proposent un mot-nombre qui se situe plus loin dans la suite verbale que celui qu'il propose face à 6 points ; 2°) Une tâche de comparaison : on dit à l'enfant que dans une boîte fermée, il y a 6 poissons et dans une autre, 10 poissons ; un animal veut manger le plus de poissons possible ; laquelle des deux boîtes doit-il choisir ?

Quatorze enfants sur les trente échouent totalement les deux tâches : leur taux de réussite n'est pas meilleur que s'ils répondaient au hasard. Et pourtant, tous savent donner 10 unités et 6 unités respectivement !

Rapportons une partie de la conclusion de Le Corre (p. 14) : « *our results suggest that the acquisition of the cardinal principle does not involve or require the acquisition of any knowledge of the numerical significance of the order of the number words in the list. Rather, we suggest that knowledge of the cardinal principle is exactly as Gelman and Gallistel (1978) first described it: that is, knowledge that the last number word of a count denotes the numerosity (or cardinality) of the counted set when the count is correct.* »

2 Le comptage-numérotage ou la représentation de la quantité par une collection de numéros

Comment interpréter les résultats de l'expérience qui vient d'être décrite ? Il faut avant tout se rappeler que l'ensemble de ces enfants savent donner jusqu'à 10 jetons. On peut donc considérer qu'ils commencent à traiter la quantité. De manière plus précise, il faut considérer que la récitation dans l'ordre de la collection des 10 premiers **numéros** permet à ces enfants de construire une collection ayant la taille demandée.

Il faut en effet parler de **numéros** parce qu'on dispose de nombreuses preuves empiriques du fait qu'un enseignement du comptage basé sur une théâtralisation de la correspondance 1 mot – 1 objet, conduit les enfants à considérer les mots-nombres comme des sortes de numéros. Ainsi, lorsque des enfants de 4 ans et demi environ viennent de compter 7 objets de cette manière et lorsqu'on leur demande de montrer les 7 objets, en insistant sur la marque du pluriel (« les 7 objets »), ils montrent quand même un seul objet : le dernier pointé (Fuson, 1988). De façon récente, Colomé & Noël (2012) obtiennent des résultats qui vont dans le même sens avec des enfants francophones. Par ailleurs, lorsqu'on demande à des élèves de GS de rédiger un message écrit afin de ne pas oublier combien il y a d'objets dans une collection de 7 objets qu'ils viennent de compter-numéroter, ils dessinent : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, c'est-à-dire l'ensemble des numéros qu'ils viennent d'utiliser (Sinclair & col, 1988 ; Brissiaud, 1989, Margolinas & Wozniack, 2012).

Et s'il s'agit de comparer deux collections de 4 et 5 unités respectivement, on observe certains enfants qui comptent la première en disant : 1, 2, 3, 4 , sans être capables de résumer leur comptage-numérotage par le mot 4 ; mais cela ne les empêche pas de se tourner vers l'autre collection en disant : 1, 2, 3, 4, 5, sans non plus dire 5. Dans l'un et l'autre cas, ils ne savent pas répondre à la question « Combien y a-t-il… ? » et pourtant, ils concluent correctement en disant que la collection « 1, 2, 3, 4, 5 » est plus nombreuse que la collection « 1, 2, 3, 4 » : ils ont compris que lorsque le comptage-numérotage « va plus loin » ou « dure plus longtemps », on peut dire : « Il y a plus là que là » (Droz & Paschoud, 1981). Dans un premier temps, donc, le comptage-numérotage permet la représentation de la quantité par **une collection-témoin de numéros** (on notera que dans ce cas la comparaison est réussie, du fait que le comptage-numérotage a été effectif).

Mais les trente enfants retenus dans l'expérience de Le Corre sont plus avancés : ils comprennent l'expression « *Donne-moi 10 jetons* » et ils ont donc commencé à coordonner deux significations du mot « 10 », celle où ce mot sert à désigner une quantité de jetons (les 10 jetons), et celle où ce mot renvoie au dernier numéro utilisé (le jeton numéro 10 dans la numérotation 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). Ainsi, ce que Gelman appelle le « principe cardinal » peut être appelé un « *principe de nominalisation de la quantité lorsque celle-ci est représentée par une collection de numéros* » : 10 vaut pour 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. L'enfant qui accède à ce « principe » se comporte comme s'il avait compris que pour mémoriser la collection de numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6, par exemple, dont il sait qu'elle représente une quantité donnée, il suffit, grâce à l'ordre des mots-nombres, de mémoriser le dernier numéro : 6 vaut pour 1, 2, 3, 4, 5, 6.[2]

Intéressons-nous cependant aux 14 enfants sur 30 qui échouent la tâche d'estimation-comparaison et celle de comparaison. Si des collections de respectivement 6 et 10 unités leur étaient montrées physiquement, ces enfants sauraient montrer celle qui en contient le plus (Dehaene, 1997-2010). Il faut en conclure que chez ces enfants, la nominalisation de la quantité ne donne pas encore accès aux propriétés qui sont celles des grandeurs sous-jacentes : les noms des quantités sont insuffisamment coordonnés aux grandeurs correspondantes pour permettre la comparaison alors que celle-ci serait possible à partir des collections elles-mêmes.

Ainsi, cette recherche de Le Corre montre que dans un premier temps, la nominalisation de la quantité que l'enfant a acquise dans un contexte de comptage-numérotage donne accès à des quantités qui sont loin de permettre la comparaison. Ceci peut se reformuler de la manière suivante : cette recherche montre que l'accès à ce que Gelman appelle le « principe cardinal » ne coïncide pas avec l'accès au nombre. En effet, si, comme cela a été argumenté, le nombre se fonde dans la comparaison des quantités, le critère d'accès au nombre n'est pas respecté. Au delà d'un tel raisonnement qui s'efforce d'être précis, quel chercheur aurait envie de parler de nombre alors que près d'un enfant sur deux ne dispose même pas de ce que Le Corre appelle « the later-greater principle » ?

En fait, nous verrons plus loin dans ce texte qu'un enfant qui en est là de son cheminement est plus éloigné du nombre que s'il représentait la quantité par une collection-témoin de points, de traits ou de doigts parce qu'il va lui falloir, pour organiser ses collections-témoins de numéros, surmonter l'obstacle de la polysémie des mots-nombres. Mais le point essentiel de l'analyse précédente est celui-ci : lorsqu'à la suite des travaux de Gelman, on considère que le comptage-numérotage donne accès à la « numerosity », ce mot doit être traduit par « quantité » et non par « nombre » (l'usage du mot « cardinality », lui aussi employé par Le Corre, est discuté plus loin dans ce texte).

V - LES PRINCIPES DU COMPTAGE SELON GELMAN ET GALLISTEL : UN USAGE MALHEUREUX DU MOT "CARDINAL"

Le comptage-numérotage ne donne accès qu'à la quantité mais Gelman et Gallistel ont malheureusement utilisé le mot « *cardinal* » pour dénommer le principe correspondant, ils parlent de « *principe cardinal* » ce qui a eu comme conséquence que de nombreux chercheurs ont très vite franchi le pas : ils ont remplacé le mot « *numerosity* » par « *number* ». Mais commençons par retracer l'histoire de la signification du mot « *cardinal* » afin de mieux comprendre pourquoi un usage « malheureux » du mot *cardinal* n'a rien d'étonnant : en fait, seul un contrôle épistémologique rigoureux de son usage permet d'éviter les confusions. Par exemple : on trouve souvent dans les textes de didactique les expressions

[2] Pierre Gréco (1962) parle de *quotité* quand un enfant nominalise sa représentation de la quantité ainsi. Peu de chercheurs sont aussi scrupuleux que lui dans l'emploi des mots et, bien évidemment, il est extrêmement attentif à distinguer la *quotité* du *nombre* en considérant que l'accès au nombre nécessite l'appropriation de l'itération de l'unité. Le mot *quotité* n'a pas été retenu dans le corps principal de texte afin d'éviter l'emploi d'un mot supplémentaire dont la compréhension nécessite l'appropriation de sa définition.

« aspect cardinal du nombre » ou « aspect ordinal du nombre » alors que dans le cas des nombres finis, ces expressions sont des oxymores.

1 Le mot « cardinal » pour désigner l'usage principal des nombres et la signification principale des numéraux

Le mot « *cardinal* » vient du latin « *cardo* » qui désigne le « *pivot* » ou le « *gond* » d'une porte, c'est-à-dire sa pièce principale. D'où le sens figuré de ce mot, celui de « *principal* ». Dans un premier temps, ce mot a été utilisé dans ce sens figuré au IVe siècle pour qualifier les « vertus cardinales », puis vinrent les « vents cardinaux », les « points cardinaux » et, en grammaire, le fait de qualifier les mots qui réfèrent à des nombres, les numéraux, tantôt en tant que cardinaux (sept, treize…) quand ils désignent des quantités (c'est le sens « pivot » des numéraux), tantôt en tant qu'ordinaux (septième, treizième…) quand ils désignent des rangs.

Pourquoi avoir qualifié de « principal » l'usage des nombres correspondant à la mise en relation des quantités plutôt que celle des rangs ? D'un point de vue théorique, lorsqu'on s'en tient à un usage banal du nombre, c'est-à-dire lorsqu'on évite les pièges de l'infini et tant qu'on s'en tient aux relations additives, les deux points de vue se correspondent parfaitement : lorsqu'on adopte le point de vue de la mise en relation (ou mesure) des quantités, on dit que « 6 unités, c'est 5-unités-et-encore-1 ; c'est 4-unités-et-encore-2 » et lorsqu'on adopte le point de vue de la mise en relation (ou mesure) des rangs que « le 6e rang, c'est le 5e rang après le 1er ; c'est le 4e rang après le 2e ; c'est le 3e rang après le 3e ; etc. ». On a affaire à deux conceptualisations différentes des égalités 6 = 5 + 1 ; 6 = 4 + 2 ; etc. Alors, pourquoi l'un des usages des nombres serait-il « cardinal » ?

Allons vers des contextes définis de manière plus précise et changeons la taille des nombres en considérant 1984 enfants. Cette quantité d'enfants est possiblement formée de 6 garçons et 1978 filles ou bien de 1978 garçons et 6 filles. Chacune de ces propositions nous paraît immédiatement aussi vraie l'une que l'autre. En revanche, s'il est facile de vérifier que 6 ans après l'an 1978 on était en 1984, le fait que 1978 ans après l'an 6, on était de même en 1984, nous demande réflexion. En fait, on n'a jamais vu quiconque acquérir l'intelligence des nombres, c'est-à-dire la connaissance de telles relations, en apprenant à maîtriser, au sein d'un système de numérotation, les relations entre chaque élément et son successeur, le successeur de son successeur, etc. Il y a une bonne raison pour cela : la commutativité de l'addition (6 + 1978 = 1978 + 6), une propriété conceptuelle importante des nombres, est souvent évidente dans un contexte où l'on traite des quantités (lorsqu'on réunit une équipe de garçons et une équipe de filles, a-t-on ajouté les filles aux garçons ou les garçons aux filles ?) alors que cette propriété, dans un contexte où l'on traite des rangs, signifie que le xème élément après le yème est aussi le yème après le xème. Appliquée aux rangs, la commutativité est souvent loin d'être évidente. Il faut se l'approprier dans un contexte de quantités avant d'être convaincu que, dans un contexte de rangs, ça marche encore.

Comme nous l'avons vu en considérant les travaux d'Euclide, de Newton et ceux des encyclopédistes, la notion de nombre s'est construite à partir de celle de quantité. Ce n'est pas étonnant que cette notion ait été associée de manière privilégiée au contexte qui lui a donné naissance. On comprendrait mal qu'elle ne le reste pas aujourd'hui. On remarquera d'ailleurs que d'un point de vue morphologique, les numéraux ordinaux sont dérivés des cardinaux : ils s'obtiennent en y ajoutant *ième* à la fin. Ainsi, vers 1850, tout était parfaitement clair : les nombres avaient deux usages, la mise en relation (ou la mesure) des quantités et la mise en relation (ou la mesure) des rangs. Par ailleurs, il apparaissait clairement que la mesure des quantités et celle des rangs sont deux usages qu'il ne convient pas de mettre sur le même plan et, comme on n'utilise pas les mêmes mots numéraux dans l'un et l'autre cas, on qualifiait de cardinaux ceux qui sont utilisés dans le contexte des quantités (usage principal des nombres) et d'« ordinaux » ceux qui le sont dans le contexte des rangs (usage second des nombres). Tout va se compliquer dans la seconde moitié du XIXe siècle.

2 Le mot « cardinal » pour désigner la nature de certains nombres infinis

En mathématiques universitaires, en revanche, l'adjectif « cardinal » est aujourd'hui utilisé pour qualifier autre chose qu'un usage des nombres ou les mots de la langue qui servent à cet usage, il qualifie les nombres eux-mêmes : on parle aujourd'hui de « nombres cardinaux ».

L'invention de ces nouveaux nombres remonte au 19e siècle avec les travaux de Cantor notamment. À cette époque, les mathématiciens ont ressenti le besoin d'utiliser le mot « cardinal » dans ce sens très différent (il qualifie les nombres eux-mêmes et non leur usage) afin de préciser les différentes sortes d'infinis qu'ils rencontraient. Ainsi, les nombres réels compris entre 0 et 1, ceux qu'on atteint ou approche avec des écritures décimales du type 0,43897… forment un ensemble infini qui est plus « nombreux » que les entiers naturels : Cantor a en effet montré qu'aucune correspondance terme à terme entre ces nombres et les entiers naturels n'est possible. En revanche, il a montré que les fractions (il faudrait dire : les rationnels) comprises entre 0 et 1, énumérées ci-après selon leurs dénominateurs croissants : 1/1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1/6, 5/6, 1/7… peuvent être mises en correspondance terme à terme avec les entiers naturels, ce qui est contre-intuitif : on a en effet l'impression qu'avec les seules fractions de numérateur 1 : 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6…, on va « épuiser » l'ensemble des numéros et que, donc, il y a bien plus de fractions que d'entiers.

Pour préciser ces différentes sortes d'infinis, les mathématiciens ont eu besoin d'articuler la notion de nombre infini lorsqu'elle s'appuie sur la correspondance terme à terme (c'est le point de vue de la quantité), avec celle de nombre infini lorsqu'elle s'appuie sur la création d'un ordre (c'est le point de vue des rangs). Ils ont choisi de parler de « nombre cardinal » dans le premier cas et de « nombre ordinal » dans le second.

Ainsi, comme les fractions comprises entre 0 et 1 peuvent être mise en correspondance terme à terme avec les entiers, ces deux ensembles ont le même cardinal, ils sont aussi « nombreux » l'un que l'autre lorsqu'on les considère du point de vue de la correspondance terme à terme mais, dans le même temps, on a vu qu'on a envie de dire que les fractions comprises entre 0 et 1 sont plus « nombreuses », ce qui est effectivement le cas lorsqu'on les considère d'un point de vue ordinal : si l'on nomme ϖ l'ordinal (infini) correspondant à l'ensemble des entiers naturels, par exemple, c'est aussi celui de l'ensemble des fractions du type 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5… Si l'on continue à créer un rang supplémentaire en considérant que 2/3 est la fraction suivante, cette fraction sera repérée par l'ordinal $\varpi + 1$, la suivante par $\varpi + 2$, etc. D'un point de vue cardinal $\varpi + 1$ et ϖ désignent la même entité : il n'y a rien de choquant à ce que l'infini-et-encore-un soit égal à l'infini parce que « un », c'est vraiment petit à côté de l'infini. On a donc affaire au même cardinal. En revanche, d'un point de vue ordinal, $\varpi + 1$ et ϖ sont deux ordinaux distincts qui se suivent. Ainsi, lorsqu'on s'intéresse aux ensembles infinis, il existe de nombreux ordinaux (rangs) distincts qui ne sont pas des cardinaux (quantités) distincts.

3 Éviter les expressions « aspect cardinal » et « aspect ordinal » des nombres finis : ce sont des oxymores

En revanche, lorsqu'on s'en tient aux ensembles finis, parler de « nombre cardinal », de « nombre ordinal » ou faire l'économie de l'un et l'autre qualificatif en parlant tout simplement de « nombre », c'est référer aux mêmes entités. Lorsqu'on s'en tient aux ensembles finis, le nombre est nombre, il n'est jamais spécifiquement cardinal ni jamais spécifiquement ordinal parce qu'il est indistinctement les deux. Ce point de vue était à la base de l'approche de la genèse du nombre que Piaget a avancée (Piaget & Szeminska, 1941). L'aspect « logiciste » de la théorie de ce grand chercheur n'est plus d'actualité mais son fondement épistémologique n'a pas vieilli : le nombre est mise en ordre des quantités selon leurs différences, il n'est ni dans les quantités envisagées seulement en tant que telles, ni dans la mise en ordre d'autres entités que les quantités.

On parle souvent de la théorie de Cantor comme d'une théorie des ensembles mais, fondamentalement, il s'agit d'une théorie des infinis. Concernant les nombres finis, son seul apport est d'avoir mis fortement en avant le fait que l'égalité de deux quantités se fonde dans la correspondance terme à terme. Cependant, lorsqu'on s'en tient aux nombres finis, cette explicitation du rôle de la correspondance terme à terme ne change en rien la définition qu'il convient de donner des nombres : ceux-ci doivent toujours être considéré comme la raison des quantités parce qu'ils résultent de leur mise en ordre selon leurs différences.

Si l'on veut se convaincre du fait que les nombres finis ont une seule nature qui est d'être la raison des quantités, il suffit là encore de se reporter à l'*Encyclopédie* méthodique par d'Alembert, Bossut, de la Lande et Condorcet. Dans cette encyclopédie, il n'existe pas d'entrée correspondant au mot CARDINAL et cela s'explique bien : à cette époque où l'essentiel avait été dit concernant les nombres finis, le mot cardinal ne renvoyait à aucune entité théorique qui serait différente de celle décrite dans l'entrée NOMBRE.

Aujourd'hui, il est préférable de faire l'économie des expressions « nombre cardinal » et de « nombre ordinal » lorsqu'on parle de nombres finis dans un contexte didactique parce que l'usage des adjectifs « cardinal » et « ordinal » est superfétatoire. Allons même plus loin : il faut éviter de parler de l' « aspect cardinal » et de l' « aspect ordinal » des nombres finis ou encore de « cardinalité » et d' « ordinalité ». En effet, si la nature profonde du nombre, lorsqu'il est fini, est que ces deux aspects (l'aspect quantité et l'aspect mise en ordre des quantités) ne peuvent pas être envisagés séparément sans que la notion même de nombre disparaisse, chacune de ces expressions est un oxymore.

La distinction entre un aspect « cardinal » et un aspect « ordinal » des nombres finis est en effet contradictoire. Qui aurait envie de distinguer l'« aspect quantité » et l'« aspect mise en ordre » de l'itération de l'unité alors que s'approprier cette propriété, c'est tout le contraire de **distinguer** ces deux aspects puisque c'est **en réaliser la fusion** : « *Les enfants doivent comprendre que toute quantité s'obtient en ajoutant un à la quantité précédente (ou en enlevant un à la quantité supérieure) et que sa dénomination s'obtient en avançant de un dans la suite des noms de nombres ou dans l'écriture des chiffres* » ? Or, l'itération de l'unité est la porte d'entrée vers le nombre et l'on ne peut donc pas isoler l'un des deux soi-disant « aspects du nombre » sans s'exprimer de manière contradictoire. Du fait qu'il est mise en relation des quantités et, donc, de nature plus abstraite que les quantités, le nombre ne peut plus être considéré sous un aspect qu'il n'a plus : celui de quantité.

4 La confusion née de l'emploi du mot « cardinal » par Gelman

L'usage du mot « cardinal » dans l'expression « principe cardinal » est malheureux parce que, dans le courant du 20e siècle, suite aux travaux de Cantor, ce mot s'est trouvé de plus en plus souvent utilisé comme synonyme du mot « nombre », ça ne serait que pour éviter la répétition de ce mot, dans un souci de style. On lit par exemple dans le projet de programme pour l'école maternelle (Conseil Supérieur des Programmes, 2014-2, p. 19) que : « *(La construction du nombre) est conduite à partir de collections dont l'enseignant pourra raisonnablement, en fonction des approches qu'il utilise et des caractéristiques des élèves, limiter le cardinal entre 10 et 20 en grande section.* » Si on remplace le mot « cardinal » par « nombre », la même idée est véhiculée, de manière plus simple. On remarquera que c'est le mot « cardinal » et non le mot « ordinal » que l'usage a retenu comme synonyme de « nombre » alors que depuis les travaux de Cantor, aucune raison d'ordre mathématique ne justifie un tel choix : il faut très certainement y voir une conséquence du fait que l'usage cardinal des nombres est leur usage principal.

Comment s'étonner dès lors que la définition du « principe cardinal » ait évolué de la manière suivante : « *the [numeral] applied to the final item in the set represents the* number *of items in the set.* » (Sarnecka & Carey, 2008). En Français, Michel Fayol (2012), dans deux pages contigües d'un *Que-sais-je* consacré à l'acquisition du nombre, définit ainsi le "principe cardinal" selon Gelman (p. 62) : « *Le mot-nombre qui désigne le dernier élément d'une collection représente le* nombre *total d'éléments* ». Ainsi, il n'est plus question de « numerosity » mais de « number » en anglais et de « nombre » en français.

Il ne fait guère de doute que la polysémie du mot « cardinal » explique que l'accès au « principe cardinal » soit très souvent considéré comme un critère de l'accès au nombre alors qu'il n'est qu'un principe de nominalisation de la quantité lorsque celle-ci est représentée par une collection de numéros. La quantité n'étant de toute évidence pas le nombre, faut-il en conclure que la théorie de Susan Carey, autre très grande psychologue contemporaine (professeur de psychologie au MIT puis à Harvard), serait grossièrement fausse ?

VI - LA DÉFINITION DU « PRINCIPE CARDINAL » A ÉVOLUÉ, LE CRITÈRE DE SON APPROPRIATION AUSSI

En fait, la situation est plus complexe que cela : dans le même temps que la définition du « principe cardinal » a évolué (on n'y parle plus de « numerosity » mais de nombre), le critère d'appropriation de ce principe a, lui aussi, changé : non seulement l'enfant doit savoir donner N objets jusqu'à 5, on ne se contente plus qu'il sache répéter le dernier mot d'un comptage-numérotage en réponse à la question « Combien y a-t-il… » mais, de plus, l'enfant qui atteint ce critère serait censé comprendre l'itération de l'unité. Ainsi, dans le même article de Sarnecka & Carey, celui où l'on nous dit que le dernier mot d'un comptage-numérotage désigne le nombre, on lit dans la présentation de cette recherche :

« *The first question of the present study then, is: Is the cardinal principle a procedural rule about counting and saying 'how many'?Alternatively, the cardinal principle can be viewed as something more profound – a principle stating that a numeral's cardinal meaning is determined by its ordinal position in the list. This means, for example, that the fifth numeral in any count list – spoken or written, in any language – must mean five. And the third numeral must mean three, and the ninety-eighth numeral must mean 98, and so on.*

If so, then knowing the cardinal principle means having some implicit knowledge of the successor function – some understanding that the cardinality for each numeral is generated by adding one to the cardinality for the previous numeral. The second question of the present study then, is: Is the cardinal principle a conceptual rule that is related to knowledge of the successor function? »

Et les auteurs avancent certaines données qui semblent montrer que la réussite à la tâche « *Donne moi N objets* » jusqu'à 5 s'accompagne d'une certaine compréhension de l'itération de l'unité. Nous allons voir que ce dernier point a depuis été remis en question mais l'important est ailleurs : Susan Carey renoue avec un critère d'accès au nombre utilisé par Piaget et Gréco. Ainsi, concernant le premier de ces chercheurs, il commente avec Bärbel Inhelder (1963) les propos d'un enfant qui avait été confronté à une tâche de conservation :

« Ça fait 1, 2 , 3 , 4 , 5 ici », *nous dit un sujet de 4 ans et :* « 1, 2, 3, 4, 5 là, mais ça fait quand même plus là (en montrant la rangée la plus longue) » "*Dans cet exemple, les noms de nombre 1 à 5 ne constituent qu'un moyen pour individualiser les éléments, mais n'entraînant ni la conclusion que le tout est égal à la somme des parties, ni par conséquent la conservation de ce tout. Or, sans additivité ni conservation, on ne saurait parler de nombres !*"

Pour Piaget, on ne peut pas parler de « nombre » chez cet enfant parce qu'il lui manque la conservation, bien entendu. Mais passons sur ce critère parce qu'il renvoie à un aspect de l'approche piagétienne particulièrement complexe et qui n'est pas d'actualité : son aspect « logiciste ». En revanche, Piaget souligne l'existence d'un autre manque qui, de son point de vue, a partie liée avec l'absence de conservation : sans additivité du comptage, on ne saurait parler de nombre. Cette propriété d'additivité est celle que Gréco appelait à la même époque l'itération de l'unité (Gréco, 1960, 1963).

On a déjà souligné les raisons qui expliquent que l'importance de cette propriété ait progressivement émergé au sein de l'école de Genève : la théorie de Piaget trouve sont origine dans le fait que les nombres finis sont indissociablement cardinaux et ordinaux ou encore que la correspondance terme à terme et l'ordre sont deux points de vue indissociables lorsqu'on parle du nombre.

C'est très exactement cette idée qu'expriment Sarnecka et Carey dans l'extrait rapporté plus haut, en insistant sur le caractère conceptuel de ce que devrait être un « *principe cardinal* ». Ils l'expriment en utilisant un mot dont, là encore, il convient de rechercher un équivalent en français : le mot « *cardinality* ». Or, c'est bien évidemment, là encore, le mot « quantité » qui convient. Ainsi, la phrase : *the cardinality for each numeral is generated by adding one to the cardinality for the previous numeral* peut-elle se traduire : (lors d'un comptage-dénombrement) « l*a quantité correspondant à chaque mot-nombre résulte de l'ajout d'une nouvelle unité à celle correspondant au mot-nombre précédent* ». L'usage de l'anglicisme

« cardinalité » n'a aucune nécessité, celui du mot « quantité » permet une expression précise. On remarquera d'ailleurs que dans le premier extrait rapporté ici, Le Corre utilisait les mots « numerosity » et « cardinality » comme synonymes.

Ainsi, en 2008, Susan Carey renoue-t-elle avec un critère d'accès au nombre sur lequel Jean Piaget et plus encore Gréco avaient insisté. Sa notoriété a eu pour effet que l'étude de l'itération de l'unité s'est très vite imposée comme incontournable.

VII - L'ÉTUDE DE L'ACCÈS À L'ITÉRATION DE L'UNITÉ : UNE QUESTION DE PLUS EN PLUS VIVE EN PSYCHOLOGIE DES APPRENTISSAGES NUMÉRIQUES

Parmi les recherches dans lesquelles l'étude de l'itération de l'unité joue un rôle crucial, il faut souligner celle de Davidson, Eng & Barner (2012). En effet, ces chercheurs remettent en cause l'interprétation que Sarnecka et Carey (2008) font de leurs résultats. Davidson, Eng et Barner s'adressent à des enfants qui ont entre 3 ans 4 mois et 5 ans 3 mois et qui savent tous donner 5 objets (de plus, ils savent tous compter verbalement jusqu'à 9 au moins). Au sens de Susan Carey, donc, ces enfants devraient comprendre les 9 premiers nombres. Or, lorsqu'on leur demande de dénombrer une collection de 4 objets et qu'ensuite l'expérimentateur ajoute 1 autre objet en interrogeant : « Et maintenant, il y a 5 objets ou 6 objets ? », un certain nombre de ces élèves ne répondent pas mieux qu'au hasard. Avec de plus grandes collections, l'échec est massif.

Comment s'étonner d'un tel résultat ? Lorsque les éducateurs mettent l'accent sur la signification « numéro » des mots-nombres, pour qu'un enfant comprenne que « 6 unités, c'est 5 unités et encore une », alors que pour lui, le mot « 6 » renvoie à « 1, 2, 3, 4, 5, 6 » et le mot « 5 » renvoie à « 1, 2, 3, 4, 5 », il faut non seulement qu'il considère « 6 » et « 5 » à la fois comme des numéros et des pluralités mais, de plus, il faut qu'il comprenne que le numéro « 6 » doit être considéré comme « 1 » (c'est le « 1 de plus »). Lorsqu'on enseigne le comptage-numérotage, la polysémie des mots-nombres est un obstacle qui est trop souvent sous-estimé (nous reviendrons sur cette question plus loin dans ce texte).

Cette recherche prouve une nouvelle fois que l'accès au « *principe cardinal* » qu'il vaudrait mieux appeler : « *principe de nominalisation de la quantité lorsque celle-ci est représentée par une collection de numéros* » (« 6 » vaut pour « 123456 »), n'induit pas l'accès à l'itération de l'unité, c'est-à-dire au nombre. Lorsque l'enfant comprend l'expression « 6 cubes » comme renvoyant à une collection de cubes qu'il sait former en comptant-numérotant jusqu'à 6, cette expression renvoie seulement à une quantité de cubes et non à un nombre de cubes : il est d'autant plus important de distinguer le « **nombre de…** » de la « **quantité de…** », suivant que l'enfant maîtrise ou non l'itération de l'unité, que c'est la même expression, « 6 cubes », que l'enfant utilise pour désigner l'une et l'autre de ces notions. Ce que dit l'enfant ne révèle pas d'emblée le niveau de conceptualisation qui est le sien.

Les résultats de cette recherche rappellent évidemment ceux de Gréco : les enfants n'accèdent pas à l'itération de l'unité quelle que soit la taille des collections, cet accès se fait de proche en proche, d'abord dans un domaine numérique limité puis au-delà, selon une progression qu'il vaudrait la peine de mieux étudier mais dont il n'est pas difficile d'anticiper qu'elle dépend de la façon dont se disent les nombres dans la langue de l'enfant. Par exemple : il est plus facile de comprendre que « 11 » c'est « 10 et encore 1 » quand « 11 » se dit « dix-un » et il est plus facile de translater la connaissance de l'itération de l'unité du domaine des 10 premiers nombres vers le domaine des 10 nombres suivants quand ils se disent : « dix-un, dix-deux, dix-trois, etc ».

Mais cette recherche de Davidson, Eng & Barner (2012) n'est pas la première à s'intéresser à l'itération de l'unité après celle de Sarnecka et Carey (2008). Dès 2008, dans un numéro spécial de *Philosophical Psychology*, Véronique Izard, Pierre Pica, Elizabeth Spelke et Stanislas Dehaene (2008) publient un article intitulé : « *Exact equality and successor fonction : Two Key Concepts on the Path towards Understanding Exact Numbers* ». Comme, dans leurs travaux, ils ont bien souvent considéré le sens inné des grandeurs comme un sens inné de *nombres qui seraient approximatifs*, ces auteurs éprouvent le besoin d'attirer l'attention sur le fait qu'il existe une autre sorte de nombres : les « *nombres exacts* » et que l'étude de l'accès à ces nombres exacts s'appuie sur deux concepts clés : celui d'« *exact equality* » et celui de « *successor fonction* ». Intéressons-nous à ces concepts qui sont présentés comme la clé de l'accès au « nombre exact ». On peut considérer que le premier de ces concepts, dont ils disent que pour l'essentiel il trouve son origine dans la correspondance terme à terme, est celui de *quantité* et que le second est celui d'*itération de l'unité*. Au final, le nombre apparaît bien comme résultant de la mise en relation des quantités grâce, notamment, à l'accès à l'itération de l'unité. Après cet article, c'est évidemment toute la branche de la psychologie qui s'appuie sur l'imagerie cérébrale qui a emboîté le pas aux auteurs précédents. Par exemple, dans un article intitulé « *Finger numeral representations : more than just another symbolic code* », Samuel Di Luca et Mauro Pesenti (2011) présentent le « *successor-predecessor principles* » comme ce qui sépare « *an inner rough number sens* » d'un « *developped, symbolically represented, number concept* ».

Intéressons-nous à un autre courant de recherche en psychologie cognitive, celui qui est incarné par Lance Rips. Dans un livre publié en 2011 et intitulé : « *Lines of Thought: Central Concepts in Cognitive Psychology* », l'un des principaux concepts abordés est celui de nombre. Le propos de l'auteur est différent : il entend montrer que l'enfant ne traite vraiment du concept de nombre que lorsqu'il met les nombres eux-mêmes en relation et non plus les quantités correspondantes et que cela ne peut résulter que d'une activité de schématisation (au sens psychologique du terme). Il pense que le cheminement vers le nombre est nécessairement beaucoup plus « top-down » que celui qui est habituellement décrit. Dans les 53 pages consacrées au concept de nombre, l'itération de l'unité est omniprésente et elle est présentée comme étant au cœur de la notion de nombre. On y lit même ce qui n'est pas loin d'être une recommandation d'enseigner le « comptage-dénombrement », appelé « advanced counting » dans le texte (p. 82) :

« *the element of advanced counting (the numerals of the counting system) are in one-to-one correspondance with the natural numbers – a correspondance that preserves the successor relation. (That is, the successor relation on the naturals corresponds to that on the natural numbers.) I am not claiming that children attain the concept of natural number by learning advanced counting : I think it more likely that children learn an underlying set of principles that facilitates both advanced counting and the concept of natural number (see Section 2.5). However, advanced counting, not simple counting, provides the numerals that are the obvious counterpart of the natural numbers.* »

Un autre courant de recherche est incarné par Arthur Baroody et Catherine Sophian. J'ai débattu des travaux du premier dans « *Apprendre à calculer à l'école* » (Brissiaud, 2013, p. 51-52). La seconde a publié en 2007, c'est-à-dire la même année que « *Premiers pas vers les maths* », un ouvrage intitulé : *The origins of mathematical knowledge in childhood*. On lit dans la présentation de l'ouvrage trois recommandations pédagogiques que je ferais miennes sans en changer un mot :

« *Sophian advances three instructional recommendations: First, instruction about numbers should always be grounded in thinking about quantities and how numbers represent the relations between them; second, instruction in the early years should always be guided by a long-term perspective in which current objectives are shaped by an understanding of their role in the overall course of mathematics learning; and third, instruction should be directly toward promoting the acquisition of the most general mathematical knowledge possible.* »

Concluons cette section : tous les chercheurs ne défendent pas aujourd'hui la même théorie des premiers apprentissages numériques, loin s'en faut, mais il semble bien que nous soyons à une sorte de tournant du fait que la répétition du dernier mot d'un comptage-numérotage, longtemps considérée comme le critère d'accès à la « numérosité » ou à la « cardinalité » sans qu'on sache précisément ce que ce terme désigne, n'est aujourd'hui retenue par aucun chercheur comme critère de l'accès au nombre. En revanche, l'appropriation de l'itération de l'unité semble bien être devenue une référence commune à l'ensemble des chercheurs en tant que porte d'entrée vers le nombre ou, selon, vers le « nombre exact ».

VIII - UNE VARIANTE DU CHOIX D'ENSEIGNER LE COMPTAGE-NUMÉROTAGE : PRÉSENTER LE NOMBRE COMME MOYEN DE GARDER LA MÉMOIRE DES RANGS ET DES QUANTITÉS

1 Deux choix didactiques qui se sont succédé

Ainsi, aucun chercheur en psychologie développementale ne pense aujourd'hui que le comptage-numérotage conduit précocement et facilement au nombre. C'est évidemment le moment de rappeler l'existence de deux choix didactiques contraires qui se sont succédé depuis la naissance de l'école de la République (Brissiaud, 2013).

- Soit l'on n'enseigne pas la quantification à l'aide d'un comptage-numérotage parce que le choix est fait d'enseigner d'emblée les nombres en s'appuyant sur l'itération de l'unité et les décompositions. Dans ce cas, les mots-nombres sont d'emblée utilisés comme désignant des pluralités et, via des collections-témoins organisées ; les quantités sont mises en relation entre elles, ce qui a pour conséquence que la quantification est d'emblée numérique. Il n'y a pas d'étape intermédiaire durant laquelle une quantification non numérique, celle qui résulte du comptage-numérotage, est valorisée à l'école. C'est ce choix qui prévalait avant 1986.
- Soit l'on enseigne la quantification à l'aide d'un comptage-numérotage. Les enfants utilisent alors des collections de numéros comme symboles quantitatifs (pour eux, « 6 » renvoie à « 1, 2, 3, 4, 5, 6 ») ; l'accès au nombre se faisant dans un second temps, quand ils accèdent à l'itération de l'unité, c'est-à-dire quand ils ont surmonté l'obstacle que crée la polysémie des mots-nombres inhérente à ce choix. Dans le cadre d'un tel choix, en effet, lorsque l'enseignant dit un mot-nombre, l'enfant doit l'interpréter soit comme renvoyant à une pluralité (ce mot désigne alors une quantité), soit comme renvoyant à une individualité (il est alors un numéro).

Or, des arguments issus de l'histoire des pratiques et des discours pédagogiques, de recherches évaluatives menées à partir d'enquêtes d'observation, de la psychologie des apprentissages numériques, de la psychologie interculturelle et enfin de la psychologie clinique plaident en faveur du premier choix, celui d'une entrée directe dans le nombre (Brissiaud, 2013). Cette supériorité s'explique vraisemblablement du fait que dans le contexte de la quantification à l'aide de collections de numéros, pour que les élèves comprennent l'itération de l'unité, il convient qu'ils fassent les bonnes interprétations alors que les deux sortes de significations (numéros et quantités) sont inextricablement mêlées. En effet, quand pour un enfant le mot « 6 » renvoie à « 1, 2, 3, 4, 5, 6 » et le mot « 5 » à « 1, 2, 3, 4, 5 », comprendre que « 6, c'est 5 et encore 1 » nécessite de considérer « 6 » et « 5 » à la fois comme des numéros et des pluralités et, de plus, de comprendre que le numéro « 6 » doit être considéré comme « 1 » parce que c'est « le « 1 de plus » ».

Il faut signaler de plus que les difficultés des élèves dans la compréhension de l'écriture décimale des nombres à plusieurs chiffres ont très vraisemblablement partie liée avec l'enseignement du comptage-numérotage. En effet, de nombreux travaux montrent que les élèves entrant au CE2, par exemple, ont bien appris à lire et écrire ces nombres mais que ces savoir-faire résultent de l'entraînement et non de la compréhension des écritures correspondantes (Brissiaud, 2004 ; Chambris, 2008 ; Mounier, 2010 ; Tempier, 2013 ; Brissiaud & Richard, à paraître). Cela s'explique du fait que nombreux élèves, quand ils lisent « 347 » et prononcent « *trois-cent-quarante-sept* », ne prononcent correctement le début de ce mot : *trois-cent* que parce qu'ils savent que le chiffre « 3 », quand il est dans la « colonne des centaines », doit se dire « *trois-cent* », sans que pour eux ce chiffre « 3 » signifie réellement « 3 fois 100 ». Pour eux, de même, « *quarante* » est le mot qu'il faut dire quand on voit le chiffre « 4 » dans la « colonne des dizaines », sans que ce chiffre signifie « 4 fois 10 ». Ces élèves savent lire et écrire les écritures chiffrées sous la dictée mais ils n'ont pas accès au sens du nombre en tant que somme de centaines, de dizaines et d'unités : encore un phénomène de « faux bons résultats ».

Ces élèves n'ont pas compris que les centaines et les dizaines sont des « grandes unités de compte » et que, fondamentalement, l'écriture des nombres se fonde dans un changement d'unités analogue à celui que l'on utilise avec les autres grandeurs telles que les longueurs : « *Le double-décimètre est un outil* *inadapté pour prendre les mesures d'un champ, et dans ce cas on choisit une chaîne d'arpenteur, c'est-à-dire un outil qui matérialise une unité plus grande. De même, dès que la taille d'une collection est un tant soit peu importante, les éléments de cette collection ne constituent plus une bonne unité de compte pour se représenter la quantité correspondante, et on change d'unité en prenant comme nouvelles unités la dizaine, puis la centaine.* » (Brissiaud, 1989 ; un point de vue analogue est développé par Christine Chambris, 2008).

Une étude récente de la DEPP (Andreu & al, 2013) montre que la compréhension de l'écriture des nombres à plusieurs chiffres est, ces dernières années, plutôt en régression. Mais comment s'en étonner ? Aujourd'hui, les enfants rencontrent presque systématiquement les écritures « 10, 11, 12, 13… 20, 21, 22, 23… 30, 31… » dans le contexte d'une file numérotée, en s'appuyant sur la récitation de la comptine numérique. En mettant en correspondance terme à terme les mots de la comptine et les cases de la file numérotées, ils apprennent, par exemple, que lorsque le numéro qui figure dans une case est du type « 2§ », il faut le lire « vingt-§ » (« 22 » se lit « vingt-deux », « 23 » se lit « vingt-trois », « 24 » se lit « vingt-quatre »,etc.). Ils apprennent à résoudre l'une des principales tâches scolaires (lire et écrire les nombres à deux chiffres) sans aucune référence aux propriétés conceptuelles qui fondent cette écriture (celles d'un changement d'unité de compte). Il sera d'autant plus difficile ensuite de faire en sorte qu'ils s'approprient ces propriétés conceptuelles (le fait que « 327 », c'est « 32 dizaines et 7 unités », par exemple) qu'ils auront auparavant automatisé cette autre façon de réussir les principales tâches scolaires, sans faire appel à des propriétés conceptuelles.

On aurait pu penser que l'accumulation de preuves en faveur du choix d'une entrée directe dans le nombre, sans enseignement du comptage-numérotage, conduirait l'ensemble de la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques à œuvrer dans le cadre de ce choix didactique. Ce n'est malheureusement pas le cas. Ainsi, une proposition pédagogique fréquente et très influente aujourd'hui consiste à recommander aux enseignants de travailler séparément la représentation des quantités et celle des rangs. C'est cette conception qui explique que le projet de programme maternelle se structure autour de deux objectifs : « *Construire le nombre comme mémoire de la quantité* » et « *Construire le nombre comme mémoire de la position* ». C'est également cette conception qui a guidé des chercheurs du CREAD[3] lors de l'élaboration de deux ressources numériques : le logiciel « *Le train des lapins* » (le *nombre* comme mémoire de la position) et le logiciel « *Des voitures et des garages* » (le *nombre* comme mémoire de la quantité). Un dernier point : ces ressources ont été conçues sous l'impulsion du bureau des écoles de la DGESCO et elles font partie d'une Mallette Numérique dont on peut craindre qu'elle soit largement diffusée telle quelle, sans aucune mise en garde.

En effet, le malheur est que cette approche des apprentissages numériques est fondée sur une conception épistémologique erronée du nombre et qu'elle n'est, en fait, qu'une variante du choix d'enseigner le comptage-numérotage, celui dont tout laisse à penser qu'il est à l'origine de trop d'échec scolaire.

2 Peut-on enseigner le nombre comme moyen de garder la mémoire des rangs ?

Le nombre est-il un moyen de *garder la mémoire* des rangs ? Bien sûr, mais il est beaucoup plus que cela puisqu'il est un moyen de *mettre en relation* les rangs : la 7ème case est la 1ère après la 6ème case, la 2ème après la 5èrme case, la 3ème après la 4ème case…, par exemple. Par ailleurs, nous avons vu que ce type de relations qui, formellement, sont les mêmes que celles qui lient les quantités, s'établissent d'abord dans le contexte *cardinal* (*i.e.* principal) que constitue celui des quantités. On est donc *a priori* conduit à douter de la possibilité d'accéder réellement au nombre lorsqu'on l'étudie seulement comme « *moyen de garder la mémoire des rangs* ». Examinons de plus près ce qu'il en est en analysant la situation pédagogique censée permettre cette approche du nombre.

Celle-ci consiste à « *garder la mémoire de la position* » d'une image située dans une file d'images, ou alors de la position de l'une des fenêtres d'un TGV, par exemple. Un problème permettant de travailler cet objectif consiste à mettre les élèves devant une file de cases vides dont les dimensions sont celles d'images d'animaux, par exemple. Par ailleurs, une « file modèle » d'images d'animaux est affichée dans

---

[3] Le CREAD est Centre de Recherche sur l'Education, les Apprentissages et la Didactique (Rennes 2). Le site présentant ces deux logiciels est à l'adresse : http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=201

un lieu éloigné. L'enseignant demande aux élèves de désigner sur la file vide la case où se situerait une image donnée, le lapin par exemple, si on la remplissait comme la « file modèle ».

Or, pour réussir ce problème, il suffit de compter-numéroter les images de la file modèle jusqu'à l'image du lapin (la 1, la 2, la 3, la 4, la 5, la 6, par exemple) et de compter-numéroter à l'identique les cases de la file vide. Il n'est pas nécessaire de savoir comment le nombre 6 s'exprime en nombres plus petits que lui. Pour garder la mémoire d'un rang, l'usage de numéros suffit, le nombre n'est pas nécessaire. Dans tous les comptes rendus d'expérimentation de séquences du type « file des images d'animaux », c'est très exactement ce qu'on lit : les enfants y apprennent à désigner les rangs à l'aide de numéros.

Que penser d'une telle activité ? C'est une excellente initiation au comptage-numérotage : nul besoin, comme c'est le cas dans un contexte de représentation des quantités, de surmonter l'obstacle que constitue la polysémie des mots-nombres : là, il suffit que les élèves fassent fonctionner les mots-nombres en tant que numéros pour réussir du début jusqu'à la fin : dans la vie quotidienne, en effet, l'usage de numéros est la plupart du temps bien suffisant pour représenter les rangs, il n'est pas nécessaire de mettre ces rangs en relation grâce au nombre. Grâce à cette activité les élèves vont apprendre la suite des numéros, ils vont apprendre à bien respecter la correspondance 1 unité – 1 mot-nombre, cela va les valoriser aux yeux de leurs parents : « Il sait compter jusqu'à… ». Il sera d'autant plus difficile ensuite de dépasser cette façon de faire dans le contexte de la représentation des rangs, mais aussi dans celui de la représentation des quantités.

3 Peut-on enseigner le nombre comme moyen de garder la mémoire des quantités ?

Le nombre est-il un moyen de *garder la mémoire* des quantités ? Bien sûr, mais il est beaucoup plus que cela puisqu'il est un moyen de *mettre en relation* les quantités et qu'il faut même considérer cette proposition comme une définition du nombre : les nombres sont *les raisons* des quantités. On est donc *a priori* conduit à douter de la possibilité d'accéder au nombre en sous-utilisant celui-ci, c'est-à-dire en le considérant seulement comme un « *moyen de garder la mémoire des quantités* ». Examinons de plus près ce qu'il en est en analysant la situation pédagogique censée permettre cette approche du nombre.

L'élève est devant une collection de coquetiers (ou de garages ou de bouteilles) et l'enseignant lui demande d'aller chercher à l'autre bout de la classe, en un seul voyage, une collection d'œufs (ou de voitures ou de bouchons) qui conduise à mettre exactement un œuf (une voiture, un bouchon) dans chaque coquetier (garage, bouteille). Or, pour réussir ce problème, il suffit de compter-numéroter les coquetiers (le 1, le 2, le 3, le 4, le 5, le 6, le 7, le 8, par exemple) et de compter-numéroter, à l'identique, les œufs. Supposons de plus que l'enseignant installe une répartition des rôles entre deux enfants de sorte que celui qui est devant les coquetiers doit rédiger un message à celui qui est devant les œufs parce qu'il incombera à cet autre enfant de construire la collection équipotente, on imagine facilement que les élèves vont progressivement prendre conscience que le message « 8 » fonctionne aussi bien que le message « 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 » : quand on sait réciter les numéros dans l'ordre, il suffit de mémoriser le dernier pour garder la mémoire de ceux qui le précèdent. Les élèves vont ainsi apprendre à « nominaliser » la quantité qu'ils représentaient auparavant par une collection de numéros. Mais nul besoin de mettre des quantités en relation, nul besoin de la notion de nombre. Dans un ouvrage paru en 2007, *Premiers Pas vers les Maths*, j'écrivais à propos de cette situation (p. 50) : « *la critique majeure qu'il faut faire à cette situation-problème est qu'elle met en jeu un seul nombre (par exemple, le nombre « six » dans le cas du problème des bouteilles et des bouchons). Or, les nombres forment un système et on ne peut pas comprendre le nombre « six » sans le comparer à ceux qui le précèdent. Autrement dit, on ne peut pas comprendre le nombre « six » sans s'intéresser à ses décompositions.* »

Que penser d'une telle activité ? C'est une excellente activité lorsque l'on a choisi d'enseigner la quantification à l'aide d'une collection de numéros et de faire accéder les élèves à la nominalisation de cette quantité par le dernier mot prononcé. Mais la difficulté sera grande ensuite pour que les élèves accèdent réellement aux nombres, certains n'y accéderont jamais parce qu'ils n'arriveront pas à surmonter l'obstacle que l'enseignant a créé en favorisant la polysémie des mots-nombres.

Il faut souligner que de nombreux formateurs qualifient cette situation de « *situation fondamentale du dénombrement* ». Ils qualifient ainsi un problème dont la résolution ne nécessite pas d'utiliser les nombres. Là encore, précisons ce que devrait être l'usage du mot « **dénombrement** » : il convient d'appeler ainsi toute stratégie permettant d'accéder réellement au nombre. Or ces stratégies sont toutes des stratégies de décomposition-recomposition : face à une collection de 7 unités, celle-ci est, par exemple, d'abord analysée comme formée de 3 unités, 3 autres et encore 1 (phase de décomposition) avant d'être désignée soit par 3-et-encore-3-et-encore-1, soit par le nom du nombre correspondant (phase de recomposition). Parmi ces stratégies de décomposition-recomposition, il y a celle où les unités sont énumérées l'une après l'autre, qu'on appelle le comptage-dénombrement : « 1, et-encore-1, 2 ; et-encore-1, 3 ; et-encore-1, 4… ». Si l'on utilise le mot « dénombrement » dans le sens qui vient d'être précisé, la situation de commande d'une collection équipotente du type coquetiers-œufs n'est pas nécessairement une situation de dénombrement.

Une objection possible est évidemment que cette situation, si elle n'est pas nécessairement une situation de dénombrement, cela peut éventuellement être le cas : en effet, rien n'empêche l'enfant d'utiliser une stratégie de décomposition-recomposition afin d'accéder à une représentation numérique de la quantité des coquetiers. Cependant, quiconque a expérimenté dans des classes d'école maternelle sait qu'il est difficile de faire en sorte que les enfants utilisent des stratégies de décomposition-recomposition et que lorsque la situation ne les contraint pas à l'usage de telles stratégies, elles n'émergent guère spontanément. De plus, nous allons voir que la situation de repérage d'une case d'une file et celle de commande d'une collection équipotente doivent être considérées comme faisant partie d'une sorte de « package » théorique. Or, et cela sans aucun doute, la première situation conduit au comptage-numérotage. Pour que ce ne soit pas le cas de la seconde, il faudrait beaucoup d'explications aux enfants… et à leurs enseignants.

4 Une erreur épistémologique qui risque d'avoir de graves conséquences

Ainsi, derrière la proposition didactique précédente, il y a le choix d'enseigner le comptage-numérotage. Les formateurs qui avancent cette proposition didactique sont-ils conscients de ce choix ? On peut en douter. En effet, derrière cette proposition didactique on trouve le cadre théorique qui consiste à distinguer deux prétendus aspects du nombre : *l'aspect cardinal* et *l'aspect ordinal*. Ce cadre théorique trouve son origine dans un livre que nous avons déjà évoqué et dont l'impact en formation des maîtres a été considérable : Ermel GS (Charnay & al., 1990). Cependant sa présentation la plus développée se trouve dans un ouvrage récent intitulé « *Le nombre à l'école maternelle – Une approche didactique* » (Claire Margolinas & Floriane Wozniak, 2012). Les deux situations qui viennent d'être présentées organisent l'exposé de cet ouvrage. La situation de commande d'une collection équipotente à une collection donnée est présentée dans le chapitre 1 comme une situation « *fondamentale* » permettant d'accéder au *cardinal*. Celui-ci est défini ainsi (p. 40) : « *le cardinal d'une collection est ainsi le représentant de toutes les collections qui lui sont équipotentes, c'est-à-dire de toutes les quantités égales : quatre représente la quantité de toutes les collections équipotentes à la collection des mots-nombres un, deux, trois, quatre.* ».

Ainsi les auteurs parlent de « cardinal » alors que le mot « *quatre* » est explicitement défini comme le résultat d'un processus de nominalisation de la quantité quand celle-ci est représentée par une collection de numéros : « 4 » vaut pour « 1, 2, 3, 4 ». L'usage du mot « cardinal » conduit le lecteur à penser qu'on lui parle de nombre alors que ce n'est pas le cas.

Quant à la situation de repérage d'une position, elle est présentée dans le chapitre 3 comme permettant de travailler « *l'ordinal, c'est-à-dire le nombre comme mémoire de la position* » (p. 73). Or, dans tout le chapitre correspondant, lorsqu'on analyse l'activité des enfants telle qu'elle est décrite, on arrive à la conclusion qu'ils ne font que raisonner sur des numéros. Comme ces numéros sont appelés des *ordinaux,* les lecteurs peuvent croire qu'on leur parle de nombres alors que n'importe quelle suite de symboles ordonnés, sans aucun rapport avec les quantités (les lettres de l'alphabet, par exemple) feraient aussi bien l'affaire.

Et dans la conclusion, on lit dans une section intitulée « *Commencer par le cardinal ou l'ordinal ?* » (p. 116-117) : « *D'un point de vue didactique ce qui parait essentiel est d'appréhender la dualité de ces deux conceptions du nombre et, pour les professeurs, d'identifier clairement les situations mathématiques que ces deux aspects* *modélisent. De la notion de collection se déduit celle de quantité d'où nait le concept de nombre cardinal via le processus de dénombrement*[4]*. De la notion de liste se déduit celle de position d'où nait le concept de nombre ordinal via le processus de repérage* ».

On a vraiment l'impression d'être face à un cadre théorique structuré alors qu'aucune des propositions avancées ne peut être retenue. Rappelons qu'on ne peut pas isoler le point de vue de la quantité de celui de l'ordre sans que l'idée même de nombre disparaisse : le nombre est la raison arithmétique des quantités et il résulte de la mise en ordre des quantités selon leurs différences. Du fait qu'il est mise en relation des quantités et, donc, de nature plus abstraite que les quantités, le nombre ne peut plus être considéré sous un aspect qu'il n'a plus : celui de quantité. De manière évidente, il ne peut pas être envisagé sous le seul aspect de la mise en ordre non plus. Ainsi, chacune des deux situations didactiques qui nous intéressent ici, ne *modélise* pas un de ces prétendus *aspects du nombre* : 1°) parce qu'il ne suffit pas d'accéder à la quantité pour accéder au nombre et 2°) parce que la mise en ordre d'autres entités que des quantités (la mise en ordre d'images d'animaux, de fenêtres de TGV, etc.) ne conduit pas au nombre.

Cet usage d'oxymores et les approximations lexicales qui l'accompagnent ont principalement un effet : celui de masquer que, pour l'essentiel, les deux situations décrites sont des situations d'apprentissage du comptage-numérotage. On remarquera d'ailleurs que la notion d'itération de l'unité ne figure nulle part dans ce livre : l'ouvrage s'intitule « *Le* nombre *à l'école maternelle – Une approche didactique* » mais, en fait, **il n'y est pas question du nombre**, du moins du nombre tel que le conçoivent Newton, les encyclopédistes, Buisson, Piaget, Gréco et la quasi-totalité des chercheurs contemporains en psychologie. Le plus grave, évidemment, étant que le choix didactique en faveur du comptage-numérotage, celui qui est masqué par ces propos, se trouve promu alors qu'il joue très vraisemblablement un rôle non négligeable dans l'aggravation de l'échec scolaire en mathématiques depuis la fin des années 1980.

IX - CONCLUSION

La quasi-totalité des chercheurs en psychologie des apprentissages numériques considèrent aujourd'hui l'accès à l'itération de l'unité comme la porte d'entrée vers le nombre. Cette unanimité est récente et elle donne l'espoir qu'après presque 30 ans d'enseignement du comptage-numérotage à l'école, une page commence à se tourner : celle où cet enseignement n'était pas interrogé par les didacticiens, où il était considéré comme allant de soi alors qu'avant 1970, il avait été rejeté par l'école française pour de bonnes raisons. En effet, les résultats empiriques abondent qui étayent l'idée que l'enseignement du comptage-numérotage et ses succédanés (les situations-problèmes visant à faire étudier le *nombre* comme moyen de garder la mémoire des quantités et des rangs) constituent un détour inutile qui éloigne du nombre.

Dans la mesure du possible, dans sa pratique quotidienne, l'enseignant doit s'efforcer d'attirer l'attention des enfants sur les dimensions pertinentes de ce qu'ils doivent apprendre[5]. Dans le cas du nombre, enseigner le comptage-dénombrement, c'est théâtraliser l'itération de l'unité et, donc, attirer l'attention des enfants sur ce qui fonde le nombre. Enseigner le comptage-numérotage, c'est au contraire créer un obstacle langagier à l'accès au nombre et enfermer les enfants les plus fragiles dans la représentation des quantités par des collections de numéros.

Il serait intéressant de connaître les arguments d'éventuels chercheurs ou pédagogues qui, aujourd'hui, recommanderaient de continuer à enseigner le comptage-numérotage plutôt que le comptage-dénombrement. La parution de « *Premiers pas vers les maths* » en 2007 se voulait une alerte concernant les difficultés grandissantes des écoliers français avec le nombre et, depuis, les craintes exprimées dans cet ouvrage n'ont fait que se confirmer. La critique du comptage-numérotage y était vive et, pourtant, les

[4] De notre point de vue, le mot *dénombrement* doit ici être compris comme *comptage.*

[5] Il est important de noter que la portée de ce propos se trouve relativisée du fait qu'il commence par l'expression : « *Dans la mesure du possible* ». En effet, l'enfant ne perçoit pas nécessairement le monde comme nous (cf. la difficulté de traiter les phonèmes correspondants aux consonnes occlusives, par exemple) et attirer son attention sur une dimension qui lui est inaccessible ne peut qu'échouer.

formateurs qui, depuis près de 30 ans, recommandent l'enseignement du comptage-numérotage ou l'un de ses succédanés, ont continué comme si de rien n'était. Espérons que ce temps est révolu.

X - BIBLIOGRAPHIE

ANDREU, S., LE CAM, M. & ROCHER, T. (2014) Évolution des acquis en début de CE2 entre 1999 et 2013 : les progrès observés à l'entrée au CP entre 1997 et 2011 ne sont pas confirmés. *Note n°19-Mai 2014 de la DEPP*.

ARNOUX, P. (2012) *Des nombres « vivants » ? Digression sur la vie des nombres*. Texte mis en ligne sur le site educmath (IFE) http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-arnoux

BAROODY, A., BAJWA, N. & EILAND, M. (2009) Why Can't Johnny Remember the Basic Facts ? *Developmental disabilities research reviews* ; 15, 69-79.

BRANDICOURT, R (1962). Des principes à la pratique pédagogique. In J. Bandet (Ed) : *Les débuts du calcul*, 87-108. Paris : Editions Bourrelier.

BRESSON, F. (1987) Les fonctions de représentation et de communication. In J. Piaget, P. Mounoud & J.-P. Bronckart (Eds) *Psychologie – Encyclopédie de la Pléiade*, 933-982. Paris : NRF

BRISSIAUD, R. (1989) *Comment les enfants apprennent à calculer – Au-delà de Piaget et de la théorie des ensembles*. Paris : Retz

BRISSIAUD, R. (1995) Le comptage en tant que pratique verbale : un rôle ambivalent dans le progrès des enfants. *Repères*, 12, p. 120-143.

BRISSIAUD, R. (2005) Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. Actes du congrès scientifique international de Toulouse : Comprendre. *Rééducation Orthophonique*, n°223, pp. 225-238.

BRISSIAUD, R. (2007) *Premiers pas vers les maths – Les chemins de la réussite à l'école maternelle.* Paris : Retz.

BRISSIAUD, R. (2013) *Apprendre à calculer à l'école – Les pièges à éviter en contexte francophone.* Paris : Retz

BUISSON, F. (1882-1887) Dictionnaire de pédagogie, 1ère éd. Paris : Hachette.

CANAC, H. (1955) L'initiation au calcul entre 5 et 7 ans. In F. Brachet, H. Canac & E. Delaunay (ed.), *L'enfant et le nombre*, p.9-27. Paris : Didier.

CHAMBRIS, C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20ème siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse Université Paris 7.

CHARNAY, R., DOUAIRE, J., GUILLAUME, J. C. & VALENTIN, D. (1990) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Cycle des apprentissages, Grande Section de Maternelle.* Collection ERMEL. Paris : Hatier.

COLOME, À. & NOËL, M. P. (2012). One first? Acquisition of the cardinal and ordinal uses of numbers in preschoolers. *Journal of experimental child psychology,* 113(2), 233-247.

CONSEIL SUPERIEUR DES PROGRAMMES (2014-1) Projet de programme et recommandations école maternelle consultable le 14 novembre 2014 sur la page http://cache.media.education.gouv.fr/file/Organismes/32/4/CSP-_Projet_de_programme-recommandations_337324.pdf

CONSEIL SUPERIEUR DES PROGRAMMES (2014-2) Projet de programme école maternelle consultable le 14 novembre 2014 sur la page http://cache.media.education.gouv.fr/file/Organismes/32/6/CSP-PROJET_DE_PROGRAMME_eCOLE_MATERNELLE_337326.pdf

D'ALEMBERT, BOSSUT, DE LA LANDE, CONDORCET & COLLEGUES (1784) *Encyclopédie méthodique – Mathématiques* T1 et T2. Paris : Panckoucle

DAVIDSON, K., ENG, K. & BARNER, D. (2012). Does learning to count involve a semantic induction? *Cognition*, *123*(1), 162-173.

DEHAENE, S. (1997-2010) *La bosse des maths – 15 ans après.* Paris, Odile Jacob.

DI LUCA, S. & PESENTI, M. (2011). Finger numeral representations: more than just another symbolic code. *Frontiers in psychology*, *2*.

DROZ, R. & PASCHOUD, J. (1981) : Le comptage et la procédure "(+1)-itérée" dans l'exploration intuitive de l'addition. *Revue Suisse de Psychologie,* 40, 219-237.

FAYOL, M. (2012) *L'acquisition du nombre.* Collection : Que sais-je ? Paris : Puf

FUSON, K.C. (1988). *Children's counting and concepts of number.* New York : Springer.

GELMAN R. & GALLISTEL C.R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge : Harvard University Press.

GRECO, P. (1960). Recherches sur quelques formes d'inférences arithmétiques et sur la compréhension de l'itération numérique chez l'enfant. *Problème de la construction du nombre, Paris, PUF*.

GRECO, P. (1962) Quantité et Quotité. In *Structures numériques élémentaires, Etudes d'épistémologie génétique, XIII,* J. Piaget (Edit.), Paris : PUF.

GRECO, P. (1963). Le progrès des inférences itératives et des notions arithmétiques chez l'enfant et l'adolescent. *La formation des raisonnements récurrentiels, EEG XVII*.

IZARD, V., PICA, P., SPELKE, E. S. & DEHAENE, S. (2008). Exact equality and successor function: Two key concepts on the path towards understanding exact numbers. *Philosophical psychology*, *21*(4), 491-505.

LALANDE A. (1926-1988) *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, 16ème édition. Paris : PUF.

LE CORRE, M. (2014). Children acquire the later-greater principle after the cardinal principle. *British Journal of Developmental Psychology*, *32*(2), 163-177.

MARGOLINAS, C. & WOZNIAK, F. (2012) *Le nombre à l'école, une approche didactique.* Bruxelles : De Boeck éditeur

MARKMAN, E.M. (1989) : *Categorisation and naming in children*. Cambridge, MA: MIT Press.

MARKMAN, E.M. (1990) : Constraints children place on word meanings. *Cognitive Science*, 14, 57-77

MEN/DEGESCO (2010) Aide à l'évaluation des acquis des élèves en fin d'école maternelle, mis en ligne le 12 mars 2010.

MIALARET, G. (1955) *Pédagogie des débuts du calcul*. Fernand Nathan, Paris (avec la collaboration de l'Unesco).

MOUNIER, E. (2010) : *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes.* Thèse Université Paris 7.

NEWTON, I. (1728/1967). Universal Arithmetic: Or, a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. In D.T. Whiteside (Ed.), *The mathematical Works of Isaac Newton*, Vol. 2 (pp. 3–134). New York: Johnson Reprint Corp.

PIAGET, J. & INHELDER, B. (1963). Les opérations intellectuelles et leur développement. In P. Fraisse et J. Piaget (Eds). *Traité de psychologie expérimentale*, VII, L'intelligence, 109-155.

PIAGET, J. & SZEMINSKA, A. (1941) *La genèse du nombre chez l'enfant.* Paris : Delachaux et Niestlé.

RIPS, L. (2011) *Lines of thought – Central concepts in cognitive psychology*. Oxford University Press

SARNECKA, B.W. & CAREY, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition,* 108(3), 662-674.

SINCLAIR, A., MELLO, D. & SIEGRIST, F. (1988) La notation numérique chez l'enfant. In H. Sinclair (Ed): *La production de notations chez le jeune enfant – Langage, nombres, rythmes et mélodies.* Paris : PUF

SOPHIAN, C. (2007). *The origins of mathematical knowledge in childhood.* Lawrence Erlbaum Associates.

TEMPIER F. (2013) *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource.* Thèse Université Paris 7.

DE LA CONCEPTION D'UNE RESSOURCE POUR ENSEIGNER LA NUMERATION DECIMALE DE POSITION A L'IDENTIFICATION DE BESOINS POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Frédérick TEMPIER
PRAG, ESPE académie de Poitiers
LDAR, Paris 7
Frederick.tempier@univ-poitiers.fr

Résumé
Les programmes et manuels actuels ne font pas de l'aspect décimal (relations entre unités) un enjeu essentiel pour l'apprentissage de la numération des nombres à quatre chiffres en CE2 (Chambris 2008, Tempier 2010a). Dans notre thèse (Tempier 2013), nous avons cherché à concevoir une ressource pour aider les enseignants à prendre en compte ce savoir dans le cadre d'une ingénierie didactique de développement (Perrin-Glorian 2011). L'objectif de cette communication est double : présenter la ressource construite (différentes parties, choix des situations, descriptions des savoirs en jeu …) et pointer des éléments essentiels de formation des enseignants pour une utilisation adaptée de cette ressource (dégagés à partir des expérimentations de la thèse).

INTRODUCTION

La numération écrite chiffrée des nombres entiers est une notion essentielle pour les mathématiques de l'école primaire. Elle s'appuie sur deux principes qui sont indissociables :

- à chaque rang de l'écriture en chiffres correspond une unité de numération (par exemple au troisième rang on écrit des centaines) que je nommerai principe de position ;
- chaque unité est égale à dix unités de l'ordre inférieur (par exemple une centaine = dix dizaines) que je nommerai principe décimal.

L'étude de la transposition didactique de la numération à travers les programmes officiels et des manuels de 3ème primaire (Chambris 2008, Tempier 2010a) montre qu'une place centrale est donnée aux tâches mettant en jeu le principe de position de la numération : l'association entre l'écriture en chiffres et le nom du nombre, la comparaison et les décompositions canoniques du type 1304 = 1x1000 + 3x100 + 4. Cela a des conséquences :

- sur les pratiques des enseignants pour qui le principe décimal n'est pas toujours un enjeu d'enseignement (Tempier 2010b) ;
- sur les apprentissages des élèves : un certain nombre d'élèves rencontrent des difficultés dans des tâches mettant en jeu les relations entre unités (Tempier 2013), comme « 1 centaine = … dizaines » (48% de réussite[1]), « 60 dizaines = … centaines » (31% de réussite) et « dans 764 il y a … dizaines » (39% de réussite).

Pourtant les relations entre unités sont essentielles pour accéder à une véritable compréhension de l'écriture chiffrée. Elles sont aussi utiles pour comprendre le fonctionnement des techniques de calcul posé des quatre opérations.

Tout cela m'a amené, dans mon travail de thèse (Tempier 2013), à chercher à affiner mes constats (axe 1) sur la prise en compte du principe décimal à différentes étapes de la transposition didactique (étude des programmes et de manuels, étude de classes ordinaires) et à étudier comment enrichir les pratiques (axe

[1] Sur 104 élèves de 8/9 ans en France.

2) des enseignants en prenant davantage en compte le principe décimal. Pour cela j'ai choisi de concevoir une ressource qui soit à la fois :

- utile, c'est-à-dire qui permette aux enseignants de s'approprier les enjeux de l'enseignement de la numération et aux élèves de construire les connaissances visées,
- et utilisable par les enseignants, c'est-à-dire qu'ils puissent s'en emparer facilement pour leur travail de préparation ou de mise en œuvre en classe.

J'ai fait le choix de restreindre mon objet d'étude à l'enseignement de la numération en classe de 3ème primaire (élèves de 8/9 ans) pour les nombres à quatre chiffres car il y a de nombreuses relations entre le millier et les unités d'ordres inférieurs. De plus, c'est une étape essentielle avant d'aborder les grands nombres et les décimaux.

Je m'appuie sur une méthodologie d'« ingénierie didactique pour le développement d'une ressource et la formation des enseignants » (Perrin-Glorian 2011) afin de questionner

J'utilise une méthodologie par cycles pour l'ingénierie didactique. Il est en effet essentiel de réaliser plusieurs allers-retours entre phases de conception de la ressource et phases de mise à l'épreuve de la pratique pour produire une ressource utilisable par les enseignants.

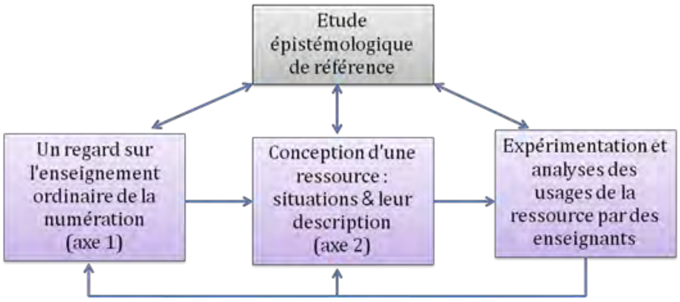


Figure 1 : schéma général de la méthodologie

Chaque cycle m'amène à prévoir des modifications des situations ou de leur description dans la ressource et me permet aussi d'identifier des besoins pour la formation des enseignants (voire des recommandations pour les programmes) quand il y a des résistances importantes du côté des enseignants que l'on peut lier à des manques de savoirs didactiques pour enseigner la numération.

Je souhaite ici présenter les deux versions de la ressource construites dans le cadre de cette thèse puis les besoins de formation que j'ai pu identifier dans les analyses des séances de classes ordinaires ou dans la mise en œuvre des situations proposées dans la ressource.

I - PRESENTATION DE LA RESSOURCE

1 Principes généraux pour la ressource

La conception des deux versions de la ressource s'appuie sur certains principes généraux définis au début de mon travail en m'appuyant sur des résultats de recherches portant sur l'usage des ressources par les enseignants de l'école primaire voire plus généralement sur leurs pratiques[2].

- La ressource est à destination des enseignants. J'y propose des situations à usage didactique. Il n'est pas visé un suivi pas à pas par l'enseignant : les usages seront nécessairement variés. Je décris donc les éléments qui semblent essentiels pour une mise en œuvre adaptée par l'enseignant. La détermination de ces éléments essentiels des situations fait partie des questions de recherche.
- Une place importante semble devoir être faite a la description des enjeux de savoir du fait de contraintes institutionnelles actuelles qui peuvent amener les enseignants à se centrer sur les

[2] Nous nous appuyons en partie sur les travaux de Ball et Cohen (1996), Margolinas, Mercier et René de Cotret (2006), Margolinas et Wozniak (2010), Arditi (2011), Coulange (2011), Margolinas et Laparra (2011). Par manque de place nous ne développons pas davantage les résultats de ces recherches. Pour davantage de précisions se reporter à Tempier (2013) p. 167-181.

activités proposées aux élèves sans toujours se préoccuper des savoirs qu'elles pourraient permettre de faire émerger.

- Des éléments sont proposés pour aider l'enseignant à construire une séquence à partir des situations proposées car les ressources ne permettent pas toujours aux enseignants de s'approprier les progressions sur un thème donné ou plus généralement sur l'ensemble des mathématiques travaillées dans l'année. Pour la numération il semble en particulier essentiel que les enseignants soient conscients de la mise en jeu des savoirs dans d'autres thèmes mathématiques de l'école comme le calcul posé. D'autres apports généraux sur l'enseignement de la numération peuvent être proposés. La détermination des principaux apports fait aussi partie des questions de recherche et sera affinée à partir des besoins des enseignants révélés par les expérimentations.
- Enfin, il faut motiver les enseignants à utiliser la ressource en leur montrant l'intérêt qu'ils peuvent y trouver. Cela peut se faire en pointant les manques au niveau des savoirs de numération observés dans certains manuels ou l'importance de la numération pour le calcul posé. Mais cette entrée par les savoirs pourrait ne pas suffire. Il est important de s'appuyer également sur les difficultés des élèves, notamment pour les tâches mettant en jeu le principe décimal de la numération.

2 Choix des situations

Pour la conception des situations, je m'appuie sur la situation fondamentale du nombre de Brousseau (1995) : un actant A et un actant B doivent se communiquer des informations nécessaires pour réaliser des collections équipotentes. Mais les actants sont éloignés dans l'espace et/ou la réalisation des collections est éloignée dans le temps (la seule correspondance terme à terme ne suffit pas pour réussir). Sous ces contraintes, l'utilisation du nombre (parlé ou écrit) est la solution la plus économique à ce problème. Pour mon travail sur la numération écrite, je ne considère que le cas de collections ayant au moins cent (voire mille) éléments et j'impose que le code de désignation utilisé soit l'écriture en chiffres. Le jeu 1 consiste alors à produire une écriture chiffrée à partir d'une collection et le jeu 2 est le jeu inverse.

J'ai choisi d'enrichir cette situation en introduisant une description de la quantité avec les unités de numération (UN) car elles permettent de décrire (à l'oral comme à l'écrit) des nombres d'unités supérieurs à dix contrairement aux mots de la numération parlée en France (Brissiaud 2005, Chambris 2008) : on peut dire « vingt centaines » alors que l'on ne peut pas dire « vingt cents » dans notre système de numération parlée. J'ai donc ajouté deux autres jeux (jeux 3 et 4) de traduction d'écritures d'une écriture chiffrée (par exemple 1304) à une écriture en UN (par exemple 1M 3C 4U) ou réciproquement :

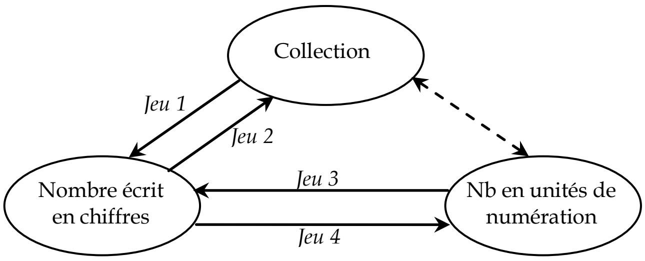


Figure 2 : les jeux de la situation fondamentale

La collection qui est à dénombrer (jeu 1) ou à constituer (jeu 2) peut être non organisée (« en vrac »), totalement groupée ou partiellement groupée. J'ai montré que c'est une variable didactique essentielle. Cela correspond au nombre d'unités de chaque ordre dans le cas de l'utilisation des écritures en UN (jeux 3 et 4). Le choix de cette variable didactique peut permettre de mettre en jeu différentes connaissances liées aux deux principes de la numération.

Pour la construction des situations et du canevas didactique de la ressource je m'appuie sur cette situation fondamentale en faisant des choix pour sa « mise en scène ». Concernant la progression générale, j'ai choisi de partir de la situation de dénombrement, c'est à dire passer d'une collection ou d'une écriture en unités de numération (EUN) à une écriture chiffrée (EC), avant de proposer la situation de commande (passer d'une EC à une EUN).

Pour la situation de dénombrement il y a trois variantes. Je propose un matériel de référence constitué de bûchettes en bois. La première variante permet la constitution des groupements successifs. La deuxième permet de mettre en jeu le principe de position pour dénombrer une collection totalement groupée comme 1M (1 millier) et 4D (4 dizaines) par exemple. C'est seulement dans la troisième variante que les conversions entre unités sont véritablement un enjeu car la réunion de deux collections amène à avoir plus de dix unités à certains ordres[3]. Dans l'exemple donné ici en réunissant les deux collections on obtient 12C (12 centaines) qu'il faut convertir en 1M et 2C.

La situation de commande permet de réinvestir les connaissances en partant cette fois de la donnée de l'EC pour produire une EUN en tenant compte de différentes contraintes sur le stock du marchand qui permettent de mettre en jeu les conversions entre unités.

Situation de dénombrement de collections	V1 : Dénombrer une collection « en vrac »	
	V2 : Dénombrer une collection totalement groupée	
	V3 : Dénombrer une réunion de deux collections	1ère collection : 2M 8C 1D 3U 2ème collection : 4C 1M 2U. Nombres paris : 31215, 3215, 3315, 4215
Situation de commande de collections	V1 : Commandes de bûchettes	Il nous faut 2615 bûchettes, mais le marchand n'a plus de bûchettes par millier. Combien faut-il commander de centaines de bûchettes, de dizaines de bûchettes et de bûchettes seules ?
	V2 : Commandes de timbres	Le directeur de l'école de Villebois doit commander 2647 timbres. Combien doit-il commander de plaques de 100 timbres ?

Figure 3 : les situations (version 1 de la ressource)

3 Choix d'ergonomie de la ressource

Enfin, concernant l'ergonomie de la ressource, on peut voir sur la page d'accueil (annexe) de la version 1 trois parties : des apports sur la numération, des propositions de situations (les 2 situations principales avec leurs variantes et des situations complémentaires) et des aides pour construire une séquence. L'analyse de l'usage de cette première version a amené à revoir l'organisation générale de la ressource suite à des difficultés constatées pour la conception d'une séquence à partir des situations proposées :

- en intégrant des exercices d'entraînement car certains enseignants se contentaient des situations proposées ;
- en mettant en évidence le canevas didactique avec les deux situations et leurs variantes ainsi que le jeu sur les contextes différents (comme les situations de la version 1 ne proposaient qu'un travail autour du contexte des bûchettes, certains enseignants ne proposaient que ce contexte).

On peut voir cette entrée par le canevas didactique dès la page d'accueil de la version 2 (annexe).

[3] Dans la version 2 de la ressource nous proposons de dénombrer directement une collection partiellement groupée plutôt qu'une réunion de deux collections.

II - DES BESOINS POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Je m'appuie sur différentes expérimentations avec des enseignants ayant au moins 5 années d'expérience :

- en 2008/2009 : une étude de cas des pratiques de trois enseignants « ordinaires » (qui utilisent leur ressources usuelles, sans intervention du chercheur) ;
- de 2009 à 2012 : trois expérimentations dans le cadre de mon ingénierie didactique de développement d'une ressource, dont je vais maintenant préciser le dispositif expérimental.

J'ai commencé par mener une pré-expérimentation avec seulement deux enseignants qui devaient suivre la ressource proposée (version 0) tout en l'adaptant si besoin. La version 1 de la ressource a fait l'objet d'une expérimentation avec 7 enseignants qui devaient suivre les 5 problèmes proposés dans la ressource. Pour la version 2 de la ressource j'ai travaillé avec 6 autres enseignants qui avaient toute liberté dans l'usage de la ressource.

J'ai réalisé un entretien avant et après la séquence pour tous ces enseignants. L'entretien final a permis de faire le point sur l'utilisation de la ressource pour chaque enseignant et de discuter de modifications possibles. Mais pour mieux associer certains enseignants à ce travail collaboratif avec le chercheur j'ai aussi organisé des réunions de travail avec une partie des enseignants avant et après l'utilisation de la ressource (« groupe de travail », GT). Les autres enseignants utilisent la ressource dans des conditions plus ordinaires (« groupe libre », GL). Je n'ai observé que des séances des enseignants du GT.

Expérimentation	**Nombre d'enseignants**	**« Contrat » d'expérimentation pour le suivi de la ressource**	**Nombre de séances observées**	**Evaluations des élèves**
Pré-expérimentation (version 0)	2	*Suivi de la ressource proposée avec adaptations possibles.*	*La plupart des séances mises en œuvre.*	*Avant/après*
Expérimentation (version 1)	4 (groupe de travail GT) / 3 (groupe libre GL)	Suivi des 5 problèmes principaux. Adaptations possibles pour la mise en œuvre. Construction d'une séquence à la charge de l'enseignant.	3 séances (GT) / aucune (GL)	Avant/après
Expérimentation 2 (version 2, après-thèse)	3 (GT) / 3 (GL)	Liberté totale dans l'utilisation de la ressource.	2 séances (GT) / aucune (GL)	Avant/après

Figure 4 : tableau du dispositif expérimental de l'ingénierie didactique

Il y a une évolution des conditions d'expérimentation avec les enseignants au cours des cycles. J'ai fait le choix de donner de plus en plus de liberté aux enseignants dans la mise en œuvre des situations pour progressivement s'approcher des conditions « réelles » d'utilisation d'une ressource par des enseignants, hors contexte de recherche.

Pour l'analyse des séances je fais une comparaison entre l'analyse *a priori* des situations de la ressource et l'analyse des déroulements observés et je cherche à identifier les raisons des décalages éventuellement observés. Pour l'analyse des séquences je compare les séquences réalisées au canevas didactique proposé afin d'étudier les enrichissements produits par les enseignants et l'usage du canevas didactique.

Voici les principaux besoins de formation identifiés :

- Dans le cadre de l'utilisation de la ressource :
  - ✓ S'approprier la progression proposée dans la ressource (situations et variantes).
- En général :
  - ✓ Comprendre l'intérêt d'un travail sur les deux aspects de la numération.

- ✓ Comprendre le rôle du matériel et des unités de numération pour en faire un usage adapté en classe.
- ✓ Connaître les techniques pour décomposer/recomposer (Collection ou EUN -> EC et EC -> EUN) et leurs technologies afin d'identifier les savoirs à institutionnaliser en classe.

1 S'approprier la progression proposée dans la ressource (situations et variantes).

Lors de l'expérimentation 2 le fait que les enseignants aient une liberté totale dans l'utilisation de la ressource (alors que dans la 1 ils devraient suivre les situations) a pu permettre d'étudier leur appui sur le canevas didactique proposé (dès la page d'accueil, cf. annexe 2) pour construire leur séquence.

J'ai alors pu observer que certains enseignants prennent plus ou moins de libertés avec le canevas didactique proposé pour construire leur séquence. Certains suivent la chronologie générale mais « sautent » certains passages de la progression. D'autres piochent des exercices alternativement dans chaque situation principale sans prendre appui sur la logique de l'organisation didactique proposée dans la ressource. Tout se passe comme si, pour certains enseignants, la ressource était utilisée comme une banque d'exercices dans laquelle ils viennent « piocher » en fonction de leurs envies ou de leurs besoins.

Tous les enseignants, n'investissent ni la variante de dénombrement d'une collection partiellement groupée, ni les exercices de conversion : il y a donc toute une partie de la ressource qui n'est pas utilisée. Cela n'est pas sans lien avec le fait que ce sont des situations/exercices qui justement sont peu présents dans les manuels actuels (Tempier 2010a). L'importance du travail de conversion entre unités pourrait donc être difficile à faire passer par l'intermédiaire d'une ressource.

Dans le cadre de l'utilisation de cette ressource, donc de cette progression, il semble important que l'enseignant s'approprie la logique du canevas didactique et le lien entre les situations et les savoirs en jeu afin de faire des choix cohérents avec les enjeux principaux de la ressource :

- Le jeu sur l'organisation de la collection (en vrac, totalement groupée, partiellement groupée) permet de construire progressivement les différentes conditions de la technique de position (cf. 2.4) pour la situation de dénombrement et de faire des décompositions variées de nombres en jouant sur les relations entre différentes unités pour la situation de commande.
- Le rôle crucial de la variante 3 de la situation de dénombrement (collection partiellement groupée) pour introduire la nécessité des conversions entre unités. Si on s'arrête à la variante 2, les unités de numération ne sont utilisées que d'un point de vue positionnel. C'est la variante 3 qui permet de faire un travail sur les unités, en convertissant 10 unités d'un certain ordre en une unité de l'ordre supérieur.
- Les élèves ont besoin de ces connaissances sur les conversions avant d'aborder la situation de commandes de collection pour que les décompositions qu'ils y feront s'appuient sur les conversions en jeu (dans 1234 il y a 12 centaines car 1 millier c'est 10 centaines). Si le travail sur les commandes vient trop tôt le risque est que l'on ne cherche qu'un « découpage » adéquat de l'EC.

2 Comprendre l'intérêt d'un travail sur les deux aspects de la numération.

Les programmes et certains manuels ne font pas de l'aspect décimal un enjeu essentiel pour l'enseignement de la numération (Tempier 2010a). Cela a une influence sur le projet des enseignants ordinaires que nous avons observés lors de leur séquence sur la numération en dehors de l'utilisation de la ressource de l'ingénierie (Tempier 2010b). Cela a aussi des influences sur la mise en œuvre de ce projet et même jusqu'à la façon dont les enseignants interprètent les erreurs ou difficultés des élèves.

Dans la première classe, aucune situation proposée n'amène à faire un travail sur le principe décimal. Cependant, on peut trouver dans l'évaluation finale un exercice de recomposition pour lequel les deux cas de la dernière ligne mettent en jeu des relations entre unités :

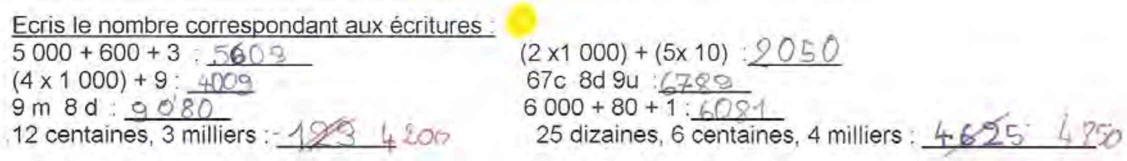

Ecris le nombre correspondant aux écritures :
5 000 + 600 + 3 : 5603
(4 x 1 000) + 9 : 4009
9 m 8 d : 9080
12 centaines, 3 milliers : 123 4200
(2 x 1 000) + (5x 10) : 2050
67c 8d 9u : 6789
6 000 + 80 + 1 : 6081
25 dizaines, 6 centaines, 4 milliers : 4625 4250

Figure 5 : une production d'élève, évaluation finale

Quand j'interroge l'enseignante sur les difficultés rencontrées par certains élèves dans cet exercice, elle explique les choix qu'elle a effectués :

> « On n'avait pas forcément l'ordre à chaque fois qui était imposé. J'avais inversé parfois, j'avais d'abord mis le nombre de centaines et le nombre de milliers ou alors je n'avais pas mis de centaines ou voilà. Et là c'est là où ils se sont trompés en général, enfin y'en a une partie, on va dire la moitié, se sont trompés dans ces cas-là. Ils ne font pas attention, de suite ils écrivent le nombre par rapport à ce qui est écrit dans l'ordre en fait »

Les variables indiquées par l'enseignante ne correspondent pas à celles qui permettent de mettre en jeu les relations entre unités (ici il s'agit du fait d'avoir des nombres à deux chiffres pour certaines unités) et les erreurs sont interprétées comme des erreurs d'inattention et non en référence aux savoirs en jeu.

Dans la deuxième classe le principe décimal est susceptible d'être un enjeu dans une seule situation. Les élèves ont à disposition des étiquettes $\boxed{1}$, $\boxed{10}$, $\boxed{100}$, $\boxed{1000}$ et ils doivent recomposer les nombres suivants :

8c 4d 3u = …, 32d = …, 13c = …, 12c 8d 1u = …, 14c 2u = …, 12c 11d 2u =…
(les lettres c, d, u représentent les centaines, dizaines, unités).

Pour les 5 premiers cas, les élèves se contentent de juxtaposer les chiffres sans utiliser le fait que 10 centaines = 1 millier. Cependant pour le dernier cas ce n'est plus possible car cela aboutirait à la réponse erronée 12112. Aucun élève ne trouve la solution et cela pose de réels problèmes de gestion de la mise en commun. L'utilisation des étiquettes aurait pu aider les élèves à échanger dix étiquettes 10 contre une étiquette 100, mais l'enseignant préfère amener les élèves à effectuer un comptage de cent en cent, dix en dix et un en un à l'oral. Cette approche par l'utilisation de la comptine numérique orale s'appuie sur une conception ordinale qui ne met pas en jeu de relations entre unités : par exemple le passage de « neuf-cents » à « mille » ne s'appuie pas sur la connaissance de la relation 10 centaines = 1 millier.

Ces constats me font penser qu'il y a d'abord un besoin pour les enseignants de prendre conscience de l'insuffisance de ce qui est proposé actuellement en numération dans les programmes et dans certains manuels et le déficit que cela peut entraîner pour l'apprentissage des élèves[4] (cf. par exemple les difficultés des élèves pour certaines tâches de numération citées en introduction).

Mais il est aussi important d'élargir au-delà du travail sur la numération des entiers : les enseignants doivent prendre conscience de l'intérêt d'une bonne compréhension de la numération pour l'apprentissage d'autres notions : le calcul posé, le calcul mental et les grandeurs et mesures. De plus, ces connaissances s'étendent lors du travail sur les grands nombres et des nombres décimaux. Le principe décimal s'étend par prolongement des relations entre unités d'ordres supérieurs (avec cependant des noms d'unités s'appuyant sur certains ordres particuliers : milliers, millions, etc.) et dans l'autre sens avec les décimaux, pour ce qui concerne les relations entre unités/dixièmes, dixièmes/centièmes, etc.

3 Comprendre le rôle du matériel et des unités de numération pour en faire un usage adapté en classe

Le troisième besoin de formation identifié est davantage lié aux mises en œuvre des situations de la ressource dans les classes. En effet, il est proposé dans la ressource d'utiliser :

- Un matériel de numération constitué de bûchettes en bois dont les groupements successifs se font : avec un élastique (1 dizaine), un sachet (1 centaine) et une boite (1 millier). Les entretiens

[4] Les difficultés des élèves : c'est un aspect important dans le cadre de la conception d'une ressource (Margolinas, Mercier et René de Cotret, 2006) pour en permettre l'acceptabilité par l'enseignant. On peut penser qu'il en est de même pour une formation d'enseignant.

avec les enseignants montrent que cela n'est pas une pratique courante pour des nombres de cette taille (au-delà du millier).

- Les unités de numération : pour décrire les groupements et pour faire des conversions d'unités. Chambris (2008) a montré que cette utilisation des unités de numération s'était perdue après la réforme des mathématiques modernes. Les unités semblent principalement utilisées dans les manuels pour nommer les colonnes du tableau de numération.

Dans la ressource, les unités de numération sont utilisées à la fois :

- dans la description des situations pour décrire les groupements. Par exemple voici comment sont décrites les collections pour la variante de dénombrement d'une réunion de deux collections :

1ère collection : **2 milliers de bûchettes, 8 centaines de bûchettes, 1 dizaine de bûchettes et 3 bûchettes seules**.

2ème collection : **4 centaines de bûchettes, 1 millier de bûchettes et 2 bûchettes seules** .

Figure 6 : description des deux collections (situation de dénombrement, variante 3)

- dans les éléments de savoirs de cette situation où des conversions sont expliquées :

2 milliers + 12 centaines + 4 dizaines + 5 unités
= 2 milliers + 10 centaines + 2 centaines + 4 dizaines + 5 unités
= 2 milliers + 1 millier + 2 centaines + 4 dizaines + 5 unités
= 3 milliers + 2 centaines + 4 dizaines + 5 unités
= 3245 unités

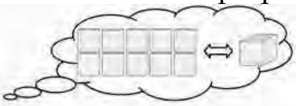


Figure 7 : description des conversions en jeu (situation de dénombrement, variante 3)

- dans les apports généraux pour l'enseignant, où le choix de leur utilisation est justifié par comparaison avec les écritures chiffrées des puissances de 10 (1, 10, 1000, 1000, …), qui sont actuellement davantage utilisées dans les manuels (Chambris 2008). Il ne s'agit pas de préconiser aux enseignants de ne plus les utiliser mais plutôt de montrer pourquoi dans les situations proposées nous privilégions les unités de numération. Le lien entre ces deux types d'écritures devra être fait à un moment.

3 milliers + 24 dizaines + 5 unités = ?	**3x1000 + 24x10 + 5 = ?**
On commence par décomposer 24 dizaines : 24 dizaines = 20 dizaines + 4 dizaines = 2 centaines + 4 dizaines (**aspect décimal**) On a donc : 3 milliers + 2 centaines + 4 dizaines + 5 unités, ce qui fait 3245 (**aspect position**).	Pour recomposer il faut d'abord **"calculer"** 3x1000 + 24x10. On utilise la **"règle des zéros"** (mais le savoir qui justifie cette règle est invisible) : 3x1000 = 3000 et 24x10 = 240 Il reste donc à calculer la somme 3000 + 240 +5 = 3245.
Dans ce cas **on utilise les savoirs de la numération.**	Dans ce cas on fait du calcul (règle des zéros, règles d'addition). Conséquence : **Les savoirs de la numération sont invisibles** quand on utilise les puissances de 10 (alors qu'ils justifient pourtant toutes les étapes).

Figure 8 : comparaison de deux types d'écriture relativement à la visibilité des savoirs en jeu (apports généraux pour l'enseignant)

Lors des deux expérimentations j'ai pu remarquer que les enseignants voient les apports de la ressource principalement à travers la question du matériel qui constitue la plus grande nouveauté apportée par cette ressource selon eux. Notamment, la première variante de dénombrement d'une collection en vrac apparaît pour certains comme centrale dans le processus, alors qu'elle sert surtout à permettre la constitution de différents groupements qui seront utiles pour la suite de la séquence (pour les vérifications notamment). Il y a peu de savoirs mathématiques construits dans cette première variante.

Au cours de l'expérimentation 1 j'ai pu étudier l'utilisation faite par les enseignants des unités de numération dans les séances observées. Pour le dénombrement d'une collection totalement groupée (variante 2) j'ai d'abord pu constater une utilisation des UN par les enseignants pour décrire les rangs de l'écriture chiffrée (tableau de numération), conformément à ce qui est proposé dans la ressource. Mais pour les situations mettant en jeu le principe décimal (dénombrement d'une réunion de deux collections et situation de commande), plusieurs types de résistance à l'utilisation des UN sont apparus :

- rejet de l'utilisation des UN pour décrire les groupements ;
- référence prégnante au matériel de numération quand les conversions sont en jeu ;
- absence d'utilisation des UN à l'écrit pour faire des conversions.

Le rejet d'utilisation des unités de numération pour décrire les groupements a été observé dans une seule classe, celle de Mme A. Malgré les propositions de la ressource, l'enseignante utilise les expressions "boites", "sachets", etc. pour décrire les groupements matériels. Elle utilise pourtant toujours les UN pour décrire les rangs de l'EC comme l'illustre cet extrait d'une séance, où Mme A revient sur la conversion de 12 centaines en 1 millier 2 centaines en lien avec la retenue de l'addition (nous avons souligné le vocabulaire relatif aux groupements ainsi que l'utilisation des UN) :

> Mme A : huit plus quatre qu'est-ce qui se passe ici <u>dans les centaines</u> ?
>
> Un élève : douze
>
> Mme A : on retrouve nos <u>douze sachets</u> sauf qu'est-ce qui se passe ?
>
> Un élève : on met une retenue
>
> *L'enseignante finit d'écrire l'addition posée au tableau :*
>
> Mme A : et bien voilà pourquoi on met une retenue parce qu'on va garder que <u>deux sachets</u> <u>pour les centaines</u> et qu'ici avec nos dix ça va nous faire <u>une boite de mille</u> en plus. […] On comprend mieux maintenant la retenue : c'est <u>notre petite boite de mille</u> en plus.

On voit qu'il y a bien un vocabulaire pour parler des rangs (UN) et un autre pour les groupements (« boites », « sachets » …).

Le deuxième type de résistance, liée à une référence prégnante au matériel de numération quand les conversions sont en jeu, a été observé dans des classes où les enseignants acceptent d'utiliser les unités de numération pour décrire les groupements, conformément aux propositions de la ressource. Dans ces classes, lorsqu'il y a plus de dix unités à certains ordres l'enseignant fait une référence quasi systématique aux groupements matériels (réels ou dessinés). Ce phénomène peut se constater par exemple dans cet extrait de la mise en œuvre de la variante 2 de la situation de dénombrement dans la classe de Mme B (nous soulignons les éléments du discours de Mme B qui ramène vers le matériel)

Un élève (Marc) vient dessiner la réunion des deux collections au tableau (boites, sachets, etc.)). Mme B demande à cet élève comment on peut trouver le résultat. Face a la difficulté liée à la prise en compte des 12 sachets dessinés au tableau, Mme B demande à un autre élève (Joris) de l'aider « sans lui donner la bonne réponse, juste le mettre sur la voie » :

> Joris : en fait comme t'en as douze, ça fait plus de centaines […] Si t'as dix centaines ça revient à quoi ?
>
> Mme B : qu'est-ce que tu peux faire ? Si t'as <u>dix pochettes</u> qu'est-ce que tu peux faire ?
>
> Marc : ah oui un millier. *L'élève dessine une nouvelle boite au tableau.*
>
> Mme B : Les dix tu vas <u>les mettre dans une boite</u>. Alors enlève-les maintenant les dix que tu as <u>mis dans la boite</u>. Barre-les ou efface-les. Ah. […] Quand on a <u>dix sachets on peut les mettre dans une boite</u>. Et là le problème c'est qu'on n'en avait pas dix, on en avait douze. Donc dès que ça dépasse dix on peut les <u>mettre dans une boite de mille</u>.

Alors que les élèves utilisent les UN à l'oral, l'enseignante reformule en ramenant au matériel et aux actions sur le matériel (mettre dix sachets dans une boite). Elle montre aussi le matériel qui est posé sur son bureau pour illustrer ce qu'elle dit. Cette prégnance du matériel pourrait être guidée par une volonté des enseignants d'aider les élèves les plus fragiles (comme Marc) pour lesquels ils anticipent la difficulté des conversions.

Enfin le troisième type de résistance, l'absence d'utilisation des UN à l'écrit pour faire des conversions, a été observé dans les quatre classes, même dans celles où, par moment, les unités de numération sont utilisées à l'oral pour faire des conversions. En reprenant l'extrait de séance précédent on voit par exemple que Mme B raisonne sur le dessin des groupements au tableau sans jamais écrire la conversion suggérée par l'élève Marc (12 centaines = 1 millier 2 centaines). Un peu plus tard dans cette même séance, alors qu'un élève explique les conversions qu'il a utilisées pour trouver le nombre total de bûchettes (« sept centaines et trois centaines ça fait dix »), l'enseignante n'écrit pas ces conversions mais continue de faire référence au matériel (« j'ai transformé mes sacs, je les ai mis dans une boite puisque j'en ai dix »). Il aurait ici été possible, au contraire, d'utiliser l'écriture 7c + 3c = 10c = 1m, ce qui aurait permis à la fois de souligner le raisonnement utilisé par cette élève, d'en garder une trace et de permettre aux autres élèves de se l'approprier. L'utilisation d'une écriture abrégée des unités de numération (contrairement aux exemples proposés dans la ressource) pourrait faciliter leur utilisation pour les élèves.

J'ai aussi pu constater une résistance au changement de contexte dont les entretiens avec les enseignants nous font penser qu'elle est liée :

- à l'absence d'exercices dans d'autres contextes dans la ressource ;
- à l'anticipation des difficultés pour les élèves liées au changement de contexte.

Cela amène certains enseignants à ne faire les situations proposées que pour le contexte des bûchettes et à proposer un nouveau contexte seulement à la fin. Cela pose des questions pour l'institutionnalisation : dans ces conditions comment amener les élèves à identifier les savoirs qui sont utilisables dans d'autres contextes ?

Tout cela me permet de penser qu'il y aurait besoin de travailler sur les unités de numération en formation pour comprendre leur intérêt, notamment justifier leur utilisation pour travailler avec des nombres d'unités supérieurs à dix, ce que l'on ne peut pas faire avec la numération parlée (valence instrumentale pour les conversions).

Il y a aussi un besoin de différencier ce qu'on appelle couramment les « groupements/échanges » et les conversions entre unités. Le premier type d'activités se situe dans une problématique matérielle : grouper/dégrouper pour organiser une collection (grouper 12 sachets en 1 boite et 2 sachets) et le deuxième type dans une problématique mathématique (convertir entre unités pour changer d'écriture : 3M 12C 5U = 4M 2C 5U) et elles permettent de justifier la réalisation des groupements/échanges. Ce sont les conversions qui ont un caractère général : que l'on utilise des bûchettes, de la monnaie, un boulier, ... on convertit toujours 10 dizaines en 1 centaine, alors que pour chacun de ces matériels on effectue des activités de groupements/échanges spécifiques (grouper dix paquets dans un sachet, échanger dix billets contre un billet, activer une boule de la colonne située à gauche, …). Pourtant, pour accéder aux conversions on peut penser qu'il est important de s'appuyer sur de telles activités de groupements/échanges. Un travail en formation pourrait être alors de s'interroger sur le rôle des unités de numération pour amener les élèves aux conversions à partir d'activités de groupements et échanges.

De plus, pour amener les enseignants à avoir une utilisation adaptée des unités de numération comme unités de compte, il faut les amener à en comprendre les différentes interprétations possibles (Thanheiser 2009). Par exemple, une centaine peut-être vue comme cent unités, dix dizaines ou une centaine :

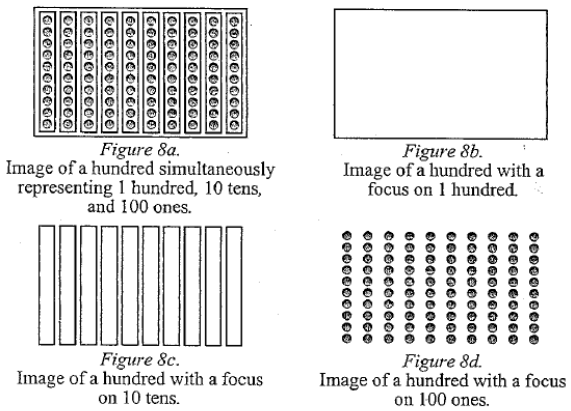


Figure 9 : différentes interprétations d'une centaine, extrait de Thanheiser (2009)

Ces différentes interprétations rendent possible une certaine flexibilité dans l'interprétation d'une écriture chiffrée. Par exemple le nombre 123 c'est à la fois : 123 unités (simples), 1 centaine 2 dizaines et 3 unités ou 12 dizaines 3 unités mais aussi 1 centaine 1 dizaine 13 unités, etc. Pour cela il faut une bonne connaissance des relations entre unités, ce qui peut se travailler avec la tâche de « conversion entre unités » qui est peu visible dans les manuels actuels. De plus, avec nos connaissances d'adulte nous avons en général d'autres procédés que l'appui sur les relations entre unités pour convertir entre unités. Par exemple pour convertir 60 centaines en milliers un adulte passe souvent par la multiplication par 100 qui donne le nombre 6000 dont il extrait l'information sur le nombre de milliers, plutôt que de s'appuyer sur la relation 10 centaines = 1 millier (60 centaines = 6x10 centaines = 6 milliers).

Enfin, les unités de numération sont aussi un point d'appui pour la décontextualisation des connaissances. En effet, cela permet de faire le lien entre les différents contextes : un millier peut représenter un millier de bûchettes, de cubes, d'euros, etc. Cela aide donc à identifier ce qui dans une situation particulière peut être utile pour d'autres situations.

4 Connaître les techniques pour décomposer/recomposer (EUN->EC et EC->EUN) et leurs technologies afin d'identifier les savoirs à institutionnaliser en classe.

Dans la version 1 de la ressource une tentative a été faite de description des savoirs en jeu pour chaque situation. J'ai pu faire le constat d'une certaine transparence du lien entre nombre écrit en chiffres et nombre parlé :

- le nombre est souvent seulement dit à l'oral lors d'un travail sur l'EC ;
- les enseignants ne donnent pas la possibilité aux élèves de l'écrire (situation de dénombrement : pas d'ardoise ou de cahier) même lorsque l'enjeu est la production de l'EC.

Cela rejoint ce que Mounier (2010) avait déjà observé en CP. Cela peut avoir pour conséquence le fait que l'EC n'est pas objet d'étude pour elle-même si elle est toujours confondue avec le nombre parlé, ce qui peut compromettre l'institutionnalisation de certaines techniques.

Voici les constats que nous avons pu faire concernant la formulation des techniques permettant de traduire une EUN en EC et réciproquement.

Pour la situation de dénombrement, passer d'une EUN à l'EC, tout se passe donc comme si on avait affaire à deux techniques différentes : une technique quand on a moins de 10 unités, une autre quand on en a plus. Le tableau de numération est seulement utilisé dans le cas où il y a moins de 10 unités à tous les ordres d'unités.

De plus, alors que c'était l'enjeu de cette situation, le dénombrement d'une réunion de collections ne permet pas toujours de faire émerger la nécessité des conversions. Le travail qui est fait sur l'addition posée dans les classes vient parfois empêcher le travail de conversion entre unités. Le lien entre les deux (à travers la retenue) n'est pas toujours fait.

Pour la situation de commande, passer d'une EC à une EUN, nous avons constaté une absence de formulation de technique dans toutes les classes (Tempier 2012). Plus précisément, lors des phases collectives de conclusion nous n'avons vu que des vérifications des commandes proposées par les élèves, c'est-à-dire un travail qui se fait toujours de l'EUN vers l'EC et jamais dans l'autre sens, celui visé par la situation de commande. Voici une transcription d'une phase collective dans la classe de Mme A, suite à la recherche d'une commande de 3167 bûchettes sans millier de disponible.

Un élève propose 31 sachets, 6 paquets de dix, 7 bûchettes seules.

Mme A : « combien de bûchettes dans trente-et-un sachets ? »

Un élève : « trois-mille-cent. »

Mme A écrit : « 31 sachets de 100 -> 3100 ».

Mme A : « combien il y a de sachets dans une boite ? »

Un élève : « dix sachets ».

Un autre élève a fait une commande de 12 sachets ...

Mme A : « combien ça fait de bûchettes ? Combien il y a de sachets dans une boite ? »

L'élève répond « dix » puis comprend que ça fait mille-deux-cent bûchettes.

L'enseignante ne laisse pas les élèves exprimer comment passer de l'EC de 3167 à la commande de 31 sachets, 6 paquets et 7 bûchettes.

En formation il nous semble important de rendre explicite ces techniques de traduction d'une EUN en EC (et réciproquement) en lien avec les savoirs mathématiques qui les justifient.

Pour traduire une EUN en EC par la technique dite « de position » il faut tenir compte de trois conditions :

- respect du rang de chaque unité dans l'écriture en chiffres ;
- présence de chaque unité (jusqu'à l'unité de plus grand ordre) dans l'écriture en chiffres ;
- présence de nombres à un seul chiffre à chaque rang de l'écriture en chiffres (afin d'assurer l'unicité de l'écriture en chiffres d'un nombre).

Le travail sur cette technique en formation peut se faire en lien avec les difficultés courantes des élèves qui témoignent, selon nous, d'utilisations de techniques de juxtaposition de nombres (construites par ces élèves) ayant une portée limitée. En fonction des conditions prises ou non en compte par les élèves, cela donne lieu à différentes techniques[5] :

- Simple juxtaposition des nombres : écriture des nombres d'unités « visibles » dans l'ordre où ils sont donnés. Cette technique permet d'obtenir une écriture correcte pour 2m 3c 1d 4u (2314) mais des résultats erronés pour 3c 2m 4u 1d (3241) ou 2m 3c 4u (234).
- Juxtaposition avec respect de l'ordre des unités dans l'EC : écriture des nombres d'unités visibles en respectant l'ordre relatif des unités (prise en compte de la première condition) : les unités simples s'écrivent avant les dizaines (en partant de la droite et en allant vers la gauche), les dizaines avant les centaines, etc. Cette technique permet d'obtenir une écriture correcte pour les quantités 2m 3c 1d 4u (2314) et 3c 2m 4u 1d (2314) mais des résultats erronés pour 2m 3c 4u (234) et 12c 2m 1d 4u (21214). Elle prend en compte la condition de respect du rang de chaque unité.
- Juxtaposition avec respect de la position des unités dans l'EC : écriture des nombres d'unités « visibles » en respectant l'ordre relatif des unités et en écrivant des 0 en cas d'absence d'unité isolée. Cette technique permet d'obtenir une écriture correcte pour les quantités 2m 3c 1d 4u (2314), 3c 2m 4u 1d (2314) et 2m 3c 4u (2304) mais des résultats erronés pour 12c 2m 1d 4u (21214). Elle prend en compte les conditions de respect du rang de chaque unité et de présence de chaque unité.

La deuxième technique à connaitre est la technique de décomposition (EC -> EUN) et son lien avec les conversions. Elle consiste à faire un « découpage » (troncature) approprié de l'écriture chiffrée. Par exemple 1234 = 12c 34u. Le nombre de centaines s'obtient directement à partir de l'EC en considérant le rang des centaines comme nouvelle référence (et non le rang des unités simples) : on obtient 12 centaines. On peut lire les unités simples restantes en reprenant le rang des unités simples comme référence et en considérant le nombre qui reste : 34 unités.

La formulation est complexe. En formation il est important de travailler des formulations plus adaptée de cette technique. Pour cela on peut s'appuyer sur des formulations d'élèves, comme par exemple :

- « Il faut couper le nombre en deux »

- « Il faut regarder les deux premiers chiffres du nombre et les deux premiers chiffres est égal au nombre de centaines ».

On peut alors étudier la validité de ces formulations pour d'autres nombres. Mais il nous semble surtout important d'amener les élèves à faire le lien avec les conversions entre unités, comme dans cet exemple de formulation d'une élève de CE2 : « *dans les centaines y'a forcément des centaines, dans les milliers on le sait*

[5] Ces techniques sont des « techniques-élèves », non explicitées dans des manuels par exemple. Celle qui a vocation à être institutionnalisée dans une classe est la technique de position du fait de son plus grand domaine d'application. Nous avons reconstruit ces techniques de simple juxtaposition à partir des observations des réponses des élèves aux exercices de l'évaluation ainsi qu'avec les résultats des travaux de Bednarz et Janvier (1984) et DeBlois (1996).

qu'il y a des centaines. On ne va pas aller jusqu'aux dizaines et les unités parce que dans les dizaines et les unités y'a pas de centaines. Donc on regarde le rang des milliers et le rang des centaines ».

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Certaines résistances rencontrées dans la mise en œuvre des situations de la ressource proposée aux enseignants semblent difficiles à dépasser dans le cadre de l'utilisation d'une ressource et pourraient nécessiter un travail en formation des enseignants. Je ne vais pas revenir sur tous les besoins évoqués mais concernant les conversions entre unités, qui sont un nœud de mon travail, j'ai montré des besoins de formation :

- pour comprendre l'enjeu du travail sur les relations entre unités, l'intérêt pour le travail sur le calcul ou les grandeurs et mesures ;
- pour comprendre comment les conversions interviennent dans le canevas didactique proposé dans la ressource (dans le cadre de l'utilisation de cette ressource) et voir l'intérêt d'entraîner les élèves à faire des conversions dans des exercices ;
- pour formuler les conversions (avec les unités de numération) et les institutionnaliser dans les mises en œuvre des séances en lien avec les techniques de traduction d'une écriture chiffrée en écriture en unités de numération.

Ces besoins de formation ont émergé dans le contexte des expérimentations de l'ingénierie didactique de développement de la ressource que nous avons présentée. Ils sont donc attachés aux situations proposées dans cette ressource, au contenu de la ressource, … même si nous avons cherché à dégager des besoins plus généraux. Et nous n'avons pas cherché l'exhaustivité. Il y a certainement d'autres besoins qui concernent des aspects moins développés dans cette ressource (aspect ordinal du nombre, lien écrit/chiffrée …).

J'envisage de poursuivre le travail de conception de ressource dans le cadre d'une collaboration plus étroite avec des enseignants pour mieux comprendre ces besoins et les moyens de les dépasser, notamment sur les questions liées à l'utilisation des unités de numération pour le travail sur le principe décimal.

Enfin, des questions importantes pour la formation n'ont pas été abordées ici : comment travailler ces besoins en formation des enseignants ? Y'a-t-il des besoins à travailler davantage en formation initiale, d'autres en formation continue ? Sur quelles ressources (extraits de manuels, productions d'élèves, vidéos, situation de formation, …) peut-on s'appuyer en formation ? Cela constitue également des perspectives de travail pour la recherche et la formation.

BIBLIOGRAPHIE

ARDITI, S. (2011). Variabilité des pratiques effectives des professeurs des écoles utilisant un même manuel écrit par des didacticiens. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

BALL D., COHEN D. (1996). Reform by the Book : What Is - Or Might Be - The Role of Curriculum Materials in Teacher Learning and Instructional Reform ? Educational Researcher, 25(9), 6-14.

BRISSIAUD, R. (2005). Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Rééducation Orthophonique*, 223, 225-238.

BROUSSEAU, G. (1995). Les mathématiques à l'école. Bulletin de l'APMEP, 400, 831-850. Disponible en ligne : http://smf4.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/ EnseignementPrimaire/APM95.pdf (consulté le 27/06/2014)

CHAMBRIS, C. (2008). Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels. Thèse de l'Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

COULANGE, L. (2011). Quand les savoirs mathématiques à enseigner deviennent incidents. Étude des pratiques d'enseignement des mathématiques d'une enseignante de CM2, In Rochex J-Y et Crinon J. (dir), La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement (pp.33-44). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

MARGOLINAS, C., LAPARRA, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In Rochex J-Y et Crinon J. (dir), La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement (pp.19-32). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

MARGOLINAS, C., MERCIER, A., RENE DE COTRET, S. (2007). Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire. In L. Trouche, V. Durand-Guerrier, C. Margolinas & A. Mercier (Eds.), *Quelles ressources pour l'enseignement des mathématiques?* Actes des journées mathématiques INRP (2006, pp.25-36). Lyon : INRP.

MARGOLINAS, C., WOZNIAK, F. (2010). Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.233-249). Rennes : Presses Universitaires de Rennes et Institut National de Recherche Pédagogique.

MOUNIER, E. (2010). *Une analyse de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot, Laboratoire de didactique André Revuz.

PERRIN-GLORIAN, M.J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (éds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp.57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage.

TEMPIER F. (2010a). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2, Grand N n°86, IREM de Grenoble, p.59-90.

TEMPIER F. (2010b). L'enseignement de la numération décimale de position au CE2 : contraintes et libertés institutionnelles. Actes du 37ème colloque international de la COPIRELEM, L'enseignement des mathématiques à l'école : l'évaluation dans tous ses états, La grande Motte, 9 au 11 juin 2010, ARPEME.

TEMPIER F. (2013) La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris 7. Disponible en ligne : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00921691 (consulté le 27/06/2014)

THANHEISER, E. (2009). Preservice elementary school teachers' conceptions of multidigit whole numbers. Journal for Research in Mathematics Education, 40(3), 251–281.

ANNEXES

ANNEXE 1 : page d'accueil de la version 1 de la ressource


ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE
Une ressource pour les enseignants de CE2
recherche...
AVIS
Accueil | Mode d'emploi | Imprimer | Faire des commentaires | Contact | Liens

LA NUMÉRATION DÉCIMALE
- Les deux aspects de la numération
- Les constats
- Le matériel, les unités, le tableau
- Liens avec d'autres notions

LES SITUATIONS
- Présentation générale
- 1. Combien de bûchettes ?
- 2. Comptes de bûchettes
- 3. Le jeu des paris
- 4. Marchand de bûchettes
- 5. Commandes de timbres
- Situations complémentaires

LA SÉQUENCE
- Objectifs généraux
- Objectifs des 5 situations clés
- Les autres tâches de numération
- Place dans la programmation

IDENTIFICATION
Bonjour admin,
DÉCONNEXION

Accueil

Accéder au Mode d'emploi du site.

Une ressource pour la formation des enseignants

Ce site a pour objectif de permettre aux enseignants de mieux comprendre les enjeux de l'enseignement de la numération décimale. Nous proposerons donc **des situations** à mettre en œuvre avec les élèves mais aussi **différents outils qui visent à aider l'enseignant** à avoir une gestion de ces situations qui prennent en compte les procédures et difficultés des élèves ainsi que les savoirs mathématiques en jeu.

Une grande liberté pour l'enseignant

Pour permettre la dimension formative du site, le choix a été fait de donner une **marge de manœuvre importante** à l'enseignant dans la mise en œuvre des situations proposées et dans la construction de sa séquence.

Ainsi par exemple pour les situations proposées, aucune indication de temps ni d'organisation de la classe ne sont fournies. Il faudra compléter les situations proposées par des exercices d'entraînement, des traces écrites, des évaluations ... **Tout cela est entièrement à la charge de l'enseignant.**

ANNEXE 2 : page d'accueil de la version 2 de la ressource

ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE

Une ressource pour les enseignants de CE2

A+ A A- recherche...

ACCUEIL | DÉNOMBRER UNE COLLECTION | COMMANDER UNE COLLECTION | EN SAVOIR PLUS | PROLONGEMENTS

Accueil

Partant d'un constat de difficultés chez les élèves à prendre en compte un aspect essentiel de notre système de numération écrit, l'aspect décimal, ainsi que d'un manque de propositions à ce sujet dans les manuels courants (en savoir plus), nous proposons un scénario global permettant de travailler les principes de notre numération écrite (position et décimalité) ainsi que des activités pour le mettre en œuvre dans la classe.

Un scénario global

1. Dénombrer une collection

Plusieurs cas à envisager :

***Une collection « en vrac »** (avec des objets matériels) : « Combien y a-t-il de bûchettes dans cette collection qui est devant nous ? »*

***Une collection totalement groupée** (les unités de numération désignant des groupements d'objets) : « Combien y a-t-il de cubes dans une collection de 3 milliers de cubes, 5 centaines de cubes et 2 cubes seuls ? ».*

***Une collection partiellement groupée :** « Quel est le montant en euros d'une somme de 3 milliers d'euros, 12 billets de 100 euros et 4 billets de 10 euros ? »*

***Dénombrements et conversions sans contexte :** « 5 centaines + 4 milliers + 7 unités = ... ? » ou bien : « 2 milliers + 31 centaines + 7 unités = ... ? » ou encore : « 4 milliers = ... centaines ? ».*

2. Commander une collection

Plusieurs cas à envisager :

***Commandes sans contrainte :** « des bûchettes sont vendues par milliers, centaines, dizaines et unités. On souhaite en commander 2615. Que peut-on commander ? »*

Commandes avec contraintes :

- « le marchand n'a plus de bûchettes par milliers. On souhaite commander 3052 bûchettes. Que peut-on commander ? ».

- « le marchand a des bûchettes par milliers mais il n'en a plus par centaines. Que peut-on commander ? », etc.

- Autres contextes : « Combien faut-il de billets de 100 euros pour payer une somme de 2079 euros ? », etc.

***Sans contexte :** Trouver différentes décompositions de 3421 en utilisant les unités de numération (milliers, centaines, ...).*

Les savoirs de la numération

***Principe de position :** Les milliers s'écrivent au 4ème rang à partir de la droite, les centaines au 3ème rang, etc.*

***Principe décimal :** 1 dizaine = 10 unités, 1 centaine = 10 dizaines = 100 unités, 1 millier = 10 centaines = 100 dizaines = 1000 unités*

Des propositions pour la classe

Situation d'introduction ("combien de bûchettes ?") et synthèse associée *Commentaires*	Situation d'introduction ("le jeu du marchand") et synthèse associée *Commentaires*
Exercices et problèmes *Commentaires*	Exercices et problèmes *Commentaires*
Bilan de savoirs *Commentaires*	Bilan de savoirs *Commentaires*

RECHERCHE COLLABORATIVE : QUESTIONS D'INTEGRATION D'UNE INGENIERIE DIDACTIQUE BROUSSALDIENNE AUX PRATIQUES ENSEIGNANTES

Michèle COUDERETTE
Formatrice, ESPE MIDI PYRENNEES
michele.couderette@univ-tlse2.fr

Valérie MARROU
Professeur des Écoles Maitre Formatrice, École Marcel Guerret, Montauban
vmarrou@yahoo.fr

Carine CONSTANT
Professeur des Écoles, École Pierre Gamarra Montauban
carineconstant@neuf.fr

Anne ICHES
Professeur des Écoles, École de Saint Cirq
iches.anne@neuf.fr

Résumé

Dans notre communication, nous présentons la recherche collaborative que nous avons menée durant l'année 2014-2015. La visée de cette recherche collaborative est de développer des compétences de formation par la recherche ainsi que des outils et des ressources pour la classe sur le thème de la numération. Elle réunit cinq professeurs d'école, une formatrice ESPE ainsi qu'un chercheur en didactique.

Nous nous intéressons plus particulièrement à l'introduction de la soustraction au cycle 2. Nous nous appuyons sur une ingénierie didactique construite par le centre d'observation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques (COREM), laquelle introduit la soustraction par la résolution de problèmes, privilégiant ainsi le travail sur les sens de la soustraction avant de travailler sur les techniques opératoires. La recherche collaborative vise à créer les conditions du partage des expériences des enseignants associés à la recherche sur la base des mises en œuvre opérées dans leur classe. La visée de cette recherche est d'observer le devenir de cette ingénierie didactique élaborée dans les années 80 lorsqu'elle est mise en œuvre par des enseignants. Il s'agit de comprendre comment, à partir des documents présentant cette ingénierie (Brousseau 1998, Quilio et Nedelec-Trohel, 2011) comment professeur et élèves, dans l'action conjointe co-construisent le sens de la soustraction, quelles difficultés didactiques ils rencontrent, comment ils les résolvent. Le travail collaboratif tente de traiter ces questions en maintenant le sens de l'ingénierie didactique initialement conçue, tout en poursuivant des buts de formation continue en didactique des mathématiques des participants à la recherche dans le domaine concerné.

I - INTRODUCTION

Notre communication porte sur un travail mené au sein d'une recherche collaborative. Celle-ci a impliqué trois professeurs d'école, un formateur ESPE ainsi qu'un professeur d'université, chercheur en didactique. Encadrées par l'ESPE de Midi Pyrénées, les recherches collaboratives ont pour but de développer des compétences de formation par la recherche, ainsi que des outils et des ressources pour la classe.

Nous reprenons dans ces actes le plan de notre communication, telle que nous l'avons développée lors du colloque.

1. Le contexte de cette recherche
2. La présentation des différentes étapes de l'ingénierie didactique
3. Le travail collaboratif au sein de notre recherche
4. Quelques observables d'implémentation lors de moments que nous avons considérés comme moments clés de l'ingénierie didactique

II - CONTEXTE DE LA RECHERCHE COLLABORATIVE

Dans le domaine « Nombres et calcul » du programme 2008 du cycle 2 des programmes officiels, il est indiqué que « [les élèves] mémorisent les tables d'addition, [...] apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction, [...] et apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations. » (p. 17). Dans les programmes de cycle 3, on retrouve la même préoccupation : « acquérir de nouvelles connaissances, de nouveaux outils, pour résoudre des problèmes. » Certes, la résolution de problèmes reste un point central dans les programmes, mais comme l'écrit Brousseau dans « Le contrat didactique : le milieu » (1990), « l'enseignement d'une opération arithmétique est souvent essentiellement fondé sur la communication d'une procédure de calcul associée à un petit univers de problèmes qui est supposé en présenter le sens ». On peut craindre alors qu'avec l'introduction de l'étude de la technique opératoire de la soustraction dès la première année, l'entrée dans la résolution de problème de type soustractif ait lieu non pas par le sens de l'opération mais par l'automatisation d'une technique.

Plus loin dans le programme, il est rappelé que l'activité de résolution de problèmes est placée au centre du processus d'appropriation des savoirs mathématiques, en particulier à la construction du sens des opérations : « La résolution de problèmes fait l'objet d'un apprentissage progressif et contribue à construire le sens des opérations » (Programmes de mathématiques au cycle 2, 2008). Nous prenons appui sur ce rappel pour mettre en œuvre dans trois classes d'école primaire une ingénierie didactique permettant, par la résolution de problèmes, d'acquérir le sens de l'opération « soustraction ». Nous verrons qu'elle permet parallèlement d'atteindre dans le domaine numérique d'autres objectifs mathématiques.

Dans les années 70, Brousseau et l'équipe de didactique des mathématiques de Bordeaux au sein du COREM créent des ingénieries pour la recherche en didactique et produisent des connaissances en didactique des mathématiques qui auront certaines répercutions sur les programmes scolaires en France. Nous nous intéressons plus particulièrement à l'une d'entre elle, « l'introduction de la soustraction à l'école élémentaire », ingénierie élaborée par l'équipe de Brousseau au sein du COREM qui fait travailler, au travers de la résolution de problème, d'abord le sens de l'opération avant d'aborder les techniques opératoires. Nous avons travaillé à partir du document produit par Annie Berté. Notre recherche collaborative porte sur l'implémentation de cette ingénierie. Cette ingénierie a été écrite, rappelons-le, dans les années 90. Nous cherchons à en mesurer la pertinence, la viabilité, dans des classes ordinaires et mise en œuvre par des enseignants actuels c'est à dire en 2014 !

III - PRESENTATION DE L'INGENIERIE

Cette ingénierie introduit la soustraction par la résolution de problèmes, privilégiant d'abord le travail sur le sens de la soustraction avant de travailler sur les techniques opératoires. L'idée première est que les situations, pour pouvoir être dévolues, doivent reposer sur des savoirs connus des élèves. Aussi, une attention particulière est portée à la structure des problèmes ainsi qu'aux choix des variables numériques qu'ils mettent en jeu : si les problèmes proposés peuvent être résolus avec les connaissances du moment des élèves, ils doivent aussi amener à des débats favorisant l'émergence d'un nouveau savoir.

Ainsi que le montre la figure ci-dessous, cette ingénierie se déroule en 6 phases :

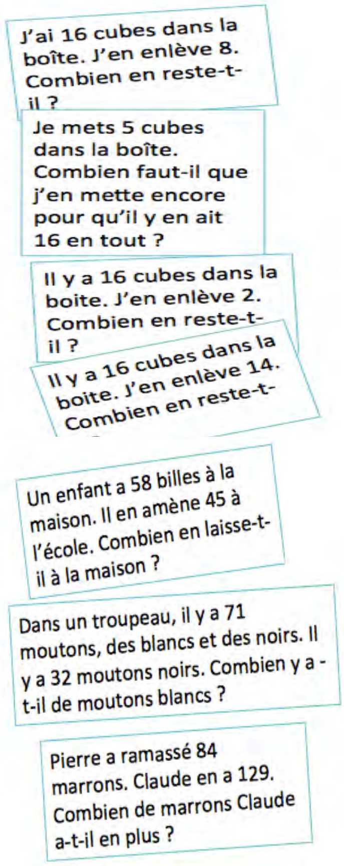
L1, L2, atelier	L3, L4, L5	L6, L7, L8	L9, L10, L11	L12, L13	L14, L15
			Résolution par essais successifs. Analyse des stratégies mises en œuvre		
Dévolution de l'apprentissage de la soustraction	**Installation de l'addition comme moyen de preuve d'un résultat.**	Problèmes additifs *vs* soustractifs, **Calcul mental Ecritures**	**Pratique des élèves**	**Pratiques extérieures : les Schtroumpfs**	**Vers une technique opératoire de la soustraction**
Une boite et des cubes comme outils de modélisation et de vérification	Le pari pour forcer le passage d'une vérification empirique à une preuve intellectuelle	Identifier le type de problème (additif ou soustractif) puis trouver la bonne écriture	La preuve par addition, technique, pour approcher la solution. La numération pour ajuster	La méthode de la fausse position pour résoudre le problème. Ordre de grandeur	Un algorithme de la soustraction pour calculer des soustractions plus complexes

Figure 1 : déroulé de l'ingénierie didactique

- Une première phase sert à dévoluer l'apprentissage de la soustraction. Les élèves jouent au « jeu de la boite » qui consiste à déterminer le nombre de cubes que contient la boite. La boîte a ici deux fonctions : modéliser et vérifier.
- Dans la deuxième phase, on installe l'addition comme le moyen de preuve d'un résultat. Pour nous, cette phase est déterminante : alors que les élèves n'ont ni le sens de l'opération, ni une technique opératoire, on va demander aux élèves de prouver leur résultat. Cela va par la suite autoriser les élèves à proposer un résultat d'une quelconque façon, le moyen de preuve leur permettant de savoir si leur résultat est correct ou pas, ce qui ensuite ouvre la possibilité d'un débat autour des procédures élaborées.
- La troisième phase mêle problèmes mettant en jeu additions et soustractions. Les élèves doivent identifier le type de problème, additif ou soustractif, calculer et traduire leur stratégie par des écritures mathématiques. Durant cette phase le codage de la soustraction par le signe « - » est introduit.
- Dans la quatrième et cinquième phase, les problèmes sont résolus par essais successifs. On s'appuie d'abord sur les essais des élèves (quatrième phase), puis l'on fait ensuite appel à des personnages extérieurs (les Schtroumpfs) pour faire émerger des procédures différentes de celles des élèves.
- Enfin, la dernière phase amène les élèves vers une technique opératoire de la soustraction la soustraction en colonne.

Dans notre communication, nous ne présentons pas toutes les subtilités de cette ingénierie qui est une ingénierie longue, mais nous mettons l'accent sur un certain nombre d'éléments qui relèvent de l'analyse *a priori* de certains moments clés de cette ingénierie pour pouvoir ensuite, pointer les usages, leur transformation par les enseignantes au fil de la mise en œuvre dans leur classe.

Un des premiers points importants est le choix des nombres mis en jeu dans l'ingénierie. Ils sont soigneusement calibrés de façon à faire émerger différentes procédures de résolution : l'utilisation du répertoire additif, le surcomptage, le décomptage, mais aussi la recherche du complément ou bien l'appui sur la numération décimale.



Un second point important concerne les structures des problèmes. Elles ont pour but de faire émerger les différents sens de la soustraction. Certains relèvent de ce qu'appelle Brousseau un retrait dynamique (ce que l'on ajoute à une quantité pour obtenir une autre quantité ou ce que l'on enlève à une quantité pour obtenir une autre quantité) ou d'un retrait statique (la comparaison entre deux quantités), ce qui amène rechercher le une partie connaissant le tout ou à faire une comparaison entre deux quantités pour répondre à la question « combien de plus ou de moins ? »

Pour conclure, cette ingénierie met en scène des problèmes différents, par leur structure ou par les nombres qu'ils mettent en jeu, faisant ainsi émerger les différents sens de la soustraction :

- le nombre qu'il faut ajouter au plus petit pour obtenir le plus grand (retrait dynamique)
- un opérateur qui enlève quelque chose (retrait dynamique)
- un écart entre deux nombres (retrait statique)

IV - TRAVAIL COLLABORATIF ENSEIGNANTS / CHERCHEURS

Rappelons que ce travail collaboratif a engagé trois professeurs d'école et un formateur ESPE. Aucun n'avait encore participé à une recherche collaborative. Un professeur d'université en didactique a encadré la recherche.

Notre étude a lieu en trois temps :

- Un premier temps, celui de l'étude : dégager les enjeux didactiques, analyser et s'intéresser aux conditions d'implémentation dans une classe
- Un deuxième temps, celui de l'action : implémenter l'ingénierie didactique dans trois classes de cycle 2
- Un troisième temps, celui de l'analyse : exploiter les données observées pour mettre au point d'un module de formation se déclinant en
  - ressources pour le plan de formation continue du Tarn et Garonne
  - production d'un DVD à partir des films de la recherche

Cette recherche collaborative permet ainsi de produire des connaissances sur les usages et les transformations des ingénieries didactiques et des ressources en formation initiale et continue.

Dispositif méthodologique de la recherche collaborative

Le schéma ci-dessous décrit le dispositif mis en place pour la recherche collaborative.

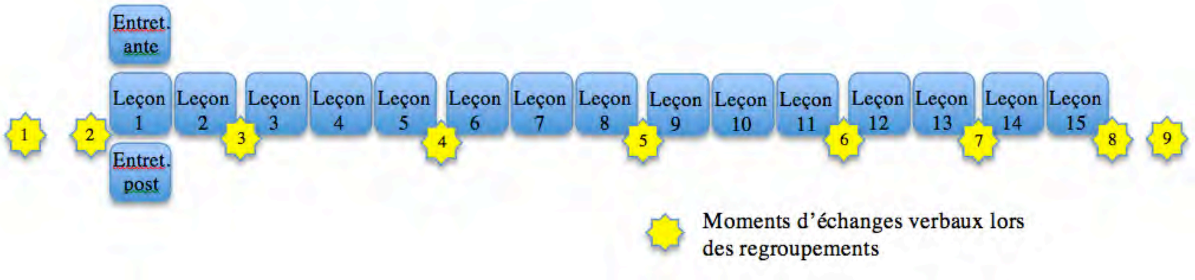


Figure 2 : dispositif de la recherche collaborative

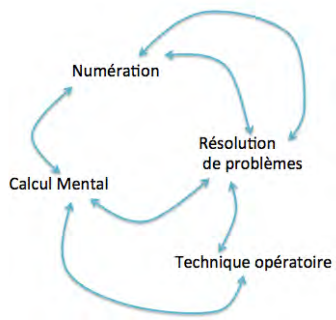
Toutes les séances ont été filmées. Chaque séance a été précédée d'un entretien *ante* et *post* avec l'enseignante en charge de la séance, respectant ainsi le protocole d'observation de Leutenegger (2009). Des regroupements ont eu lieu toutes les deux ou trois séances. Les premiers ont plutôt servi à discuter les enjeux de l'ingénierie tandis que les derniers ont plus portés sur l'analyse des séances réalisées en s'appuyant sur les bandes vidéo. Ce n'était pas une stratégie d'auto confrontation mais un dispositif pour nous permettre une meilleure appropriation de l'ingénierie.

V - QUELQUES OBSERVABLES D'IMPLEMENTATION LORS DE MOMENTS CLES DE L'INGENIERIE

Précisons que notre recherche collaborative a commencé en septembre 2013 et qu'elle s'écoulera sur deux années scolaires. Nous sommes donc actuellement au milieu du gué, et n'avons pas épuisé toutes les possibilités que nous offre ce dispositif de recherche collaborative, si tant est que l'on puisse l'épuiser, la communication dans ce même colloque de nos collègues de l'IFE-Saint Charles ayant fortement alimenté notre réflexion... Le dispositif de recherche collaborative, par ses réunions régulières, a permis de laisser libre cours aux questionnements sur les conceptions professionnelles, sur les pratiques professionnelles. Concernant plus précisément l'ingénierie didactique, la travailler ensemble, la décortiquer afin d'en rechercher les enjeux de savoir mis à l'étude pour chaque phase, chaque séance, a été en soi formateur. L'implémenter dans trois classes a permis de relever des difficultés de mise en œuvre. Nous présentons ci-dessous quelques réflexions développées lors de la communication.

1 Un questionnement et une évolution des conceptions professionnelles.

Un apport de la recherche collaborative a été, par la mise en confrontation, de faire émerger les conceptions professionnelles des enseignantes. La recherche collaborative a obligé chacune à préciser ses propres conceptions professionnelles, à les faire évoluer pour permettre une meilleure articulation des différents domaines mathématiques enseignés au CE1. En outre, expérimenter cette ingénierie dans les classes, a permis d'être en mesure d'argumenter avec plus d'efficacité de lors des rencontres avec de jeunes collègues : « *En tant que PEMF, je suis amenée à visiter des PES. La plupart du temps, ces nouveaux enseignants enseignent la numération et le calcul indépendamment de la résolution des problèmes. La recherche collaborative permet d'approfondir la réflexion et d'apporter des réponses plus convaincantes à ces professeurs, de leur montrer comment* ***par*** *la résolution de problème, on pouvait travailler la numération, ou bien le calcul mental et réfléchi etc. A la lecture des programmes, on ne fait pas de liens entre les différents thèmes d'étude. En fait, les programmes tels qu'ils sont écrits peuvent amener à décortiquer et à faire du saucissonnage : travailler la numération, le calcul mental, les techniques opératoires tout cela au service de la résolution de problème. Dans cette ingénierie, on fait de la résolution de problèmes tout en travaillant sur la connaissance des nombres, on travaille sur ranger, comparer, la*



numération etc. ... ce qui amène à faire ces liens-là, qu'on ne faisait pas forcément habituellement. On peut faire le parallèle avec l'étude de la langue : avant on ne faisait pas écrire les élèves, tant que l'orthographe et la conjugaison n'était pas installée. Aujourd'hui, la production d'écrit est un moyen de travailler l'orthographe et la grammaire. Et en fait, c'est un peu ce que l'on fait en travaillant avec cette ingénierie : des liens entre les domaines mathématiques. A travers la résolution de problèmes, on travaille la numération, le calcul, etc. Ce qui du coup rend plus cohérent notre pratique, en général. »

2 Un questionnement et une évolution de la pratique professionnelle

Un second apport de la recherche collaborative a été de provoquer un questionnement ainsi qu'une évolution de la pratique professionnelle en particulier sur la vie du contrat didactique au sein de la classe.

2.1 Un contrat didactique inhabituel, pas ou peu dans les usages des professeurs

Nous présentons ici deux moments qui ont déstabilisé aussi bien les enseignantes que les élèves. Les deux moments portent sur la deuxième phase : l'installation de la preuve par addition. On peut émettre l'hypothèse que dans les deux cas c'est un contrat didactique inhabituel ou peu en usage dans les classes qui à l'origine des difficultés rencontrées : les dimensions pérennes du contrat, celles qui sont en usage dans la classe, ne laissent pas de place à ce contrat inhabituel dans lequel les élèves ont à ne plus justifier ce qu'il font mais à se déplacer sur la question de la preuve.

Le premier moment concerne la phase du pari, on demande, on pousse les élèves à parier sur une réponse qu'ils savent pertinemment peu fiable. Si le professeur connaît l'enjeu d'étude, l'élève ne comprend pas pourquoi son professeur lui demande de parier sur une réponse qu'il a peut-être produite au hasard. Il comprend d'autant moins que le professeur s'intéresse plus aux réponses fausses qu'aux réponses correctes : habituellement, l'enseignante mettait en valeur un élève ayant une réponse correcte en lui demandant d'expliquer à ses camarades. Pour les enseignantes, la phase des paris a été difficile à mettre en œuvre : « *D'habitude, on faisait la preuve quand la technique opératoire était acquise. Or ici, on la met en place dès le début de la séquence, et elle est un élément de fondateur de l'ingénierie. On demandait aux élèves de parier un résultat alors qu'ils n'avaient ni le sens de la soustraction ni la technique opératoire et qu'ils l'avaient peut-être donné au hasard ! Beaucoup d'élèves avaient des réticences à s'engager dans cette démarche. Cela nous a obligé à prendre à notre charge le savoir et à "tirer" la classe.* »

L'extrait ci-dessous montre le professeur prenant à sa charge le savoir. Les élèves ont presque tous une réponse. Pour autant, ils sont réticents à s'engager dans le pari. Le professeur pousse alors une élève à parier, sachant pertinemment que sa réponse n'est pas correcte mais lui permettant de faire prendre conscience d'une part de l'aspect ludique du pari, d'autre part du véritable enjeu de la séance : vérifier c'est à dire mettre en place un moyen de preuve du résultat trouvé.

P	non alors on chut je vais essayer d'entendre vos réponses mais attention qui pense avoir une réponse ? Tout le monde a une réponse à donner à peu près ?
Es	oui
P	oui bon euh qui veut parier avec moi sur la bonne réponse ?
E	Moi ! (commentaire : la proposition de cet élève est correcte)
P	chut alors tu penses, alors Maxime, tu penses quoi ?
Maxime	30
P	Toi tu penses 30 et toi tu pensais quoi ?
E	32
P	32, tu pensais quoi ?
Le professeur interroge plusieurs élèves.	
P	tu pensais quoi ?
Rémi	37
P	37, est-ce que tu as envie de parier sur ton nombre?
Rémi	Non
P	Maxine tu as trouvé combien ?

Maxine	euh 36
P	36 d'accord tu veux parier avec moi ?
Maxine	ben… ça veut dire quoi ?
P	ben est ce que tu euh est-ce que
Gabriel	Tu dois dire la bonne réponse si
P	voilà avant d'ouvrir la boîte
E	c'est çà et ben t'as gagné
E_2	Est-ce que t'es sûre ? (Inaudibles)
Maxine hoche la tête […]	
P	donc maintenant Maxine avant de vérifier avec la boîte on va essayer de voir si on peut pas trouver un moyen pour vérifier avant l'ouverture de la boîte
P	Sans ouvrir cette boîte, Maxine, à l'intérieur j'ai le nombre que tu penses avoir trouvé c'est-à-dire
Maxine	36
P	36 ! Donc Maxine elle pense qu'il y a 36 cubes dans la boîte qui sont cachés on ne les voit pas, 36 et ici c'est quoi là que j'ai au-dessus sur ma boîte ?
E	Ah oui (inaudible)
P	Ce sont mes 18 ? bon hé bien
E	Maxine elle a gagné
P	chut Maxine vient à côté de moi
[…]	
P	Maxime elle a dit qu'elle en avait 36 dans la boîte, on est bien d'accord ?
Maxine	oui
P	bon alors Maxine tu vas compter à partir de ces 36 dans la boîte, et on va ajouter nos 18, d'accord ? Et en principe on devrait trouver combien en tout ?
Maxine	45
P	45 bon alors on y va Maxine, donc tu as dit 36. Vas-y. Tu les comptes là, 30
E	7, 37
P	37
Maxine	38
P	38
Maxine	39 euh 40 41 42 43 44 45
E_2	Non
E_3	mais non
P	Qu'est-ce qu'il se passe ?
E	c'est pas bon
P	Est-ce qu'elle termine à 45 là?
Es	non oui
P	Oui et qu'est-ce qui se passe ?
Es	(inaudibles)
P	hein?
E	Il en manque neuf
P	Donc ça veut dire quoi ? Est-ce que Maxine a trouvé le bon nombre ?
Es	Non !
P	elle elle elle pense elle pensait Maxine que 36, c'est ça ? Tu pensais que 36 cubes dans la boîte
Maxine	Je suis bête j'avais pas compris
P	Plus les 18 cubes sortis ça faisait 47, et tu viens de te rendre compte de quoi?
E	(Inaudible)
P	c'est pas ça, bon écoute c'est pas grave Maxine, hein on rejouera d'accord ?

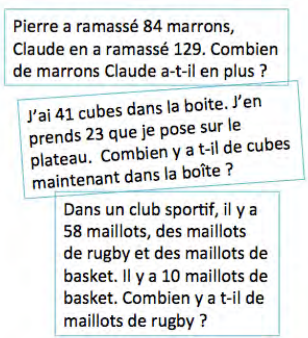
Le second moment illustre la difficulté de ce contrat inhabituel à se déployer. Dans ses propos, l'enseignante montre l'incompréhension élèves / professeur quant à ce qui était en jeu dans ce moment d'apprentissage. « *Dans nos pratiques, pour résoudre un problème, il est d'usage de demander aux élèves d'expliciter leurs procédures, de les confronter, de les comparer et de les analyser. La synthèse a pour but de dégager la ou les procédures expertes qui permettront de résoudre d'autres problèmes de même type. Dans ce cas-là, l'enseignant s'attache davantage à la recherche d'une procédure qu'à celle d'un résultat. Dans le cadre de l'ingénierie, dès les premières leçons, nous avons été amenées à refuser les explications des procédures des élèves. Pourquoi ? Parce que l'enjeu d'étude de la séance était autre, installer la preuve par addition, donc peu importait la façon dont l'élève avait trouvé son résultat. Or les élèves voulaient expliquer leurs procédures de résolution, ce qui nous a amené à réagir de façon peu conventionnelle : "je ne veux pas savoir comment tu fais ! "* »

L'extrait ci-dessous illustre les échanges entre un élève voulant absolument expliquer sa procédure obligeant alors la professeure à lui dire explicitement « je ne veux pas que tu nous expliques comment tu as fait ».

P :	Donc toi tu dis 22 […]
P :	Cette fois tu n'as pas le droit de toucher…
Jonas :	à la boîte
P :	…les cubes
Jonas :	alors
P :	comment tu vas faire ?
Jonas :	alors déjà on enlève on en a enlevé 17, on enlève une unité ça fait 30, vous êtes bien d'accord avec moi?
E2 :	oui, mais arrête de dire ça
P :	pas du tout, qu'est-ce que tu dis on enlève une unité ça fait 30 ?
Jonas :	euh non une une… une dizaine
P :	une dizaine à quoi ?
Jonas :	euh à à euh 42
P :	alors je ne veux pas que tu nous expliques comment tu as fait, je veux que tu nous expliques comment tu vas vérifier, ta réponse qui est 22, comment tu vas faire pour la vérifier, sans toucher les cubes ?
Jonas :	euh
P :	comment tu vas faire ?
Jonas :	On peut vérifier un peu comme si on revient au début on enlève
P :	chut chut
Jonas :	Une dizaine
P :	À quoi ?
Jonas :	euh à... à euh 42
P :	Non là tu es en train de résoudre le problème, tu l'as résolu déjà. Tu as dit qu'il y en avait 22, donc maintenant tu vérifies…

2.2 Un regard tourné vers la recherche afin de consolider la pratique professionnelle

L'ingénierie didactique l'invitant fortement, nous nous sommes alors intéressées à la théorie des situations (TSD), en particulier à la notion de situation adidactique pour l'élève : nous nous sommes posé la question de l'importance du temps de dévolution donné à l'élève pour qu'il puisse s'emparer des problèmes et participer activement à la construction du savoir enjeu d'étude. Cette question est d'autant plus importante lorsque les contraintes institutionnelles sont fortes, un cours double voire triple niveaux par exemple. Comment alors adapter l'ingénierie ? Ce sera l'objet de notre recherche pour l'année à venir.


Pierre a ramassé 84 marrons, Claude en a ramassé 129. Combien de marrons Claude a-t-il en plus ?

J'ai 41 cubes dans la boite. J'en prends 23 que je pose sur le plateau. Combien y a t-il de cubes maintenant dans la boîte ?

Dans un club sportif, il y a 58 maillots, des maillots de rugby et des maillots de basket. Il y a 10 maillots de basket. Combien y a t-il de maillots de rugby ?

Par ailleurs, étudier les problèmes mis en jeu dans l'ingénierie didactique a conduit à s'intéresser à la Théories des Champs Conceptuels, et en particulier à la classification des problèmes additifs selon Vergnaud. Ainsi que le déclare une des enseignantes, étudier l'ingénierie didactique a aidé à une meilleure perception de l'impact des types de problèmes proposés aux élèves sur leur apprentissage : « *Avant de participer à cette recherche, j'avais tendance à privilégier des problèmes relevant d'un retrait comme dans le problème des bonbons ou d'une comparaison comme pour le problème des marrons. Je pensais peu à proposer des problèmes de partitions tels que les maillots de rugby. D'ailleurs, au début même si je savais que le problème était un problème de partition, je le mimais avec la boite de la même façon que le problème des bonbons ou des cubes.* »

VI - CONCLUSION

Le dispositif de la recherche collaborative offre un cadre favorable à la collaboration entre chercheurs et praticiens. La réflexion menée au sein de ce dispositif permet la co-construction de connaissances liées à des pratiques professionnelles. Cela a impliqué pour les enseignantes praticiennes un appel à des outils théoriques tels que la théorie des situations ou la théorie des champs conceptuels pour comprendre et s'approprier l'ingénierie didactique, pour le chercheur une analyse de la pratique effective dans les classes. Ce regard croisé permet de mieux cerner les conditions d'intégration d'une ingénierie didactique : une connaissance forte des outils théoriques didactiques qui sous-tendent cette ingénierie ainsi que, tout en gardant les principes premiers de celle-ci, une prise en compte des contraintes institutionnelles des écoles actuelles. Notre recherche est en cours, nous poursuivons l'analyse afin de pouvoir adapter cette ingénierie didactique aux contraintes actuelles.

VII - BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage

DESGAGNÉ S., BEDNARZ N., LEBUIS P., POIRIER L., COUTURE C. L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation, in *Revue des sciences de l'éducation*, vol. 27, n°1, 2001, 33-64

LEUTENEGGER F. (2009) *Le temps d'instruire. Approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire en mathématiques*. Bruxelles : Peter Lang

MEN (2008), Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire, B.O. n°3, 19 juin 2008, SCÉRÉN, CNDP

QUILIO S., NEDELEC-TROHEL I. (2011) Une ingénierie coopérative à l'École Élémentaire dans une école de ZEP à Marseille, 327-332, in *Actes de la XVI^e école d'été de didactique des mathématiques*, Carcassonne.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, vol. 10 n°2-3, 133-170.

LA NARRATION D'UN JEU DE TÂCHES : UNE RESSOURCE POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Christine DEL NOTARO
Chargée d'enseignement, Université de Genève
DIMAGE
Christine.DelNotaro@unige.ch

Résumé

À partir d'exemples de narrations d'étudiants, cette contribution examine de quelle manière la narration peut tout à la fois inciter les étudiants à faire ressortir l'activité mathématique de l'élève et les engager eux-mêmes dans une investigation personnelle et approfondie d'un milieu mathématique. Le terme de narration est pris au sens de restitution après-coup d'une situation vécue en classe de mathématiques. En nous appuyant sur Benjamin (1936), nous avons avancé l'hypothèse (Del Notaro, 2011) que ce que l'on narre peut devenir expérience non seulement pour qui l'écoute (reproductibilité), mais aussi pour soi-même. Le passage à la formulation écrite des événements et de leur enchaînement devient le fait d'une nouvelle interprétation de la mise en jeu de ses propres connaissances et de celles des élèves. La narration d'un jeu de tâches est utilisée ici pour rendre compte des actions d'un sujet et pour prendre de la distance par rapport à ses propres actions en tant qu'expérimentateur et/ou enseignant. Le jeu de tâches, défini comme un ensemble de tâches non hiérarchisées, se révèle donc une ressource qui permet d'enrichir l'investigation des potentialités du milieu. L'expérimentateur qui pilote la tâche est ici un élément du milieu qui va mettre en jeu ses propres connaissances pour interagir à la fois avec le milieu de la tâche et avec le milieu de l'élève. Notre communication a pour but de présenter la narration comme interface à la fois des contenus mathématiques, des connaissances en jeu de part et d'autre et de l'expérience effectuée par les élèves et les étudiants.

I - LE JEU DE TÂCHES, UNE RESSOURCE POUR LA FORMATION

1 La notion de jeu de tâches

Ainsi que nous avons déjà eu l'opportunité de le décrire dans des actes de la COPIRELEM (Del Notaro, 2012), le jeu de tâches est une manière originale de questionner les élèves qui a pris sa source dans les travaux du groupe DDMES (Didactique Des Mathématiques pour l'Enseignement Spécialisé) voici plus d'une dizaine d'années déjà. Ce groupe est animé par F. Conne (retraité de l'Université de Genève et de Lausanne) et J.-M. Favre (CFPS, Château du Seedorf, Noréaz) ; les membres sont enseignants dans le primaire, le secondaire, le spécialisé ou chercheurs en didactique des mathématiques[1].

De la difficulté d'interagir avec certains enfants de l'enseignement spécialisé est née l'idée du jeu de tâches, qui a pour particularité d'interférer à partir des propos et/ou des actions mathématiques des élèves dans le but de maintenir vive le plus longtemps possible, la tâche et/ou la question. Le groupe a présenté ses travaux au séminaire national en 2003[2] ; il en résulte un texte qui met en lumière les différentes interactions autour de tâches géométriques. Nous avons repris l'idée du jeu de tâches dans notre thèse de doctorat (Del Notaro, 2010) et avons élargi ce concept au domaine du nombre, avec des

[1] C. Cange (Institut Pré-de-Vert, Rolle), L. Del Notaro (École primaire du Mail, Genève), P. Depommier (Collège Arnold Reymond, Pully), D. Jean Richard (CPHV, Lausanne), C. Vendeira (Université de Genève), A. Meyer (ECES, Lausanne), J.-D.Monod (Gymnase cantonal, Nyon), C.-L. Saudan (Fondation de Vernand, Cheseaux-sur-Lausanne), A. Scheibler (enseignement secondaire, Aigle.

[2] DDMES (2003). L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. *Actes du Séminaire national de recherche en didactique des mathématiques*, Paris, 28-29 mars.

élèves de l'enseignement dit ordinaire. Nous avons particulièrement ciblé les relations de divisibilité dans différents critères, avec comme point de départ le critère de divisibilité par 4.

2 Définition

Nous avons tenté une définition générale du jeu de tâches, que nous utilisons dans nos recherches. Il s'agit avant tout d'un ensemble de tâches qui découlent en principe les unes des autres, sans être hiérarchisées pour autant. Nous procédons en premier lieu à une investigation personnelle du milieu qui pourrait se rapprocher d'une analyse a priori, mais sans les attributs de l'enseignement projeté, comme par exemple, les stratégies des élèves ou les variables didactiques. Cette investigation donne lieu à une constellation de tâches corollaires s'exprimant comme autant de pistes à prendre en fonction de ce que l'élève répondra. DDMES parle de cartes du jeu, image très parlante si l'on imagine des cartes que l'on abat en fonction du jeu de l'adversaire.

Contrairement au problème ouvert, il ne s'agit donc pas d'une technique pédagogique visant à mettre les élèves en recherche, bien que nous obtenions des résultats proches sur le plan de la motivation à chercher. Il s'agit plus exactement d'un ensemble de tâches qui s'autoalimentent à travers les interactions de l'expérimentateur et des élèves, répondant à une exigence mathématique qui met en évidence les connaissances que les élèves ont accumulées. C'est donc une entrée par les contenus de la tâche mathématique et de ce qu'elle provoque chez les deux parties que nous privilégions. L'investigation mathématique s'élargit aux deux parties qui avancent de concert dans le problème, de par les questions de l'un et les réponses des autres. Il va de soi que le jeu de tâches n'est pas vierge et se trouve nourri et influencé par certaines techniques comme le problème ouvert[3], par exemple, ou la technique des situations[4]. Notre réflexion actuelle sur le sujet nous amène à envisager le jeu de tâches comme une possible filiation d'ordre didactique, de l'entretien clinique-critique de Piaget[5], à la différence près que l'expérimentateur en tant qu'élément du milieu, va mettre en jeu ses propres connaissances pour interagir à la fois avec le milieu de la tâche et avec le milieu de l'élève ; le jeu de tâches laisse ainsi une place importante à l'investigation en partant d'une tâche qui va s'enrichir, s'amplifier, se prolonger tout en résultant d'un savoir mathématique ; il procède d'une investigation du milieu à partir d'une tâche donnée.

Ducret (2004) décrit l'entretien clinique-critique comme un outil servant à comprendre, à découvrir la connaissance qu'un sujet a d'un concept ou d'un objet, ce qui implique pour l'expérimentateur une connaissance minimale de ce concept. Ducret ne développe pas cette dernière question; nous pourrions avancer que dans nos jeux de tâches, nous procédons à une investigation du milieu pour assurer cette connaissance minimale. Il dit encore que les questions posées à l'enfant peuvent être sans cesse rectifiées ou complétées en fonction des réponses obtenues et souligne le risque inhérent à cette méthode qui est de suggérer au sujet la notion que l'on croit/souhaiterait qu'il possède. Ce risque est bien connu en didactique des mathématiques ; notre jeu de tâches tente de se mettre à l'abri de l'induction de l'expérimentateur, premièrement en ne posant pas de question *stricto sensu*, mais en proposant une tâche mathématique en *réponse* à la tâche effectuée par l'élève. De ce fait, l'expérimentateur peut se laisser emmener par les propos de l'élève et bifurquer sur une autre tâche, ce que Ducret, citant Piaget (1926, p. 10), relève également concernant l'entretien clinique-critique :

> *« L'examen clinique participe de l'expérience en ce sens que le clinicien (l'aliéniste, mais ceci est valable pour le psychologue clinicien) se pose des problèmes, fait des hypothèses, fait varier les conditions en jeu (il changera par exemple l'objet de la discussion), et enfin contrôle chacune de ses hypothèses au contact des réactions provoquées par la discussion. Mais l'examen clinique participe aussi de l'observation directe, en ce sens que le bon clinicien se laisse diriger tout en dirigeant, et qu'il tient compte de tout le contexte*

[3] IREM de Lyon (1991)

[4] SRP de Genève (1991)

[5] Poster présenté à la *1st Conférence Jean Piaget* les 26-27 juin 2014 à Genève

mental au lieu d'être victime d'erreurs systématiques, comme c'est souvent le cas du pur expérimentateur. »

La question de la constitution de l'expérience guide également nos recherches dans le sens que la question de l'épistémologie des connaissances y est non seulement reliée, mais joue un rôle de moteur dans le jeu. Relevons encore que, de même que pour le jeu de tâches,

> « *La méthode clinique-critique est un procédé par lequel le chercheur interagit dialectiquement avec des enfants, des adolescents ou des adultes, de manière à rassembler des informations qui, toutes ensemble, vont permettre à ce chercheur de répondre à la question qu'il se pose.* »

Le type d'entretien mené en jeu de tâches se rapproche donc de l'entretien clinique-critique en ce qu'il permet à l'élève et à l'expérimentateur de se forger une expérience autour d'un savoir mathématique particulier, dans un entretien qui se présente comme un jeu dans lequel on répond à une tâche par une autre tâche.

Les propos de Perraudeau (1998) nous intéressent particulièrement du fait qu'ils impliquent l'enseignement dans le processus :

> *L'entretien, si l'on se place dans une perspective constructiviste, permet de comprendre le raisonnement. A la suite de Piaget, nous qualifions de -critique- ce genre d'entretien car il ne se contente pas d'enregistrer ce que dit l'élève, le questionnement incite à dépasser la première idée, à déployer sa pensée. L'entretien devient un outil au service de l'enseignant, il permet de savoir quel est l'état d'une notion étudiée (conservée, en cours d'acquisition, non fixée) ; il permet aussi de savoir quel est le fonctionnement cognitif de l'élève et les difficultés qui peuvent apparaître au cours de l'apprentissage. Mais l'entretien, et on l'aura compris, est aussi un instrument au service de l'élève : il peut identifier ses problèmes et s'impliquer dans leur résolution.*

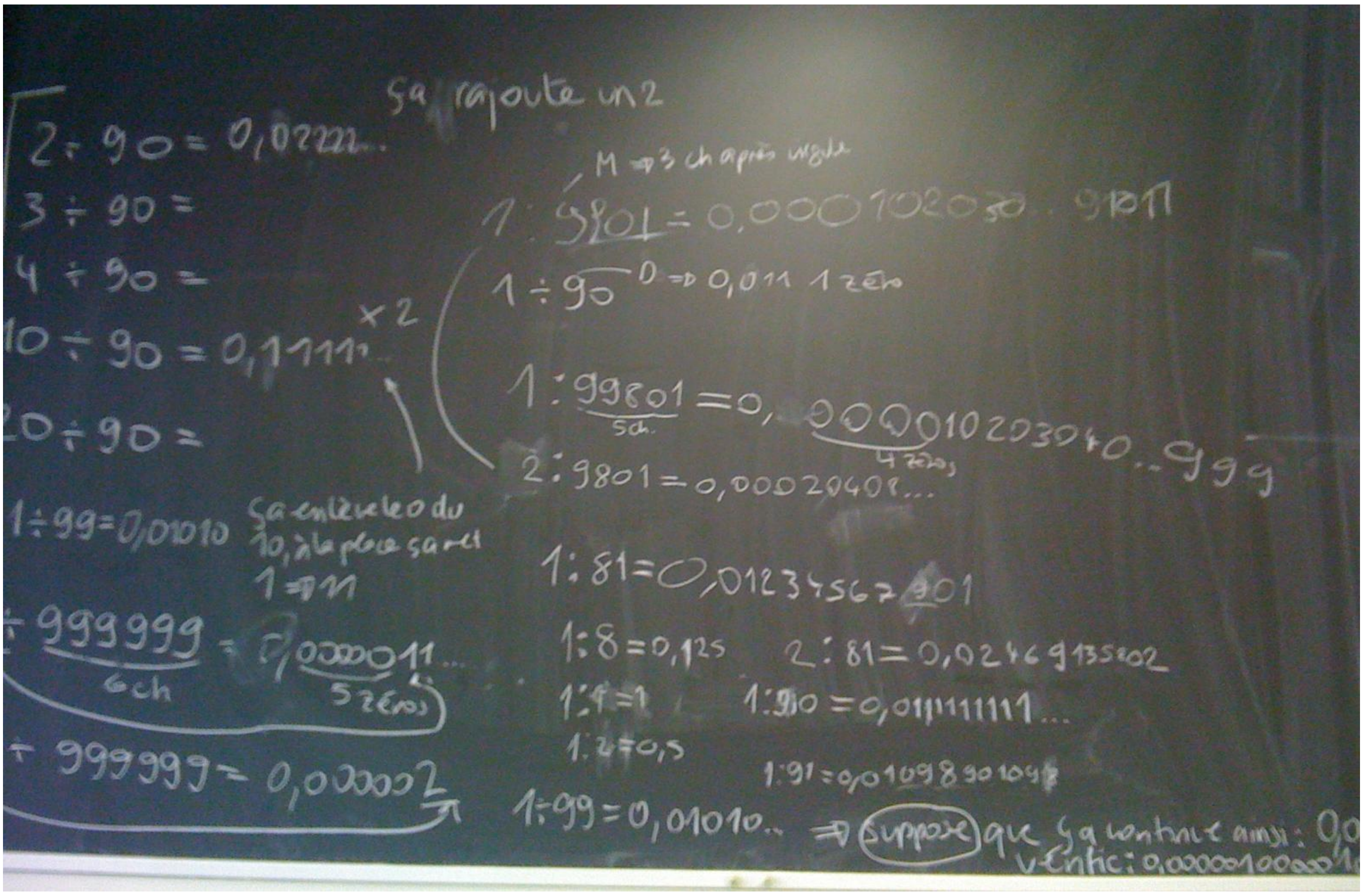
Ceci suppose, d'une part, que l'expérimentateur ou l'enseignant accepte l'idée de faire partie du milieu, dans le sens où il joue avec celui de l'élève, et admette une possible perte de contrôle de la tâche (Conne, 2001), ses propres représentations et/ou connaissances prenant le dessus et se trouvant parfois mises à mal par les propos de l'élève.

3 Exemple de jeu avec des élèves

Il n'y a pas véritablement de consigne dans un jeu de tâches : ces dernières ne sont pas préparées a priori dans la mesure où les réparties fusent en fonction de l'interlocuteur ; seules les différentes tâches issues de l'investigation du milieu de l'expérimentateur se trouvent prêtes à être injectées dans le milieu, mais sont parfois abandonnées au profit d'une intervention dictée par le moment présent.

Nous avons beaucoup exploré ce que nous avons nommé une *division particulière* (1/9801), du fait des nombreuses surprises qu'elle occasionne autant chez des élèves du primaire (11-12 ans) que chez des étudiants futurs enseignants. Elle est du reste bien connue pour toutes les curiosités qu'elle recèle. La première des choses que l'élève a envie de faire lorsqu'on lui propose cette division est de l'effectuer à la calculette ; le quotient : 0,0001020304 apparaît immédiatement comme surprenant, pour les questions que cela pose : est-ce que ça va continuer ? 050607 ? Qu'est-ce que l'on trouvera après 0809 ? La dévolution du problème se fait, le problème ne nous appartient plus : les élèves font des hypothèses (010 011 012 013 ou 10 11 12 13 ?) et s'engagent dans leur recherche. Les relances ou propositions de nombres permettent d'enrichir les variations du numérateur de 1 en 1 (1/9801, 2/9801, 3/9801) et ouvrent sur l'investigation des relations entre numérateurs (de 10 en 10 : 10/9801, 20/9801, ou 100 : 100/9801 ou 1000) et les incidences sur le dénominateur. Ce sont autant de relances qui font partie de nos « cartes » à abattre ; le jeu continue alors avec des tâches que l'on aura préalablement préparées (mais de manière non hiérarchisées) et qui seront proposées en fonction de ce que le sujet répondra. Qu'est-ce que des élèves de l'école primaire font de cette division et par quel bout l'empoignent-ils ? Ce sont ces questions à propos des relations numériques qui nous occupent et qui commencent à être traitées (Del Notaro, 2013, 2014).

Si l'on analyse les traces recueillies sur le tableau noir ci-après, notées par l'expérimentatrice en interaction avec une dizaine d'élèves de 11 ans, on constatera la quantité de recherches qui cohabitent, si l'on peut dire : en interagissant avec ces dix élèves, il est ressorti que leurs questionnements se focalisaient sur des déclinaisons de cette *division particulière*, les différentes cartes en étant les *coups du jeu*. Après une variation du numérateur de 1 en 1 de la division 1/90 ont suivi de nombreux essais et constats. Le jeu de tâches est autoalimenté par les élèves eux-mêmes, chaque tâche leur évoquant une autre piste. En commençant par faire varier en premier lieu le numérateur, puis le dénominateur, les élèves testent l'effet produit sur le quotient : ils sont pleinement dans la recherche, nul besoin de les aiguiller.



Ce type de recherche auprès des élèves a été repris en cours de formation, ce que nous détaillerons ci-après.

4 La restitution de l'expérience des étudiants par la narration écrite d'un jeu de tâches

La question s'est posée de la restitution d'un jeu de tâches, d'une part pour garder une trace de l'interaction, et d'autre part, pour empoigner la question de l'expérience.

Parmi différentes méthodologies et cadres d'interprétation, il en est un très productif à notre sens, qui est celui de la narration que nous qualifions de « libre ». Nous entendons par là une écriture en langage naturel de ce dont on se souvient. Ce qui nous intéresse est de comprendre ce que les étudiants retiennent et ce qu'ils évoquent comme connaissances, sur injonction de restituer ce qui s'est produit pendant l'interaction avec les élèves.

Sans exposer l'ensemble de notre dispositif dans ces lignes, nous précisons toutefois que les étudiants, après avoir élaboré quelques tâches autour de la division, ont été tenus de les faire passer auprès de quelques élèves en un jeu dont les tâches seraient à choisir au gré de l'avancement de l'interaction.

II - LA NARRATION

Dans les lignes qui suivent, nous souhaitons procéder à un bref tour d'horizon de cette notion de narration, pour finalement contextualiser la façon dont nous l'envisageons. La narration telle que nous la décrirons dans ce texte traitera essentiellement de la restitution écrite d'étudiants, futurs enseignants primaires, et non pas d'élèves. Les futurs enseignants rendent compte de leurs jeux de tâches avec les élèves, afin de comprendre quelles connaissances se donnent à voir et ce qu'elles nous apprennent d'un point de vue épistémologique.

1 La narration de recherche

La question nous est parfois posée de savoir en quoi notre narration se distingue de la narration de recherche. En préambule, il nous faut préciser rapidement que la narration telle que nous la préconisons n'est pas une narration de recherche, ainsi qu'elle se caractérise dans les textes de Chevalier (1992), Sauter (1998), pour ne citer que ces deux auteurs. Issue des années 90, dans la foulée de la technique des problèmes ouverts de l'IREM de Lyon (1991), cette dernière se présente comme un *« exposé détaillé, écrit par l'élève lui-même de la suite des activités qu'il met en œuvre lors de la recherche des solutions d'un problème »*. L'accent est mis sur la recherche et son organisation, plus que sur le résultat lui-même, c'est pourquoi les auteurs la qualifient de technique pédagogique. La narration de recherche présente l'avantage de ménager une place à l'expression de l'ingéniosité des élèves et à leur goût pour la recherche en mathématiques. En lien avec le problème ouvert, l'énoncé est court, n'induit ni la démarche ni la solution et permet à chacun de se lancer dans le tâtonnement et l'expérimental. Le point de vue pédagogique est prépondérant en ce que la démarche prend en compte les élèves en difficulté.

2 La narration selon le groupe DDMES

Pour le groupe DDMES, la narration revêt une importance dans le sens qu'elle restitue de manière subjective, les interactions entre les élèves et le milieu ; le groupe utilise la narration pour communiquer entre chercheurs :

> *« Il s'agit en effet de rendre compte des interactions élèves-milieu provoquées par nos jeux de tâches. Il faut donc partager avec autrui ce qui s'est passé, mais surtout déterminer en quoi tel événement ou acte de l'élève est à relever plutôt que tel autre. Le narrateur se trouve donc impliqué dans son récit, pour y mêler ses intentions didactiques, les connaissances qu'il perçoit être en jeu, attendues ou surprenantes, les gestes qui lui paraissent robustes, mais qu'il ne peut analyser, les hypothèses qu'il échafaude pour relancer de nouvelles tâches, etc. »* (2011, 6-7),

Ce que nous retenons ici comme fondamental pour notre propre travail est le fait que l'intuition de l'expérimentateur est clairement en lien avec ses propres connaissances en premier lieu et, nous le verrons, avec son expérience.

> *« L'enfant sait beaucoup plus qu'il ne peut dire, il fait. Si l'expérimentateur donne du crédit à tel acte, c'est qu'il élabore une hypothèse de connaissance, qui a le mérite d'être « d'actualité », et l'applique en termes de tâche. Seule la narration peut rendre compte de cette démarche. Elle raconte et argumente. Elle est idoine. »*

Pour que l'expérimentateur puisse élaborer une hypothèse de connaissance, il faut qu'il y ait une interaction de ces connaissances en jeu afin qu'elles soient évoquées chez lui et qu'il puisse ainsi les reconnaitre.

> *« Autre propriété de la narration: son caractère dynamique. Elle met le lecteur dans le même état que l'expérimentation narrée a mis le narrateur, et/ou peut-être dans le même état que la tâche a mis l'élève. Elle provoque donc à son tour des intuitions, des évocations, des liens à des connaissances et des savoirs. Ainsi elle donne à faire, incite le lecteur à expérimenter lui-même et du coup narrer à son tour. Cela fait de l'eau pour de nombreux moulins: interactions de connaissances des élèves avec des hypothèses sur des savoirs associés, interactions de connaissances de l'expérimentateur, associations argumentées avec des tâches, et savoirs didactiques. »*

La question de la reproductibilité est une question de taille : peut-on vraiment compter sur un tel effet de la narration ? C'est ce que nous expérimentons auprès des élèves et qui ne fonctionne pas toujours aussi bien que ce qui est décrit pour des adultes. Dès lors notre question est « à quelle-s condition-s la narration peut-elle engager cette interaction ? ». Les étudiants se montrent très réceptifs et se laissent prendre au jeu ; les élèves quant à eux, sont parfois très pris dans leur propre recherche pour s'intéresser véritablement aux narrations de leurs camarades.

3 La narration selon les propos de Benjamin

Nous avons repris les propos de Benjamin (1936) et avons tenté de les réinterpréter à la lueur de notre postulat de formation. A partir de l'idée que la narration est en lien avec l'expérience du sujet, nous avons imaginé l'idée d'une circulation de l'expérience, à travers les expériences des sujets. Benjamin dit que « *Le narrateur emprunte la matière de sa narration soit à son expérience propre, soit à celle qui lui a été transmise. Et ce qu'il narre devient expérience pour qui l'écoute* » (p.150)

Nous faisons de ce fait l'hypothèse que ce que l'on narre peut devenir expérience non seulement pour qui l'écoute, admettant par là une certaine reproductibilité de la part de celui qui écoute (ou lit), mais aussi pour soi-même. Nous sommes ici très proche des propos de DDMES.

Pourquoi la narration en langage naturel plutôt que le protocole ? Sur le moment, l'expérimentateur (chercheur ou enseignant) interagit en fonction de ses propres connaissances, ce qui ne lui laisse pas le temps de l'analyse, pris dans la dynamique de la communication avec l'élève. Il faut un « après-coup », une distance entre le guidage du jeu et une éventuelle interprétation de ce qui s'y est passé. Nous n'avons pas choisi la restitution par le protocole qui est une forme trop contraignante à nos yeux. Le protocole garantit certes une certaine objectivité, mais ce n'est pas le but que nous poursuivons : à l'image des connaissances qui fusent souvent de toutes parts dans l'interaction, et de manière parfois incontrôlée, il nous fallait un cadre qui laisse une place au subjectif ; le jeu de tâches en étant l'une de ses expressions. Ainsi, la narration spontanée, *après-coup*, en fonction de ce dont on se souvient ou de la reconstruction de notes personnelles est-elle devenue notre moyen privilégié pour tenter d'accéder à cette épistémologie des connaissances des élèves. En l'occurrence, le jeu de tâches révèle également l'épistémologie des étudiants, mais nous ne la discuterons pas dans cette contribution. Ces derniers ont donc pour consigne de restituer ce qui s'est produit lors d'une interaction avec des élèves, ayant pour but premier de rapporter une expérience.

Ainsi nous avons abordé plusieurs facettes de la narration dans notre travail. Elles concernent d'une part l'expérimentatrice qui *se* narre les événements pour les analyser dans la distance décrite plus haut et pour répondre à sa question épistémologique ; elles concernent aussi les étudiants dont la narration de l'interaction entre eux-mêmes et les élèves vont servir à mettre en exergue les liens entre l'expérience, l'élaboration d'une règle et sa logique sous-jacente. Enfin, elle concerne les élèves eux-mêmes, dont la narration de leur propre tâche (encore très sommaire et orale) peut mettre en lumière leur propre organisation des savoirs et leurs représentations.

4 Exemple de narration

Le narrateur, en tant que (re)lecteur de sa propre narration, tire parti de la réinterprétation de sa propre expérience. L'expérience qu'il fait dans sa propre action de narrer une situation didactique vécue le met en condition de réinterpréter cette situation; le passage à la formulation écrite des événements et de leur enchaînement étant le fait d'une nouvelle interprétation de la mise en jeu de ses propres connaissances. Cette mise à distance permet de faire d'autres connexions logiques. La narration permet de montrer la pertinence d'une tâche pour un élève particulier du fait que l'interprétation des données (contenue dans la narration) par les étudiants, est ici le fil qui relie un jeu de tâches et une logique. Dans ce contexte, la narration nous permet de restituer un jeu de tâches particulier ; elle possède la particularité de projeter des intentions et de faire évoluer le scénario de l'investigation.

Prenons en premier lieu le cas de la transmission de l'expérience pour celui qui lit la narration – nous n'avons pas fait de narration orale avec les étudiants. A partir d'une narration d'étudiante intitulée

« *Laura : Tes divisions sont faciles* », nous avons proposé aux autres étudiants de tenter de retrouver le jeu de tâches à partir de la description. Cette étudiante avait « reçu » comme consigne de traiter les deux divisions 1/81 et 1/ 891. Précisons rapidement que les étudiants, après avoir investigué le milieu de la division 1/9801 ont eu à tester un jeu de tâches auprès d'un élève, pour s'acculturer à ce type de questionnement et avaient pour tâche de rédiger une première narration. Ils pouvaient recourir à un choix personnel de tâche ou reprendre l'une des propositions de « cartes » établies durant l'investigation du milieu que nous avons faite collectivement. En tant qu'enseignante universitaire, nous avons commencé à interagir avec l'ensemble des étudiants à propos de cette division, ce qui a donné des propositions de jeux assez variées.

Voici donc la narration d'une étudiante :

1/81 et 1/891 6 novembre 2013

Laura: « Tes divisions sont faciles ! »

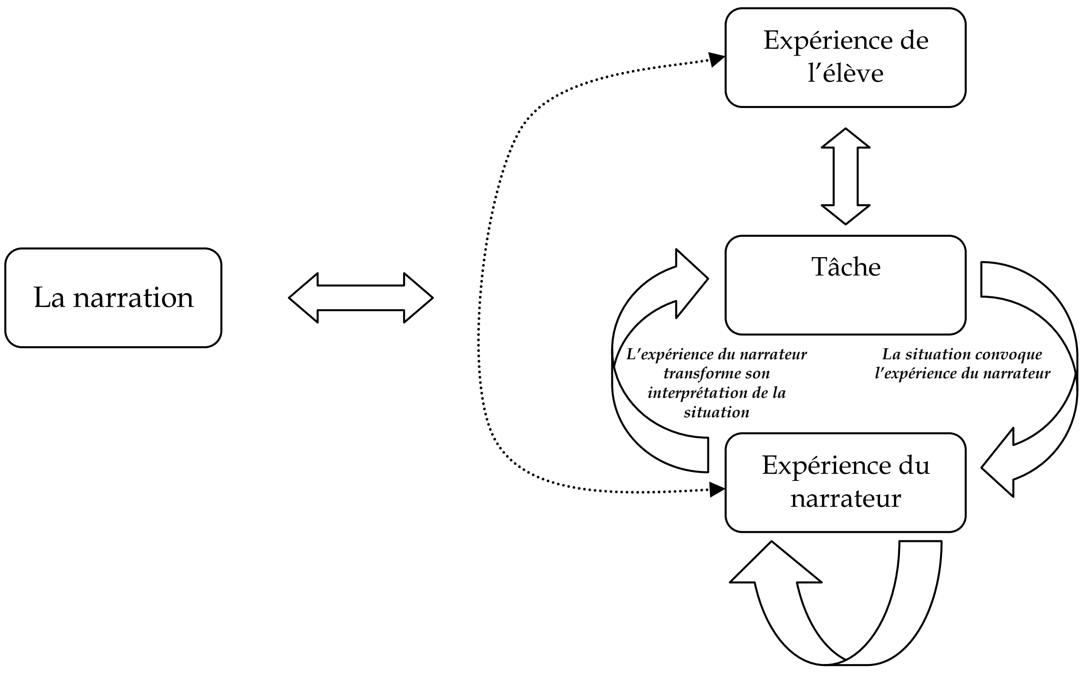
Cette élève a d'habitude beaucoup de facilité en mathématiques. Lorsque je lui présente le calcul a effectuer, elle me dit qu'elle ne sait pas par quoi commencer. En effet, elle se retrouve bloquée car « le problème n'a pas de consignes », me dit-elle. Je suis surprise d'entre cela car quelques instants plus tard, elle me dit sans trop réfléchir que la deuxième division donne un résultat beaucoup plus petit que la première et le justifie correctement. Après avoir regardé un peu au plafond et par la fenêtre, elle prend sa calculatrice afin de vérifier son résultat. Elle effectue deux divisions et note sur une feuille le résultat de chacune d'entre elles. Je la regarde faire. Laura essaie alors immédiatement de taper sur sa calculatrice des divisions similaires à celle que je lui avais donnée et me dit très rapidement que «c'est facile». N'étant pas très sûre qu'elle a compris, car cette élève avance particulièrement vite, je m'efforce de lui demander ce qu'elle trouve d'intéressant. Elle trouve que faire des divisions comme ça c'est facile et ajoute un 9 à chacune fois dans le nombre. À chaque fois, elle note le résultat que la division lui donne. Elle me formule par la suite oralement que s'il n'y a qu'un 9, tous les chiffres dans le résultat ne seront répétés que deux fois, si on ajoute un 9, ils seront répétés 3 fois et que si l'on met trois 9 ils seront répétés 4 fois. C'est tout à fait juste. Je lui demande à la fin de l'exercice pourquoi elle pense que je lui ai donné cela à faire et elle me répond qu'il fallait qu'elle «trouve la logique».

Ce n'est certes pas la plus intéressante ni la plus complète, mais ce que nous retiendrons est que même dans une narration simple et somme toute, assez laconique, le passage à la formulation écrite des événements et de leur enchaînement devient le fait d'une nouvelle interprétation de la mise en jeu de ses propres connaissances et de celles des élèves. Elle permet de rendre compte des actions mathématiques d'un sujet en ce qu'elle impose une distance par rapport à ses propres actions en tant qu'expérimentateur et/ou enseignant. La restitution de l'expérience par la narration suppose donc une interaction entre un milieu (une tâche mathématique) et un élève, ainsi que le stipule DDMES. On peut affiner le grain en précisant que cette interaction milieu-élève est constituée par un sous-système : *expérience de l'élève, tâche mathématique, expérience du narrateur (expérimentateur)»*

Nous souhaitons livrer une autre illustration de l'expérience, à travers la narration d'une situation mais ne poursuivons pas le but de la reproduction exacte de mots d'élèves. Ce que nous apporte ce mode de restitution, entre autres, est de pouvoir rendre compte d'une pensée qui implique le contenu mathématique de l'événement didactique narré. Reprenons la citation de Benjamin qui nous a semblé en adéquation avec l'idée que nous cherchons à transmettre, d'une circulation de l'expérience, d'une interaction entre les expériences. Pour ce qui concerne la première partie de cette citation, « *Le narrateur emprunte la matière de sa narration soit à son expérience propre, soit à celle qui lui a été transmise* », nous faisons un parallèle avec la restitution de l'expérience d'une situation didactique vécue dans la contingence par tout chercheur ou professeur, et, osant une construction personnelle à partir de la deuxième partie « *Et ce qu'il narre devient expérience pour qui l'écoute* », nous tentons une superposition du narrateur et du lecteur, en tant que même personne. Et si ce que l'on narre devenait expérience pour soi-même également, dans cette mise à distance que permet l'écriture ? Le narrateur en tant que lecteur de sa propre narration tire parti de l'expérience qu'il se narre, bénéficiant ainsi de sa propre expérience. L'expérience que le narrateur fait dans sa propre action de narrer une situation didactique vécue, le met en condition de réinterpréter cette situation ; le passage à la formulation écrite des événements et de leur enchaînement étant le fait d'une nouvelle interprétation de la mise en jeu de ses propres connaissances. Cette mise à distance permet de faire d'autres connexions logiques ; la narration d'une situation produisant un effet sur le système interactif composé par l'expérience de l'élève, la situation didactique et l'expérience du narrateur.

Ainsi, nous envisageons cet effet comme un ensemble d'interactions entre la narration d'une situation didactique et le *système d'interactions entre l'expérience de l'élève, une situation didactique et l'expérience du narrateur.*

Dans l'expérience de la situation que l'élève fait faire à l'expérimentateur et l'interprétation de ce qui s'y déroule, il y a un recouvrement d'expériences entre élève et expérimentateur.



5 De l'interaction de connaissances à l'interaction entre les expériences

La narration montre la pertinence d'une tâche pour un élève du fait que l'interprétation des données contenues dans la narration, est le fil qui relie un jeu de tâches et une logique. Dans ce contexte, la narration nous permet de restituer un jeu de tâches particulier.

5.1 Les fonctions de la narration

La narration se révèle interface des contenus mathématiques, qui facilite la représentation de certaines notions. Elle soutient en outre leur appréhension : lorsque l'élève ou l'étudiant décrit ce qui s'est passé, il y a une part d'élaboration du contenu. La narration restitue, en outre, les connaissances en jeu de part et d'autre, permettant l'accès pour les analyser. La narration révèle une certaine expérience effectuée par les élèves et les étudiants. Nous l'utilisons dans nos recherches ainsi qu'en formation pour montrer à la fois l'interaction de connaissances entre expérimentateur et élèves à travers un jeu de tâches et les contenus mathématiques mis en jeu par l'élève ainsi que, éventuellement, la pertinence d'une tâche. De ce fait, nous envisageons la narration comme étant au service de l'expérience.

En ce qui concerne les fonctions identifiées de la narration, nous distinguons l'expérimentateur (pour lequel il s'agit essentiellement d'une prise de distance) des élèves, pour qui il y a une véritable mise en évidence des contenus. La prise de distance pour l'expérimentateur réside dans le fait d'envisager la narration comme un acte de se narrer à soi-même *(Et ce qu'il narre devient expérience pour qui l'écoute)* afin d'élaborer une interprétation de sa propre narration pour comprendre comment se joue l'interaction de connaissances et peut-être, de jauger si la tâche est reproductible et à quelles conditions.

Du côté des élèves, la narration met en évidence les contenus mathématiques et permet la restitution d'une pensée qui implique les contenus de l'événement narré. L'expérience mathématique y est en outre restituée dans une certaine logique, déterminée par le recours à certaines règles ou certaines régularités.

III - PRATIQUE DE FORMATION

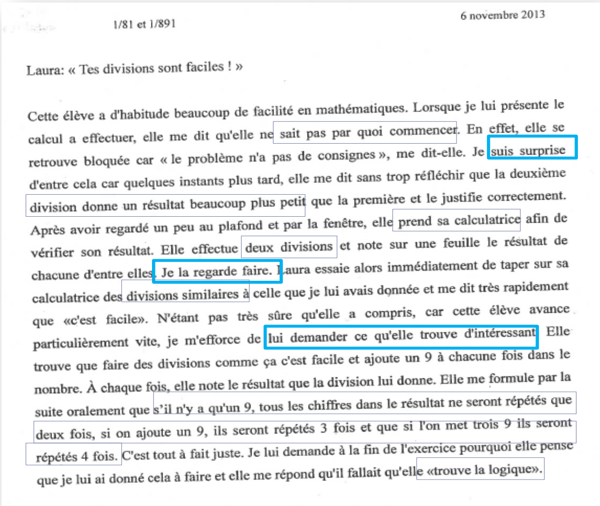
Nous tentons depuis deux ans de mettre sur pied un dispositif de formation qui implique le jeu de tâches et la narration. Ce dispositif laisse entrevoir l'avantage de mettre des étudiants en situation d'engager leurs propres connaissances dans l'interaction avec les élèves, plus habitués à être observateurs des procédures des élèves. L'idée de faire interagir les deux parties est née de la surprise manifestée par les étudiants à la lecture de narrations de nos propres jeux de tâches : il fallait les mettre en situation de faire passer eux-mêmes un jeu aux élèves, afin de les faire accéder à ce que les élèves étaient en mesure de produire et de les acculturer à une autre manière de faire des mathématiques, axée sur la réalisation d'expériences de part et d'autre. Nous envisageons la narration d'un jeu de tâches comme une ressource pour comprendre, d'un point de vue théorique, quelques éléments qui guident notre problématique :

- **C**omment les élèves se constituent-ils leurs connaissances et dans quel enchaînement ?
- La pratique de la narration peut-elle inciter les étudiants à faire ressortir l'activité mathématique de l'élève ?
- De quelle manière les étudiants s'engagent-ils dans une investigation personnelle approfondie du milieu mathématique pour cibler un objet ?
- En quoi les futurs enseignants peuvent-ils tirer profit d'une compréhension plus approfondie des connaissances des élèves et ce qu'ils en disent ?

1 Comment les élèves construisent-ils leurs connaissances ?

L'un des cribles sommaires que nous proposons aux étudiants réside dans la démarche de n'extraire de la narration que les faits:

Reprise de *Laura* :


1/81 et 1/891 6 novembre 2013

Laura: « Tes divisions sont faciles ! »

Cette élève a d'habitude beaucoup de facilité en mathématiques. Lorsque je lui présente le calcul a effectuer, elle me dit qu'elle ne sait pas par quoi commencer. En effet, elle se retrouve bloquée car « le problème n'a pas de consignes », me dit-elle. Je suis surprise d'entre cela car quelques instants plus tard, elle me dit sans trop réfléchir que la deuxième division donne un résultat beaucoup plus petit que la première et le justifie correctement. Après avoir regardé un peu au plafond et par la fenêtre, elle prend sa calculatrice afin de vérifier son résultat. Elle effectue deux divisions et note sur une feuille le résultat de chacune d'entre elles. Je la regarde faire. Laura essaie alors immédiatement de taper sur sa calculatrice des divisions similaires à celle que je lui avais donnée et me dit très rapidement que «c'est facile». N'étant pas très sûre qu'elle a compris, car cette élève avance particulièrement vite, je m'efforce de lui demander ce qu'elle trouve d'intéressant. Elle trouve que faire des divisions comme ça c'est facile et ajoute un 9 à chacune fois dans le nombre. À chaque fois, elle note le résultat que la division lui donne. Elle me formule par la suite oralement que s'il n'y a qu'un 9, tous les chiffres dans le résultat ne seront répétés que deux fois, si on ajoute un 9, ils seront répétés 3 fois et que si l'on met trois 9 ils seront répétés 4 fois. C'est tout à fait juste. Je lui demande à la fin de l'exercice pourquoi elle pense que je lui ai donné cela à faire et elle me répond qu'il fallait qu'elle «trouve la logique».

- Ne sait pas comment commencer
- La 2ème division donne un résultat plus petit
- Prend sa calculette
- Effectue les 2 divisions
- Note le résultat
- Divisions similaires
- Prononce une règle (une logique?) issue de régularités observées
- L'étudiante présente la tâche, émet une surprise
- Regarde faire
- Demande ce qu'il y a d'intéressant
- Demande pourquoi elle lui a fait faire cette tâche. Elle subit l'interaction

2 Inciter les étudiants à faire ressortir les connaissances mathématiques de l'élève

Si l'on poursuit avec une autre narration dont les étudiants ont extrait les actions des élèves (standard, justifié à gauche) et les surprises, constats, questions, etc. des élèves (italique, justifié à droite), on parvient à mettre en évidence l'activité mathématique de l'élève.

Extraire les actions des élèves de la narration de l'étudiant :

Extraire surprises, constats, questions des élèves :

- Effectue la division 1/81 grâce au logiciel
  - *Grande surprise*
- Effectue l'autre calcul (1/8181)
- Récite les décimales et se questionne alors sur l'absence de 8
  - *Elle remarque la présence de 8 (de la première périodicité)*
- Refait le premier calcul
  - *Remarque immédiatement qu'il n'y a pas de 8*
- Refait la deuxième division
  - *Une suite de nombre se répète*
- Relit les décimales en « ciblant l'ordinalité », i.e qu'elle récite l'ordre, en faisant abstraction de leur répétition
- Ecrit les quotients : 0,012345679 et 0,0001222344456667889
  - *Elle dit : il y a* ***une logique.***
  - *Croissance dans les décimales dans les deux divisions*
  - *Croissance « de 1 en 1 », pour 1/81*
  - *Croissance « 3 chiffres, 1 chiffre, 3 chiffres, 1 chiffre » pour 1/8181*
- Effectue le calcul 1/62 pour vérifier sa logique
  - *Dit : un 0 immédiatement après la virgule pour chaque division*
  - *Compare les divisions 1/81 et 1/62, en laissant 1/8181 de côté*
- Effectue alors une autre division : 1/12

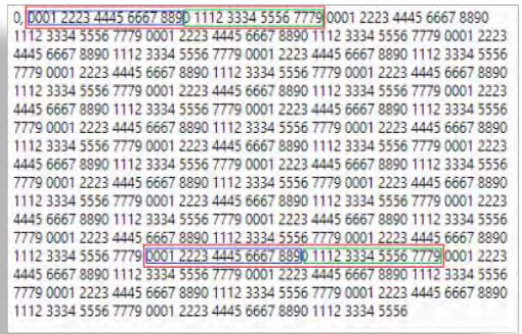
On peut ainsi inciter les étudiants à faire ressortir l'activité mathématique de l'élève et les encourager à l'analyser pour mieux saisir les mathématiques convoquées par leurs élèves. Cela les engage en outre dans une investigation personnelle.

3 Engager les étudiants dans une investigation personnelle approfondie du milieu mathématique pour cibler un objet

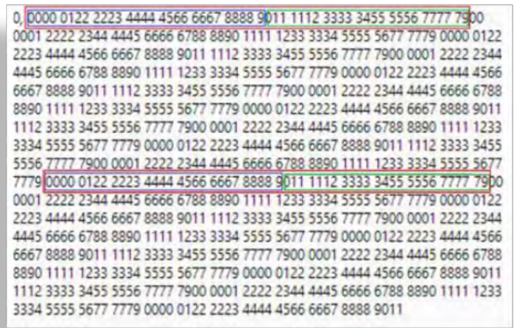
Les extraits qui suivent proviennent d'une narration de deux étudiants. Ils illustrent leur engagement dans la tâche : ils se l'approprient complètement, ce qui les fait partir dans une direction très personnelle et fructueuse, à l'image de ce que l'on souhaite pour les élèves. Voici ce qu'ils disent :

« Nous avons obtenu pour 1/81 : 0,01234567901(…) et pour 1/8181 : 0,00012223344456667(…). Nous avons essayé de mettre en évidence un lien entre les deux résultats obtenus dans le but de trouver une relation mathématique. Nous avons constaté que pour la première division, les décimales augmentaient de manière croissante de 0 à 9 avec toutefois, une exception pour le chiffre 8, celui-ci n'étant pas présent. De plus en effectuant le calcul sur le logiciel, nous avons remarqué une ***périodicité*** *dans le résultat :*

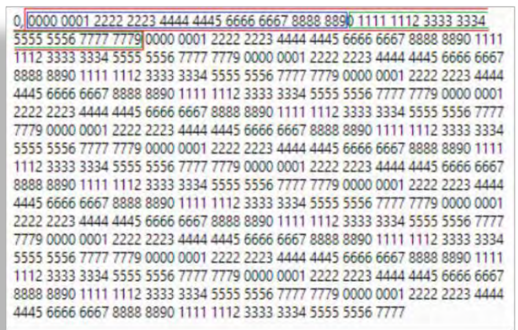
Nous avons également remarqué cette ***périodicité*** *en effectuant le calcul 1/8181. Cependant, nous pouvons remarquer une subtilité mathématique propre à cette division, que nous appellerons ici principe de «****double périodicité****». En effet, comme relevé par les cadres bleus et verts nous constatons deux segments chiffrés distincts mais se répétant, formant la périodicité.*



Face à ce constat, nous avons orienté notre recherche sur les déclinaisons du dénominateur, afin de donner une explication à l'agencement croissant des décimales retrouvé au sein des deux périodicités Pour cela, nous avons effectué la division 1/818181 :



Malgré l'orientation que nous voulions prendre en début d'investigation, à savoir, donner une explication à l'agencement croissant des décimales, nous nous sommes ***laissé surprendre par le jeu de tâche*** *en constatant un résultat équivalent au précédent. En effet, il existe à nouveau une «* ***double périodicité*** *» et une répétition de certains chiffres. Pour comprendre plus précisément ce phénomène qui nous a semblé plus intéressant, nous avons réalisé la division 1/81818181: »*



4 En quoi les futurs enseignants peuvent-ils tirer profit d'une compréhension plus approfondie des connaissances des élèves et ce qu'ils en disent ?

> Pour commencer, je propose à ce garçon d'explorer le calcul 1/81. Il réalise donc cette opération à la calculatrice et note la réponse. Pour continuer, je lui demande de changer le numérateur par des chiffres allant jusqu'à 10 et d'observer ce qu'il se passe. Il réalise tous les calculs et les note sur sa feuille. Il remarque immédiatement des régularités : *« pour tous les numérateurs qui sont multiples de 3, le résultat présente une suite de nombres réguliers »*. Par exemple, 6/81 donne 0,07407407407... Je lui demande de vérifier cela en trouvant d'autres exemples. Il réalise alors les divisions suivantes en prenant des numérateurs multiples de 3 : 12/81 (0,14814814814…), 15/81 (0,18518518515…) et 18/81 (0,22222222222…). Il me répond donc *« bah oui ça fonctionne, y a à chaque fois des régularités »*. J'allais lui poser une autre question lorsqu'il me dit que pour le 9/81 et le 18/81, les décimales se répètent avec toujours le même chiffre. Puis, il se reprend et explique que *« ça joue quand même parce qu'on peut très bien voir dans le 9/81 un 111 qui se répète après la virgule et dans le 18/81*

Après une investigation personnelle plus approfondie, les étudiants se sentent renforcés et encouragés à se confronter « *sans filets* » aux élèves. L'auteure de la narration ci-contre est dans une véritable interaction et pilote le jeu. Elle interagit à partir de ses propres connaissances, de ce qu'elle entend et «comprend» de ce que lui dit l'élève. Nous avons interprété succinctement sa narration ; les actions des élèves soulignées dans sa narration ont été réécrites sous forme de points, pour éclaircir l'interprétation. *R* signifie «élaboration d'une règle.

- Je propose à ce garçon d'explorer le calcul 1/81
- Je lui demande de changer le numérateur…
- J'allais lui poser une autre question lorsque…
- Je décide de rebondir… et lui demande…
- Je lui demande de tester avec d'autres numérateurs M9
- Je lui demande de prédire les résultats
- Je lui demande jusqu'où prédire
- Je propose d'essayer avec un numérateur plus grand
- Je lui demande de résumer les constats
- Ce qui laisse la porte ouverte à un autre jeu de tâches

- Il réalise l'opération à la calculatrice et note la réponse
- Il réalise tous les calculs…
- Il remarque des régularités
- Il observe M3 et M9
- Il réalise les calculs…
- Il prédit les résultats
- …jusqu'à l'infini
- Ne sait plus que répondre
- *R :* Lorsqu'on divise les multiples…
- *R :* Lorsque les numérateurs sont aussi multiples…

Ces deux tableaux sous forme de question/réponse montrent la correspondance que l'on peut établir entre une injonction et une action effectivement réalisée. L'exercice qui consistait à interpréter les narrations des étudiants selon le crible élémentaire « *qu'est-ce que l'étudiant dit que l'élève fait, et qu'est-ce que l'élève fait* » est porteur pour plusieurs raisons : tout d'abord, il est simple à utiliser et garantit une certaine objectivité d'une part et l'assurance que les étudiants se centrent sur l'objet et non pas sur des considérations d'ordre émotionnel : l'interprétation du discours est centrée sur les connaissances et les actions de l'élève en mathématiques.

Les étudiants ont dû se centrer sur la question de savoir ce que fait réellement l'élève et donner des indices de ce qu'ils avancent, basés sur ce que le milieu renvoie.

IV - PROPOS CONCLUSIFS

En guise de conclusion, nous reprenons l'idée principale qui nous a portée dans la décision d'utiliser le jeu de tâches et sa narration en formation d'enseignants. Il nous a semblé que l'apport essentiel est de permettre aux étudiants d'inférer un raisonnement à partir des actions mathématiques des élèves et d'interpréter les connaissances manifestées. Le fait de procéder par étapes laisse le temps de l'élaboration de connaissances aux étudiants. Premièrement, ils procèdent à la narration de leur jeu de tâches en langage naturel ; une sorte de narration spontanée : ils écrivent comme les choses leur viennent, sans penser à autre chose que de restituer leur jeu de tâches. L'écriture possède cette fonction d'élaboration du contenu et de mise en ordre des idées. S'ils sont bloqués dans leur écriture, il leur *suffit* de restituer le plus *objectivement* possible, ce que l'élève a réellement fait, en pointant ce que le milieu renvoie. Toutefois il est bien clair qu'il y a un abus de langage ici, car on ne peut parler de réelle objectivité dans cette démarche, partant du principe que ce qui nous intéresse n'est justement pas une réalité objective, mais bien ce que l'étudiant dit que l'élève fait. Toutefois, c'est à partir de cette subjectivité que l'on peut déceler les mathématiques évoquées par la tâche et convoquées dans l'interprétation de l'interaction entre l'élève et l'étudiant.

Les apports du jeu de tâches et de sa restitution par la narration peuvent s'inscrire dans une certaine stimulation des apprentissages et motivation à chercher, du fait de la propension des élèves et des étudiants à la création de questions de recherche à partir des tâches, qui s'égrènent au fil de la recherche ; ces dernières peuvent se révéler très personnelles et montrent où se situent les questions qu'élèves ou étudiants se posent à propos du nombre. Elles permettent en outre la mise en place et la constitution d'expériences chez les élèves, ce qui leur fait défaut la plupart du temps, car comme on le sait, la dévolution s'opère sur un temps très long, que les élèves n'ont pas toujours à disposition. La narration permet de mettre en évidence les mathématiques effectuées par les élèves et/ou les étudiants et de jauger l'expérience qu'ils en font. L'enseignant peut, lui aussi, exploiter de cette manière, les compétences et les connaissances de chaque élève pour stimuler et motiver ses apprentissages. Toutefois, il y a une condition forte : accepter l'idée de l'interaction de connaissances et de l'engagement de ses propres connaissances dans le milieu, ce qui suppose une dynamique. On n'est plus simple spectateur du travail de l'élève.

Pour terminer, nous avons retenu quelques lignes de narrations d'étudiants qui nous encouragent à poursuivre dans cette direction scientifique :

> « *Pour terminer, nous sommes surpris de l'engouement que nous avons eu lors de la phase réflexive concernant l'investigation du milieu. En effet, nous nous sommes laissés surprendre par l'envie d'investiguer davantage et par les possibilités de recherche que nos deux calculs de base offraient. Nous sommes donc convaincus du fait que ce type de démarche a un réel potentiel d'enseignement et d'apprentissage et qu'il serait pertinent de favoriser son utilisation en classe. Nous avons été impressionnés par l'intérêt dont les élèves ont fait preuve. Ils étaient réellement pris et motivés par les différentes tâches que nous leur avons mis à disposition afin de rechercher les différentes logiques autour de cette division.* »

V - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARSAC G., GERMAIN G., MANTE M. (1991) Situations-problème et problèmes ouverts. IREM de Lyon.

BENJAMIN W. (1936). Rastelli raconte… et autres récits suivi de : le narrateur, Seuil.

CHEVALIER A. (1992) Narration de recherche : un nouveau type d'exercice scolaire, *Petit x*, **33**, 71-79.

CHARRIÈRE G. & al. (1991). Sur les pistes de la mathématique en division moyenne, *cahier n° 40 du Service de la Recherche Pédagogique*, Département de l'instruction publique, Genève.

CONNE F. (2001). Pertes de contrôle et prises de contrôles dans l'interaction de connaissances. *Actes de la 11ème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Corps, France.

DDMES (2011). Des narrations pour partager et faire rebondir nos expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Actes des deuxièmes journées didactiques,* Chaux-d'Abel, Suisse.

DEL NOTARO C. (2011). La narration comme révélateur de l'expérience mathématique des élèves et de l'expérimentateur. *Actes des deuxièmes journées didactiques,* Chaux d'Abel, Suisse, 24-26.

DEL NOTARO C. (2012). Le jeu de tâches, une interaction de connaissances particulière entre expérimentateur et élèves, 1-14, *Actes du XXVIIIème Colloque COPIRELEM*, IREM de Dijon, 1-14.

DEL NOTARO C. (2014). Des élèves à l'Uni! De la narration de l'expérience à l'expérience par la narration: mise en évidence de relations entre «règle, expérience et logique», *Educateur*, 01.14, 16-18.

DUCRET J.J. (2004). *Texte gris rédigé pour servir de base à un séminaire sur la méthode piagétienne qui s'est déroulé le 8 octobre 2004 dans le cadre du Service de la recherche en éducation du canton de Genève.*

PERRAUDEAU M. (1998). Échanger pour apprendre : L'entretien critique, Paris, Armand Colin, 159 p., ISBN 2-200-01971-8

SAUTER M. (1998). Narration de recherche : une nouvelle pratique pédagogique, *Repères IREM*, **30**, 9-21.

QUELLES RESSOURCES LES ENSEIGNANTS UTILISENT-ILS AFIN DE TROUVER DES ENONCES DE PROBLEMES OUVERTS EN MATHEMATIQUES AU CYCLE 3 ?

Christine CHOQUET-PINEAU
Formateure, Espe de l'Académie de Nantes, Site du Mans
CREN, Université de Nantes
Christine.choquet@univ-nantes.fr

Résumé Cette communication rend compte d'un chapitre de notre thèse consacrée à l'étude, dans le cadre théorique de *la double approche didactique et ergonomique* (Robert, Rogalski, 2002), des pratiques de professeurs des écoles lorsqu'ils proposent en mathématiques des séances dédiées à des problèmes ouverts au cycle 3 (Choquet, 2014). Elle concerne l'analyse des ressources disponibles et l'étude des choix que font les enseignants parmi ces ressources afin de trouver des énoncés de problèmes ouverts. D'une part, après avoir identifié les ressources dont les professeurs des écoles peuvent raisonnablement disposer, nous en proposons une analyse qui vise à déterminer s'il est possible d'y trouver des énoncés de problèmes ouverts. Nous aborderons ainsi la question de la visibilité de ce type de problèmes pour des enseignants. Autrement dit, des enseignants cherchant des énoncés de problèmes ouverts peuvent-ils facilement en trouver dans les différentes ressources dont ils disposent ? D'autre part, nous présentons l'analyse des choix que cinq professeurs des écoles font pour leur classe. Cette analyse, utilisant des éléments du cadre théorique de *l'approche documentaire du didactique* (Gueudet & Trouche, 2010), nous permet de repérer, à partir de régularités identifiées dans les choix des professeurs, des *invariants opératoires* à savoir des connaissances, des représentations de l'enseignant, souvent implicites, qui semblent sous tendre l'utilisation des ressources par ces cinq professeurs des écoles et envisager une explication des choix qui sont faits.

Cette communication s'appuie sur une partie de notre thèse. Nous présentons d'abord brièvement notre recherche en précisant la problématique, le cadrage théorique ainsi que la méthodologie de recueil puis d'analyse de données. Nous développons ensuite l'enjeu de la communication selon deux axes : un premier s'intéressant à une analyse des ressources disponibles pour des professeurs des écoles lorsqu'ils cherchent des énoncés de problèmes ouverts et le second présentant les choix effectués par les cinq professeurs des écoles observés dans notre travail ainsi qu'une tentative d'explication de ces choix.

I - PRESENTATION DE LA RECHERCHE

Notre recherche s'intéresse aux pratiques ordinaires de professeurs des écoles proposant des problèmes ouverts dans leur classe de cycle 3. Afin d'étudier ces pratiques, il nous semble nécessaire d'aborder la question des ressources en étudiant celles dont les enseignants disposent et les choix qu'ils font parmi cet ensemble de ressources.

1 Problématique et cadrage théorique

Nous rappelons tout d'abord la caractérisation des problèmes ouverts établie par Arsac & Mante (2007) :

« *L'énoncé est court. L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions du type « montrer que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours. Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.* ». Dans notre recherche, nous cherchons à décrire les pratiques ordinaires de professeurs des écoles lorsqu'ils proposent des problèmes de ce type dans leur classe afin de les comprendre. Concernant l'usage des ressources qui nous intéresse dans cette communication, il s'agit de décrire les choix que font les enseignants lorsqu'ils cherchent des énoncés de problèmes ouverts et d'expliquer ces choix.

Pour cela, nous nous plaçons dans le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique développé par A. Robert & J. Rogalski (2002). Ce cadre permet d'envisager l'étude de la pratique des enseignants selon deux approches, didactique et ergonomique, en tenant compte de toute leur complexité. Cinq composantes de la pratique sont considérées : deux composantes, cognitive et médiative, sont liées aux séances menées par les enseignants et rendent compte du point de vue didactique des pratiques associées aux apprentissages potentiels des élèves. Les trois autres composantes, sociale, institutionnelle et personnelle, sont liées à l'exercice du métier d'enseignant et aux contraintes qui en découlent.

De plus, la résolution en classe de problèmes ouverts n'est pas directement liée à l'étude de savoirs mathématiques curriculaires. Les savoirs à enseigner dans le cas des problèmes ouverts restent flous (Hersant, 2010), ils ne sont explicitement exposés ni dans les instructions officielles, ni dans les manuels scolaires comme peuvent l'être les savoirs liés à l'enseignement d'une notion bien définie. L'ensemble des manuels scolaires à disposition des professeurs des écoles va par exemple réserver des pages à l'enseignement de la symétrie axiale et ces pages pourront être facilement identifiées par chaque enseignant. En revanche, même si les programmes de l'école primaire en vigueur (MEN, 2008) encouragent les enseignants à « *développer chez tous les élèves des capacités de recherche et de raisonnement* », ils ne sont pas clairs sur les moyens d'y parvenir, sur les savoirs alors à enseigner et les manuels ne proposent pas explicitement des pages réservées à des problèmes ouverts (dont un des objectifs est le développement de capacités de recherche chez les élèves). De ce fait, afin d'affiner les analyses en termes d'usage des ressources par les enseignants, nous utilisons des éléments du cadre théorique de l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche, 2010) et ceci notamment afin de renseigner plus précisément la composante institutionnelle de leur pratique.

2 Méthodologie générale de cette recherche

Notre travail concerne des pratiques ordinaires au sens où nous ne sommes intervenus ni dans le choix des problèmes ouverts à proposer en classe, ni dans la préparation et la mise en œuvre des séances dédiées à l'étude de ces problèmes. Afin d'étudier ces pratiques ordinaires et notamment l'usage des ressources dans le cas de la proposition de problèmes ouverts en classe, nous avons choisi d'observer cinq professeurs des écoles enseignant au cycle 3. Ces cinq professeurs ne sont pas débutants, ils enseignent dans des écoles non défavorisées socialement et depuis au moins cinq ans avec des élèves de niveau cycle 3. Par ailleurs, nous précisons que ces cinq enseignants n'ont pas suivi d'études en mathématiques à l'université. En cela, nous pouvons dire qu'ils ne sont pas, comme bon nombre de professeurs des écoles en France (Artigue, 2011), spécialistes des mathématiques comme peuvent l'être des professeurs de mathématiques du second degré.

L'observation des séances s'est faite sur un temps long, elle est répartie sur l'année scolaire. Après un premier entretien avec les cinq enseignants en début d'année scolaire, nous avons observé, filmé du fond de la classe puis transcrit toutes les séances qu'ils nous disent dédier aux problèmes ouverts. Nous avons recueilli les travaux écrits des élèves sous forme de brouillons, feuilles de recherche et/ou affiches. Des travaux de groupes ont été enregistrés et transcrits. Des échanges avec les enseignants ont également eu lieu avant et après chaque séance et ont été transcrits. Ils ont permis de recueillir, tout au long de l'année, des informations sur la préparation des séances, sur leurs mises en œuvre et sur le travail des élèves lors de ces séances.

Nous détaillerons plus loin, dans chaque partie, notre méthodologie d'analyse concernant l'usage des ressources. Nous préciserons comment nous repérons les ressources raisonnablement disponibles pour les enseignants que nous observons et comment nous analysons ces ressources puis comment, en nous appuyant sur le cadrage théorique choisi, nous tentons d'expliquer les choix que les enseignants font parmi les ressources disponibles.

II - ANALYSE DES RESSOURCES DONT LES PROFESSEURS PEUVENT RAISONNABLEMENT DISPOSER

Avant d'analyser les choix des cinq enseignants observés en termes de ressources, nous proposons dans cette partie de recenser celles que nous estimons être raisonnablement disponibles pour des professeurs des écoles lorsqu'ils cherchent des énoncés de problèmes ouverts pour leur classe de cycle 3. Nous précisons ensuite comment nous les avons étudiées afin de déterminer si des énoncés de problèmes ouverts sont repérables dans ces ressources par des enseignants ordinaires et présentons les résultats de notre analyse.

1 Quelles sont ces ressources ?

1.1 Des manuels scolaires accompagnés de livres du professeur

Par manuels scolaires, nous entendons, dans la suite de cette communication, les ouvrages destinés aux élèves et par livres du professeur, nous considérons les ouvrages à destination des enseignants accompagnant, dans la plupart des collections, les manuels destinés aux élèves. Une majorité de professeurs des écoles de cycle 3 se réfère à un ou plusieurs manuels scolaires pour préparer leurs séances et pour travailler en classe (Durpaire, 2008), ces manuels étant le plus souvent accompagnés de livres du professeur. Suite aux nouvelles instructions officielles de l'année 2008, les maisons d'éditions ont envoyées, en 2009 et 2010, dans les écoles primaires de nouveaux spécimens pour le cycle 3. Nous avons recensé une douzaine de spécimens ainsi mise à disposition des professeurs. Il nous semble donc que tous ces manuels ne vont pas être utilisés, que les enseignants vont faire un choix parmi les collections proposées. Nous ne proposons ici pas une recherche exhaustive des manuels scolaires diffusés, nous décidons de centrer notre travail sur les deux collections les plus utilisées dans notre département (IA 72, 2010) : *J'apprends les maths* CE2, CM1 et CM2 (Editions Retz, 2010) et *CapMaths* CE2, CM1 et CM2 (Editions Hatier, 2008, 2010). Par ailleurs, nous choisissons d'étudier les manuels scolaires de CE2, CM1 et CM2 de la collection *Euromaths* (Editions Hatier, 2009, 2010). En effet, ces trois manuels étant conçus par des didacticiens (Briand, Ngono, Peltier & Vergnes), il nous semblait intéressant de l'intégrer à notre étude afin de les comparer aux deux autres collections.

1.2 D'autres types de ressources

Nous choisissons d'étudier d'autres ressources que nous pensons être raisonnablement disponibles pour des enseignants de cycle 3. Pour en faire une liste, nous nous sommes appuyés sur le document d'accompagnement des programmes intitulé « *Le problème pour chercher* » (MEN, 2003) que les professeurs observés dans notre travail, non débutant et enseignant depuis plus de cinq ans, ont pu avoir en main. Les auteurs de ce document proposent une liste de ressources, autres que les manuels scolaires, dans lesquelles il est possible de trouver des énoncés de problèmes de type ouvert :

« certains manuels intègrent de tels problèmes à leur progression.

- *Des travaux de recherches (comme ceux de l'équipe Ermel de l'INRP) fournissent également des exemples de mises en œuvre.*
- *Certaines productions de la COPIRELEM ou des revues pour les enseignants […], par exemple un numéro spécial de la revue Grand N 'points de départ' (édité en 2003) propose des activités et problèmes mathématiques pour des élèves de cycle 3.*
- *Les concours et rallyes mathématiques […] sont une autre source d'inspiration pour les enseignants : ces problèmes sont souvent disponibles en ligne sur le réseau Internet et peuvent être trouvés en utilisant un moteur de recherche. La revue Math-école publie également les épreuves du rallye mathématique transalpin. »* (MEN, 2003, p. 8).

Notre choix s'oriente donc tout d'abord vers les ouvrages de la collection *Ermel* dédiés aux niveaux CE2, CM1 et CM2 et le numéro spécial « *Points de départ* » de la revue professionnelle *Grand N* (IREM de

Grenoble, 2003). Il s'agit ensuite de différents sites Internet cherchant à promouvoir des rallyes mathématiques : le site dédié au rallye mathématique transalpin (ARMT) qui propose tous les ans, depuis l'année 1995, des épreuves communes à la Suisse, la France, la Belgique et l'Italie, les sites dédiés aux rallyes mathématiques de la Haute-Loire, du Puy de Dôme (niveau primaire) et de La Sarthe (niveau collège et cycle 3). Ces trois derniers rallyes sont choisis d'une part parce que, utilisant un moteur de recherche, les sites des rallyes de la Haute-Loire et du Puy de Dôme apparaissent régulièrement, au moment de nos analyses, en premier dans les listes proposées sur Internet et d'autre part parce que notre étude se situant dans la Sarthe, les enseignants observés sont susceptibles de connaître le site du rallye mathématique de la Sarthe et/ou d'être encouragés à le consulter par des inspecteurs et des conseillers pédagogiques du département.

2 Analyse des manuels scolaires

Nous cherchons ici à répondre à deux questions : les ressources identifiées proposent-elles des énoncés de problèmes ouverts ? Ces énoncés sont-ils repérables par des professeurs des écoles ordinaires ? Nous interrogeons ainsi la lisibilité des ressources pour des enseignants ordinaires. Autrement dit, s'ils cherchent des énoncés de problèmes ouverts, peuvent-ils facilement en trouver dans les différentes ressources dont ils disposent ?

Pour cela, après avoir identifié le statut des auteurs dans la communauté éducative des différentes collections, nous procédons à deux analyses successives. La première concerne l'étude des sommaires des différentes ressources, la seconde est une analyse d'énoncés utilisant la caractérisation du problème ouvert (Arsac & Mante, 2007).

2.1 Analyse des sommaires

Il s'agit de déterminer si à la lecture du sommaire, il est possible de déceler ou non la présence de problèmes ouverts dans la ressource étudiée. Pour cela, nous repérons dans le sommaire, l'utilisation faite par les auteurs d'expressions autour du mot-clé *problème*. Nous étudions également ce qu'en disent les auteurs dans le manuel scolaire destiné à l'élève et dans le livre du professeur. Autrement dit, nous déterminons si les auteurs annoncent explicitement des pages dédiées à ce type de problèmes. Si oui, nous analysons ensuite les énoncés proposés dans les pages ainsi repérées.

2.2 Analyse des énoncés

Quand des pages susceptibles de contenir des énoncés de problèmes ouverts sont repérées dans le sommaire, nous analysons ces énoncés en nous appuyant sur la caractérisation des problèmes ouverts par Arsac & Mante (2007). Nous étudions notamment la longueur de l'énoncé, la présence ou non de questions intermédiaires. Nous nous demandons si le domaine mathématique abordé dans le problème est familier ou non des élèves de cycle 3 et s'il est possible de mettre en œuvre pour des élèves de cet âge une démarche scientifique (à savoir s'il est possible pour eux de faire des essais, de formuler des hypothèses quant aux résultats attendus, de faire des tests pour vérifier ces hypothèses).

2.3 Résultats de ces analyses

Ces deux analyses successives nous permettent d'obtenir des résultats pour chacune des ressources étudiées. Nous présentons le pourcentage de problèmes ouverts trouvés par rapport à l'ensemble des problèmes proposés par les auteurs dans les pages repérées dans le sommaire et indiquons entre parenthèses le nombre d'énoncés de problèmes ouverts repérés que cela représente.

Concernant les sommaires des neuf manuels étudiés

À travers les sommaires des neuf manuels étudiés, des pages réservées à la résolution de problèmes sont annoncées. En revanche, comme nous pouvions nous y attendre, l'expression « problème ouvert » n'est jamais mentionnée.

Plus précisément, les sommaires des deux collections *Cap Maths* et *Euromaths* proposent des pages réservées respectivement à des *problèmes pour chercher* et à des *problèmes pour apprendre à chercher*. De ce fait, nous étudions ces pages en termes de présence ou non de problèmes ouverts. Nous pensons que des enseignants de cycle 3 cherchant des énoncés de problèmes ouverts, suite à la lecture de ces sommaires, peuvent penser qu'ils en trouveront dans ces deux collections. Par ailleurs, le sommaire de la collection *J'apprends les maths* annonce des pages réservées à des *ateliers de résolution de problèmes* sans plus de précision. Nous choisissons de les étudier afin de repérer ou non des problèmes ouverts. Nous faisons l'hypothèse que des enseignants de cycle 3, du fait d'un sommaire non explicite en termes de problèmes de type ouvert, ne choisiront sans doute pas cette collection lorsqu'ils cherchent des énoncés de problèmes ouverts.

Concernant les neuf manuels étudiés

Les propositions des trois collections sont différentes en termes de problèmes ouverts comme le montrent les résultats suivants :

- Collection *CapMaths*

  -dans les « unités » : CE2, CM1 pas de PO, CM2 (4),

  -dans la « banque de problèmes » : CE2 17% (19), CM1 11% (14), CM2 28% (37).

- Collection *Euromaths*

  -dans les pages « problèmes pour apprendre à chercher », « problèmes pour apprendre à débattre » : CE2 100% (9), CM1 100% (9), CM2 75% (12).

- Collection *J'apprends les Maths*

  -dans les « ateliers de résolution de problèmes » : CE2 2,8% (2), CM1 4,2%(5), CM2 2,3%(3).

Dans les manuels de la collection *Cap Maths*, peu d'énoncés de problèmes ouverts sont proposés dans les unités, les enseignants peuvent néanmoins en trouver dans les pages intitulées *banque de problèmes*, situées en fin de manuel. Ces énoncés sont en nombre suffisant pour permettre une utilisation sur l'année, mais ils relèvent presque tous de la résolution d'équations diophantiennes : des élèves de cycle 3, pour les résoudre, sont amenés à faire des hypothèses et à tester leur cohérence avec les données de l'énoncé. Malgré cela, la présentation de la *banque de problèmes*, peu explicite quant au caractère ouvert des problèmes, ne facilite pas le choix que les professeurs des écoles ont à faire parmi cette liste d'énoncés voire peut les décourager à l'utiliser.

Concernant la collection *Euromaths*, les pages intitulées « problèmes pour apprendre à chercher » proposent des énoncés de problèmes ouverts dans le domaine numérique pour les niveaux CE2 et CM1. Les pages intitulées « *problèmes pour apprendre à chercher* », « *problèmes pour apprendre à débattre* » proposent des problèmes ouverts dans les domaines numérique et géométrique. Nous considérons que le choix est ainsi facilité pour les enseignants de cycle 3. Ces différentes pages permettent d'identifier facilement des problèmes ouverts quand ils en cherchent.

Notre analyse des énoncés dans les pages intitulées « *atelier de résolution de problèmes* » de la collection *J'apprends les maths* montre que très peu des problèmes sont ouverts. De plus, la présentation des manuels n'est pas explicite en termes de problèmes ouverts et, même si certains énoncés pourraient être ouverts en les transformant, il nous semble difficile pour des professeurs des écoles ordinaires de faire un tri parmi les problèmes proposés.

3 Analyse des autres ressources

3.1 Méthodologie d'analyse

Afin d'étudier les autres ressources disponibles pour des enseignants du cycle 3, nous repérons, dans les sommaire des ouvrages et dans les pages d'accueil des sites, la proposition explicite ou non de problèmes ouverts. Puis nous analysons des extraits de ces ouvrages et des sites afin de repérer la présence ou non de problèmes ouverts.

3.2 Résultats des analyses

Dans la collection Ermel

Le sommaire des ouvrages destinés aux classes de CE2, CM1 et CM2 annonce la présence de problèmes rassemblés dans un module ayant pour enjeu de « *développer des stratégies de recherche* ». L'analyse de chacun des énoncés constituant ce module montre que 7 problèmes ouverts sont proposés pour la classe de CE2 , 5 problèmes pour la classe de CM1 et 4 problèmes pour la classe de CM2.

Dans le numéro spécial Grand N

Le sommaire annonce la présence d'une cinquantaine de problèmes s'adressant à tous les niveaux de l'école primaire. En analysant quelques énoncés nous semblant représentatifs de l'ouvrage, comme celui présenté ci-après (Cf. Figure 1), nous constatons que ce sont des problèmes ouverts pour des élèves de cycle 3.

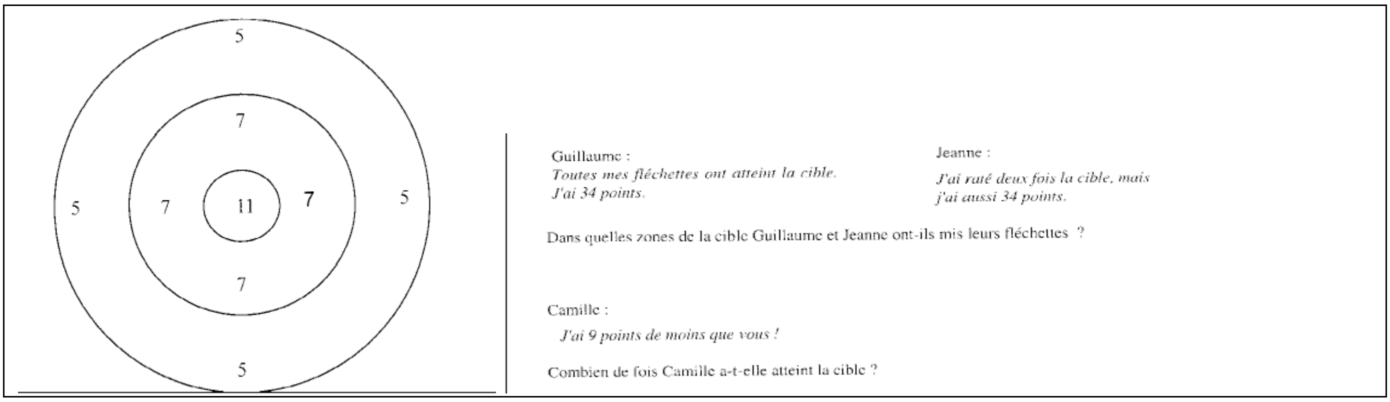


Figure 1 Point de départ, Grand N, p. 46, 2003

*Sur le site du Rallye Mathématique Transalpin (*RMT*)*

La page d'accueil du site oriente vers des archives du rallye mathématique qui a lieu tous les ans depuis l'année 2001. Les problèmes proposés au rallye sont disponibles sous la forme d'une fiche par énoncé, accompagné d'une brève analyse *a priori*. Bon nombre de ces problèmes, comme celui présenté ci-après (Figure 2), peuvent être des problèmes ouverts pour des élèves de cycle 3.

Sur les sites des autres rallyes mathématiques

La page d'accueil de chacun des sites oriente vers des archives, vers des fiches d'une dizaine d'énoncés, accompagnés d'une brève solution. Ces fiches, dont nous donnons un exemple ci-après (Figure 3), ont été proposées aux élèves lors des rallyes mathématiques et ceci tous les ans depuis la fin des années quatre-vingt-dix.

14e RMT ÉPREUVE I janvier- février 2006 ©ARMT 2006 9

7. CHACUN À SA PLACE (Cat. 4, 5, 6)

Alfred, Brice, Carla, Dany, Émile, Frédéric, Gina et Henri vont s'installer autour d'une table ronde. Alfred a déjà choisi sa place et a mis des cartons vides sur la table pour indiquer la place de ses camarades.

- Gina veut être à côté de Frédéric, mais pas à sa gauche.
- Carla veut être assise entre Brice et Émile.
- Dany veut être à côté de Gina.
- Émile veut être juste en face d'Alfred.
- Henri veut être assis juste à la droite d'Alfred.

Trouvez une disposition possible et écrivez le nom des enfants à leur place.
Indiquez les étapes qui vous ont permis de placer toutes les personnes.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : positions relatives
- Logique : déduction

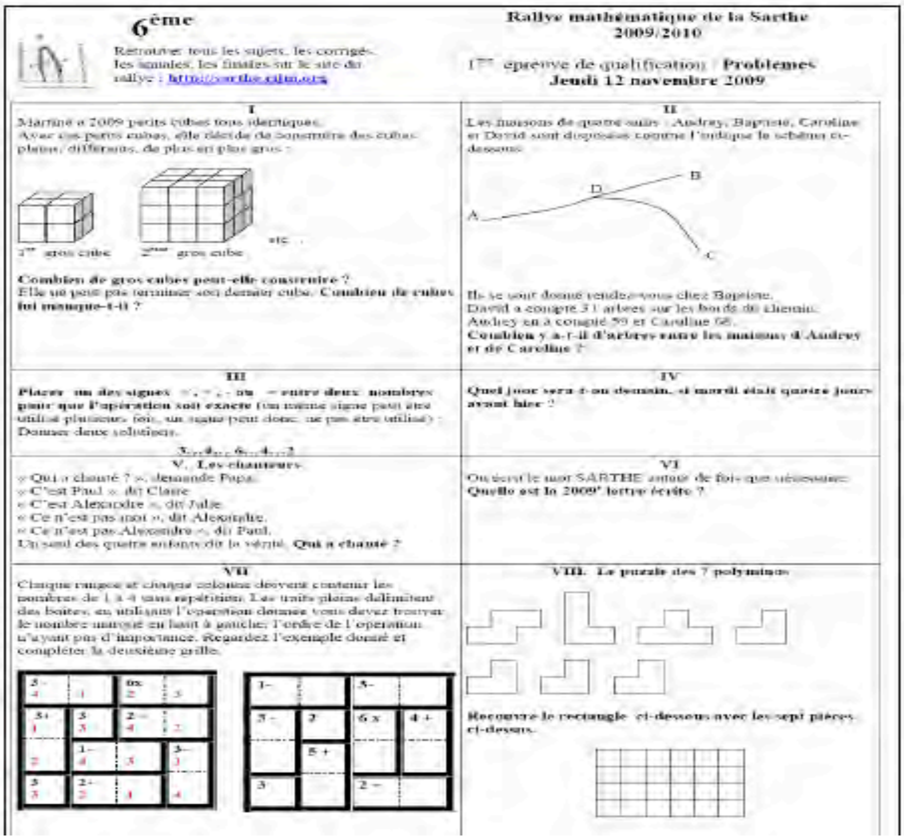
Analyse de la tâche

- Comprendre logiquement les contraintes en se mettant à la place de chaque enfant.
- Procéder par essais, en plaçant les étiquettes et en vérifiant ensuite si les contraintes sont respectées.
- Commencer par placer les personnages dont la position est sans équivoque : Émile et Henri.
- Placer ensuite les autres enfants à partir de ceux qui sont déjà placés par essais successifs ou par déductions, par exemple, si Carla - qui doit être à côté d'Émile - était à sa droite, Brice viendrait ensuite et il ne resterait qu'une place entre Brice et Alfred et deux places entre Émile et Henri ; on ne pourrait plus alors placer les trois derniers enfants : Gina entre Frédéric et Dany.
  Carla est donc à gauche d'Émile, suivie de Brice et de Henri. Les trois places qui restent sont pour Gina, à droite de Frédéric et Dany à droite de Gina (et à gauche d'Alfred). Ce qui donne dans le sens des aiguilles d'une montre :
  A, D, G, F, E, C, B, H.

Attribution des points

4 Réponse correcte (dans le sens des aiguilles d'une montre : A, D, G, F, E, C, B, H), avec explication sur la démarche

Figure 2 Fiche présentant un problème proposé lors du 14ème RMT, 2006.



6ème

Retrouver tous les sujets, les corrigés, les annales, les finales sur le site du rallye : http://sarthe.cijm.org

Rallye mathématique de la Sarthe 2009/2010

1re épreuve de qualification / **Problèmes**
Jeudi 12 novembre 2009

I

Martine a 2009 petits cubes tous identiques.
Avec ces petits cubes, elle décide de construire des cubes pleins, différents, de plus en plus gros :

Combien de gros cubes peut-elle construire ?
Elle ne peut pas terminer son dernier cube. **Combien de cubes lui manque-t-il ?**

II

Les maisons de quatre amis : Audrey, Baptiste, Caroline et David sont disposées comme l'indique le schéma ci-dessous.

Ils se sont donné rendez-vous chez Baptiste.
David a compté 31 arbres sur les bords du chemin.
Audrey en a compté 59 et Caroline 68.
Combien y a-t-il d'arbres entre les maisons d'Audrey et de Caroline ?

III

Placer un des signes +, −, × ou ÷ entre deux nombres pour que l'opération soit exacte (un même signe peut être utilisé plusieurs fois, un signe peut donc ne pas être utilisé) ; Donner deux solutions.

3...4...6...4...2

IV

Quel jour sera-t-on demain, si mardi était quinze jours avant hier ?

V. Les chanteurs

« Qui a chanté ? », demande Papa.
« C'est Paul », dit Claire.
« C'est Alexandre », dit Julie.
« Ce n'est pas moi », dit Alexandre.
« Ce n'est pas Alexandre », dit Paul.
Un seul des quatre enfants dit la vérité. **Qui a chanté ?**

VI

On écrit le mot SARTHE autant de fois que nécessaire.
Quelle est la 2009e lettre écrite ?

VII

Chaque rangée et chaque colonne doivent contenir les nombres de 1 à 4 sans répétition. Les traits pleins délimitent des boîtes, en utilisant l'opération donnée vous devez trouver le nombre marqué en haut à gauche, l'ordre de l'opération n'ayant pas d'importance. Regardez l'exemple donné et compléter la deuxième grille.

VIII. Le puzzle des 7 polyminos

Recouvre le rectangle ci-dessous avec les sept pièces ci-dessus.

Figure 3 Epreuves destinées aux élèves de sixième, 2009.

3.3 Conclusion sur les autres ressources

Notre analyse des différentes ressources autres que les manuels scolaires, dont nous ne présentons ici qu'un extrait, montre que celles-ci mettent à disposition des professeurs des écoles de nombreux problèmes ouverts. De plus, la présentation de ces ouvrages étant explicite quant à la présence de problèmes visant le développement des capacités de recherche chez les élèves apporte une certaine lisibilité aux enseignants cherchant des énoncés de problèmes ouverts. Nous pouvons penser qu'ils vont facilement trouver ces énoncés dans ces ressources. Malgré tout, il nous semble qu'une difficulté apparaît ici : en effet, l'offre est importante tant dans ces ouvrages que sur les sites dédiés aux rallyes mathématiques. De ce fait, les enseignants ont un réel choix à faire parmi les nombreux énoncés et nous pouvons penser que ce choix peut s'avérer pour eux difficile.

4 Conclusion

La proportion de problèmes ouverts dans les manuels scolaires étudiés ici n'est pas majoritaire parmi l'ensemble des problèmes proposés. Notre analyse nous permet de penser qu'un professeur des écoles va facilement identifier des problèmes ouverts dans les ouvrages de la collection *Euromaths* alors qu'il aura plus de difficultés à en trouver dans les ouvrages des collections *CapMaths* et *J'apprends les maths* notamment du fait d'une présentation non explicite en termes de problèmes ouverts dans ces deux collections.

Finalement, les professeurs des écoles pourront trouver des problèmes ouverts dans les ouvrages *Ermel*, dans le numéro spécial de la revue *Grand N* ainsi que sur des sites dédiés à des rallyes mathématiques tels que le rallye RMT, les rallyes mathématiques du Puy de Dôme et de La Sarthe. Néanmoins, nous pensons que, du fait d'un nombre important d'énoncés, l'utilisation de ces autres ressources et le choix d'énoncés pour la classe peuvent s'avérer difficiles.

Dans la suite, nous étudions ces choix et comment les différentes ressources identifiées sont utilisées par les cinq enseignants participants à notre étude.

III - LES CHOIX DES PROFESSEURS DES ECOLES

Dans cette partie, nous présentons les choix effectués par chacun des cinq enseignants observés dans notre étude en termes de ressources puis les analysons afin de les expliquer.

1 Les choix des cinq enseignants observés

Le tableau suivant résume les ressources choisies par les cinq enseignants.

	E1	E2	E3	E4	E5
Cap Maths					
J'apprends les maths					
Euromaths			CM2		
Ermel		CM1/CM2			
Revue Grand N					
Autres revues professionnelles					Brochure IREM 6ème
Site ARMT					
Autres sites	Site rallye du Puy de Dôme		Site IA21		
Formation initiale/continue				FI en IUFM	

En premier lieu, nous constatons qu'aucun d'entre eux n'utilise le manuel habituel de la classe afin de trouver des problèmes ouverts pour sa classe. Les ressources utilisées sont assez différentes d'un enseignant à l'autre. E1 cherche des énoncés sur le site du rallye du Puy de Dôme, E2 utilise les ouvrages

Ermel CM1 et CM2 ainsi que le site du rallye mathématique transalpin. E3 utilise le manuel de la collection *Euromaths* CM2 (qui n'est pas le manuel habituel de la classe) ainsi qu'un dossier[1] consacré à une expérimentation en cycle 3 menée par un groupe de professeurs des écoles et un inspecteur, publié sur le site de l'Inspection Académique de La Côte d'Or, E4 reprend des énoncés choisis lors de sa formation initiale suite à l'organisation d'un rallye mathématique. E5 choisit des énoncés dans une brochure[2] rédigée par un groupe IREM des Pays de La Loire à destination des professeurs de mathématiques de sixième.

2 Explication de ces choix

2.1 Précisions méthodologiques

Matheron et Noirfalise (2008) montrent que les professeurs des écoles, du fait de leur polyvalence et afin notamment d'alléger leur travail de préparation, ont tendance à utiliser des manuels scolaires. Le tableau précédent indique que dans le cas des problèmes ouverts, les enseignants de notre étude utilisent au contraire autre chose qu'un manuel scolaire. Comment expliquer cette différence de choix ? Pour répondre à cette question et afin d'étudier les choix en termes de ressources des cinq enseignants de notre étude, nous complétons le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique d'éléments du cadre théorique de *l'approche documentaire du didactique* (Gueudet & Trouche, 2010).

À partir de régularités identifiées dans les choix des professeurs, nous repérons cinq *invariants opératoires* à savoir des connaissances, des représentations de l'enseignant, souvent implicites, qui semblent sous-tendre l'utilisation des ressources par les professeurs et donc envisager une explication des choix qui sont faits.

2.2 Repérage d'invariants opératoires

Afin de déterminer ces invariants opératoires, nous avons pris en compte les connaissances des professeurs en termes de problèmes ouverts, connaissances qui se sont révélées tout au long de nos observations sur l'année et pendant les entretiens avec chaque enseignant. Un premier invariant opératoire IO1 est révélé : un problème ouvert amène les élèves à chercher sans l'aide de l'enseignant. Le choix des énoncés faits pour leur classe et le fait que les enseignants précisent qu'ils désirent rompre, grâce à ces problèmes, avec une certaine routine révèlent des autres invariants opératoires IO2 et IO3. Certains des problèmes choisis et l'organisation de certaines des séances observées notamment chez E2 poussent les élèves à conjecturer et à prouver des résultats. Un quatrième invariant opératoire IO4 est alors à considérer. Les problèmes ouverts, initiés par Arsac et Mante pour le second degré, peuvent être l'occasion pour des professeurs des écoles de faire fréquenter à leurs élèves de cycle 3 des problèmes pouvant être ensuite étudiés au collège. De ce fait, un cinquième invariant opératoire IO5 peut être proposé.

Le tableau suivant rend compte des cinq invariants opératoires repérés par enseignant :

[1] Dossier intitulé « La résolution de problèmes au cycle 3 : expérimenter la résolution d'un problème pour chercher », disponible à l'adresse

http://mathematiques21.ac-dijon.fr/sites/mathematiques21.ac-dijon.fr/IMG/pdf/Exp_Problemes_et_calcul.pdf

[2] Brochure intitulée « Enseigner les maths autrement en sixième », (Gilg, Letourneux, Massot, Pons, 1999).

	E1	E2	E3	E4	E5
IO1 : un problème ouvert amène les élèves à chercher sans l'aide de l'enseignant					
IO2 : un énoncé de problème ouvert est différent d'un problème traité habituellement en classe					
IO3 : un énoncé de problème ouvert a un caractère ludique					
IO4 : un problème ouvert mène à l'étude de preuves en mathématiques					
IO5 : un problème ouvert se rapproche des problèmes proposés en mathématiques en classe de sixième					

Comme l'indique le tableau, lorsque les cinq enseignants cherchent des énoncés de problèmes ouverts dans les ressources dont ils disposent, les cinq invariants opératoires n'interviennent pas tous en même temps et ne suivent pas la même hiérarchie. Les invariants opératoires IO1 et IO2 sont partagés par les cinq enseignants et renvoient aux enjeux des séances dédiées à des problèmes ouverts. Les trois autres invariants renseignent la fonction du problème : E2 choisit des problèmes afin de mener les élèves à la preuve en mathématiques ; E1 et E5 visent la préparation à l'entrée au collège ; E1, E3 et E4 s'attachent au caractère ludique des problèmes choisis.

IV - CONCLUSION

Nous avons étudié les ressources raisonnablement disponibles pour des enseignants de cycle 3 et examiné les choix en termes de ressources de cinq professeurs des écoles dans le cas de l'étude de problèmes ouverts en classe. Cette étude de pratiques ordinaires était placée dans le cadre théorique de la double approche didactique et ergonomique (Robert & J. Rogalski, 2002) en y associant des éléments du cadre théorique de l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche, 2010). Cette analyse a permis de préciser la pratique des cinq professeurs des écoles. Elle met à jour une certaine stabilité des pratiques du problème ouvert (Choquet, 2014) qui se révèle notamment dans le choix des ressources. Et le choix de ces ressources permet de révéler les enjeux des séances dédiées aux problèmes ouverts.

L'étude des choix des enseignants en termes de ressources renseigne trois composantes de la pratique de chacun des cinq enseignants. Elle renseigne d'une part la *composante institutionnelle* de leur pratique : des ressources différentes des ressources habituelles sont utilisées, le choix de ces ressources, une fois effectué, ne varie pas au cours de l'année, il est stable pour l'année. Elle renseigne d'autre part, la *composante cognitive* de leur pratique : l'enjeu d'apprentissage des séances dédiées aux problèmes ouverts apparaît dans les choix qui sont faits. Par exemple, E1 choisissant des énoncés sur un site dédié à un rallye mathématique oriente ses élèves dans des activités de recherche alors que E2 choisissant des énoncés dans les ouvrages *Ermel* vise plutôt l'initiation à la preuve en mathématiques. Elle renseigne enfin la *composante personnelle* de leur pratique en révélant leurs représentations personnelles sur l'enseignement des mathématiques, plus particulièrement sur la place à accorder aux problèmes ouverts dans cet enseignement en primaire.

Finalement, les éléments étudiés dans cet article, les choix faits par chacun d'entre eux en termes de ressources pour trouver des problèmes ouverts tendent à montrer que ces cinq enseignants ne veulent prendre aucun risque à propos de l'étude de ces problèmes ouverts : ils n'en inventent pas, ils ne transforment pas d'énoncés pour en faire des problèmes ouverts pour leur classe, mais ils utilisent des ressources proposées par des professionnels de l'éducation (professeur de mathématiques, didacticiens, équipe Ermel, équipe IREM, IEN et groupe mathématique académique) qu'ils peuvent assimiler à des spécialistes de l'enseignement des mathématiques contrairement à eux et dans lesquelles ces problèmes sont explicitement présentés.

V - BIBLIOGRAPHIE

ARSAC M. & MANTE M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*. Scéren : Lyon.

CHOQUET C. (2010) « Problèmes ouverts » au cycle 3 : quelques résultats sur les choix de professeurs des écoles, in *Actes du XXXVIIème colloque COPIRELEM*, Arpeme.

CHOQUET C. (2014) Une caractérisation des pratiques de professeurs des écoles lors de séances de mathématiques dédiées à l'étude de problèmes ouverts au cycle 3. Thèse de doctorat. Université de Nantes.

DOUAIRE, J., CHARNAY, R. & *al.* (2000). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CE2*, ERMEL, Paris : Hatier.

DOUAIRE, J., CHARNAY, R. & *al.* (1999). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*, ERMEL, Paris : Hatier.

DOUAIRE, J., CHARNAY, R. & *al.* (1999). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM2*, ERMEL, Paris : Hatier.

GILG, C., LETOURNEUX, A.M., MASSOT, A., PONS, G. (1999). Enseigner les maths autrement en sixième. Nantes: Irem des Pays de La Loire éditions.

GUEUDET, G., TROUCHE, L. (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes, INRP.

IREM de Grenoble (2003). *Spécial Grand N Points de départ, Activités et problèmes mathématiques pour les élèves de l'école primaire et du collège*. IREM de Grenoble éditions.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des esneignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, **2**, n°4, 505-528.

Manuels scolaires et livres du professeur

BRIAND, J., NGONO, B., PELTIER, M.L., VERGNES, D.(2010). *Euromaths CE2*. Paris : Hatier.

BRIAND, J., NGONO, B., PELTIER, M.L., VERGNES, D.(2009). *Euromaths CM1*. Paris : Hatier.

BRIAND, J., NGONO, B., PELTIER, M.L., VERGNES, D.(2009). *Euromaths CM2*. Paris : Hatier.

BRIAND, J., NGONO, B., PELTIER, M.L., VERGNES, D.(2010). *Euromaths CE2, Livre du professeur*. Paris : Hatier.

BRIAND, J., NGONO, B., PELTIER, M.L., VERGNES, D.(2009). *Euromaths CM1, Livre du professeur*. Paris : Hatier.

BRIAND, J., NGONO, B., PELTIER, M.L., VERGNES, D.(2009). *Euromaths CM2, Livre du professeur*. Paris : Hatier.

BRISSIAUD, R., CLERC, P., LELIEVRE, F., OUZOULIAS, A.(2010). *J'apprends les maths CE2*. Paris : Retz.

BRISSIAUD, R., CLERC, P., LELIEVRE, F., OUZOULIAS, A.(2010). *J'apprends les maths CM1*. Paris : Retz.

BRISSIAUD, R., CLERC, P., LELIEVRE, F., OUZOULIAS, A.(2010). *J'apprends les maths CM2*. Paris : Retz.

BRISSIAUD, R., CLERC, P., LELIEVRE, F., OUZOULIAS, A.(2010). *J'apprends les maths CE2, Livre du maître*. Retz.

BRISSIAUD, R., CLERC, P., LELIEVRE, F., OUZOULIAS, A.(2010). *J'apprends les maths CM1, Livre du maître*. Paris: Retz.

BRISSIAUD, R., CLERC, P., LELIEVRE, F., OUZOULIAS, A.(2010). *J'apprends les maths CM2, Livre du maître*. Paris: Retz.

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.P., MADIER, D.(2011). *Cap Maths CE2, Manuel de l'élève*. Hatier.

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.P., MADIER, D.(2010). *Cap Maths CM1, Manuel de l'élève*. Hatier.

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.P., MADIER, D.(2010). *Cap Maths CM2, Manuel de l'élève*. Hatier.

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.P., MADIER, D.(2012). *Cap Maths CE2, Guide de l'enseignant*. Hatier.

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.P., MADIER, D.(2010). *Cap Maths CM1, Guide de l'enseignant.* Hatier.

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.P., MADIER, D.(2010). *Cap Maths CM2, Guide de l'enseignant.* Hatier.

ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES AVEC DES ECOLIERS NON OU PEU FRANCOPHONES

Catherine MENDONÇA DIAS
Professeur de lettres, formatrice au CASNAV, RECTORAT DE BORDEAUX
Docteur en sciences du langage, CNU 7 et 70
SFERE d'Aix-Marseille
catherine.mendonca.dias@gmail.com

Résumé
Cette communication vise à établir un état des lieux de la recherche et des pratiques de classe en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques aux élèves non ou peu francophones, nouvellement arrivés en France et scolarisés en école élémentaire.
La première partie est consacrée à la présentation des élèves et aux moyens dont dispose l'enseignant pour mieux les connaître. Il s'agit pour l'enseignant d'identifier les acquis de l'élève allophone, à travers notamment des tests en langue d'origine, et d'anticiper des difficultés en mathématiques, en fonction des résultats et de la scolarité antérieure. A la lumière de ces éléments, l'enseignant est amené à aménager des différenciations pour faciliter le suivi des activités mathématiques. La deuxième partie aborde alors des gestes pédagogiques facilitateurs, des activités sur la langue de la discipline et des ressources pour des activités différenciées. Enfin, dans une troisième partie, sont présentés des projets qui cherchent à favoriser l'apprentissage de la langue en mathématiques en classe, selon une démarche pouvant être interculturelle.
A chaque étape, les ressources existantes sont présentées à l'attention du professeur, parfois déstabilisé à l'arrivée d'un élève non francophone. La plupart des propositions sont transférables pour des élèves natifs, éprouvant des difficultés en mathématiques.

I - INTRODUCTION

A l'école élémentaire, les professeurs sont parfois amenés à enseigner les mathématiques à des élèves allophones arrivants. "*Allophones*" signifie qu'ils parlent une ou plusieurs autres langues que le français et être "*arrivants*" implique une arrivée récente d'un autre pays, des conditions de scolarisation et des programmes scolaires différents. Ces élèves sont catégorisés parmi les élèves à besoins éducatifs particuliers (EBEP). En tant que formatrice au CASNAV[1], je rencontre des professeurs des écoles qui doivent gérer leurs arrivées, échelonnées au cours de l'année, dans des groupes déjà hétérogènes. Mon propos visera à établir un état des lieux de la recherche, des pratiques de classe et des ressources existantes. Il s'articulera autour de trois entrées.

Tout d'abord, une approche globale des besoins des élèves permettra de prendre en compte le profil des élèves allophones arrivants, profil à la fois social, voire psychologique, culturel et, bien entendu, linguistique et scolaire. Je présenterai aussi les évaluations diagnostiques existantes en mathématiques ainsi que les dispositifs proposés par l'Éducation Nationale et j'évoquerai les incidences de la scolarité antérieure sur l'apprentissage des mathématiques.

[1] Le *Centre Académique pour la Scolarisation des enfants allophones Nouvellement Arrivés et des enfants issus de familles itinérantes et de Voyageurs* est un service du rectorat.

En second lieu, la question de l'adaptation pédagogique sera abordée, à travers notamment des gestes pédagogiques simples et facilitateurs, tels que ralentir le débit de parole pour faciliter la compréhension du discours oral. Je présenterai des ressources et je proposerai une adaptation linguistique avec l'appui du Cadre Européen Commun de Références pour les Langues (CECRL).

Enfin, je rapporterai des projets de classe en mathématiques, axés sur la langue de la discipline ou menés avec une perspective interculturelle.

II - QUI EST L'ELEVE ALLOPHONE ET COMMENT IDENTIFIER SES ACQUIS OU ANTICIPER SES DIFFICULTES EN MATHEMATIQUES ?

1 Conditions d'arrivée et incidences sur l'apprentissage

1.1 Les origines des élèves arrivants

Pour fournir quelques données chiffrées, en 2012-2013, 44 400 élèves allophones arrivants[2] sont recensés, ce qui représente 0,47 % des élèves des 1er et 2nd degrés, mais certains ne sont pas repérés ou comptabilisés (c'est le cas des enfants de grande section de maternelle). Par ailleurs, d'autres sont arrivés l'année précédente ou celle d'avant mais ils n'ont pas encore atteint un niveau en français suffisant pour suivre en classe type. Ainsi, les chiffres réels sont supérieurs et de nombreux professeurs des écoles accueillent ce public, principalement dans les grandes villes.

Les origines des élèves sont variées. Par exemple, pour la Gironde, en 2012-2013, les 344 collégiens évalués représentent 55 pays. Par ailleurs, ces pays varient d'un département à l'autre : avec l'exemple de la Gironde, on observe que les 3 pays les plus représentés sont la Bulgarie, le Portugal et l'Espagne, ce qui n'est pas le cas sur le plan national[3]. On ne parlera pas d'élèves "étrangers", mais bien d'élèves "arrivants" car cette population ne coïncide que partiellement avec les élèves de nationalité étrangère.

1.2 Les incidences des conditions d'arrivée

Les **conditions d'arrivée** sont liées au regroupement familial, à la demande d’asile, l'accueil chez un membre de la famille, l'arrivée dans le cadre de contrat de travail pour les parents, le retour ou l'arrivée de Français, la venue pour soins médicaux ou l'adoption. L'école primaire est peu concernée par la venue de mineurs étrangers, arrivant seuls. Les conditions d'arrivée et le projet migratoire ont des incidences sur la stabilité ou l'instabilité du séjour et du domicile. C'est ainsi qu'on rencontre des élèves dont la famille est en procédure de demande d'asile et qui quittent brutalement l'école, du jour au lendemain, sans avoir le temps de dire au revoir à leurs camarades ni à leur professeur, soit qu'ils changent de foyer, soit que leur situation administrative évolue. Ces situations précaires compliquent le travail du soir, surtout quand l'enfant est hébergé avec sa famille à l'hôtel et qu'aucune personne francophone ne peut l'accompagner pour travailler. Enfin, on peut évoquer le maintien ou l'éclatement d’une cellule familiale quand, par exemple, des enfants arrivent dans le cadre d'un regroupement familial et découvrent un père éloigné depuis plusieurs années et une fratrie dans laquelle ils devront trouver leur place.

---

[2] Ou 45 300 en comptant les élèves de Mayotte (chiffres de la DEPP).

[3] Les 3 pays les plus représentés pour les collégiens inscrits dans les dispositifs en France étaient le Portugal, la Turquie et la Chine (KLEIN et SALLE, 2009 : 18)

Arriver dans un autre pays entraîne des confrontations et des bouleversements qui peuvent se manifester physiquement, par des maux au ventre, à la tête, de la fatigue, en réaction au climat, à la nourriture, à la longueur des journées à l'école française surtout quand on ne travaillait qu'en demi-journée. Et entendre français toute la journée, en continu, donne des migraines comme nous en ressentirions peut-être en entendant parler une autre langue, des heures d'affilée.

Les incidences peuvent être aussi d'ordre psychologique. Cécile Goï (2005) évoque le conflit de loyauté, concept inspiré des situations de divorce où l'enfant, tiraillé, ressent l'obligation de prendre parti. La langue est symbolique d'un éventuel conflit, ici entre le pays d'origine et le pays d'accueil. On rencontre des cas d'enfants en refus, consciemment ou non, de parler français pendant plusieurs mois, comme si l'entrée dans la nouvelle langue allait rompre ou trahir le lien avec le pays d'origine, la famille, le quartier. On observe aussi des mutismes sélectifs en milieu extra-familial[4] (Idris, 2005) telle que pour cette petite fille pakistanaise qui continuait sa scolarité dans un hôpital pour enfants et refusait de parler en milieu hospitalier, alors qu'elle s'exprimait chez elle, avec sa famille. Ce trouble de la communication se retrouve dans certaines situations de migration, liées ou non à un sentiment de secret familial, suivant les circonstances de départ. A l'inverse, d'autres enfants se jettent dans la langue française jusqu'à oublier leur langue d'origine, suivant un phénomène d'attrition qui conduit à un bilinguisme soustractif, c'est-à-dire le développement de compétences langagières dans une nouvelle langue au détriment d'une précédente. Les effets variables de la migration n'ont pas échappé aux psychologues, en atteste l'émergence de la clinique transculturelle, nourrie par les travaux de l'éthnopsychanalyse de Marie Rose Moro[5] notamment. Avec cette perspective, des professionnels en psychanalyse accueillent des familles en prenant en compte les dimensions culturelle, linguistique et migratoire[6].

Sur le plan sociolinguistique, remarquons que dans la sphère familiale, des parents utilisent leur langue d'origine pour les interactions privées mais aussi sociales et à l'opposé, dans la sphère scolaire, des professeurs encouragent de ne parler que français à la maison. D'une part, on voit mal l'efficacité d'apprendre à parler le français en milieu peu francophone et d'autre part, apprendre une langue seconde ne revient pas à abandonner sa langue maternelle. Mieux l'enfant maîtrise sa langue première, meilleures seront ses compétences langagières dans une autre langue.

D'après une de nos études, ces conditions d'arrivée en France et de départ du pays n'entretiennent pas de lien de causalité avec les réussites ou les échecs des élèves (Mendonça Dias, 2012). Il nous paraît toutefois important que le professeur ait connaissance de ces conditions pour prévenir les difficultés ou les irrégularités dans l'investissement personnel. Cette même étude souligne en revanche la corrélation entre les compétences scolaires initiales et les progrès ultérieurs dans l'apprentissage du français. Ces compétences initiales sont révélées par les tests organisés par le CASNAV, que nous allons détailler ci-après à la suite de la rencontre de la famille.

1.3 L'accueil de la famille

Soulignons l'importance de l'accueil de la famille (Goï, 2008 et 2011). Des exemples concernant le premier degré ont été discutés lors du colloque de l'Observatoire de l'Enfance en France qui s'est déroulé à Grenoble de 2008[7]. L'écart culturel peut être plus ou moins important, suivant l'expérience scolaire des parents (Mendonça Dias, 2010). Les informations chiffrées ne sont pas forcément les plus claires, contrairement à l'impression qu'on peut en avoir : par exemple, la classe de cinquième se situe au collège, en France, mais au Portugal, elle correspond à la 5ème année de primaire. Les notations ne sont pas toujours sur 20 : certaines sont organisées de 1 à 6, la meilleure note étant 1, etc.

4 http://www.cairn.info/zen.php?ID_ARTICLE=LFA_158_0058

5 http://www.marierosemoro.fr/index.php?option=com_frontpage&Itemid=1

6 Pour les enfants ayant connu des traumatismes, on peut aussi se reporter aux travaux de Cyrulnik portant sur le processus de résilience qui permet de se "reconstruire" après un événement traumatique (Cyrulnik, 1999).

7 Actes du colloque, *Travailler avec des enfants et des parents venus d'ailleurs*, Grenoble, mars 2008 [en ligne]. Disponible sur http://www.observatoiredelenfance.org/IMG/pdf/Point_sur_No8-2.pdf

Des livrets d'accueil bilingues existent[8] et l'opération *Ouvrir l'école aux parents*[9] permet d'accueillir les parents pendant quelques heures hebdomadaires sur le temps scolaire afin qu'ils étudient la langue française et soient formés sur les compétences culturelles nécessaires pour suivre la scolarité de leur enfant. En classe, on peut rapporter des projets renforçant le lien école-famille avec une perspective interculturelle : par exemple, un professeur invite les parents à lire le même conte dans leur langue d'origine[10]… L'accueil des familles est aussi réalisé en amont lors d'une évaluation initiale, avec la coordination du CASNAV, ce que nous allons maintenant commenter.

2 L'évaluation initiale par le CASNAV

2.1 Les tests d'évaluation initiale

A leur arrivée en France, les écoliers bénéficient d'une **évaluation initiale** qui devrait être "*menée par la personne nommée par l'inspecteur de l'éducation nationale, avec le concours des formateurs du Casnav*", d'après la circulaire de 2012. Le CASNAV est le Centre Académique pour la Scolarisation des enfants allophones Nouvellement Arrivés et des enfants issus de familles itinérantes et de Voyageurs. Il s'agit d'un service du rectorat, créé en 2002, en remplacement des CEFISEM qui remontent à 1976. Les formateurs du CASNAV peuvent accompagner les personnes en charge de l'évaluation initiale. Celle-ci donne des repères sur le niveau en compréhension écrite dans la langue d'origine et en mathématiques. Il existe deux types de tests pour les mathématiques : l'un traduit en plusieurs langues d'origine (dans l'ouvrage de Monique Charpentier ou réactualisé avec les nouveaux tests en ligne de l'académie d'Aix-Marseille[11]) et l'autre consiste en une évaluation non verbale, c'est-à-dire sans consignes écrites (il en existe différentes versions sur les sites des CASNAV de Lille, de la Guyane, de Strasbourg, de Grenoble et de Paris)[12]. Les résultats servent à choisir la classe d'affectation, sachant que l'élève ne peut pas avoir plus de deux ans de décalage par rapport à l'âge de référence. Ils permettent aussi de valider certaines compétences du socle. Sur le plan pédagogique, ils apportent de premiers indicateurs pour le professeur qui va le prendre en charge.

2.2 Les compétences initiales en mathématiques des écoliers venus d'autres systèmes scolaires

Les réponses apportées par les élèves aux tests sont utiles pour anticiper des difficultés en mathématiques. Certaines compétences ont été enseignées différemment, comme le procédé pour poser et résoudre des opérations : des enfants marocains rencontrés utilisaient la technique de multiplication par jalousies, dite arabe.

---

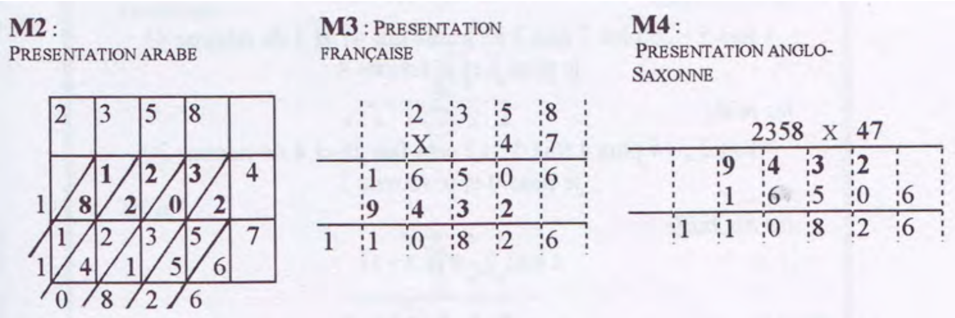
8 Ces documents sont recensés et téléchargeables à partir de : http://www.francaislangueseconde.fr/pistes-pour-lenseignement/dossier-maths/

9 Circulaire n° 2008-102 du 25 juillet 2008 : Opération expérimentale "*Ouvrir l'École aux parents pour réussir l'intégration*".

10 http://www.francaislangueseconde.fr/pour-la-famille/poursuivre-sa-langue-premiere/

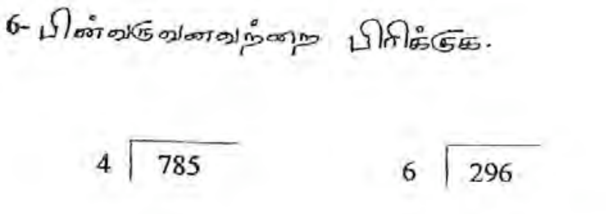
11 http://galileo.crdp-aix-marseille.fr/mathsenaf/

12 Cf. note 7.



Ill. 1 - La présentation des opérations (Girodet, 1996 : 81).

La présentation peut changer comme le montrent ces divisions en tamoul où la position du dividende et du diviseur est inversée par rapport à la présentation française.



Ill. 2 - Exercice de division (Charpentier, 1995)

Les symboles ont d'autres valeurs : c'est le cas du point qui, suivant les pays, organise un nombre décimal ou ponctue les groupes de trois chiffres ou symbolise le signe de la multiplication. Les chiffres manipulés peuvent être aussi différents. C'est ainsi que des enfants iraquiens avaient l'habitude de calculer avec les chiffres utilisant l'écriture arabe. Leur professeur avait conclu qu'ils ne parvenaient pas à mener les calculs et les enfants, non francophones, ne pouvaient pas exprimer leurs difficultés, confondant le zéro avec le cinq, par exemple.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠

Ill. 3 – Ecritures des chiffres

Les enfants peuvent être aussi décontenancés par les énoncés des problèmes dont les références culturelles peuvent fausser leurs appréciations, par exemple lorsqu'il est fait référence à des distances entre des villes françaises ou des achats en euros. Il arrive aussi que d'autres compétences ne soient pas maîtrisées en raison des programmes scolaires : dans plusieurs pays, notamment en Afrique, la géométrie n'est pas développée au niveau primaire. A l'inverse, le programme peut être avancé par rapport au système français et c'est ainsi que des enfants russes, commençant leur scolarité obligatoire à 7 ans, ne sont pas en décalage avec leurs homologues français. L'évaluation initiale permet de faire le point sur ce qui a été étudié dans le pays d'origine et de se décentrer sur l'apprentissage, en terme de contenus (programme scolaire…) ou de gestion de la classe (enseignement à un groupe d'une centaine d'élèves, absence de matériel scientifique…).

3 L'inscription dans un dispositif

3.1 Les UPE2A

C'est dans le premier degré qu'ont été créés les premiers dispositifs, définis par une circulaire en 1970. Ainsi, en fonction du lieu de résidence et des besoins linguistiques, l'écolier peut rejoindre un **dispositif**, auparavant appelé Classe d'Initiation (CLIN) ou Cours de Rattrapage Intégré (CRI) et depuis 2012, rebaptisé dans le 1er et 2nd degrés en Unité Pédagogique pour Élèves Allophones Arrivants (UPE2A). En 2012, on comptabilise désormais 1739 dispositifs dans les écoles élémentaires. Toutefois, près d'un quart des écoliers arrivants ne bénéficie pas d'une prise en charge spécifique (nombre d'élèves insuffisants pour la création d'une UPE2A, manque de moyens…) bien que le premier degré soit apparemment mieux pourvu en dispositifs que le second degré[13].

L'UPE2A n'est pas une classe mais un dispositif : les élèves, inscrits dans une classe ordinaire, sont retirés de cours pour suivre, avec un professeur formé, un "*enseignement de français comme langue de scolarisation, quotidien et pour un temps variable (et révisable dans la durée) en fonction de leurs besoins*"[14]. Les écoliers peuvent y être inscrits à partir du Cours Préparatoire. Ils devraient y bénéficier d'un "*enseignement intensif du français d'une durée hebdomadaire de 9 heures minimum dans le premier degré*" ainsi que "*l'enseignement de deux disciplines autres que le français (les mathématiques et une langue vivante étrangère de préférence)*" (*ibid.*). Concernant l'enseignement des mathématiques, il s'agit de travailler la langue française comme "*langue instrumentale d'une autre discipline*" (*ibid.*). Or, dans les faits, bien des professeurs des écoles ne trouvent pas le temps de travailler la langue de la discipline mathématique dans le cadre de l'UPE2A : par exemple, d'après une enquête, dans 25 dispositifs en école primaire, environ la moitié ne proposait pas de cours spécifique de mathématiques (Mendonça Dias, 2012). C'est alors en classe ordinaire et dans des groupes fortement hétérogènes que se déroule l'apprentissage de la langue spécifique des mathématiques. Des formations générales sont proposées en animations pédagogiques ou à travers le plan académique de formation, sans que ne soit particulièrement abordée la question de l'enseignement des mathématiques aux élèves non ou peu francophones.

3.2 Le point sur la formation

Dans le cadre du remaniement des concours en 2013, une option FLS (Français Langue Seconde) peut être choisie au CAPES de lettres mais elle n'apparaît pas dans les nouveaux concours du CRPE. Néanmoins, depuis 2004, il existe une certification complémentaire en FLS[15]. Cette certification peut être passée par tout professeur, quels que soient sa discipline ou le cycle dans lequel il enseigne. Elle atteste de compétences acquises pour l'enseignement aux élèves allophones et est requise pour enseigner en UPE2A. De plus, suivant les académies, des professeurs des écoles sont exceptionnellement détachés au collège dans une UPE2A-NSA, pour les élèves Non Scolarisés Antérieurement (NSA), dont les compétences en mathématiques avoisinent parfois le cycle 1.

De façon plus générale, le CASNAV "*assure la formation des enseignants*" en formation continue ou initiale. La formation vise, par exemple, à déterminer les objectifs d'apprentissage individualisés et mettre en place les activités rattachées à celles du groupe classe. Toutefois, les stagiaires travaillent principalement sur la question de l'enseignement du français, indépendamment de la discipline, ce qui entretient peut-être un lien avec l'absence fréquente d'étude de la langue des mathématiques en UPE2A ou en classe ordinaire.

---

13 Chiffres de la Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance (DEPP), de 2012.

14 Circulaire n° 2012-141 du 2-10-2012, *Organisation de la scolarité des élèves allophones nouvellement arrivés.* Bulletin Officiel n° 37 du 11-10-2012.

15 Note de service du 19 octobre 2004 : *Attribution aux personnels enseignants des premier et second degrés relevant du MEN d'une certification complémentaire dans certains secteurs disciplinaires*.

III - QUEL ENSEIGNEMENT DIFFERENCIE PROPOSER POUR FACILITER LE SUIVI DES ACTIVITES MATHEMATIQUES ?

A notre avis, une meilleure connaissance des élèves permet de mieux identifier les sources des erreurs et d'anticiper les difficultés de compréhension que peut poser la langue de la discipline, au regard des compétences maîtrisées par l'élève en langue française et au vu de la polysémie des termes ainsi que de la complexité du discours. Les réponses apportées par le professeur se constituent parfois de simples gestes pédagogiques qui viennent faciliter la compréhension du discours oral et écrit. Quelques élèves rencontrent des difficultés ponctuelles liées aussi à la spécificité de la langue des mathématiques. Quelles ressources adaptées ou pour travailler l'aspect langagier peuvent alors venir en appui du professeur qui accueille des élèves allophones arrivants ?

1 Des gestes pédagogiques facilitateurs

Certains élèves essaieront immédiatement de communiquer en français, pour d'autres il faudra de longues semaines avant qu'ils n'osent ou ne puissent s'exprimer en français. L'enseignant doit faire preuve de patience et de bienveillance, du moins c'est ce qui ressort d'une observation d'une séance en mathématiques, observation portée par une équipe roumaine sur une vidéo française dans le cadre d'un projet international Culture d'Enseignement – Culture d'Apprentissage (CECA)[16]. Les observateurs relèvent que l'enseignant "*s'approche de chaque élève pour mieux l'entendre […] travaille alternativement avec tout le groupe et avec chaque élève […] respecte plus que tout autre le rythme de travail de chaque élève*". Par ailleurs, "*les consignes de l'enseignant sont clairement exprimées, d'une voix calme et amicale. Elles sont répétées lorsque l'enseignant considère qu'il est nécessaire*". Instaurer des rituels dans la communication et s'adresser à l'élève lui laissent la possibilité de parler quand il s'en sentira capable. Une étude universitaire en cours, menée par Elisabeth Faupin (2013), montre que des élèves sont mutiques en classe entière ou en insécurité linguistique quand on les interroge, mais qu'ils prennent plus facilement la parole avec leurs pairs, lors d'activités de groupe. L'auteur met en évidence la complexité pour comprendre les interactions en classe en raison du nombre d'interlocuteurs, des ruptures énonciatives, des digressions, des phrases en suspens du professeur qui attend les réponses des élèves… Voici un extrait des enregistrements qu'elle a menés en cours de mathématiques avec des élèves de 6ème dont quatre sont arrivés depuis moins de deux ans en France :

Professeur : alors / c'est l'exercice [*5s*] 45 page 197 [*6s : bavardages*] celui-là là la bonne phrase [*9s : bavardages*] chu:t /// alors / qui veut bien lire l-la consigne de cet exercice là euh Fad
Fad : la bonne phrase / dans chaque cas déchiffre euh
Un élève : décris>
Un autre élève : je vais faire un modèle
Professeur : décris pas déchiffre
Fad : pardon
Professeur : dans chaque cas / décrire la figure ci-dessous petit a
Fad : en utilisant le mot euh médiatrice
Professeur : petit b
Fad : en utilisant le mot symétrique // en utilisant ni le mot / médiatrice ni le mot symétrique
Professeur : // alors euh je vais vous laisser deux minutes là vous réfléchissez / vous regardez la figure / vous réfléchissez
Un élève : madame on redessine>
Professeur : non alors vous euh est-ce que vous devez la dessiner<
La classe : non non
Le même élève : je croyais que
Professeur : vous devez la décrire / vous devez dire ce que vous voyez
Un élève : elle est belle [*rires*]

16 http://ceca.auf.org/

Professeur : alors chut dans le petit a chut arrêtez de discuter / alors stop / stop / le petit a vous devez la décrire en utilisant le mot médiatrice / petit b en utilisant le mot / symétrique et petit c donc SANS le mot symétrique SANS le mot / médiatrice **[…]**

Une autre élève : j'ai pas compris<

Quand l'élève est assis près du professeur, celui-ci peut l'aider par sa gestualité ou en désignant de la main successivement les questions a, b et c de l'exercice. Les interactions en classe sont souvent nombreuses. Et le professeur de se tourner vers les uns et les autres, voire le tableau et le manuel, tout en prenant la parole, ce qui fait parfois perdre en audibilité. En plus, ces échanges sont rapides et parcellaires dans la mesure où bien des interlocuteurs n'élaborent pas de phrases complètes. Or, lorsqu'on ne comprend pas la langue, le débit de parole doit être ralenti et bien articulé. L'élève qui commence à se constituer son bagage linguistique est plus fortement soumis au phénomène d'homonymie : "sans" peut être entendu comme "cent", de même "déchiffre" comme "des chiffres", dans le contexte du cours de mathématiques. De même, le phénomène polysémique peut altérer sa compréhension : ainsi, le terme "*figure*" est différent suivant qu'il s'agit d'un cours de mathématiques ou d'arts plastiques. Quant au verbe "*décrire*", il sous-tend différentes tâches suivant qu'on se situe en cours de français, d'arts plastiques, de sciences ou de technologie (Zakhartchouk, 1999 : 41-42). La reformulation est censée faciliter la compréhension or, ici, le professeur synthétise et les énoncés se complexifient. L'enseignant peut s'appuyer sur le Cadre Européen Commun de Référence pour les Langues (CECRL) pour obtenir des repères linguistiques en français. Par exemple, pour un élève débutant, on privilégiera le temps du présent, la phrase simple ou éventuellement coordonnée avec "et" ou "mais", des mots plutôt concrets, rattachés au quotidien de l'enfant. On évitera l'usage de pronoms personnels dont le référent est implicite ou des tournures compliquées (gérondif…) de plus en plus elliptiques, comme le fait le professeur enregistré. On n'hésitera pas à répéter. Voici une reformulation possible du discours du professeur :

"le petit a vous devez la décrire en utilisant le mot médiatrice / petit b en utilisant le mot / symétrique et petit c donc SANS le mot symétrique SANS le mot / médiatrice"

>

"Exercice 45 [*le professeur désigne l'exercice avec le doigt, si possible directement sur le manuel de l'élève, et il écrit n° 45 au tableau*] : tu ÉCRIS [*le professeur mime l'acte d'écrire*] / sur ton cahier [*le professeur montre l'endroit sur le cahier où il faut écrire*] // la description / de la figure [*le professeur désigne du doigt la figure et la montre visiblement*] / la figure [*le professeur laisse le temps à l'élève de regarder la figure*] / petit a [*le professeur désigne le petit a du doigt et il écrit a sur le tableau]* tu utilises le mot médiatrice *[le professeur écrit "la médiatrice" à droite de "a" sur le tableau*] petit b [*le professeur désigne le petit b du doigt et il écrit b sur le tableau*] tu utilises le mot symétrique [*le professeur écrit "symétrique" à droite de "b" sur le tableau*] petit c [*le professeur désigne le petit c du doigt et il écrit c sur le tableau*] tu n'utilises PAS le mot médiatrice et tu n'utilises PAS le mot symétrique [*le professeur fait "non" de la main et il écrit "la médiatrice" et "symétrique" à droite de "c" sur le tableau, puis il barre les mots*]".

On le voit, le temps didactique est ralenti par un étayage plus ou moins important dont l'écueil est toutefois "*l'assistanat*" (Millon-Fauré, 2011 : 475). Pour certains mots, il peut être nécessaire d'utiliser un dictionnaire ou des lexiques[17]. Les résultats au test initial auront peut-être révélé si les notions de "médiatrice" et de "symétrie" sont acquises. Le cas échéant, il s'agira de traduire et pour faciliter l'annotation, des enseignants fournissent une photocopie du manuel à l'élève pour qu'il puisse écrire dessus. Des exercices préalables de vocabulaire sont parfois nécessaires (exercices d'appariement, légender une image…).

En réalisant l'activité, l'élève peu francophone va repérer les mots clés mais il ne sera pas en mesure de produire un écrit très élaboré. Le décalage entre ses compétences linguistiques et les attentes de l'enseignant risque parfois de le conduire à un "*refoulement didactique*", tel que le pointait Karine Millon-Fauré (2011). Progressivement, l'élève va cependant entrer dans l'activité, au début en travaillant par mimétisme : mieux vaut alors qu'il soit assis à côté d'un camarade en réussite scolaire qui réalisera la tâche plus rapidement et sera disponible pour éventuellement l'aider. Si le vocabulaire est nouveau,

17 Cf. note 7.

l'élève doit être amené à le prononcer, pour en faciliter la lecture (la relation grapho-phonologique étant parfois obscure), stimuler la mémorisation (mémoire auditive), faciliter la compréhension du discours oral et permettre l'expression orale de l'élève. La lecture oralisée est souvent une activité qui peut être rapidement menée par un élève peu francophone, à défaut d'intervenir dans les interactions orales, faute de compétences linguistiques suffisantes.

A titre de repères, un apprenant ne peut mémoriser que quelques mots nouveaux par séance, or les échanges sont denses et le vocabulaire abondant, c'est pourquoi le professeur guide pour aider l'élève à circonscrire le vocabulaire sur lequel travailler. On retrouve les mêmes contraintes à l'écrit où il s'agit de limiter la charge cognitive (nombre de mots, longueur de texte, nombre d'activités, organisation des exercices en difficultés croissantes).

2 Quelques remarques sur la maîtrise de la langue en mathématiques

Les élèves développent plus ou moins rapidement des compétences en langue française. Pourtant, avec quelques rudiments, certains parviennent à se débrouiller en mathématiques. Comme l'auteur de *L'âge du capitaine*[18], Stella Baruk, l'avait révélé, des élèves, parfois « *automathes* », n'ont pas toujours besoin de comprendre l'énoncé pour chercher la solution aux problèmes, en s'appuyant sur leurs expériences, les règles du contrat didactique (Brousseau, 1984) et en déduisant les attendus du calcul grâce à quelques mots clés compris. Les recherches de Karine Millon-Fauré ont pu confirmer ce "transfert" de compétences en ce qui concerne les élèves peu francophones :

> *« […] lorsque des élèves migrants apprennent la langue spécifique aux mathématiques dans un pays d'accueil, ils peuvent appuyer leurs apprentissages sur leurs connaissances dans la langue spécifique aux mathématiques acquises dans leur pays d'origine (à condition que leurs connaissances dans cette langue soient suffisamment solides) : il n'est pas indispensable pour eux de passer par la langue usuelle du pays d'accueil. » (Millon-Fauré, 2011 : 569).*

A l'inverse, une inspectrice académique en mathématiques, Janine Reynaud, pointait aussi que les difficultés en mathématiques relevaient parfois davantage de difficultés scolaires plutôt que linguistiques :

> « […] *des compétences fragiles en français n'entravent pas nécessairement la réussite en mathématiques et quand des difficultés se présentent dans cette discipline, elles sont souvent liées à un manque de connaissances en mathématiques dans la langue d'origine. »*[19].

Pour illustrer le "*manque de connaissances*" évoqué par Janine Reynaud, nous pouvons prendre l'exemple de Demba. Le jeune garçon, de langue wolof, a été scolarisé au Sénégal en langue française, langue qu'il manipule dans son quotidien, mais il n'en maîtrise pas le vocabulaire ni les discours quand il s'agit des mathématiques. Ainsi, quoique francophone, il rencontre plus de difficultés que d'autres camarades nouvellement arrivés qui ont une maîtrise moindre de la langue française mais des compétences supérieures en mathématiques. Dans ses recherches, Karine Millon-Fauré a mis en évidence l'absence de lien direct entre la maîtrise de la langue usuelle et celle des compétences langagières nécessaires aux activités mathématiques mais elle observait que les cours de mathématiques ne remédiaient pas aux besoins langagiers des élèves :

> "*Chez la plupart des élèves migrants, les cours de mathématiques ordinaires ne suffisent pas pour acquérir rapidement les compétences langagières indispensables aux apprentissages dans cette discipline*" (Millon-Fauré, 2011 : 481).

---

18 Le problème suivant a été proposé à 97 élèves de CE1 et CE2 : "Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ?". Sur ces 97 élèves, 76 ont donné une réponse en utilisant les nombres figurant dans l'énoncé : 26 ans ou 10 ans.

19 Entrées n° 9, *Aborder les mathématiques*, Centre Michel Delay, janvier 2006.

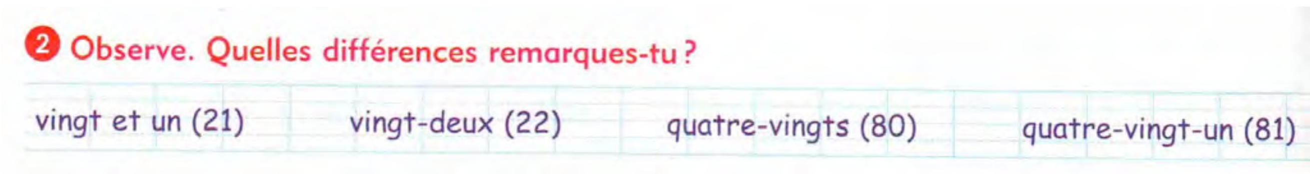
On peut supposer qu'un travail spécifique sur la langue des mathématiques peut aider les élèves à construire les compétences attendues dans le cours de mathématiques. Fatima Davin-Chnane concluait, à l'issue de l'observation de cours de mathématiques avec des élèves allophones :

> "*Si on ne prend pas en charge le problème langagier, y compris le vocabulaire sur les mathématiques, les élèves se sentent abandonnés et livrés à eux-mêmes. Dans ce dernier cas, ils abandonnent à leur tour et rompent le contrat didactique.*" (Davin-Chnane, 2005 : 325).

Nous allons donc évoquer quelques propositions d'activités pour travailler la langue de la discipline.

3 Des activités autour de la langue de la discipline "mathématiques"

En début d'année, le travail sur la langue des mathématiques débute souvent avec l'apprentissage des fournitures scolaires propres à la discipline (compas, équerre…) et des nombres. Ces derniers offrent l'avantage de la récurrence lexicale, avec ses 26 mots (Girodet, 1996 : 21), récurrence toute relative car le bambara n'en compte que la moitié (*ibid.* : 40). De plus, l'écriture d'un nombre présente une certaine bizarrerie : « *la numération française pour un nombre tel que cent-quatre-vingt-dix-sept relève d'une grande complexité à laquelle l'adulte natif n'est plus sensible […] On entend 100/4/20/10/7 et on doit écrire 197* »[20], constate Chantal Rouilleault, du Centre académique Michel Delay. Celle-ci met alors en évidence la difficulté de l'apprentissage des nombres en français et propose plusieurs options pédagogiques : travail réflexif, recours au lexique belge (septante, huitante…) et activités ludiques. Les auteurs de la méthode d'apprentissage du français par les collégiens nouvellement arrivés, *Entrée en matière*, ont prévu pour chaque séquence une page intitulée *D'une matière à l'autre* qui propose des exercices allant dans ce sens. A titre d'exemple, voici un exercice d'observation sur les nombres :


2 Observe. Quelles différences remarques-tu ?

vingt et un (21)	vingt-deux (22)	quatre-vingts (80)	quatre-vingt-un (81)

Ill. 4 - Exercice extrait de *Entrée en matières* (2005).

La mémorisation des nombres passe par toutes sortes d'activités (loto, bataille navale, activités sur des sites internet[21]…), mais nécessite aussi une réflexion pour comprendre le fonctionnement des nombres français. Le processus est différent de l'apprentissage des nombres par un enfant natif : les enfants allophones savent (pour la plupart) compter et dénombrer dans leur langue, ils connaissent les bases opératoires attendues pour leur classe d'âge, mais ils ne sont pas en mesure de comprendre le discours ou les consignes. Il s'agit alors d'assurer le transfert de ce qu'ils connaissent dans leur langue vers la langue cible, le français. C'est ainsi que le professeur peut proposer des exercices répétitifs comme ci-dessous, en privilégiant la consigne a) puisque dans les situations authentiques de cours, c'est davantage la réception orale des nombres qui posera problème aux élèves peu francophones plutôt que la production écrite des nombres en toutes lettres, qui relève plutôt de la discipline "français" :

" a) **Ecris en chiffres.** Quatre plus trois égale sept > …………….
b) **Ecris en toutes lettres.** 4 + 3 = 7 > ………………………….............

20 *Ibid.*

21 http://www.francaislangueseconde.fr/pistes-pour-lenseignement/dossier-maths/

c) **Complète puis écris en toutes lettres.** 4 + 3 = … > …………………….……………..... "

Comme nous l'avons vu précédemment, les interactions en classe sont denses, digressives et polyphoniques. A la lumière de ses recherches, Elisabeth Faupin a proposé de travailler à partir de dialogues pédagogiques (Faupin, 2013). Elle transcrit et adapte donc les enregistrements de classe pour créer un dialogue authentique exploitable en classe. En voici l'exemple qu'elle propose, à partir de l'enregistrement précédemment commenté :

Le prof	Alors, c'est l'exercice 45 page 197 ! Celui-là, la bonne phrase. Alors, qui veut bien lire la consigne de cet exercice ? Euh Fad !
Fad	*(Il lit)* La bonne phrase. Dans chaque cas, déchiffre, euh…
Le prof	Décris, pas déchiffre !
Fad	Pardon
Le prof	*(Le prof lit)* Dans chaque cas, décrire la figure ci-dessous. Petit a ?
Fad	(Reprend la lecture) En utilisant le mot médiatrice.
Le prof	Petit b ?
Fad	En utilisant le mot symétrique. Petit c, en n'utilisant ni le mot médiatrice, ni le mot symétrique.
Le prof	Alors, je vais vous laisser deux minutes. Vous réfléchissez, vous regardez la figure, vous réfléchissez.
Eric	Madame, on redessine ?
Le prof	Non, alors, est-ce que vous devez la dessiner ?
Classe	Non, non !
Le prof	Vous devez la décrire. Vous devez dire ce que vous voyez.
Julie	J'ai pas compris.

Le support permet de travailler les compréhensions et les productions orales et écrites. Des enseignants utilisant la baladodiffusion préenregistrent le texte avec le logiciel Audacity. Il existe aussi des logiciels de synthèse vocale qui permettent d'entendre le texte tapé sur l'interface du logiciel (par exemple, Dspeech[22]). Les supports peuvent trouver des réinvestissements à travers les jeux de rôle.

D'autres approches pédagogiques conduisent à manipuler le vocabulaire et les expressions étudiées en cours de mathématiques. Les figures téléphonées se prêtent bien aux séquences de géométrie puisqu'elles contraignent l'élève à s'exprimer à l'oral – comme s'il était au téléphone – pour donner des indications ou des consignes à un camarade, afin de lui faire reproduire une figure, par exemple. L'activité implique de parler en continu, ce qui est indispensable dans les compétences attendues mais peu travaillé en cours par les élèves allophones. La narration de recherches permet aussi à l'élève de raconter, avec ses propres mots et librement, à la première personne, le cheminement suivi pour résoudre les tâches en mathématiques. La trace écrite qui est construite lui offre un support lisible pour un apprentissage réflexif. Toutefois, peu francophone, l'élève aura besoin d'aide pour élaborer son récit, aide qui pourrait être apportée à travers un récit collectif en groupe ou une dictée à l'adulte. Enfin, les projets conduisent à manipuler la langue des mathématiques sans que cela soit une finalité en soi. On peut rapporter le projet entre deux classes de maternelle et une UPE2A de collège. Les élèves ont travaillé autour du thème "*Formes et couleurs*", ce qui a conduit à des échanges pour la création d'un album et la conception d'une exposition commune inspirée par les œuvres de Kandinsky et de Mondrian[23].

4 Les ressources pour des activités différenciées en mathématiques.

Il n'y a pas de programme scolaire pour l'UPE2A d'autant que les élèves réunis appartiennent à différents cycles : des enfants de CE1 peuvent être mélangés avec ceux de CM2. Qui plus est, en fonction

[22] Dspeech est téléchargeable. On peut aussi utiliser en ligne : http://text-to-speech.imtranslator.net/speech.asp?url=WMfl&dir=fr&text

[23] Retrouvez le projet et les productions en ligne : http://www.francaislangueseconde.fr/upe2a/album-madame-monsieur/

de leurs compétences initiales et leur parcours scolaire antérieur, les niveaux peuvent être très hétérogènes. Aussi, la différenciation s'impose en UPE2A et en classe ordinaire car les compétences ne correspondent pas forcément à celles attendues dans le cycle de rattachement. Afin de faciliter le travail, des enseignants ont élaboré des activités plus adaptées sur le plan linguistique mais aussi formel. Ces fiches concernent plutôt le collège (le site internet de Paul Byache, des livrets d'activités élaborés par Karine Millon-Fauré…[24]). Sur sa page consacrée au français langue de scolarisation, Eduscol met à disposition les séquences de remise à niveau élaborées par le CNED, du cycle 2 au cycle 3. On se rend compte que les fiches d'exercices en mathématiques se distinguent peu de celles de classe type : la présentation est plus aérée, les éléments parasites supprimés, les consignes plus laconiques éventuellement et les propositions ne suivent pas le programme d'une seule année scolaire.

D'autres ressources, ici plus spécifiques au fait d'être non ou peu francophones, sont accessibles à partir du portail *lepointdufle.net*. Ce site regroupe les liens pointant vers des pages de "français langue étrangère" (FLE). Il existe une rubrique "mathématiques"[25] intéressante en début d'apprentissage car les sites recensés proposent parfois un enregistrement sonore (signalé par l'icône d'un haut-parleur) ce qui permet aux élèves de travailler à leur rythme avec le support oral pour apprendre les nombres par exemple (dictée de nombres obtenus par des additions à résoudre…) ou du vocabulaire en géométrie. La possibilité d'écouter et réécouter facilite la compréhension et la mémorisation d'autant plus s'il y a des supports visuels. De même, de courtes vidéos pédagogiques conçues pour les écoliers natifs peuvent être profitables comme celles mises en ligne par Canopé[26] qui, de façon ludique, illustrent des leçons abordées en classe.

Enfin, il existe peu de littérature sur l'enseignement des mathématiques aux élèves allophones. Le seul ouvrage conçu explicitement pour les élèves allophones arrivants (Blanchard, Desmottes et al., 2004) vise le second degré. Mais est-ce que des ressources spécifiques sont vraiment nécessaires pour enseigner les mathématiques à un élève non ou peu francophone ? Nous avons vu quelques gestes simples, voyons maintenant dans quelle mesure des projets peuvent être mis en œuvre pour le profit de l'élève allophone mais aussi de ses pairs, natifs de France.

IV - QUELS PROJETS EN CLASSE POUR FAVORISER L'APPRENTISSAGE DE LA LANGUE DE LA DISCIPLINE ?

1 S'appuyer sur la langue d'origine

Pour construire des compétences dans une langue seconde, nous nous appuyons sur notre langue première, en déduisant, inférant, vérifiant. Les écoliers scripteurs s'interdisent généralement d'écrire les traductions des mots dans leur cahier. Pourtant, à la fin de la journée, après plusieurs traces écrites dans différentes disciplines, un élève mélange, oublie, hésite à savoir à quelle figure géométrique réfère le signifiant "rectangle" alors qu'il ne fait pas la confusion dans sa langue. Un autre ne se rappelle plus si le mot qu'il déchiffre dans la consigne signifie "souligne", "entoure" ou "barre". Le recours à la langue première, nécessaire, ne peut avoir lieu qu'avec l'accompagnement du professeur qui l'autorise, voire l'exploite au profit de toute la classe, comme le propose la démarche pédagogique de Nathalie Auger (2005) et que l'on retrouve dans les vidéos de classe tournées en école élémentaire[27].

24 Accessibles à partir de : http://www.francaislangueseconde.fr/pistes-pour-lenseignement/dossier-maths/

25 Il faut sélectionner dans le menu déroulant de gauche "publics spécifiques" puis "alpha mathématiques" : http://www.lepointdufle.net/maths_savoirs_de_base.htm

26 Les vidéos peuvent être télécharger avec le sous-titre et s'accompagnent d'une fiche pédagogique : http://www.reseau-canope.fr/lesfondamentaux//discipline/mathematiques.html

27 Extrait vidéo sur : http://www.cndp.fr/bsd/sequence.aspx?bloc=481293

Dans notre pratique, nous utilisons des dictionnaires. Des lexiques bilingues sur les mathématiques ont été conçus et pour les plus jeunes, quelques imagiers ont été élaborés. Ces derniers peuvent être réalisés par les élèves eux-mêmes, sous forme d'imagiers numériques sonores, sur un support numérique de type Didapages.

2 Les éthnomathématiques et la perspective interculturelle

En 2009, un texte européen pointe le phénomène de déperdition touchant les compétences initiales des élèves allophones arrivants :

> « […] *les talents des enfants de migrants ne sont souvent pas découverts et restent inutilisés [ce qui] engendre des désavantages sociaux, culturels et économiques pour la société dans son ensemble.*»[28]

Effectivement, tandis que le prisme des programmes scolaires attire davantage sur ce qui n'est pas maîtrisé, à savoir la langue française et diverses compétences en mathématiques (en géométrie…), d'autres connaissances et savoir-faire ne sont pas repérés ou mis en valeur, tel que le plurilinguisme ou des compétences antérieures dans les disciplines. Dans un contexte scolaire multiculturel, les éthnomathématiques ouvrent la voie à une pédagogie ponctuelle qui intègre des pratiques issues de différentes cultures, dans la perspective d'être représentative de la diversité des élèves et de construire la réflexion sur les pratiques quotidiennes des mathématiques. Toutefois, rares sont les ressources proposant des activités allant dans ce sens. Eduscol consacre une page sur son site[29] et le Comité International des Jeux en Mathématiques a récemment créé des "livrets jeux"[30].

La démarche interculturelle (Abdallah-Pretceille, 2013) peut aussi motiver les élèves, dans la mesure où elle nécessite que chaque élève fasse appel à sa culture pour travailler collectivement sur une tâche commune. Nous rapportons une courte séquence mathématiques-français, au collège, portant sur le produit en croix. Dans une première étape, les élèves devaient trouver combien de M&M's ils pouvaient obtenir avec 1 €.

Compléter le tableau en faisant plusieurs produits en croix :

Nombre de m&m's	Poids des m&m's	Prix
1	0.915 g	
	1000 g	7,68 €
		1 €

Ill. 5 – Exercice 1 sur les produits en croix

Puis, la tâche consistait à savoir combien de M&M's il était possible d'acheter avec une pièce de monnaie, suivant les pays d'origine. Les élèves étaient amenés à faire des conversions, puis des calculs en croix à partir du tableau suivant, tableau complété avec l'argent des pays d'origine sur ce modèle :

28 *Résolution du Parlement Européen du 2 avril 2009 sur l'Education des enfants des migrants (2008/2329 INI)*

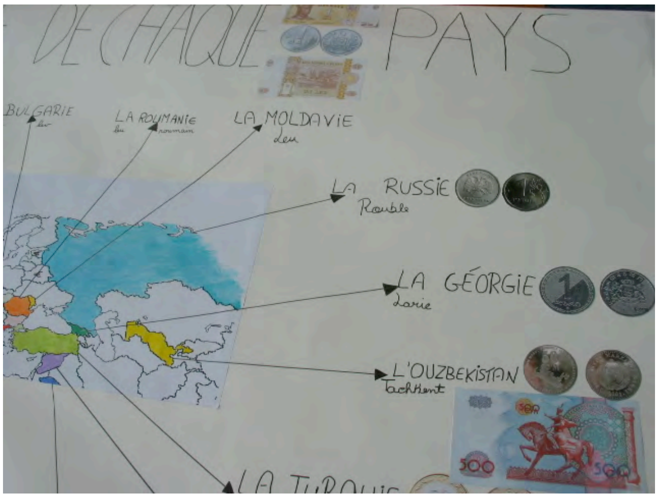
29 http://culturemath.ens.fr/dossiers/ethnomath%C3%A9matiques-202

30 http://www2.cijm.org/salon/133-livrets-jeux

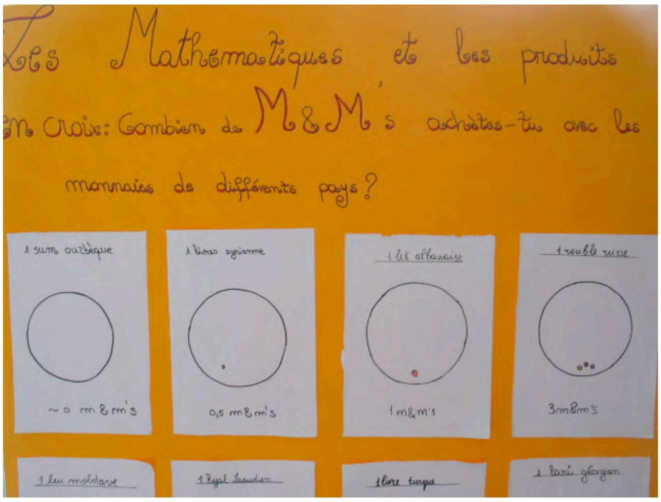
Argent	Monnaie	Nombre de m&m's
1 euro	1 euro	142
0.730149 €	1 dollar	
0.00720946 €	1 yen	
0.0529456 €	1 leu moldave	

Ill. 6 – Exercice 2 sur les produits en croix

Les résultats étaient présentés à travers la réalisation d'un planisphère et d'un affichage, qui a donné lieu à une présentation orale. Le travail mené en classe a alors été valorisé. Un questionnaire d'appréciation a été soumis ensuite et il est ressorti que les élèves s'étaient intéressés à cette séquence du fait qu'ils avaient pu faire découvrir un élément de leur pays d'origine et discuter des pays des autres.



Ill. 7 - Planisphère des monnaies



Ill. 8 – Affiche sur les M&M's

Dans ce projet, l'ouverture interculturelle se situe au niveau de la thématique. On pourrait imaginer une entrée similaire en calculs sur le thème des décalages horaires, des distances géographiques, des densités, liés aux pays d'origine… ou en géométrie, à travers la réalisation stylisée des drapeaux, un travail de symétrie inspiré par les masques de cérémonies ou de fêtes… Les éléments historiques tels que l'usage du boulier, la création du zéro, les grands mathématiciens… permettent aussi de prendre en compte la diversité et l'enrichissement mutuel dans la construction de la culture mathématique.

V - CONCLUSION

Dans ce colloque qui visait à faire le point sur les "*ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages mathématiques à l'école primaire*", nous avons essayé de faire le tour de l'existant concernant les écoliers allophones. Il ressort que peu d'outils et de ressources existent. Par ailleurs, beaucoup de professeurs n'abordent pas la question de la langue quand leur enseignement concerne les mathématiques, faute de temps ou de formation. Toutefois, les propositions apportées ici correspondent à des gestes simples, facilitant les interactions orales et écrites, et une harmonisation avec le rythme d'apprentissage, suivant les indicateurs du Cadre Européen Commun de Référence pour les Langues. Certaines propositions sont spécifiques aux élèves allophones, liées à leur découverte de la langue française et leur situation inédite d'arrivée en France, mais nombre d'entre elles sont transférables pour des élèves natifs.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ABDALLAH-PRETCEILLE M. (2013) *L'éducation interculturelle*, PUF, Que sais-je ?

Actes du colloque, *Travailler avec des enfants et des parents venus d'ailleurs*, Grenoble, mars 2008. http://www.observatoiredelenfance.org/IMG/pdf/Point_sur_No8-2.pdf

AUGER N. (2005) *Comparons nos langues. Démarche d'apprentissage du français auprès d'Enfants Nouvellement Arrivés (ENA)* [DVD vidéo] Montpellier : CRDP Académie de Montpellier.

BLANCHARD M., DESMOTTES D. et alii (2004) *Enseigner les mathématiques à des élèves non francophones. Des outils français-maths.* SCEREN, CRDP, Cahiers de Ville Ecole Intégration, Académie de Créteil.

BONAFE F. (coord.) (2002) *Les narrations de recherche, de l'école primaire au lycée*, co-édition IREM et APMEP.

BOYZON-FRADET D. (1997) "Enseigner/apprendre la langue scolaire, un enjeu fondamental pour les enfants issus de l'immigration", *Migrants Formation*, n° 108.

BROUSSEAU G. (1984) "Le rôle central du Contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations" [en ligne]. Disponible sur http://guy-brousseau.com/2332/le-role-central-du-contrat-didactique-dans-l%E2%80%99analyse-et-la-construction-des-situations-1984/

BYACHE P. (2013) *Témoignage : cours de mathématiques-FLS en classe d'accueil*, IREM n° 90, pp. 65-80.

CASTELLOTTI V. (2001) *La langue maternelle en classe de langue étrangère*, Paris : CLE International.

CERVONI B., DAVIN-CHNANE F., FERRREIRA-PINTO M. (2005) *Entrée en matière. La méthode de français pour adolescents nouvellement arrivés*, Vanves, Hachette FLE.

CHARPENTIER M., TWINGER J. (1995) *Mieux connaître pour mieux scolariser : tests de mathématiques en 27 langues*, Inspection académique de Strasbourg, ONISEP Alsace.

Circulaire n° 2012-141 du 2-10-2012, *Organisation de la scolarité des élèves allophones nouvellement arrivés*. Bulletin Officiel n° 37 du 11-10-2012.

DAVIN-CHNANE F. (2005), *Didactique du FLS en France : le cas de la discipline « français » enseignée au collège*. Villeneuve d'Ascq : Diffusion ANRT.

DAVIN-CHNANE F. (dir.) (2011) *Le français langue seconde en milieu scolaire français, Le projet CECA en France*, PUG Langues étrangères.

DESMOTTES D. (2009) "En classe d'accueil, faire du français en maths" in Cahiers Pédagogiques, *Enfants d'ailleurs, élèves en France*, n° 473.

FAUPIN E. (2013) "Des élèves allophones nouvellement arrivés au collège : comment les préparer à participer aux interactions didactiques en classe ordinaire ?", Actes du congrès AREF (Actualité de la Recherche en Education et en Formation), Montpellier [en ligne]. Disponible sur : http://www.aref2013.univ-montp2.fr/

FRANCOLS N. (2009) *Relation parents-professeurs*, Entrées, Bulletin d'échanges pour la scolarisation des nouveaux arrivants et des enfants du voyage, n° 23, Centre Michel Delay, académie de Lyon.

GOÏ C. (2011) "Relations école et Parents en situation interculturelle", IUFM de Chambéry, 29 septembre 2011. Disponible en ligne sur : http://www.ac-grenoble.fr/casnav/Espace_enseignant/articles.php?lng=fr&pg=918&prt=2

GOÏ C. (2008) "Élèves nouvellement arrivés en France et parents allophones : construire le lien entre l'école et la famille", Cahiers Pédagogiques n° 465, *Écoles et familles*.

GIRODET M.-A. (1996) *L'influence des cultures sur les pratiques quotidiennes du calcul*. CREDIF essais.

IDRIS I. (2005) « Du culturel au thérapeutique : la vulnérabilité spécifique des enfants de migrants comme outils de réussite », *Les Conférences du CASNAV*, Académie de Paris, Tome 3, recueil des actes 2004 à 2005.

IFRAH G. (1994) *Histoire universelle des chiffres*, Robert Laffont, coll. Bouquins.

Entrées n° 9 (2006) *Aborder les mathématiques*, Centre Michel Delay.

KLEIN, C. & SALLE, J. (2009) *La scolarisation des élèves nouvellement arrivés en France.* Paris : Ministère de l'Éducation Nationale, Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.

MENDONÇA DIAS, C. (2010) « La décentration dans l'accueil des parents : l'exemple des parents nouvellement arrivés en France », dans Madiot P. (coord.), *L'école et les parents au collège et au lycée*, Repères pour agir.

MENDONÇA DIAS, C. (2012) *Les progressions linguistiques des collégiens nouvellement arrivés en France.* Villeneuve d'Ascq : Diffusion ANRT.

MILLON-FAURE, K. (2011) *Les répercussions des difficultés langagières des élèves sur l'activité mathématique en classe : le cas des élèves migrants*. Thèse de doctorat, dir. d'A. MERCIER, Univ. Aix-Marseille I.

MORO, M.-R. (2002) *Enfants d'ici venus d'ailleurs. Naître et grandir en France*. Paris : La Découverte.

POLACK B. (2010) *Apprentissage intégré de la langue seconde et des mathématiques pour les élèves nouvellement arrivés en classe d'accueil*, master 2, dir. V. DE NUCHEZE, Université de Grenoble 3, Sciences du langage.

RAFONI J.-C. (2000) *Maths sans paroles*. CRDP de l'Académie de Versailles, CDDP des Hauts-de-Seine.

ZAKHARTCHOUK J.-M. (1999) *Comprendre les énoncés et les consignes*. CRDP.

MALLETTE DE RESSOURCES MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCOLE, CYCLE 1 – CYCLE 2

Lætitia BUENO-RAVEL
MCF, ESPE de Bretagne
CREAD (EA 3875)
laetitia.bueno-ravel@espe-bretagne.fr

Pierre EYSSERIC
PRAG, ESPE d'Aix-Marseille
pierre.eysseric@univ-amu.fr

Gwenaëlle RIOU-AZOU
PRAG, ESPE de Bretagne
gwenaelle.riou-azou@espe-bretagne.fr

Sophie SOURY-LAVERGNE
MCF, Institut Français de l'Education
S2HEP
sophie.soury-lavergne@ens-lyon.fr

Résumé
Cette communication présente une ressource « mallette de ressources mathématiques pour l'école, cycle 1 – cycle 2 » conçue dans le cadre d'un projet impulsé par le Ministère de l'Éducation Nationale française et associant des équipes de recherche de la COPIRELEM, de l'IFE et du CREAD[1]. Face à l'ensemble important des ressources existantes, une partie du travail a consisté à effectuer une sélection de ces ressources (par exemple *Le jeu des voyageurs*, extrait d'ERMEL GS, le *boulier virtuel* Sésamath[2], etc.) ainsi qu'à les retravailler pour les rendre directement utilisables en classe par les enseignants en les accompagnant de recommandations précises et en explicitant et illustrant les situations proposées. Une autre partie du travail s'est centrée sur la conception de ressources nouvelles informatisées, associées à du matériel manipulable : logiciels pour le nombre en maternelle, e-pascaline, boulier virtuel paramétrable.
Nous commencerons par présenter les principes d'apprentissages sous-jacents à la sélection et l'élaboration des ressources des deux mallettes en voie de finalisation. Nous détaillerons ensuite la structure et le contenu de chacune des mallettes avant de conclure sur les conditions nécessaires à l'appropriation de ces ressources par les enseignants, afin qu'ils puissent les intégrer dans le cadre de l'exercice quotidien de leur métier.

Le projet « mallettes mathématiques pour l'école primaire » est issu d'une demande de la DGESCO de juin 2011. Il repose sur l'hypothèse, attestée par de nombreux travaux, de l'importance de la manipulation directe d'objets tangibles, dans un contexte de résolution de problèmes, pour soutenir les premiers apprentissages mathématiques, qui sont des apprentissages fondamentaux. Le projet privilégie, à chaque fois que faire se peut, la manipulation conjointe de duos d'artefacts, ou d'artefacts duaux, « logiciel » et « matériel ».

[1] COPIRELEM : Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire ; CREAD : Centre de Recherche sur l'Éducation, les Apprentissages et la Didactique (EA 3875) ; IFE : Institut Français de l'Éducation.

[2] http://cii.sesamath.net/lille/exos_boulier/boulier.swf (consulté le 17 septembre 2014).

Par ailleurs, dans un moment de foisonnement de ressources, le projet vise le rassemblement en une même entité, une « mallette », d'un ensemble d'outils et de situations d'usage, accompagné de recommandations et d'illustrations soutenant l'appropriation par le professeur et la mise en œuvre dans le cadre de la classe.

Le projet repose sur la collaboration de l'IFÉ (rassemblant le pôle CREAD à Rennes et le pôle EducTICE à Lyon) et de la COPIRELEM. Les ressources du projet se sont développées dans trois contextes : en Rhône-Alpes autour de l'équipe EducTICE de l'IFÉ, en Bretagne avec la contribution du CREAD et à la COPIRELEM avec des équipes de Bordeaux, Aix-Marseille et Toulouse. Les travaux ont débouché sur la production de deux mallettes :

- une première mallette autour de la construction du nombre en MS et GS[3] qui :
  - reprend diverses situations de référence autour du nombre, les revisite pour favoriser leur appropriation par les enseignants ;
  - propose des logiciels associés à certaines de ces situations (MARENE)[4] ;
  - présente, pour certains aspects du nombre, quelques situations nouvelles mettant en avant l'utilisation du jeu dans les apprentissages, le lien entre les mathématiques et d'autres disciplines, la place d'une pédagogie de projet à l'école maternelle.
- une deuxième mallette centrée sur l'expérimentation de situations d'apprentissage utilisant des instruments mathématiques :
  - la pascaline avec des ressources articulant matériel et logiciel pour l'apprentissage de la numération décimale et du calcul au CP et au CE1 (MACARhon)[5] ;
  - le boulier chinois avec des ressources pour l'apprentissage du nombre en GS et de la numération décimale et du calcul au cycle 2 (MARENE)[6].

Nous présentons tout d'abord le processus de conception à l'origine des deux mallettes avant de détailler le contenu de chacune des mallettes. En conclusion, nous soulevons brièvement la question de l'appropriation de ces mallettes par les professeurs.

I - PROCESSUS DE CONCEPTION DES MALLETTES

A l'origine, notre projet était de réunir, dans une mallette, des ressources pour le domaine nombre et calcul au cycle 1 et cycle 2, ressources articulant des situations, du matériel tangible pour la manipulation et des ressources dans les environnements numériques. Nous envisagions la possibilité que les composantes matérielles tangible soient disponibles dans des mallettes mises à disposition des enseignants.

Mais il existe déjà de très nombreuses ressources à destination des enseignants, plus ou moins bien diffusées, plus ou moins bien connues, plus ou moins bien utilisées, ...

Nous avons donc choisi de constituer, pour nos mallettes, une « collection » de ressources s'appuyant majoritairement sur des situations, des jeux ou des instruments mathématiques déjà existants. Le problème que nous avons voulu résoudre en constituant cette « collection » de ressources est celui de l'appropriation des ressources par les enseignants afin qu'il y ai un véritable usage en classe.

1 Constituer une collection de ressources

Dans la mesure du possible, nous avons réuni dans la mallette des ressources construites à partir de situations bien connues en formation, dont la validité est établie et qui sont effectivement utilisées en classe même si ce n'est pas par la majorité des enseignants. C'est le cas par exemple de la situation

[3] http://www.arpeme.fr/m2ep/index.html

[4] http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=607

[5] http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees-13-14/mallette/mallette

[6] http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=611

papier-crayon du « bus » ou de son pendant en version informatisée, la situation « Voitures et Garages ». Ces deux situations sont inspirées du « Jeu des voyageurs » d'ERMEL GS. Cette situation initiale a été retravaillée et la mallette maternelle propose des variations de celle-ci suite à des mises en œuvre en classe.

Par ailleurs, nous avons également conçu de nouvelles ressources, spécifiquement pour les mallettes, afin notamment d'intégrer l'usage des technologies numériques et des machines mathématiques en classe. Par exemple, le boulier est un instrument intéressant pour l'enseignement/apprentissage de la construction du nombre et du calcul mais la manipulation du boulier en classe n'est pas toujours simple (les boules du boulier bougent si on le déplace !). Disposer d'une version informatisée d'un boulier, paramétrable par le professeur, peut favoriser l'utilisation de cet instrument mathématique en facilitant par exemple les phases de mises en commun.

2 Des principes de conception

Le contenu de la mallette ne se limite pas à un ensemble de situations ou logiciels. Ces situations et logiciels s'intègrent dans un ensemble plus vaste de ressources. En effet, les principes de conception des éléments de la mallette que nous avons suivis sont :

- fournir des explicitations et des illustrations des situations didactiques par des mises en œuvre en classe (à partir de document écrits, de vidéo, de tutoriel, etc.) ;
- situer le rôle de chaque ressource dans l'acquisition des notions mathématiques ;
- penser l'articulation entre la conception et l'usage, c'est-à-dire proposer des ressources qui sont modifiables et adaptables par chaque professeur au cours de leur utilisation, pour mettre en œuvre le principe de conception continuée dans l'usage.

3 Un travail collectif de conception

Enfin, ce travail s'est réalisé au sein d'équipes mixtes, comprenant des chercheurs, des formateurs des enseignants, pouvant s'apparenter à des communautés de pratiques. Ce travail collectif nous a permis d'organiser des expérimentations en classe et en formation, pour :

- améliorer les ressources proposées, grâce à des itérations de cycles de conception et d'expérimentation, avec une méthodologie de type designed based reasearch, qui permet de prendre en compte la complexité du terrain en concevant les ressources avec les enseignants, les formateurs et les implémentant sur le terrain réel puis analysant ;
- produire et de valider empiriquement les comportements et les productions des élèves qu'il est possible d'obtenir avec les situations proposées ;
- étudier les processus d'appropriation des ressources par les enseignants participants aux équipes mixtes ;
- identifier les caractéristiques des ressources à rendre modifiables par les enseignants ou les formateurs.

Nous détaillons maintenant le contenu de chacune des mallettes mathématiques que nous avons conçues.

II - DEUX MALLETTES MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCOLE : CYCLE 1 ET CYCLE 2

Les travaux ont débouchés sur la production de deux ressources :

- Une première mallette autour de la construction du nombre en MS et GS qui :

  - Reprend diverses situations de référence autour du nombre, les revisite pour favoriser leur appropriation par les enseignants.
  - Propose des logiciels associés à certaines de ces situations.
  - Présente, pour certains aspects du nombre, quelques situations nouvelles mettant en avant l'utilisation du dans les apprentissages, le lien entre les mathématiques et d'autres disciplines, la place d'une pédagogie de projet à l'école maternelle.
- Une deuxième mallette centrée sur l'expérimentation de situations d'apprentissage utilisant des instruments mathématiques :
  - La pascaline avec des ressources articulant matériel et logiciel pour l'apprentissage de la numération décimale et du calcul au CP et au CE1.
  - Le boulier chinois avec des ressources pour l'apprentissage du nombre en GS et de la numération décimale et du calcul au cycle 2.

1 La mallette cycle 1 : Construction du nombre en maternelle, moyenne et grande section

Nous avons fait le choix du numérique pour présenter et diffuser ces ressources sur le nombre en faisant l'hypothèse que ce type de support faciliterait la diffusion.

D'autre part ce choix nous a permis de structurer les activités pour les élèves à partir d'une organisation des apprentissages sur le nombre. Cette organisation est matérialisée par des cartes mentales qui donnent une vision claire et rapide de l'articulation entre les différentes connaissances à aborder à l'école maternelle. Ces cartes mentales sont disponibles sur le site : http://www.arpeme.fr/m2ep/index.html

Ces cartes mentales permettent d'accéder rapidement aux ressources nécessaires pour comprendre les situations d'apprentissage tout en exposant clairement le lien entre les connaissances mises en jeu. Elles permettent d'associer dans un même document des textes, du matériel à imprimer, des images fixes ou animées avec la possibilité pour chaque utilisateur d'appréhender la ressource en suivant des chemins différents dans la carte.

Elles fonctionnent avec le logiciel libre de droit, Xmind utilisable aussi sur PC (windows ou linux) que sur Mac.

Voici la première arborescence qui organise les connaissances sur la construction du nombre pour les classes de MS et GS de la maternelle.

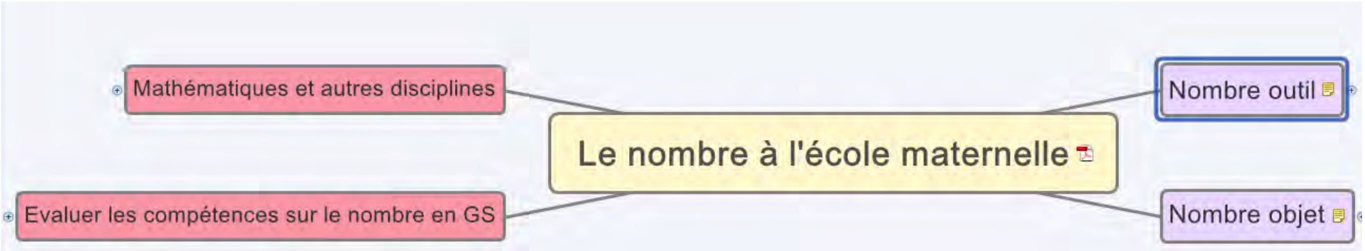


Figure 1. Le nombre à l'école maternelle

Les quatre branches ci-dessus ne constituent pas une partition des situations présentées dans la mallette. Les deux figures suivantes présentent le développement de ces branches.

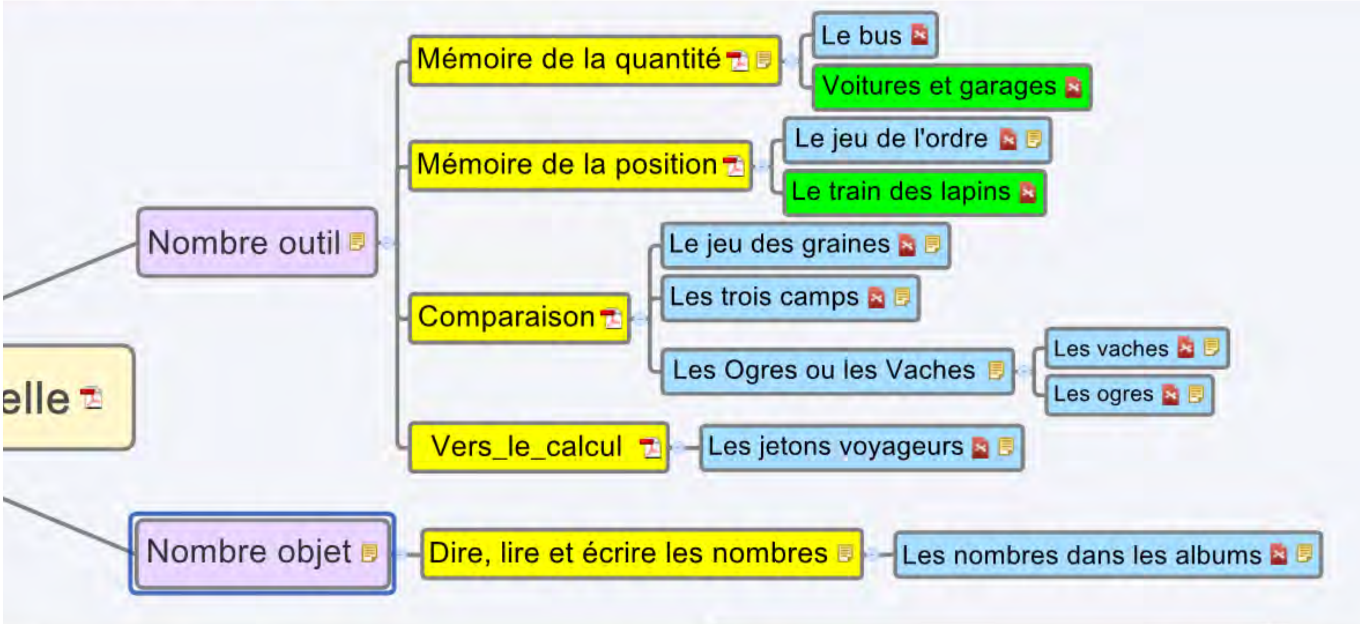


Figure 2. Développement des deux branches de droite : structuration de l'apprentissage du nombre autour des aspects outil et objet

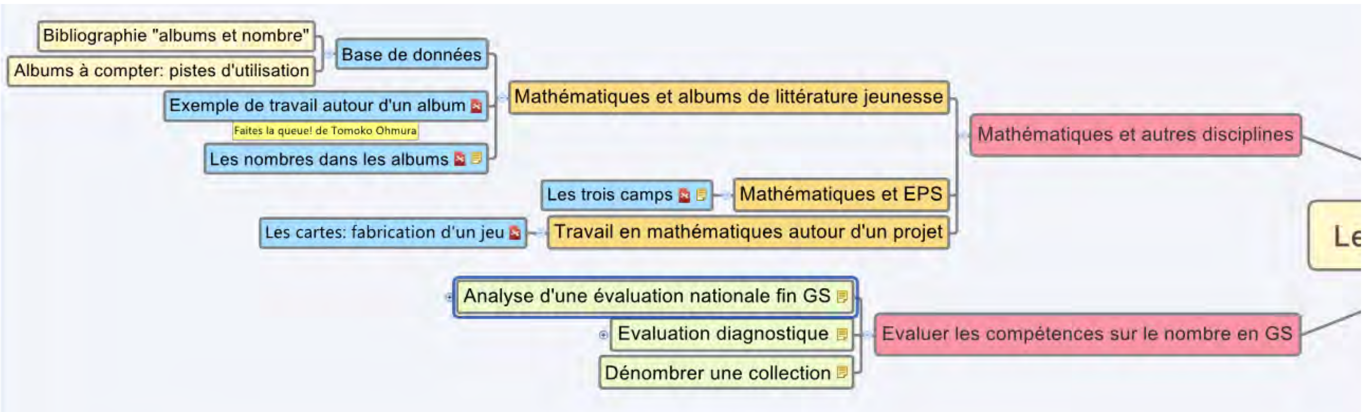


Figure 3. Développement des deux branches de gauche : structuration de l'apprentissage du nombre à partir de problématiques transversales

Les situations d'apprentissage apparaissent en bout de développement des diverses branches : un hyperlien Xmind permet alors d'ouvrir la carte mentale de chaque situation.

Cette mallette résulte de la collaboration entre les équipes de la COPIRELEM et du CREAD.

La COPIRELEM propose des situations d'apprentissage du nombre s'appuyant sur des matériels simples et faciles à mettre en place dans les classes (en bleu dans la carte ci-dessus).

Le CREAD reprend certaines des situations présentées dans la partie COPIRELEM mais sous un habillage différent, intégrant le travail en classe avec des logiciels utilisables y compris lorsque l'équipement informatique de l'école est très sommaire (en vert dans la carte ci-dessus).

1.1 La mallette maternelle : des situations de référence

La partie droite de la carte mentale « Le nombre à l'école maternelle » structure l'essentiel des situations proposées autour de la dialectique outil-objet matérialisée par les deux branches : le nombre outil et le nombre objet. Le découpage de la branche outil en quatre familles de problèmes : mémoire de la quantité, mémoire de la position et vers le calcul est introduit par un texte qui questionne les fondements de l'enseignement du nombre à l'école maternelle.

Un détour épistémologique permet d'appréhender le nombre comme une construction intellectuelle pour faciliter la résolution de certains problèmes pratiques rencontrés : conserver la mémoire de la quantité, garder la mémoire d'une position, comparer des quantités sans avoir à manipuler les collections correspondantes ; prévoir le résultat d'une action sur une collection avant que celle-ci ait lieu (ajout, retrait, partage). L'enjeu de l'apprentissage du nombre à l'école maternelle apparait alors comme la mise à disposition de ces problèmes sociaux de référence afin de conduire progressivement les élèves vers une autonomie dans l'utilisation des nombres pour les résoudre.

Chacune des situations proposées constitue, pour nous, une situation de référence pour l'apprentissage des notions visées. Elles ont toutes été retravaillées avec des élèves dans les classes des PE des d'équipes locales (PE, CPC et formateurs) et sont souvent issues de ressources connues (en particulier ERMEL GS et BRIAND et al., CDrom). Bien que ces ressources soient nombreuses et de grande qualité, nous avons constaté d'importantes difficultés de mise en œuvre dans les classes par les professeurs des écoles. C'est pourquoi, nous proposons une présentation détaillée de chaque situation et de son déroulement, illustrée par des photos, de courtes vidéos de classe. De plus, les situations utilisent en général un matériel simple, disponible dans toutes les classes d'école maternelle. Et lorsque des supports particuliers sont nécessaires, ceux-ci sont proposés dans la carte mentale, sous forme de fichier pdf.

La carte mentale « Le nombre à l'école maternelle » permet donc d'accéder à un deuxième niveau de cartes mentales : celle de chacune des situations proposées. Celles-ci sont pour la plupart structurées en cinq branches : présentation générale de la situation, étapes de mise en œuvre de la situation, matériel, échos de la classe, évaluation sur le modèle ci-dessous :

Figure 4. Carte mentale de la situation « Les ogres »

Le déploiement de chacune des branches permet ensuite d'accéder à l'ensemble des documents utiles pour appréhender la séance et la mette en œuvre dans une classe : présentation globale de la situation puis étape par étape par des textes et des illustrations extraites de la mise en œuvre dans des classes, matériel pour la classe sous forme de fichier pdf à imprimer, films permettant de voir comment la situation peut vivre dans une classe, documents pour évaluer les apprentissages réalisés au cours de la séquence.

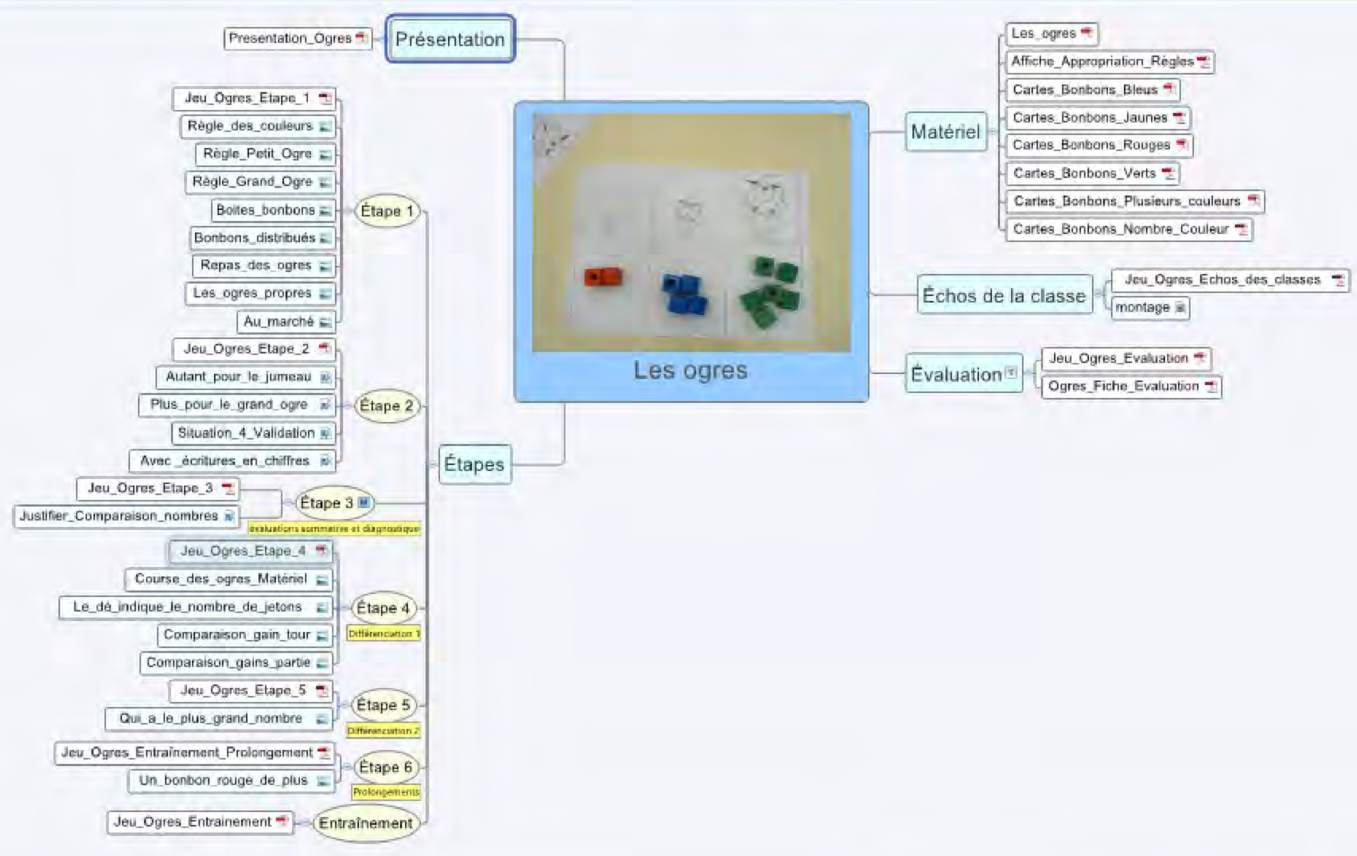


Figure 5. Déploiement des branches de la carte mentale de la situation « Les ogres »

Pour une description plus fine des documents présentant chaque situation d'apprentissage, nous renvoyions à l'article de ces actes qui rend compte de l'atelier A14 dans lequel les participants ont pu explorer une partie des ressources de cette mallette.

La partie gauche de la carte mentale « Le nombre à l'école maternelle » porte un regard plus transversal sur les situations d'apprentissage du nombre en MS et GS de l'école maternelle. Nous essayé de présenter quelques exemples de situations mettant en jeu certaines formes d'interdisciplinarité pouvant aller jusqu'à l'intégration d'apprentissages mathématiques dans une pédagogie de projet : utilisation d'albums de littérature jeunesse pour l'apprentissage du nombre, situation d'apprentissage mathématique prenant appui sur une séquence d'EPS, projet de fabrication d'un jeu de cartes, … Certaines des situations proposées dans ces branches peuvent se retrouver dans la partie droite.

D'autre part, nous avons souhaité aborder de façon spécifique la question de l'évaluation des compétences sur le nombre à l'école maternelle. Cette partie de la ressource s'appuie d'une part sur une analyse des évaluations en fin de GS, d'autre part sur des évaluations diagnostiques des compétences sur le nombre à la fois en début et en fin d'année de GS (voir DVD IUFM Midi-Pyrénées). Nous insistons beaucoup sur l'importance d'un repérage des compétences par l'observation des élèves au fil des activités afin d'éviter une multiplication des évaluations par un travail écrit sur fiches en contradiction avec les apprentissages reliés à la manipulation tels qu'ils sont développés dans cette ressource. Dans cet esprit plusieurs situations de travail sur le nombre sont proposées comme des supports pour permettre à l'enseignant le repérage des compétences de ses élèves.

Enfin signalons que la dimension jeu a été fortement développée dans les situations retenues dans cette ressource ; nous avons intégré dans la carte mentale de certaines situations des textes permettant de mieux appréhender la forme des jeux favorables à des apprentissages mathématiques – en particulier les aménagements didactiques nécessaires pour qu'un jeu de société deviennent un jeu pour apprendre.

1.2 La mallette maternelle : Logiciels pour le nombre à la maternelle

Une partie du travail mené par le CREAD dans le cadre du projet « mallette maternelle » a consisté à concevoir deux logiciels[7] mathématiques utilisables dès la moyenne section de maternelle pour le logiciel *Voitures et garages* (noté *V G* par la suite) et dès la grande section de maternelle pour le *logiciel Le train des lapins* (noté *TDL* par la suite). Travaillant depuis plusieurs années sur la question de l'intégration des nouvelles technologies pour l'enseignement des mathématiques à l'école (essentiellement à partir du début du cycle 3), le choix de proposer des logiciels pour la maternelle est né de la volonté d'apporter de nouvelles réponses à un questionnement récurrent des professeurs des écoles en formation initiale ou continue sur un « soi-disant » manque de ressources informatiques pour l'enseignement des mathématiques en maternelle. En tant que formateurs, nous proposions déjà des logiciels libres pour la maternelle, notamment ceux que l'on peut trouver sur le site de Thérèse Eveillard[8], sur le site du Terrier[9] (notamment *A nous les nombres*) ou ceux proposés par l'équipe de Stanislas Dehaene[10] (*La course aux nombres* et *L'attrape nombre*). Cependant, malgré les qualités de ces logiciels, les professeurs mentionnaient généralement diverses difficultés les freinant pour intégrer régulièrement ces logiciels dans leurs pratiques. Il s'agit essentiellement de difficultés techniques d'installation des logiciels (dans le cas d'*A nous les nombres* plus particulièrement), de difficultés prévues pour la gestion de la classe si un logiciel est utilisé, de difficultés à insérer l'utilisation d'un logiciel dans leur progression, de difficultés liées au manque de matériels informatiques dans leur classe ou leur école, etc. Ces difficultés font écho aux cinq dimensions relatives aux pratiques d'un professeur identifiées par Ruthven (2010) et permettant d'analyser l'intégration d'une ressource numérique dans les pratiques d'un professeur. Ces cinq dimensions sont les suivantes :

1. l'environnement matériel (disposition de la salle, de l'école, matériel informatique disponible etc.) ;
2. le système de ressources ;
3. le format d'activité : il s'agit du format d'activité habituel du professeur, qui a des routines pour la présentation d'une activité, l'organisation du travail de groupe, etc. ;
4. l'économie temporelle : ce qui concerne l'avancée du temps didactique ;
5. le script curriculaire : il s'agit d'un ensemble de connaissances professionnelles du professeur, développé au fil de sa carrière, pour l'enseignement de contenus semblables, à des niveaux donnés.

Les logiciels *V G* et *TDL* ont été conçus en relation avec ces cinq dimensions, avec une volonté de faciliter au mieux leur intégration dans les pratiques des professeurs. Au niveau de l'environnement matériel, les logiciels sont utilisables dès que l'on dispose d'un poste informatique dans une salle de classe, même sans moyen de projection ou de connexion internet. Par ailleurs, les logiciels ne sont pas sonorisés pour ne pas perturber le reste des élève dans le cas d'une utilisation sur des postes installés dans la classe. Au niveau de l'économie temporelle et du système de ressources, nous avons choisi de produire des logiciels reprenant des situations de référence en papier/crayon qui existent dans la culture commune des formateurs et de nombreux professeurs (*Voitures et Garages* est une variation de la situation des voyageurs d'ERMEL reprise dans la carte mentale de la COPIRELEM, et le *Train des Lapins* est une variation de la situation du train des signes de l'IREM de Bordeaux). Ces logiciels sont associés à du matériel concret manipulables par les élèves ainsi qu'à des ressources pour les professeurs et pour la classe montrant des possibilités d'articulation du travail sur ordinateur et du travail en papier/crayon. Au niveau du format d'activité, nous proposons une ressource détaillant différentes modalités de mise en œuvre des situations selon le type de matériel informatique disponible mais également selon l'habitude de travail des professeurs de maternelle (travail en atelier, travail avec une situation auto-validante pour favoriser l'apprentissage de l'autonomie, travail dans le cadre d'une différenciation, etc.)

---

[7] http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=607 (consulté le 12 décembre 2014)

[8] http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/ (consulté le 12 décembre 2014)

[9] http://www.abuledu.org/leterrier/accueil (consulté le 12 décembre)

[10] http://www.lacourseauxnombres.com/nr/home.php et http://www.attrapenombres.com/an/home.php (consulté le 12 décembre 2014)

Le contenu des ressources est également élaboré en prenant appui sur d'autres résultats de recherche. Les logiciels conçus par le groupe proposent tous une personnalisation du parcours des élèves et un accès à leurs résultats, donnent la possibilité de faire de nombreux essais, valident les réponses des élèves et permettent aux enseignants d'articuler le logiciel avec du matériel pédagogique associé. Bueno-Ravel et Gueudet (2009) ont montré que ces éléments favorisaient l'intégration d'un logiciel dans les pratiques effectives des enseignants.

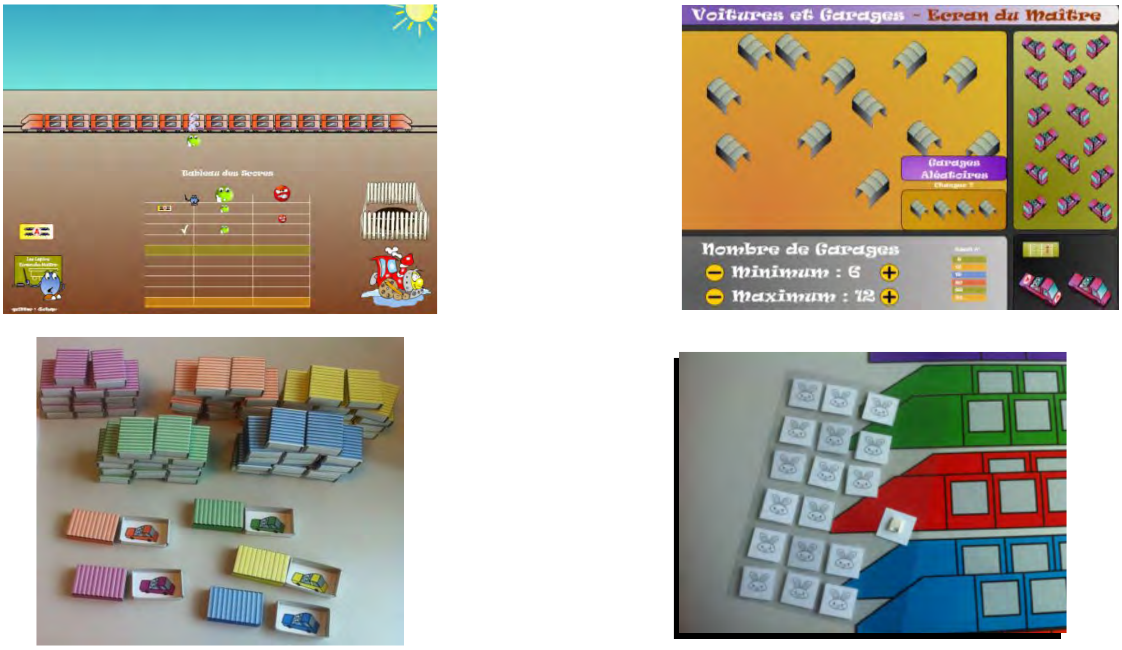


Figure 6. Extraits de ressources produites par le groupe MARENE : des logiciels paramétrables par l'enseignant (en haut à gauche), permettant à l'élève de faire de multiples essais (en haut à droite), associé à du matériel manipulable (en bas).

L'usage de ces ressources par les enseignants participant au groupe Marene a été suivi et analysé (Gueudet, Bueno-Ravel et Poisard, 2014 ; Besnier et Bueno-Ravel, 2014 ; Besnier, Bueno-Ravel, Gueudet et Poisard, à paraître) pour étudier la question de l'appropriation des ressources produites ainsi que le développement professionnel des professeurs. Les premiers résultats montrent que l'intégration de ces logiciels est possible en conditions réelles de classe (un seul poste dans une classe, classe de maternelle multi-niveau, etc.) et font apparaître que les usages des logiciels faits par les professeurs suivis ont pour particularité de développer la différenciation dans leur pratique de classe et mettent l'accent sur la verbalisation par les élèves de leur activité mathématique. Les études qualitatives se poursuivent pour identifier les liens éventuels entre l'appropriation et la modification par des professeurs des ressources fournies par le groupe Marene et le développement professionnel de ces derniers qui utilisent ces ressources.

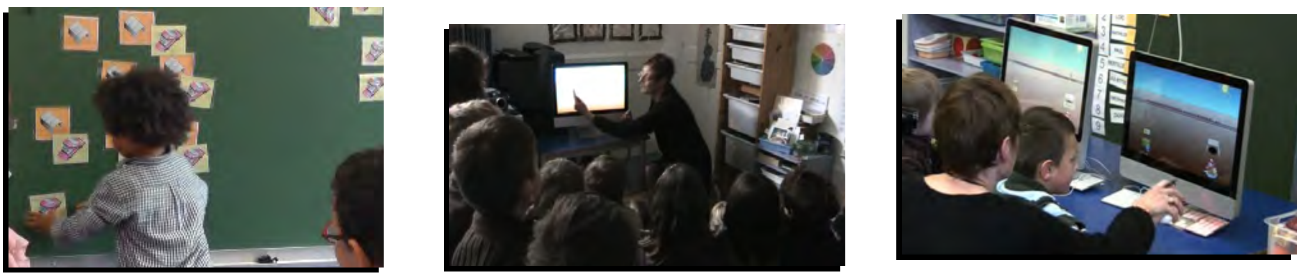


Figure 7. Exemples d'usages en classe des logiciels : articulation avec le matériel au tableau pour

permettre la verbalisation en grand groupe (à gauche) ; présentation du logiciel sur un seul poste (au centre) ; exemple de différenciation, la professeur aidant un élève pendant que celui de gauche travaille en autonomie (à droite).

1.3 La mallette maternelle : Le boulier chinois en GS

Nous présentons la partie de la mallette maternelle qui concerne le boulier chinois en grande section de maternelle (notée GS par la suite). Cette partie de la mallette résulte du travail du groupe de recherche Marene[11]. Les membres de ce groupe étudient de manière générale le boulier chinois à l'école en le considérant comme une ressource supplémentaire pour la construction du nombre, la numération et les opérations. Nous précisons que lorsque nous évoquons le boulier chinois, il s'agit du boulier chinois dans sa version matérielle (figure 1) et/ou dans une version virtuelle (figure 2).

Figure 8 :boulier chinois ou suan-pan

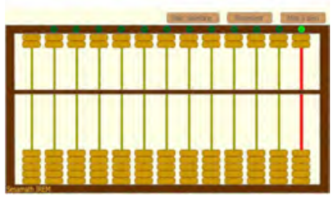


Figure 9 : Boulier chinois virtuel développé par l'association Sésamath et l'IREM de Lille.

Avant de décrire le contenu de la mallette nous allons, dans un premier temps, donner les règles d'utilisation du boulier chinois puis nous décrirons des objectifs d'apprentissage en GS en soulignant deux points importants.

Donnons tout d'abord les règles d'utilisation de ce boulier : il est composé de treize tiges, chacune correspondant à un rang de notre numération positionnelle, et d'une barre centrale que nous nommons « barre de lecture » (Poisard, Bueno-Ravel, Gueudet, 2011). Sur chaque tige cinq boules, appelées unaires (chacune vaut un), sont situées sous la barre de lecture et deux boules, appelées quinaires (chacune vaut cinq), sont situées au dessus. Pour inscrire un nombre, il faut ramener les boules vers la barre de lecture centrale du boulier ; on dit qu'on les « active ». Le boulier dans la version virtuelle choisie ici (figure 2), dispose en plus de fonctions et de caractéristiques spécifiques : la tige choisie pour les unités est rouge ; un clic sur l'icône « mise à zéro » désactive toutes les boules ; un clic sur « voir nombre » permet d'afficher l'écriture chiffrée du nombre inscrit sur le boulier et enfin un clic sur « placement » entraîne l'affichage de l'inscription économique du nombre, c'est-à-dire celle qui utilise le moins de boules possible.

Indiquons maintenant les apprentissages mathématiques possibles en GS avec le boulier. De manière générale, l'utilisation du boulier favorise la construction du nombre en GS. L'usage du boulier permet en outre, de donner du sens au nombre, d'apprendre à différencier valeur et quantité et de décomposer des nombres.

Prenons l'exemple de l'inscription de huit sur un boulier chinois. Pour inscrire huit sur le boulier, les élèves peuvent, par exemple, le décomposer en cinq et trois. Ils doivent ensuite savoir qu'une quinaire vaut cinq bien que cette boule soit semblable aux unaires. Il s'agit pour les élèves de distinguer la valeur d'une boule de la quantité de boules activées. Ils apprennent ainsi à coder le nombre huit sur le boulier. Le boulier permet donc un autre codage des nombres qui est complémentaire d'autres codages connus

[11]MAllette de REssources pour le Nombre à l'École, sous-groupe « Boulier chinois à l'école » : http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=611 (consulté le 12 décembre 2014)

des élèves : représentations par constellations, sur les doigts, écriture en chiffres, écriture en lettres, etc... (figure 3). Nous considérons que connaître différents codages d'un nombre et faire des liens entre ceux-ci permet aux élèves de donner plus de sens au nombre.

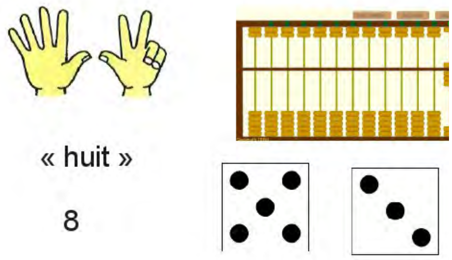


Figure 10 : Différents codages de huit

Pour que ces apprentissages soient possibles, nous soulignons deux points importants :

– Premièrement, une articulation entre l'usage du boulier matériel et du boulier virtuel lors de séances en classe permet aux élèves de s'approprier l'objet et de mieux comprendre ses règles d'utilisation. Le boulier dans sa version virtuelle, facilite le travail des élèves et de l'enseignant dans la classe. En effet, il permet une appropriation plus rapide des fonctionnalités du boulier. En particulier, la fonction « voir nombre » permet aux élèves d'effectuer des essais, de tâtonner en s'appuyant sur l'écriture chiffrée des nombres. Le boulier virtuel permet aussi une auto-validation des inscriptions et des lectures. Les élèves peuvent ainsi travailler en autonomie. Enfin, le boulier virtuel, lorsqu'il est utilisé avec un vidéo-projecteur ou un tableau numérique interactif, facilite les mises en commun collectives. Cela étant, les élèves ont aussi besoin de manipuler l'objet réel pour se l'approprier. C'est pourquoi il nous semble judicieux de proposer d'utiliser les deux types de boulier.
– Deuxièmement, une articulation avec d'autres ressources pour construire le nombre est nécessaire. En effet, le boulier peut s'intégrer dans la classe comme d'autres ressources telles que la bande numérique par exemple mais ne se substitue pas à elles. Il devient un moyen supplémentaire de construire le nombre et enrichit les ressources disponibles pour l'élève.

Ces remarques permettent en partie de comprendre les choix faits concernant les ressources présentes dans la mallette. Nous présentons maintenant ces ressources en les regroupant en trois catégories :

– **Des ressources pour la classe :** il s'agit d'une séquence intitulée « le boulier chinois en GS » et de ressources matérielles et virtuelles utilisables en classe pour mettre en œuvre cette séquence.

La séquence porte sur la « construction du nombre en GS » avec l'étude du boulier chinois et se veut complémentaire d'autres situations de classe sur le thème de la construction du nombre. L'objectif général de cette séquence est d'étudier différents codages du nombre et d'amener les élèves à faire des liens entre ces différents codages pour construire le sens du nombre.

Un cadre du boulier sans boules représentées est disponible et peut être imprimé en grand format. Cela permet de mettre en œuvre la séquence lorsqu'il n'est pas possible de projeter l'écran du logiciel au tableau. Cet outil permet de mettre en commun les réponses des élèves en utilisant par exemple, des aimants pour représenter les boules activées.

Des fiches comportant des cadres de bouliers sans boules représentées sont présentes, elles permettent à l'enseignant qui met en œuvre la séquence de créer ses propres exercices.

Le boulier virtuel créé par Sésamath ainsi qu'une fiche d'exercices en ligne paramétrables par le professeur (boulier j3p) sont disponibles.

– **Des ressources pour les élèves :** elles sont constituées d'exemples de fiches élèves pour inscrire et lire des nombres sur le boulier, d'un dictionnaire des nombres de 0 à 10 et d'un livre du boulier de 0 à 15.

Les fiches élèves donnent des exemples d'exercices à donner aux élèves lors des séances avec le boulier chinois. Il s'agit pour les élèves soit de lire un nombre sur un boulier représenté puis d'écrire le nombre correspondant (écriture en chiffres) soit de lire un nombre écrit en chiffres et de dessiner sur la fiche les boules activées sur le boulier.

Le livre du boulier de 0 à 15 montre les inscriptions de ces nombres sur le boulier. Par exemple, sur la page du deux se trouvent l'écriture chiffrée « 2 », le mot nombre « deux » et le codage de deux sur le boulier virtuel. Lorsque plusieurs inscriptions d'un nombre sont possibles sur le boulier, plusieurs pages sont présentes, c'est le cas pour cinq par exemple. Ce livre peut être utilisé comme la mémoire des tâches effectuées sur le boulier. Il peut être utilisé individuellement ou collectivement, les pages peuvent aussi être affichées au tableau au fur et à mesure de la découverte de nouvelles inscriptions sur le boulier.

Enfin, le dictionnaire des nombres de 0 à 10 se présente sous la forme d'un tableau dans lequel chaque ligne correspond à un nombre. Pour chaque nombre son écriture chiffrée, le mot-nombre associé, la constellation du dé ainsi que la collection de doigts correspondantes sont représentées. Le boulier apparaît donc comme un autre codage des nombres. Ce dictionnaire peut être utilisé tel quel ou peut venir enrichir la bande numérique déjà présente dans une classe.

- **Des ressources pour le professeur :** elles ont été crées pour permettre à un enseignant qui souhaite mettre en œuvre une séquence avec le boulier chinois dans sa classe de découvrir seul les règles d'utilisation du boulier. Elles sont constituées d'un tutoriel vidéo, d'un livret pour le professeur intitulé « pour aller plus loin à propos du boulier chinois » et d'une fiche « vocabulaire ».

Le tutoriel vidéo présente les règles d'utilisation du boulier et donne des exemples d'inscriptions et de lectures de nombres sur le boulier.

Le livret apporte des compléments au professeur en donnant des prolongements possibles pour utiliser le boulier au delà de la GS. Il présente un mode d'emploi du boulier, indique le vocabulaire utilisé, précise les apprentissages possibles au delà de la GS et inclut des remarques pour la mise en place en classe.

Enfin, la fiche « vocabulaire » reprend un paragraphe du livret de professeur dans le but de préciser cette question du vocabulaire employé par le professeur et par les élèves quand ils utilisent un boulier chinois. Cette question est importante pour la verbalisation des apprentissages.

Les ressources incluses dans la partie boulier chinois en GS de la mallette maternelle sont donc nombreuses car elles ont pour but de permettre à un enseignant de GS de s'approprier le boulier puis de disposer d'outils et de documents lui permettant de mettre en œuvre une séquence. Nous précisons qu'il faut en plus disposer de bouliers matériels puisque nous avons insisté sur la nécessité d'articuler l'usage du boulier matériel et l'usage du boulier virtuel. De plus, il nous semble nécessaire d'accompagner les enseignants qui souhaitent utiliser le boulier en GS dans le cadre de formation.

Enfin, il est important préciser qu'utiliser le boulier en GS est une première étape, il s'agit d'une base pour les niveaux suivants. C'est pourquoi, l'un des objectifs du travail en cours dans le groupe de recherche Marene est de produire des ressources pour le cycle 2 et de les rendre disponibles en ligne[12].

2 La mallette cycle 2 : La pascaline

Une machine mathématique pour l'école élémentaire est présente dans la mallette cycle 2 : la pascaline. Elle est proposée dans la mallette sous deux versions : une version manipulable et une version informatisée (la e-pascaline).

[12] http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=201 (consulté le 12 décembre 2014)

Figure 11 : La pascaline

Figure 12 : La e-pascaline utilisée ici sur une tablette

Les objectifs de l'utilisation de la pascaline ou de la e-pascaline à l'école sont de travailler sur :

- l'écriture décimale de position des nombres ;
- les notions d'unité, dizaine, centaine et l'échange de 10 unités contre une dizaine ;
- les opérations de calcul.

Pour plus de détails sur les activités proposées articulant travail sur la pascaline et travail sur la e-pascaline, il est possible de lire de texte de l'atelier 23[13] proposé dans ce DVD (Riou-Azou et Soury-Lavergne (à paraître)) et de consulter une description de la « mallette cycle 2 : pascaline » disponible en ligne à l'adresse suivante :

http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/equipes-associees/mallette/mallette-lyon/presentation_mallette_cp_ce1.pdf

III - PERSPECTIVE : LE PROJET MALLETTE ET LES RECHERCHES ASSOCIÉES

Les mallettes sont maintenant disponibles pour la plupart librement en ligne pour les professeurs et les formateurs. Elles commencent à être diffusées en dehors du cercle des équipes ayant participé à leur conception, que cela soit en formation initiale ou en formation continue.

Cependant, les recherches menées sur l'usage de ces ressources par des professeurs (notamment dans le cadre du groupe MARENE) nous ont conduit à proposer des modules de formation M@gistère pour soutenir l'appropriation des ressources par les enseignants. Ces modules seront disponibles à la rentrée 2015 sur la plate-forme M@gistère de la DGESCO.

Il serait intéressant de poursuivre des recherches sur l'appropriation des ressources des mallettes par des professeurs n'ayant pas pris part aux équipes de conception, sur les apprentissages des élèves en lien notamment avec l'articulation entre différents types d'artefacts (tangibles et informatisés), etc.

[13]Atelier 23 : Mallette d'outils mathématiques, le boulier et la pascaline.

IV - BIBLIOGRAPHIE

BERGEAUT, J.F., LAURENÇOT-SORGIUS, I. & VAUTRIN, M. (2008), *Autour du repérage des compétences dans des domaines mathématiques en cycle 1 et 2 : évolution des compétences numériques en GS*, DVD et livret d'accompagnement, IUFM Midi-Pyrénées.

BESNIER, S. & BUENO-RAVEL, L. (2014) Usage des technologies en mathématiques à l'école maternelle : le travail documentaire des enseignants, *Review of Science, Mathematics and ICT Education,* **8**(1), 63-80.

BESNIER, S., BUENO-RAVEL, L., GUEUDET, G. & POISARD, C. (A paraître) Conception et diffusion de ressources pour la classe issues de la recherche. L'exemple des apprentissages numériques à l'école, *Actes de la XVIIe école d'été de didactique des mathématiques, Nantes, 19-26 Août 2013.*

BESNIER, S., EYSSERIC, P. & LE MÉHAUTÉ, T. (A paraître) Mallette de ressources mathématiques pour l'école maternelle (MS-GS) - Atelier A14, *Actes du 41ème colloque COPIRELEM, Mont de Marsan 18-20 Juin 2014.*

BRIAND et al. (2004), Apprentissages mathématiques en maternelle : situations et analyses, CD Rom, Hatier.

BUENO-RAVEL, L. & GUEUDET, G. (2009) Online resources in mathematics: teachers' geneses and didactical techniques. *International Journal of Computer and Mathematic Learning,* **14/1**, 1-20.

CHARNAY et al. (1990), Apprentissages numériques en grande section de maternelle, ERMEL, Hatier.

EYSSERIC, P. (2014) Mettre au centre la résolution de problèmes. *Cahiers pédagogiques,* **517**, 48-50.

GUEUDET, G., BUENO-RAVEL, L. & POISARD, C. (2014) Teaching mathematics with technology at kindergarten: resources and orchestrations. In CLARK-WILSON, A., ROBUTTI, O., SINCLAIR, N. (Eds.) *The mathematics teacher in the digital era,* (pp. 213-240). New York: Springer.

POISARD, C., BUENO-RAVEL, L. & GUEUDET, G. (2011) Comprendre l'intégration de ressources technologiques en mathématiques par des professeurs des écoles. *Recherches en didactique des mathématiques*. **31**(2), 151-189.

RIOU-AZOU, G. (2014) Apports du boulier chinois en grande section de maternelle. *MathémaTICE,* **40**.

RIOU-AZOU, G. & SOURY-LAVERGNE, S. (A paraître) Mallette d'outils mathématiques, le boulier et la pascaline, *Actes du 41ème colloque COPIRELEM, Mont de Marsan 18-20 Juin 2014.*

RUTHVEN, K. (2010) Constituer les outils et les supports numériques en ressources pour la classe, in GUEUDET, G. & TROUCHE, L. (Eds) *Ressources vives, la documentation des professeurs en mathématiques*. (pp. 183-199). PUR, Rennes et INRP.

EVOLUTION ANNUELLE DE LA PLACE DES ENSEIGNEMENTS MATHEMATIQUES DANS LE CURRICULUM QUOTIDIEN AU COURS PREPARATOIRE

Aline BLANCHOUIN
ESPÉ de l'académie de Créteil, UPEC (Paris XII),
Experice (Paris XIII)
aline.blanchouin@u-pec.fr

Résumé
Nous nous intéressons à la place quotidienne réelle accordée à l'enseignement des mathématiques au CP. Nous mobilisons des données construites à partir d'une recherche collaborative[1] avec six professeurs des écoles (PE) de Seine Saint Denis (académie de Créteil) au cours de l'année scolaire 2011-2012.
Le cadre théorique de la clinique de l'activité (Clot 2008) nous sert à investiguer la définition du sens et de l'efficience que les enseignants polyvalents ont de leur activité d'enseignement alors que l'empan temporel d'une journée de classe est de six heures. Certains concepts de la didactique comparée et de sociologie sont mobilisés pour traiter les observations de classe tandis les trois logiques d'action de Vinatier (2013), nous servent à interpréter ce qui est effectivement programmé par les enseignants en prenant en compte leur point de vue à partir d'entretiens.
L'exploitation du matériau que constituent les plages de mathématiques observées nous conduit à présenter les caractéristiques générales de la sous programmation constatée de cette discipline au cours de l'ensemble de l'année scolaire et à en avancer des éléments compréhensifs. C'est ainsi que nous concluons sur l'importance de prendre en compte l'existence de la double préoccupation qu'ont les professeurs des écoles relative aux apprentissages de leurs élèves, d'une part, de la lecture et, d'autre part, de la forme scolaire qui distingue l'école élémentaire de l'école maternelle.

I - INTRODUCTION

Pour Clot (2008), le pouvoir d'agir d'un professionnel est fondé sur l'inter fécondation entre, d'une part, la définition des enjeux de son activité (le sens) et, d'autre part, du rapport entre ce qu'il y engage en termes de ressources (cognitive, émotionnelle, sociale, matérielle, temporelle…) et ce qu'il perçoit des résultats de son action (efficience). Ses ressources puisent à une quadruple source, personnelle et triplement sociale : impersonnelle (les prescriptions institutionnelles mais aussi de la sphère de formation), inter personnelle (relations dans la communauté de pratiques) et enfin trans-personnelle (les règles issues de l'histoire du métier). Nous parlons « d'intercalaire générique » pour désigner le fait que la ressource trans-personnelle agit comme un philtre ou encore comme ressource intégrative des trois autres.

C'est dans cette perspective que nous nous intéressons à l'évolution sur l'année des programmations mathématiques réelles de six professeurs des écoles (PE par la suite), aux trajectoires professionnelles plurielles (expérience dans le métier et dans l'enseignement du CP ; habitude à s'analyser pour communiquer-Maître formateur/PE-).

Dans une première partie, nous précisons le positionnement théorique adopté et la méthodologie de recueil de données. **La seconde partie** propose un état des lieux de la place des mathématiques au quotidien en la situant par rapport aux autres enseignements. **La dernière partie** est l'occasion

[1] Il s'agit d'une recherche menée dans le cadre d'une thèse dont le titre est *La journée de classe de l'enseignant polyvalent du primaire : étude sur une année scolaire du cours d'action quotidien en Cours Préparatoire,* Université Paris XIII, soutenue le 20.01.2015.

d'explorer ce qui fonde le pouvoir d'agir du PE « lorsqu'il fait des mathématiques » à partir des trois des six enseignants enquêtés. En guise de conclusion, nous proposons de prendre en compte pour investiguer les mathématiques au CP, l'existence de deux motifs d'agir « enseigner au CP » partagés par l'ensemble des PE exerçant à ce niveau de classe.

II - CADRES THEORIQUE ET METHODOLOGIQUE

1 Positionnement de l'objet de notre étude et méthodologie principale

Tout d'abord, pour caractériser le face à face en classe de l'enseignant avec ses élèves, nous retenons que :

- l'avancée du scénario didactique est le fruit d'une co-activité « enseignant-élèves ». Du point de vue des acteurs, l'intrigue didactique se déroule entre contrainte et contingence. Ainsi, la situation d'enseignement-apprentissage est caractérisée comme intersubjective et définie par des rapports de communication entre l'enseignant, le groupe classe, chaque élève ;
- le dilemme « faire classe-faire apprendre » ou encore maintenir « une vigilance didactique-maintenir la paix scolaire » fonde l'action de tout enseignant, et ce sur l'empan temporel de toute la journée. Autrement dit, ceci est vrai lors des séances mais aussi lors de tous les autres moments que les praticiens nomment « transitions » voire « interstitiels ».

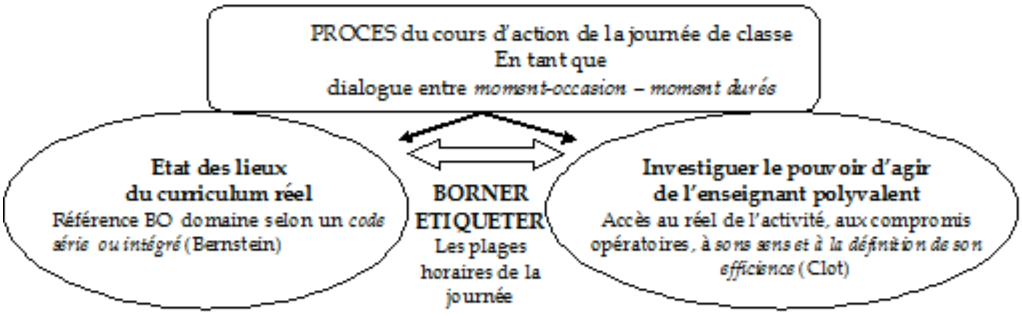
Nous les qualifions de « proto didactiques » en référence à Marchive (2003) lorsqu'il parle des rituels d'entrée en classe. Ainsi, en plus de « leur fonction sociale (régulation de la communication inter individuelle) ou instrumentale (obtention de l'ordre et de la discipline) », ces moments « sont une des conditions de l'ordre didactique, c'est-à-dire du fonctionnement des situations d'enseignement… ils constituent les formes rudimentaires et primitives sur lesquelles s'édifieront les règles spécifiques des différents contrats didactiques » (Marchive, 2003, p. 25).

Ces choix sont fondés sur une approche processuelle des 6 heures quotidiennes d'école par opposition à une conception provisionnelle du temps de classe. Ici, en référence à la pensée chinoise (Jullien, 2001), l'activité réalisée est appréhendée dans sa double dynamique, opportuniste et stratégique (moment-occasion) et de continuité-changement (moment-durée). C'est pourquoi nous parlons du procès de la journée.

L'objet de notre recherche est double, se nouant autour du repérage (découpage) et de la qualification (étiquetage) des plages horaires du curriculum journée en confrontant ce qui a été observé (et discuté avec les enseignants) à la grille horaire des programmes. Il consiste :

- d'une part, à faire un état des lieux des *enseignements réellement programmés*. Ici nous convoquons l'opposition faite par Bernstein (1975) entre curricula procédant d'un *code série* (marqué par la succession) *et intégré ;*
- d'autre part, à accéder au réel de l'activité afin d'interroger les ressorts du *pouvoir d'agir*. Ici, nous nous référons à Clot (2008, p. 18) : « le développement du pouvoir d'agir a une histoire « entre *sens et efficience* qui ne tient pas en place » (…). Le premier, fruit de l'échange est *source d'énergie*. La seconde, sortie de la technique ou offerte par elle, est *source d'économie*. On peut sans doute parler d'alternance fonctionnelle puisque le développement du sens appelle celui de l'efficience et inversement ». Ainsi, « l'efficacité dynamique du bien faire » a « une double origine, une double direction et se fait en alternant ces deux penchants que sont le sens et l'efficience ».

Le schéma ci-dessous résume les deux facettes de notre travail de recherche :



Le cadre de la clinique de l'activité a servi à concevoir et à animer un collectif de six enseignants de CP (annexe 1) lors de l'année scolaire 2011-2012.

Nous avons au cours de sept périodes de l'année (annexe 1), observé la journée de classe en continu des PE et organisé trois strates d'entretiens de secondarisation, c'est-à-dire de mise à distance par les professionnels conçus à partir des traces de l'activité réalisée (photo, extrait vidéo, déroulé effectif de la journée, tableaux des volumes horaires des différentes disciplines) et conduit de façon semi directive. Ils s'inspirent des auto-confrontations simples et croisées (Clot 2008), aussi bien dans leur conduite (contractualisation des objets de discussion) que dans leur enjeu. C'est ainsi qu'est provoquée une activité discursive redoublant l'activité réalisée pour avoir accès « au réel de l'activité », c'est-à-dire tout ce qui a été mis de côté, empêché mais aussi ce qui a été fait pour ne pas faire ce qui était à faire… Plus généralement, tout ce qui déborde de l'activité effective.

Lors de chacune des trois situations dialogiques (individuelle avec le chercheur le jour de classe, en triade avec un pair puis en collectif avec tous les PE), les PE sont conjointement engagés à :

- discuter les choix de découpage et d'étiquetage retenus par le chercheur pour faire le script de la journée ;
- investiguer le sens et l'efficience de leur activité, ses empêchements, ses renoncements, ses satisfactions.

Au total, trente-six journées de classe ont été observées ; elles ont été l'occasion de commentaires et de controverses lors de près de 80 heures d'entretien.

2 Outils conceptuels d'appui : didactique professionnelle et des mathématiques

Les **scripts journée** sont écrits à l'instar d'une séance, à partir de phases définies par le couplage « actions de l'enseignant et des élèves - enjeu pour le scénario didactique » en référence à la théorie des situations de Brousseau.

Pour situer « le moment de classe » dans la journée, l'étiqueter par rapport aux savoirs en jeu, et regarder le jeu des « places » entre enseignant et élèves dans l'avancement du cours d'action, nous retenons les **trois descripteurs** de l'action didactique (Sensevy et al., 2007) que sont respectivement la chronogénèse, la mésogénèse et la topogénèse.

Le modèle d'analyse des situations d'enseignement-apprentissage de Vinatier (2013) est lui utilisé pour interpréter « les schèmes interactionnels des enseignants face à leurs élèves » à partir de trois **enjeux** (ou logiques d'action) « qui s'inscrivent dans un milieu où l'enseignant doit, pour se faire reconnaître et progresser dans sa carrière, gérer des relations avec les parents d'élèves, ses collègues, sa hiérarchie » (p. 36) sont présents sous forme de dilemmes plus ou moins confortables à gérer.

Les enjeux sont :

a. **Intersubjectifs.** Les relations entre personne sont regardées à partir des deux dimensions du concept de face (Gofmann) : le « territoire symbolique et/ou matériel » (définition de « sa bulle » et du « pouvoir ») et « l'image de soi » (l'éthos dans des actes langagiers de conversations relevant de la préservation-mise en danger de l'autre –de soi). Ces enjeux intéressent le registre de la qualité des relations entre les acteurs, le climat de classe.

b. **Épistémiques**, de transmission de connaissances (logique du savoir et apprentissages visés). Ces enjeux affèrent au cheminement du savoir.

c. **Pragmatiques,** de régulation du pilotage de l'action dans ses dimensions spatiaux-temporelles et humaines (temps, tâches, outils de travail…). Ces enjeux intéressent plus particulièrement le registre des enchaînements, des débuts et des clôtures (épisode, séance, demie-journée, journée…).

3 Du matériau aux données

Nous interrogeons les écarts entre programmations prescrite (cf le référentiel construit en annexe 2), auto prescrite (identifiée via la page de cahier journal rédigée en amont de la journée et complétée parfois par des fiches de préparations) et réelle (repérée par l'observation et l'entretien individuel) en situant chaque plage horaire dans l'emboîtement des temporalités de la journée, de la semaine d'une période de l'année scolaire. Ceci nous conduit à une description du curriculum à l'échelle de la journée.

Les observations sont reprises pour écrire le script de la journée effective ; les plages horaires sont repérées en référence à un domaine disciplinaire (plages didactiques) ou non (plages proto didactiques).

Au sein des plages didactiques (d), avec Garnier (2003), nous distinguons deux ensembles relativement à leur poids socio institutionnel et à l'importance avec laquelle l'enseignant les délègue aux partenaires de l'action que sont les intervenants extérieurs et ses collègues. Il s'agit d'une part des disciplines du noyau central (d1) - le français et les mathématiques- et d'autre part des disciplines périphériques (**d2**) – langue vivante, découverte du monde, anglais, arts visuels, musique et Education Physique et Sportive.

Au sein des plages proto didactiques (p), nous distinguons celles dites de transition dans l'espace-temps de la classe, ***les plages proto didactiques d'encadrement*** *(pE),* des déplacements entre la classe et la cour (récréations, arrivée et sortie d'école, pause méridienne), *les plages proto didactiques d'entrée et sortie* ***(pe/s).***

Les scripts sont mobilisés pour renseigner les indicateurs suivants, pour chaque plage horaire :

- **Sa durée et sa représentativité dans le curriculum** de l'espace/temps de travail (classe, préau, bibliothèque, gymnase …) soit, la journée de 6 heures amputée de la durée des déplacements en dehors de cet espace-temps (**6h**-pe/s).
- **Son emplacement** dans la journée.
- **Les échos de contenu** avec d'autres plages.
- **Les rapports de communication** entre enseignant et élèves. Plus précisément, « le lieu », la « place », l'endroit où psychologiquement, l'élève éprouve la sensation de jouer dans l'accomplissement de la tâche un « rôle bien à lui » (Reuter 2013, p.217).
    - au grain de la journée à partir des régulations de l'emploi du temps en cours de ½ journée et lors de la pause méridienne.
    - au grain de la plage horaire à partir des postures de l'enseignant et de celles des élèves (Bucheton 2009) qui intéresse le registre des rapports de communication dans la classe.

Le tableau ci-dessous résume **l'ensemble des indicateurs utilisés** pour constituer les corpus de données à partir du codage des 36 journées de classe observées.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="3">Didactique 1 (d1)
Noyau central</td><td colspan="5">Didactique 2 (d2)
Disciplines périphérique</td><td colspan="2">Proto didactiques
Transitionnelles (p)</td></tr>
<tr><td>Noyau</td><td>Fr</td><td>Math</td><td>Av</td><td>Mu</td><td>LV</td><td>DDM</td><td>EPS</td><td>pE</td><td>pe/s</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Mésogénèse et chronogénèse</td><td colspan="8">-Bornage-Etiquetage : définition ; durées-poids par rapport au BO.
-Ecart « prévu » - « réalisé »</td><td colspan="2">Mise à jour du curriculum caché « journée »</td></tr>
<tr><td colspan="10">Répartition sur la journée (M/AM voire quartiles)</td></tr>
<tr><td colspan="10">Echo entre « plages horaires »</td></tr>
<tr><td colspan="3">d2 et pE</td><td colspan="5">avec d1</td><td>d1 et d2</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Topogénèse</td><td colspan="10">Participation des élèves : emploi du temps ; projet ; tâche ; fonctionnement quotidien…</td></tr>
</table>

III - LES MATHEMATIQUES DANS LA JOURNEE DE CLASSE : ETUDE DES 6 PE

1 Le curriculum d'une journée au CP

La durée annuelle moyenne des enseignements effectifs relevant des domaines disciplinaires du BO est de 4h17, **soit un peu plus de 71%** des 6 heures de la journée d'école. En miroir, **l'ensemble des plages proto didactiques** en constituent **un peu moins d'un tiers** (28,5% soit 1h43).

En fait, l'espace /temps de « travail scolaire (**d + pE**) » constitue, au niveau annuel, **85%** des 6h d'école : la grille horaire institutionnelle des programmes 2008 s'actualise donc sur un empan temporel quotidien de **5h05**.

L'étude des variations par période montre qu'en début d'année (avant les vacances de Toussaint), **la durée des plages didactiques** est plus basse représentant un peu moins de 66% et qu'au contraire, elle est plus haute tout au long des 2ème (70,8%) et 3ème trimestres (75% soit les ¾ des 6h quotidiennes). En miroir, les durées moyennes de l'ensemble des plages proto didactiques de début de 1er trimestre (autour de 2h) sont, au fil de l'année, constamment plus faibles selon **deux paliers successifs de diminution** : ponctuel, en fin de premier trimestre (1h45) et définitif, en début de second semestre (1h30).

L'évolution des caractéristiques du seul espace/temps de travail scolaire (d+pE) est marquée par :

- d'une part, **l'empan temporel** est en tout début d'année inférieur à **4h** ; en fin de 1er trimestre de **4h15**; et au cours du second semestre, autour de **4h30** (***soit + 30'***).
- d'autre part, **le poids moyen annuel des moments de transition en classe** (**pE**) de **15,76%** (48') diminue au cours du premier trimestre. Entre septembre et janvier, la baisse est de 8 points de représentativité dans le curriculum journée (-20'). Cette diminution bénéficie aux disciplines périphériques (**d2)** à part en mars (en faveur du noyau, d1).

1.1 Les rapports annuels entre les différentes plages didactiques (d1 et d2)

À l'échelle d'analyse de l'année, cohabitent d'une part, une sous **programmation horaire** de **d1** faible (3h16), quatre fois moindre que celle de **d2** (1h01). Ainsi la sur représentativité de **d1** par rapport à **d2** est de 13,8 points malgré une durée moyenne annuelle déficitaire de 30'.

À l'échelle d'analyse de la période, les rapports de représentativité au sein du curriculum entre **d1** et **d2** se situent tout au long de l'année au-dessus du prescrit (62,5% pour d1 contre 37,5% pour d2) mais ils sont au fil des trimestres, de moins en moins en faveur de **d1**. D'environ **81,7%,** avant Toussaint, le rapport fond jusqu'en juin de 10 points (**71%**) même si mars rompt ponctuellement cette dynamique (le rapport retrouvant ses valeurs de début d'année).

1.2 Les rapports entre le français et les mathématiques, au sein du noyau central

Plus précisément, au sein du noyau central (**d1**), *la faible sous programmation annuelle* cache des réalités différentes pour chacune des deux disciplines : si nous enregistrons une quasi conformité de la programmation français (2h17 pour 2h30 attendues), le déficit est marqué en mathématiques (58′ contre 1h15 attendu). C'est ainsi que la programmation annuelle du noyau central est à 76,3% composée du français contre 23,7% de mathématiques. C'est au-dessus du rapport préconisé par le BO de 62,5% de français contre 37,5% de mathématiques.

À l'échelle de la période, le français au sein du noyau est sur représenté par rapport aux mathématiques lors des deux premiers trimestres tout en diminuant progressivement, excepté mars. Les durées moyennes par périodes sont alors pour le français déficitaires de 7′ à 12′ (4,7% à 8% de l'attendu) et pour les mathématiques de 29′à 18′ (30,5% à 19% de l'attendu).

Au 3ème trimestre, les mathématiques s'avèrent par rapport au français surprogrammées. C'est en juin que cela est le plus manifeste avec +6,7 pts en faveur des mathématiques avec une durée moyenne conforme à l'attendu pour la seule fois de l'année.

2 Cartographie annuelle : rapports de durées au sein du curriculum journée

Alors que l'empan temporel de l'espace/temps « de travail scolaire » augmente de 10′ au cours de l'année et que la durée des plages proto didactiques d'encadrement diminue de 20′, les mathématiques progressivement sont présentes à hauteur de l'attendu institutionnel.

À l'opposé, le français au 3ème trimestre est sous-programmé par rapport au prescrit de 20% tandis que les disciplines périphériques continuent à être davantage présentes dans la dynamique de fin de 1er trimestre, restant fortement déficitaires (un peu moins de 50% de l'attendu du BO).

La cartographie ci-dessous fait apparaître par période (P1 signifie la première période du travail collaboratif de septembre) ayant eu la valeur de l'écart entre le prescrit et le réalisé en termes de sous programmation (le réalisé est inférieur à l'attendu) ou de sur programmation (réalité inverse).

1er Trimestre 5/09-16/12			2ème Trimestre 3/01-13/04		3ème Trimestre 30/04-4/07	
06 septembre -Toussaint		*10 novembre -Noel*	*Janvier -Mars*		*Mai -Juin*	
P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**

++++

(p)	plus **de 2h**		(p) **1h45**	(p) stabilisé **1h30** avec (P6 1h20)			
pE	plus **d'1h**		**moins 50'**	autour de **40'** (P6 45')			
pe/s	plus **d'1h**		**55'**	autour de **50'** (P6 46')			
Fr	**sous**R de 4,7%	**sous**R légèrement (de 8%) de façon stable			**surR**	**sous**R autour de 20%	
M	**sousR** de 40%	**sousR** de 27% progressive					**ok**
d2	**sous**R de 65%	**sous**R de 72%	**sous**R (p/r P1) un peu plus de 50%		**sous**R =P1	**sous**R p/r à P1 (P6) à un peu moins de 50%	
(d)	moins de **4h**		(d) **4h15** +15'	(d) autour de **4h30** +15' (P6 4h40)			

++++

Légende : sous-représenté (**sous**R) ; surreprésenté (**sur**R) ; représentativité conforme au prescrit (Ok)

3 Caractéristiques générales des mathématiques au CP

La durée moyenne annuelle par jour est de **58'** contre 1h15 prescrite. Les mathématiques sont donc annuellement programmées à **78%** de l'attendu institutionnel. Ceci correspond **à un poids** sur l'ensemble de la journée de **16,3%, ou sur le seul espace / temps de travail scolaire** (6h-pe/s) de **19,3%.** Avec ce dernier référentiel temporel, le déficit de programmation par rapport à la prescription (20,8%) est faible (1,5 point).

L'évolution horaire sur l'année, a contrario de celle du français, procède d'une hausse à partir d'une sous programmation en septembre (46') de 40% par rapport aux 1h15 attendues Précisément :

- dès la suite du 1er trimestre, la durée moyenne quotidienne gagne 9' (55') ;
- à partir de janvier, elle augmente de façon faible mais continue (une heure en mars) ;
- enfin, en juin, elle atteint l'attendu institutionnel avec un gain de 15' par rapport à mars.

En fait, cette augmentation ne reflète pas **la logique annuelle d'auto prescription des PE**. Effectivement, les mathématiques ne sont pas davantage prévues en fin d'année. Elles y sont anticipées à moins de 25% à 30% du prescrit a contrario de janvier (1h16), et moindrement qu'en septembre (-10%). Nous le voyons **les choix d'ajustements curriculaires lors de la journée d'école défavorables aux mathématiques en septembre leur deviennent favorables de façon marquante en toute fin d'année**.

Dès lors *l'écart entre le prévu et le réalisé sur l'année* est inférieur en septembre et janvier (-20') et inversement, supérieur en juin (+20'). Notons que sur les quatre autres périodes, il est peu marquant (-4' à +4').

Les plages horaires dévolues aux mathématiques sont présentes annuellement à **70,7% le matin,** selon des moyennes pour le **matin** de **41'24** contre **17'10** pour **l'après midi** (soit +34'). Au cours de l'année, l'écart entre les deux demi-journées tend à être le plus prononcé au 1er trimestre et le moins au second semestre (mars et juin). En fait, les pratiques des six PE sont contrastées. La répartition journée est :

- **stable** au cours de l'année chez les **trois PE les plus expérimentés au CP.**

  Pour deux d'entre elles, en faveur du *matin* (la PEMF **Ca** et la PE ayant une expérience de 6 ans dans le métier et de 4 au CP, **P**) et pour la troisième, selon un *équilibre entre les deux-demie journées* (**S** la plus expérimentée dans le métier et au CP**).**

- **variable** au cours de l'année pour les trois autres PE, dont les **deux PE les moins expérimentés** (**R et E**) et **la seconde PEMF** (**Cé**).

  Pour Cé : le fruit d'un questionnement professionnel sur le rythme de la journée l'a conduit à faire des essais d'emploi du temps sur les deux jours où elle a en charge les élèves. C'est ainsi que ne faisant que des mathématiques le matin en septembre, elle n'en fait plus que l'après-midi en juin suivant une règle personnelle forgée en cours d'année.

  Pour R : la tendance générale est au matin. En effet, la journée de septembre est « accidentelle » : les mathématiques de l'après-midi étaient prévues le matin. Il les relaye en après-midi, après une matinée où il ne cesse de prendre du retard sur son programme du jour. Lors des entretiens, il dit qu'à ce moment de l'année, il « sacrifie les mathématiques et se rattrapera plus tard », d'autant plus qu'il ne bénéficie hebdomadairement qu'entre Toussaint et Noël du maître E (co-interventions autour des aspects phonologiques de l'apprentissage de la lecture).

Enfin, de façon générale, en ce qui concerne **les domaines et les contenus,** les trois quarts des plages relèvent du premier domaine, **« nombres et calculs ».** Ce domaine (n°1) apparait être investi chaque journée par tous les PE (sauf **R**, biais d'enquête).

L'emparement de la prescription *« d'un entraînement quotidien* **au calcul mental** *(qui) permet une connaissance plus approfondie des nombres et une familiarisation avec leurs propriétés »* (BO 2008, p. 18) n'est plus manifeste à partir de janvier, il se fait sous forme :

- de séance décrochée à la séance de mathématiques du jour (**S, E, Ca**) ;
- lors de la séance de mathématiques quotidienne (**Cé**) ;
- lors du travail sur le cahier du jour (**P**, **S** en fin d'année) relatif en plus du calcul mental, aux exercices d'écriture en français (entraînement au geste graphique).

Les domaines 2 (géométrie) et 3 (grandeurs et mesures) représentent un tiers des enseignements. C'est ainsi que pour le quatrième domaine « **Organisation et Gestion des données** », nous n'avons pas observé de séances lui étant strictement réservées. D'ailleurs, aucune page de cahier journal n'y fait référence.

4 Cinq configurations de plages d'enseignements des mathématiques

Nous avons repéré **quatre** configurations de plages horaires en plus de la **configuration classique voire canonique**[2] d'une séance insérée dans une séquence d'apprentissage (qui concerne les domaines 1,2 et 3).

[2] D'évaluation, découverte, consolidation, réinvestissement… Dénominations en référence aux attentes de la sphère de la formation (intervenants ESPÉ et CPC).

La catégorisation mobilisée s'appuie sur l'opposition que fait Reuter (2007) entre « pratiques à vivre pour les élèves et des séances formelles »[3] .

Configurations repérées	**Illustrations de plages observées**	**Enjeu principal**
Séance classique	CM, domaine 1 Domaines 1-2-3 (absence domaine 4) *(Eval, découverte, entraînement)*	**Epistémique** *depuis une entrée principalement disciplinaire*
Séance « projet » *(marquée par l'opportunité)*	**Séance ponctuelle « mathématiques » :** Cé (rallye mathématiques) **Séance conçue « non mathématiques » :** R (projet année circons-national (argonimaux) : quadrillage / DDM) ; fin d'année : conclure le projet « correspondance » : Cé et Ca (CO)	**Double enjeu épistémique et pragmatique** : *gagner du temps sur le programme à faire*
Enseignement incarné (pratique à vivre)[4] *(marquée par l'opportunité)*	**1ère enclave du matin, autour des appels** -Ca : au 3ème T = problèmes additifs et concepts d'équivalence de quantité -Cé : déléguation appel **Séance plage d2 :** Cé (tracés après AV) **Au cours de la journée :** S (manipulation toute la journée de l'horloge)	
Séance « jeux »	**Jeux de société uniquement mathématiques** (Cé échecs) **Jeux de société Fr/mathématiques** (Cé, P, E voire R)	**Enjeu pragmatique** de pilotage temporel **et intersubjectif** de respiration : *la place du jeu*
Entraînement autonome	**-Plages instituées Fr/Mathématiques travail autonome, en ateliers :** E et P **-Fin de séance** : sous forme de coloriages magiques. Plus exceptionnellement, jeux construits (R, Cé)	**Triple enjeu épistémique, pragmatique et inter relationnel** : *gérer les différences de vitesses de travail pour garder le contrôle sur le groupe classe*

IV - LE CURRICULUM « MATHEMATIQUES » AU CP SUR L'ANNEE SCOLAIRE : ETUDE DE CAS

1 Variations inter individuelles de la place des mathématiques dans l'année

Annuellement, la place des mathématiques dans le curriculum du « temps de classe (6h-pe/s) » est légèrement majorée chez **E et Cé** et minorée chez **S et Ca**. Elle est en deçà de 5 points chez **R et P**. La trajectoire professionnelle n'apparaît pas prépondérante.

[3] Reuter (2007, p. 67) en évoquant l'Education civique qu'elle est d'autant moins identifiée (disciplinairement) « qu'une partie de ses composantes (vie de la classe, la citoyenneté scolaire…) ne fait pas l'objet d'un enseignement formel, classique mais **est incarné sous formes de pratiques à vivre** ». Le dilemme est alors de bénéficier du statut de curriculum caché » et en même temps de privilégier une secondarisation à l'action de « faire ».

[4] Reuter (2007, p. 67) évoquant l'Education civique qui est d'autant moins identifiée (disciplinairement) « qu'une partie de ses composantes (vie de la classe, la citoyenneté scolaire…) ne fait pas l'objet d'un enseignement formel, classique mais **est incarné sous formes de pratiques à vivre** ». Le dilemme est alors entre repérage (quant aux contenus, finalités, enjeux) d'un apprendre (voire un enseigner) et adhésion (motivation, enrôlement) des acteurs.

Ceci correspond à *des sous programmations horaires* pour tous, sauf **Cé** qui atteint les 1h15 prescrites. Ainsi, **P et R** font des mathématiques en en amputant l'horaire attendu à hauteur de 37% (soit plus du tiers), tandis que pour **S**, la *sous programmation* est d'un quart des 1h15 et qu'elle est de l'ordre de 15% pour **E et Ca.**

Ces deux dernières PE présentent, *au cours de l'année*, les variations les moins fortes. Leurs durées quotidiennes ne descendent jamais en dessous de 45' et sont le plus souvent d'au moins 1h. Ajoutons que l**es écarts annuels moyens** entre l'auto prescrit et le réalisé sont significatifs chez tous sauf **E.** Ils expriment un déficit annuel par rapport au prévu pour **P et Ca** ou une plus-value pour la seule **Cé.** Quant à **R,** les écarts conséquents et alternativement positifs comme négatifs s'annulent sur l'année**.**

Ci-dessous, une schématisation des profils de chacun :

----- ++++

Prévu	S 50'	R 51'25	P 1h01'15	Cé 1h02'30	E 1h08'30	Ca 1h13
Ecart Prescrit (BO) / Réalisé	*seul 3ème T* -6'	-4'	-15'	+11'	-3' *(sans P7)*	-10'

Réalisé	R	P	S	Ca	E	Cé
durée	47'	46'	56'	1h02	1h06	1h14
représentativité	15,47%	15,36%	19,02%	19,34%	22,7%	25,5%

Remarque à propos de la représentativité : le pourcentage indique la valeur de la place des mathématiques dans le curriculum réel quotidien sur l'année (moyenne annuelle)

Enfin, au cours de l'année, **la tendance générale d'une programmation mathématique** progressivement plus importante au fil de l'année n'est repérable strictement chez aucun PE, même si chez **Cé, P** et moindrement **Ca** existe une dynamique d'augmentation à partir de septembre.

2 La place des mathématiques dans le curriculum réel de 3 PE

En fonction de l'importance accordée aux mathématiques annuellement dans le curriculum, nous avons retenu parmi les 6 enseignants (cf le continuum ci-dessus), celui qui en fait le moins (**R, le plus jeune dans le métier**), celle qui en fait le plus (**Cé expérimentée, anciennement maître E et PEMF**) et une de celle qui se situe entre eux deux, (**Ca une des plus expérimentée au CP et PEMF**).

Nous nous appuyons sur les données du tableau ci-dessous qui présente pour chacun par période la durée des mathématiques enseignées lors de la journée observée et la présence à laquelle cela correspond dans le curriculum réel de l'espace/temps de « travail scolaire » (6h-pe/s) par rapport aux autres domaines.

d1 *m : 19,32 %*	**R**	**Cé**	**Ca**
P1 46'	*25'*	*44'*	*55'*
15,57%	**8,1%**	**15,5%**	**17,8%**
P2 55'	*57'*	*1h10*	
18,73 %	**19,3%**	**24,1%**	
P3 55'	*50'*	*1h08*	*1h07*
17,88 %	**16,7%**	**22,5%**	**20,6%**
P4 57'	*25'*	*37'*	*1h*
18,56 %	**8,2%**	**11,3%**	**18,8%**
P5 1h01'	*46'*	*1h26 + 44'/2*	*1h05*
19,77 %	**15%**	**28,3% (+14,5)**	**20,1%**
P6 1h03'	*1h13*		
20,2 %	**23,1%**		
P7 1h15'	*55'*	*1h53*	*1h04*
24,5 %	**17,9%**	**37%**	**19,4%**

2.1 Les mathématiques chez R, PE 2ème CP et d'année d'enseignement (T2)

Rapides précisions contextuelles

La classe de **R** comporte un nombre d'élèves qui fluctue en cours d'année (au plus fort 28 et au plus faible 24) dans une école Zep située aux pieds de cités. Il y est depuis l'an passé, sa première année d'enseignement. En mathématiques, il travaille avec *Vivre les maths* et conçoit les évaluations en fin de période avec sa collègue de CP qui a une dizaine d'année d'ancienneté dans le niveau. Il cherche à compléter les propositions du manuel lors d'un début de séquence à partir d'une situation de « manipulation ». En fait, il prend des libertés dans l'usage du fichier (ordre des enseignements ; recours aux exercices pour gérer les vitesses de travail).

Quelques caractéristiques de la programmation des mathématiques

Annuellement, avec **P** (4ème CP et 6ème année), il est celui qui fait le moins de mathématiques (47') et qui lui accorde le moins de place dans la journée (autour de 15,5%). La programmation horaire est donc autour de 62% pour une représentativité au sein du curriculum journée de 5,5 points inférieures à l'attendu du BO. **Au cours de l'année**, nous repérons deux journées atypiquement basses (25', moins de 10% du curriculum journée) : septembre (il sacrifie les mathématiques pour faire tout « son français ») et janvier (les deux évaluations sont plus rapides que prévue).

Ajoutons que l'écart entre prévu et réalisé enregistre des variations d'une journée à l'autre en ce qui concerne sa nature (en faveur ou non du réalisé) et de sa durée. Ainsi, l'écart moyen annuel qui est nul, **ne signifie pas au quotidien une adéquation entre l'anticipé et le réalisé.** Notons que le prévu est toujours en deçà de la prescription même au plus haut en juin (1h05 soit 86% de l'attendu) et qu'il est variable (45' à 1h).

En fait, l'année de **R** est marquée par ***son inspection*** (T2), ce qui redouble sa focalisation sur l'enseignement de la lecture puis de la production d'écrit (à partir de mars), alors même que l'expérience de l'année précédente lui a procuré des insatisfactions. C'est ainsi qu'il recherche lors des entretiens plus particulièrement à échanger sur les séances de français et qu'il place des évaluations mathématiques lors de notre venue, à partir de janvier (soit quatre fois sur sept). Ajoutons à cela le partenariat avec le maître E en novembre-décembre pour des séances de phonologie, contraignant l'emploi du temps hebdomadaire (deux enclaves placées) et le rythme d'avancée dans l'apprentissage des sons.

Pour comprendre sa programmation mathématiques, en plus de cette focale mise sur le français, deux autres facteurs sont à signaler relatifs à des activités mathématiques non répertoriées : son inscription à un ***projet national*** (partenariat CNRS-EN) proposé par sa conseillère pédagogique autour du suivi du déplacement de manchots équipés de balises Argos. Il voit naturellement une filiation avec le travail de vocabulaire de positionnement au programme de mathématiques et décide de le traiter dans le cadre de la ***découverte du monde***. Le deuxième élément à noter est l'inscription à son emploi du temps au fil de l'année (avec une amplification en fin d'année), d'une enclave « jeux » le vendredi après midi, s'inspirant des discussions avec **Cé**. En fait, cela fait écho avec une représentation de l'enseignement ludique et à l'importance qu'il attribue pour apprendre à la « manipulation ». D'ailleurs, en novembre, il conçoit une activité préalable aux exercices du fichier pour commencer la « longueur ».

2.2 Les mathématiques chez Ca, nouvellement PEMF, 8ème CP et 14ème année d'enseignement

Rapides précisions contextuelles

La classe de **Ca** comporte entre 21 à 22 élèves dans une école d'application située dans une zone pavillonnaire, accueillant une forte population d'élèves habitant dans une même résidence de fonctionnaires (gendarmerie). Elle arrive dans cette école après avoir toujours enseigné en Zep. C'est un choix contraint car, venant d'obtenir le CAFIPEMF[5] , la règle dans le département est d'enseigner dans une école d'application. Elle découvre donc de nouveaux collègues (pas de partenariat), un nouveau fonctionnement d'école (l'horaire des sonneries ; une classe de plain-pied sur la cour) et un public élèves très « scolaire » qu'elle n'a jamais connu. Elle est d'ailleurs également surprise par leurs performances scolaires. En tant que PEMF, elle prend en charge deux jours par semaine la classe (comme **Cé**) la conduisant à n'avoir à enseigner en mathématiques que les domaines calcul et nombre et les grandeurs.

Elle travaille depuis des années avec *Cap Maths* (Hatier) et ses kits « matériel » sont confectionnés et répertoriés par unité d'enseignement. Elle présente une grande maîtrise dans les routines de pilotage in situ de ce matériel (quand distribuer ? ; dans quel ordre ? ; quelle sollicitation des élèves ?) qu'elle transmet à sa collègue pour assurer la continuité des apprentissages.

Elle a choisi cette année de ne pas prendre le fichier pour les élèves car, jusqu'à présent, elle n'arrivait « au bout » ce qui exigeait des justifications aux parents.

Quelques caractéristiques de la programmation des mathématiques

Ca présente les traits de la pratique la plus stabilisée autour de l'enseignement des mathématiques qui pèse dans le curriculum journée un peu moins des 20,8% attendus (19,3%). La durée moyenne annuelle de programmation est de 1h03 soit autour de 82% de l'attendu.

Au cours de l'année, la programmation réalisée admet peu de fluctuations. Les plages mathématiques sont prévues et effectivement réalisées exclusivement le matin.

Le déficit annuel entre ce qu'elle prévoit et fait est d'une dizaine de minute. Ce résultat est essentiellement dû à deux facteurs :

---

[5] Certificat d'Aptitude aux Fonctions d'Instituteur ou de Professeur des Écoles Maitre Formateur

- l'écart de la journée de septembre (-26,7% soit -22') alors que **Ca** a changé d'école et qu'elle est surprise par les compétences et performances de ses élèves ;
- l'écart de juin où elle sur évalue le passage des évaluations (1h50).

En effet, la programmation horaire quotidienne prévue est la plus stable des PE au cours de l'année, se situant autour de 87% (1h05) de l'attendu (à part en juin). C'est qu'au cours de l'année, **Ca** ne supprime jamais une plage, ni même n'en réduit la durée fortement.

Ajoutons une singularité de **Ca** : la présence de contenus « mathématiques » lors de plages proto didactique d'encadrement autour de l'appel (en mars et juin).

2.3 Les mathématiques chez Cé, PEMF depuis 2 ans, 3ème CP et 14ème année d'enseignement

Rapides précisions contextuelles

La classe de **Cé** comporte entre 16 et 19 élèves (au tout début) dans une école d'application, classée Zep. Elle accueille une Assistante de Vie Scolaire le matin pour la suppléer dans l'accompagnement d'une élève. En tant que PEMF, elle prend en charge deux jours par semaine la classe (comme **Ca**), la conduisant à n'avoir à enseigner en mathématiques que les domaines calcul et nombre et la géométrie. Elle n'a pas repris le fichier Cap Maths pour ses élèves cette année et a choisi d'introduire un cahier (grand format) de mathématiques. Elle s'inspire du manuel qu'elle croise avec un autre (« jouer avec les mathématiques ») pour concevoir sa programmation et ses progressions. Elle travaille en collaboration avec son collègue de CP également maître formateur.

De plus, **Cé** a un rapport « d'autorisation à la prescription » que son emploi du temps « officiel » atteste, ne comportant aucune enclave d'Instruction Civique et Morale (ICM) et affichant des enclaves non disciplinaires (jeux : français et mathématiques). En fait, en tant qu'ancienne maître E, tout doit concourir à motiver et à favoriser les apprentissages du noyau dur (français et mathématiques) ; ainsi instrumentalise-t-elle des formats de séance (journal des apprentissages, attention et concentration) et les jeux (de société et des dérivés construits) pour enrôler les élèves.

Enfin, rappelons sa recherche au cours de l'année d'une enclave plus favorable aux mathématiques que celle de la deuxième partie de matinée après la séance principale de lecture. C'est ainsi qu'en mars et juin, elle conduit une séance (domaine 1) d'une heure après la récréation de l'après-midi à partir de quatre phases alternant modalité de travail (individuel, collectif), type d'entrée et outils de travail (exercice sur le cahier ; jeu oral ; question / réponse sur ardoise).

Quelques caractéristiques de la programmation des mathématiques

Annuellement, elle est la seule à avoir une programmation horaire conforme à l'attendu (BO) et est celle qui accorde le plus de place aux mathématiques dans le curriculum de l'espace-temps de travail (25,5%).

Elle atteint l'attendu des **20,8%** dès octobre ; en mars et juin les mathématiques représentent plus **du tiers** des enseignements quotidiens. Cette dynamique annuelle d'augmentation est rompu lors de la journée de janvier alors qu'elle accuse un déficit horaire de 56% par rapport à ce qu'elle avait prévu (37' contre 1h25) : en effet, la participation au défi mathématiques pour la première fois avec sa classe et de celle de son collègue, la conduit à « prévoir large » en augmentant de près de 30' la durée habituelle des mathématiques, ajoutant une plage l'après-midi. Or, le défi ne dure que l'unique plage du matin, et moins longtemps qu'anticipé.

La programmation mathématiques de **Cé** se caractérise également par le fait qu'elle procède d'un écart faible à l'auto prescrit de toutes ses plages (séances) et que sur l'année, le prévu est même plus bas que le réalisé. Ce phénomène se cristallise en deuxième partie d'année (mars et juin) autour de l'étiquetage « mathématiques » *a posteriori* (contractualisation PE-chercheur) des plages signalées échecs et jeux dans le cahier journal à l'origine du doublement de la durée prévu de 55'. Ce sont d'ailleurs les journées de mars et de juin qui positionnent la programmation mathématiques de **Cé** comme la plus forte et la seule conforme à l'attendu institutionnel. Les échecs ou les « jeux, de société ou construits pour des séances de découverte » de début d'après-midi complètent les enseignements de cette discipline sous une forme ludique, et non affichée comme tel aux élèves.

En fait, nous retrouvons cette entrée par le jeu et par des modalités de travail en petits groupes dans les séances mathématiques elles-mêmes.

3 Les ressources au cœur de la dynamique de la programmation des mathématiques au CP

Ce qui définit la dyade « sens -efficience » de l'enseignant polyvalent pour le registre singulier de son activité qu'est l'enseignement des mathématiques, est à l'aune de nos résultats, un jeu **de sept ressources principales** en plus de celle qu'a été le collectif de travail lui-même.

- L'emparement de ***la prescription de l'enseignement du français***. Il exprime particulièrement au CP la gestion de la **pression** (sociale, des parents, de l'institution, des pairs et des élèves) autour de la ***réussite à enseigner la lecture.***
- Concomitant, la ***conscience disciplinaire***[6] ***du français***, et particulièrement le caractère transdisciplinaire de ses apprentissages et une conception intégrée de l'apprentissage de la lecture autour du dire-lire-écrire.
- ***La conscience disciplinaire des mathématiques***, et particulièrement : l'entrée par le jeu ; les fonctions du matériel pour apprendre/ pour enrôler (motiver) ; le sens recherché pour des élèves de cet âge à appréhender certaines notions.
- ***Le rapport aux programmes du BO de 2008*** à travers d'une part la marge de manœuvre (horaire et étiquetage disciplinaire) que s'autorise le PE pour *formaliser son emploi du temps hebdomadaire* et d'autre part, *son usage effectif* entre ajustement ou strict respect.
- ***Les documents sources*** (manuel, guide du maître…) **de conception** de l'enseignement (familiarité ; positionnement de concepteur ou d'exécuteur ; contenu même de la ressource dont l'existence ou non d'un kit matériel).
- ***Les outils des élèves*** qui sont manipulés au quotidien (conséquences sur le pilotage et le repérage de la discipline par les élèves).

En fonction des PE, jouent trois autres ressources :

- ***le collectif*** de l'école (collègue de CP) pour la conception et l'évaluation de contenus et l'équipe de circonscription (CPC) pour des entrées « originales » dans le programme de maths (Argonimaux ; rallye ; échecs) ;
- ***le type de pilotage*** du cours d'action de la journée, davantage planificateur ou régulateur (ajustement à soi, aux élèves, aux événements de l'école) ;
- la convocation ***de présupposés ou connaissances de la maternelle*** pouvant inspirer une modalité de travail en « ateliers » ou fondant une définition des pré- acquis des élèves en mathématiques.

Enfin, nous devons citer une dernière ressource introduite par notre méthodologie d'enquête qui a offert aux PE près de 80 heures d'échanges. Ce **collectif de travail** a eu une double conséquence :

[6] Pour Reuter (2007) le terme désigne la manière dont « les acteurs sociaux (re)construisent les disciplines scolaires ». Mettre en œuvre ce concept, c'est s'atteler à débusquer et expliciter les formes de (re)constructions (des disciplines scolaires). Le concept vise à outiller (p. 62-63) une approche descriptive « des formes de conscience, appréhendées au travers de 3 composantes (finalité, contenu, repérage), de leurs relations et de leur structuration en une totalité » et une approche « descriptive et évaluative des « niveaux ou degrés » de clarté ou de pertinence de cette (re)construction ». En fait, en introduisant ce concept, Reuter désire rompre avec les termes de représentations et de rapport à (employés sans précaution méthodologique ni théorique souvent) et insister sur l'idée de construction, posant « qu'une discipline n'existe pas indépendamment de ses espaces d'actualisation » (p. 63).

- *lors de l'année scolaire* : pour **Cé,** en terme de prise de conscience de la complexité des apprentissages numériques ; pour **S,** de prise de conscience de la complexité des tâches proposées par le manuel et de **Ca,** de nécessité d'approfondir davantage l'analyse des obstacles des élèves ; **E,** de fonctions de monstration de l'enseignant et de la manipulation du matériel ;
- quant à **R**, c'est davantage en termes de rééquilibrage de programmation avec le français. Notons qu'**E** et lui participeront les deux années suivantes à une recherche collaborative concernant les apprentissages en numération au CP, acceptant de laisser leur manuel et que **S** changera de manuel (elle délaisse *Diagonale* avec lequel elle travaille depuis toujours pour *Cap Maths*, le manuel de référence de **Ca** et indirectement de **Cé**).

Ces ressources du métier sont au cœur de la place accordée quotidiennement au cours de l'année aux mathématiques par l'enseignant polyvalent. Pour autant, elles ne sont pas mobilisées par tous. De plus, elles s'inter fécondent de façon singulière, définissant ainsi les enjeux épistémiques, inter subjectifs et pragmatiques du PE, ainsi que le jeu de tensions qui les anime.

V - CONCLUSION : UN INTERCALAIRE GENERIQUE « ENSEIGNER AU CP »

Nous dirons que la situation d'enseignement/apprentissage au CP est saisie par les professionnels, quelle que soit leur expérience selon **deux règles du métier** qui gouvernent l'ensemble de ses choix curriculaires quotidiens et que l'avancée dans l'année scolaire fait évoluer :

- **La première** a trait aux apprentissages disciplinaires « français ».

  Il s'agit « d'apprendre à lire à tous ses élèves » puis à partir de janvier de « chercher à faire autre chose que du français et des mathématiques » tout en bouclant le programme de mathématiques que le PE se redéfini ou non. En effet, ici, l'adhésion à l'idée de cycle (et donc qu'en CE1 ils verront ce qui n'a pas été fait) et la dynamique collective locale jouent pleinement, à côté de l'autorisation ou non d'un écart avec les progressions proposées par le BO (rapport à la prescription primaire) que s'accorde le PE.

  La conséquence est un compromis opératoire lors de l'ajustement en situation, entre « faire tout ce qui est prévu » et « aller au bout des objectifs du jour en français ». S'il conduit à « sacrifier les mathématiques » en tout début d'année, il joue en fin d'année nettement en faveur de cette discipline.

- **La seconde** relève des compétences 6 et 7 du socle commun (2006) et de l'acculturation aux évolutions de la forme scolaire entre « maternelle » et « élémentaire » d'une part, et aux habitudes plus personnelles de l'enseignant d'autre part.

  Il s'agit là de rendre autonomes les élèves pour se mettre au travail puis dès novembre « y rester seuls » afin de gérer l'hétérogénéité en lecture, plus ponctuellement, les vitesses de travail différentes dans les séances mathématiques (et de découverte du monde). En effet, le style de pilotage de l'enseignant est souvent serré, accompagnant « pas à pas » l'avancée du scénario didactique. Les caractéristiques de la population élèves semblent influer davantage à partir du second semestre. Joue également pour les mathématiques, le choix ou non d'introduire de la manipulation, et donc d'avoir à gérer préparation en amont puis lors de la séance, distribution, rangement et attention à la nature de la manipulation pendant l'activité et les phases orales collectives.

L'enseignement des mathématiques dès lors est sous le sceau de cette double règle qui ne se traduit pas de la même façon en fonction de la trajectoire de socialisation professionnelle (vivier d'expériences de classe : types et années d'expériences ; rencontres professionnelles : pairs, formateurs…), du cursus scolaire-universitaire et de la trajectoire biographique.

Il semblerait pour autant que l'inexpérience au CP favorise une sur programmation « français », le doute et le stress de ne pas remplir sa mission s'avérant plus prégnante chez lui. Ceci peut être accentué pour :

- l'enseignant débutant par la peur du jugement de l'institution voire à de ses pairs,
- l'enseignant plus chevronné qui change d'école (ou/et de circonscription) ou « se sait inspectable ».

Enfin le contexte école joue également dans l'adressage plus ou moins fort effectué envers les parents et la population élèves.

A contrario, ce qui semble favoriser une programmation plus conforme : l'existence d'un kit matériel (fabriqué lors des années précédentes ou fourni avec le manuel) ; une conscience disciplinaire mathématiques basée sur le jeu d'une part et d'autre part sur une pratique régulière en situation d'entraînement ou d'imprégnation. Ceci renvoie à ce que nous nommons la conscience de tissages entre disciplines mais aussi aux caractéristiques de l'ajustement lors du face à face avec les élèves, à ce qui est vécu en fonction du projet mais aussi de ce qui émerge dans l'action de l'activité conjointe PE-élèves. C'est-à-dire du sens du moment opportun.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ASSUDE T., MERCIER A., SENSEVY G. (2007) : L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **Vol.27, n°2**, 221-252.

BAILLAT G., ESPINOZA O., VINCENT J. (2001) : *De la polyvalence formelle à la polyvalence réelle : une enquête nationale sur les pratiques professionnelles des enseignants du premier*. Revue Française de Pédagogie, **n°134**, INRP

BERNSTEIN B. (1975) : *Langage et classes sociales codes sociologiques et contrôle social*. Editions de Minuit, pp263-305.

BUCHETON D. (Dir.) (2009) : *l'agir enseignant : une question d'ajustement*. Octares

CHOPIN MP. (2007) : *Le temps didactique dans l'enseignement des mathématiques. Approche des phénomènes de régulation des hétérogénéités didactiques*. Thèse d'état Bordeaux 2, 2007.

CLOT Y. (2008) : *Travail et pouvoir d'agir*. Le travail humain. Puf

GARNIER P. (2003) : *Faire la classe à plusieurs. Maîtres et partenariats à l'école élémentaire*. Pur

JULLIEN F. (2001) : *du « temps » Eléments d'une philosophie du vivre*. Grasset

MARCHIVE A. (2003) : *Ethnographie d'une rentrée en classe de cours préparatoire : comment s'instaurent les règles de la vie scolaire ?*. Revue Française de Pédagogie, **n°142**.

REUTER Y. (2007) : La conscience disciplinaire présentation d'un concept. *Education et didactique,* **vol1-n°2**, 57-71. http://educationdidactique.revues.org/175

VINATIER I. (2013) : Le travail de l'enseignant. Une approche par la didactique professionnelle. De Boeck

VII - ANNEXE 1 : LES SIX ENSEIGNANTS DE CP ET LES SEPT PERIODES DE L'ANNEE

Les 6 PE

Six professeurs des écoles enseignant en CP, dans des établissements sensibles de communes différentes de Seine saint Denis ont donc été contactés en amont de la rentrée 2011.

Une charte a permis de contractualiser les enjeux du travail, la fréquence et la nature de celui-ci.

La population retenue procède de la volonté de constituer un groupe hétérogène afin d'alimenter de la controverse. Trois critères ont été croisés : l'ancienneté dans l'exercice du métier d'enseignant ; l'ancienneté dans l'enseignement du CP ; l'habitude à parler de sa pratique et à l'analyser (critère relatif au statut d'enseignant ou d'enseignant - formateur : PEMF).

Voici le collectif constitué définitivement autour du 1er septembre 2011 avec l'arrivée d'**E** :

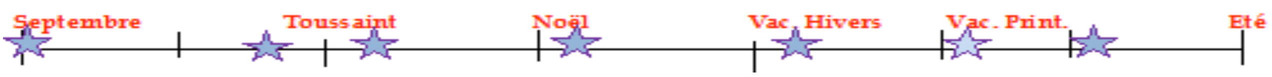
Circonscription	1	2	3	4	5	6
Spécificité école	Zep	Non classée	Ecole éclair	Zep	Zep	Ecole ++

PE	**P**	**S**	**E**	**R (Homme)**	**Cé**	**Ca**
Statut	PE (T6)	PE très expérimentée	PE (T4)	T2 débutant	MF ½ tps	MF 1/2 tps
Ancienneté Niveau CP au 1er sept 2011	4ème année	10 ans	2ème année	2ème année	3ème année	8ème année (dont en plus des années CP/CE1)
Ancienneté PE au 1er sept 2011	Début de 6ème année	35ème année	Début de 4ème année	Début de 2ème année	Environ 15ème année dont 3 en tant que MF et une partie maître E	Environ 14ème année dont la 1ère en tant que MF
Prise de contact Chercheur-Enseignant	27.05.2011 11h40-12h10 à son école	01.06.2011 14h30-15h30 à son école	08.09.2011 17h30 à son école	Au téléphone le 22 juin (30') après s'être croisé à son école	De visu depuis le projet de thèse et pré enquête 2009 + série mail 22-25 juin	De visu en fin d'année + mail
Relations avec le Chercheur	Aucune collaboration précédente. Contactées par le biais des PE de leur école respective (puis appel téléphonique).		Id. Contacté grâce à la CPC de la circonscriptio n	Id. Contacté grâce à la CPC l'ayant suivi en T1	Collaboration dans le cadre de la préparation au Cafipemf. Contactées par la chercheuse. **Nb :** travail avec Cé dans le cadre des PES	

Les 7 périodes de travail de l'année scolaire 2011-2012

Elles ont été co-définies par le chercheur et les PE à la suite d'un entretien en juin 2011 en amont de la rentrée scolaire. Le choix procède de la formulation des enseignants de deux moments critiques dans l'année, scandant le premier semestre : autour des vacances de Toussaint et janvier.
La collaboration de chacune des sept périodes s'est étendue sur environ un mois :

P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
8 sept-5 oct	13 oct-9 nov	17nov. -14 déc.	16 janv - 11 fév.	8 mars-11avril	4-12 mai	1juin -4 juillet



VIII - ANNEXE 2 : RELECTURE DE LA GRILLE HORAIRE DES PROGRAMMES 2008 POUR DES REFERENCES QUOTIDIENNES

Les « programmes nationaux de l'école primaire et ses grilles horaires » du BO n°3 du 19 juin 2008 (p7) définissent pour chaque domaine d'enseignement les connaissances et compétences à atteindre dans le cadre des cycles ; ils indiquent les repères annuels pour organiser la progressivité des apprentissages en français et mathématiques » (p10 lors du préambule).

Nous les retenons comme premier outil pour enquêter sur le curriculum réel du cours d'action de six heures de « classe » selon une approche ergonomique.

Pour disposer d'un référentiel journée du curriculum, nous avons complété le tableau ci-dessous des volumes horaires CP-CE1 des quatre journées de 6h (24h) des enseignements en groupe classe (p. 7) :

- d'une part, nous y avons adjoint *la représentativité* de chacun des « domaines disciplinaires » (calculs de pourcentages) ;
- d'autre part, nous avons extrapolé un *référentiel-journée.* En effet, les préconisations sont effectuées à l'échelle de la semaine (pour le français et les mathématiques) et de l'année pour le reste des domaines disciplinaires.

Domaines Disciplinaires	**Durée annuelle** annualisés (a)	***Représentativité*** ***Place accordée en % dans la journée***		**Empan hebdomadaire**	**Empan journée** **(calculs Chercheur)**	
Français (d1)	360h	**62,5%**	41,7 %	10h	**2h30**	
Mathématiques (d1)	180h		20,8 %	5h	**1h15**	
Education Physique et Sportive (EPS) (d2)	108h	**37,5%**	34%	9h	**2h 15**	*46'*
Langue Vivante (d2)	54h (a)		16%			*22'*
Pratiques artistiques et histoire des arts (d2)	81h (a)		25%			*33'30*
Découverte du monde (d2)	81h (a)		25%			*33'30*
Remarques	36 semaines			24h	6h	

Nb : nous nommons plages didactiques (**d**) les séances d'enseignement/apprentissage conçues en référence aux domaines disciplinaires. Plus particulièrement, avec Garnier (2003), nous distinguons les disciplines du noyau central (d1) - le français et les mathématiques- des disciplines périphériques (**d2**) –toutes les autres-.

QUOI DE NEUF DANS LA NUMERATION AU CP ? LE DENOMBREMENT EN QUESTION

Eric MOUNIER
Formateur et enseignant-chercheur, ESPE de l'académie de Créteil, UPEC (Paris 12)
LDAR (Paris 7)
eric.mounier@u-pec.fr

Nathalie PFAFF
Formateur, ESPE de l'académie de Créteil, UPEC (Paris 12)
nathalie.pfaff@u-pec.fr

Résumé

Nadine Grapin, Eric Mounier, Nathalie Pfaff et Elsa Prigent forment une équipe d'enseignants et de formateurs engagés dans la recherche qui a étudié une ressource testée depuis 2009 dans une, deux, dix puis cette année douze classes de CP. Les résultats présentés ici sont extraits de ce travail plus général.

Mounier (2010) étudie les signes de la comptine numérique et ceux des écritures chiffrées, dissociant ainsi deux systèmes de numération. De nouveaux outils théoriques s'en dégagent pour analyser certaines tâches numériques effectuées par les élèves, en particulier ceux du Cours Préparatoire (CP, 1e année de primaire, élèves âgés de 6-7 ans) lorsque du sens est donné aux chiffres, place et valeur. Dans cette communication nous questionnons ce que peuvent apporter des tests menés à grande échelle concernant plus spécifiquement la tâche de dénombrement dans laquelle on demande d'écrire « avec des chiffres » le cardinal d'une collection d'objets présents.

Nous exposons les résultats déduits de tests que nous avons menés. Le premier résultat concerne le rôle de l'énumération dans la réussite des élèves. Le second celui de la dizaine : nous interrogeons d'une part sa disponibilité et son utilité pour accomplir la tâche et d'autre part ce que son emploi révèle ou non des connaissances des élèves sur la numération écrite chiffrée.

Cette communication est aussi l'occasion de présenter les grands traits de la ressource construite pour la classe qui emprunte un itinéraire cognitif d'enseignement dit de « distinction » puisque l'écriture chiffrée y est construite initialement sans recours à la numération parlée, contrairement à ce qui est proposé actuellement dans les manuels scolaires.

Nous remercions tous les enseignants qui ont travaillé avec nous, ainsi que leurs élèves, sans lesquels ce travail n'aurait pu voir le jour.

I - LE DENOMBREMENT DANS LES EVALUATIONS DES CONNAISSANCES DES ELEVES DE CYCLE 2 EN NUMERATION

1 Les évaluations existantes

Il y a beaucoup de travaux de recherche autour des premiers apprentissages de la numération[1]. Pourtant, à notre connaissance, en France, mis à part l'évaluation nationale annuelle dont nous allons parler, il n'existe pas d'évaluation sur un grand échantillon d'élèves concernant leur compréhension de la numération de position en fin de CP ou en fin de CE1. Par exemple, Collet (2003) a testé 121 élèves belges de 2e et 3e année (CE1 et CE2, élèves âgés de 7 à 9 ans) mais la scolarité et le système de numération oral sont différents en France.

[1] Dans ce premier paragraphe, nous utilisons le mot numération dans son acception courante, regroupant les deux systèmes de numération utilisés couramment : le système écrit positionnel des écritures chiffrées et celui oral de la comptine numérique en langue vernaculaire.

Au Cours Préparatoire (CP, élèves âgés de 6, 7 ans), année durant laquelle du sens est donné à la position des chiffres dans l'écriture chiffrée des nombres, le programme 2008 libelle les connaissances sur le nombre en termes de compétences :

- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100.
- Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 (« table d'addition »).
- Comparer, ranger, encadrer ces nombres.
- Écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.

Au Cours Elémentaire 1e année (CE1) :

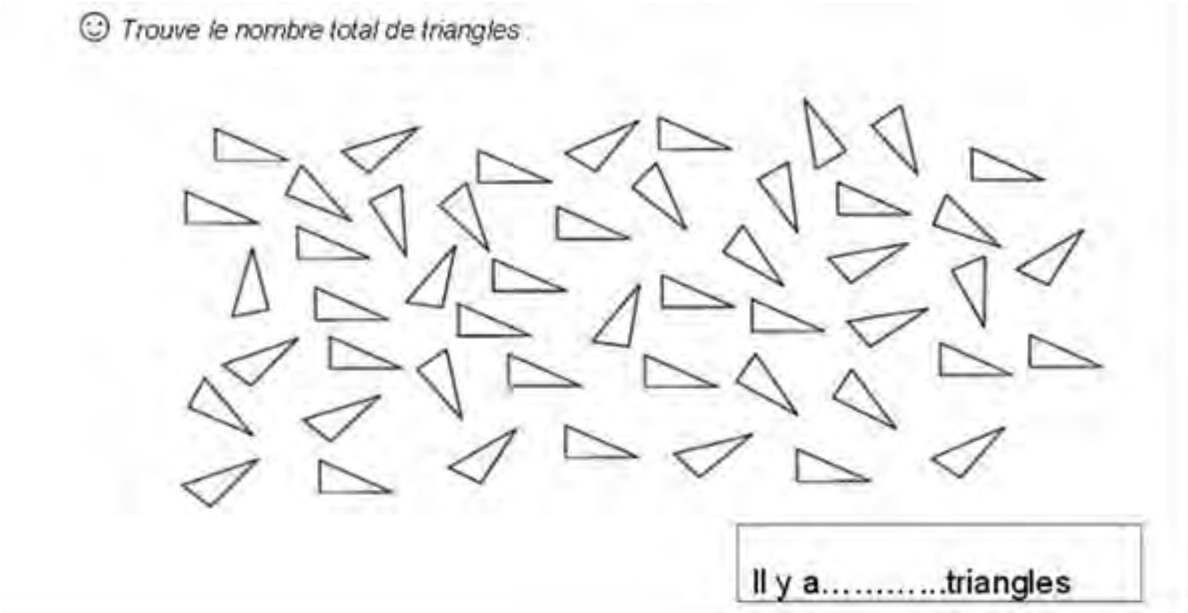
- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000.
- Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer.
- Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc.

Une évaluation nationale est proposée tous les ans aux élèves de fin de CE1. Nous avons classé les items de ces évaluations de 2009 à 2013 en utilisant le document institutionnel « Le nombre au cycle 2 » (Le Poche, 2010, p. 50) qui précise chacune des compétences du programme via différents objectifs à atteindre au CE1.

Items	*Numéro des items*	**Nombre**
Savoir associer désignations orales et écrites des nombres : - de 1 à 69 en utilisant les repères mémorisés « vingt », « trente », « quarante » et « cinquante », « soixante » ; - de 70 à 99 en utilisant les décompositions complexes (additives et multiplicatives) de ces nombres qui donnent du sens à la numération orale ; - de 100 à 999 en utilisant les décompositions complexes (additives et multiplicatives) de ces nombres qui donnent du sens à la numération orale.	*Ex 1 2009* *Ex 1 2010* *Ex 1 2011* *Ex 1 2012* *Ex 1 2103*	**5**
Savoir dénombrer une quantité d'objets pour produire une désignation écrite ou orale en les regroupant d'abord par paquets de dix objets, puis par paquets de dix paquets de dix – les paquets de cent – puis en dénombrant le nombre de paquets de cent, le nombre de paquets de dix et le nombre d'objets isolés.		**0**
- Savoir que dans une écriture à trois chiffres d'un nombre désignant une quantité, le chiffre de gauche indique le nombre de groupements par cent, le second le nombre de groupements par dix et le dernier le nombre d'objets isolés. - Savoir que dans l'écriture à trois chiffres d'un nombre désignant une valeur, la valeur des chiffres dépend de leur position dans l'écriture du nombre et introduire les mots « centaine », « dizaine » et « unité » pour parler de la valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture des nombres (maîtriser les décompositions canoniques).		**0**
Savoir écrire le successeur de toute désignation écrite d'un nombre à 3 chiffres en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération.	*Ex 8 2012*	**1**
Savoir comparer pour les ranger deux nombres de trois chiffres en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération.	*Ex 3 2009 -2010* *Ex 5 2009* *Ex 3 et 22 2011* *Ex 3 2012*	**7**

	Ex 3 2013	
Savoir encadrer entre des centaines un nombre de trois chiffres, savoir encadrer entre des dizaines un nombre de trois chiffres et en déduire un placement sur un segment gradué de 10 en 10 en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération.	*Ex 13 2010* *Ex 23 2011* *Ex 21 2012* *Ex 8 et 17 2013*	**5**
Savoir écrire une suite écrite de mots–nombres ou d'écritures chiffrées ou dire une suite de mots–nombres prononcés en fonction d'une règle donnée en s'appuyant sur l'un des aspects algorithmique ou sémantique de la numération ou sur la connaissance de la numération orale.	*Ex 3 2009* *Ex 12 2010* *Ex 16 2011* *Ex 15 2012* *Ex 5 2013*	**5**

Nous constatons que n'est ainsi classifié aucun exercice sur la compréhension de la numération de position des nombres à 2 chiffres en lien direct avec une tâche de dénombrement. Cependant un exercice, un seul en quatre ans, porte sur la compréhension du nombre en tant que quantité, c'est l'exercice 6 de 2009 :



Les résultats à cet exercice interpellent : 60% de réussite. Cette réussite ne repose pas uniquement sur le dénombrement mais aussi sur la reconnaissance des triangles. Déjà à ce titre il ne peut pas être représentatif de toutes les connaissances en jeu dans une tâche de dénombrement. De plus, le résultat seul n'indique pas la procédure, procédure qui peut engager par exemple un dénombrement de un en un ou des groupements de 10. Que peut nous apprendre les tâches de dénombrement sur les connaissances des élèves concernant la numération écrite de position, objet d'apprentissage au CP ?

2 Analyse *a priori* de la tâche de dénombrement de l'évaluation nationale

L'exercice précédent fait intervenir un certain nombre de variables : forme, disposition, nombre et variété des objets ainsi que leur caractère manipulable ou non. Les valeurs de trois de celles-ci – les objets à dénombrer sont non manipulables, ils sont disposés sans ordre apparent et relativement proches sur un quart de feuille rectangulaire 15 x 7 cm, leur nombre est fixé à 52 – influent sur les procédures d'énumération[2] envisageables pour des élèves de cycle 2 (élèves de 5 à 8 ans). Pour effectuer la suite de notre analyse des stratégies nous nous référons à la distinction sémiotique de deux systèmes de

[2] L'énumération est la connaissance mobilisée pour passer en revue tous les objets d'une collection un seule fois (Briand et al., 1999-2000). Couplée avec l'emploi de la comptine numérique, cette procédure de dénombrement est le comptage (Mounier, 2012).

numération, l'un oral, l'autre écrit chiffré (Mounier, 2010 ; Mounier, 2012 ; Mounier & Pfaff, 2012). Ce qui nous conduit à distinguer quatre procédures.

Procédure 1 : Interprétation ordinale de la numération orale sans ou avec repérants[3]

Pas de groupements matérialisés, énumération un à un et utilisation de la comptine, pour tous les objets, puis le nom du nombre est transcrit avec des chiffres.
1a : énumération en numérotant (ici de 1 à 52)
1b : énumération avec marques (objets barrés, pointés, reliés, …)
1c : énumération sans marque

Procédure 2 : Interprétation ordinale de la numération orale avec repérants ou interprétation additive

Des groupements en dizaines sont matérialisés, c'est la comptine des dizaines qui est utilisée, dix, vingt, trente, etc., puis le nom du nombre est transcrit avec des chiffres.
2a : groupements en numérotant de 1 à 10
2b : groupements avec marques (objets barrés, pointés, reliés, …)
2c : groupements sans marque

Procédure 3 : Interprétation multiplicative de la numération orale

Pour obtenir le nom du nombre, des groupements en dizaines sont matérialisés et ils sont comptés un à un (un, deux, trois, …), idem pour ceux qui ne sont pas groupés ; l'écriture chiffrée est obtenue à partir du nom du nombre (cinq dizaines et deux se dit « cinquante-deux » qui s'écrit « 52 »).
3a, 3b, 3c : idem précédemment

Procédure 4 : Interprétation de référence de l'écriture chiffrée

Des groupements en dizaines sont matérialisés et ils sont comptés de un en un (un, deux, trois, …), leur nombre est retranscrit directement par un chiffre ; idem pour les objets qui ne sont pas groupés. Si l'oral « cinquante-deux » est prononcé ou pensé, il vient de la lecture de « 52 » et ne sert pas à réaliser la tâche.
4a, 4b, 4c : idem précédemment

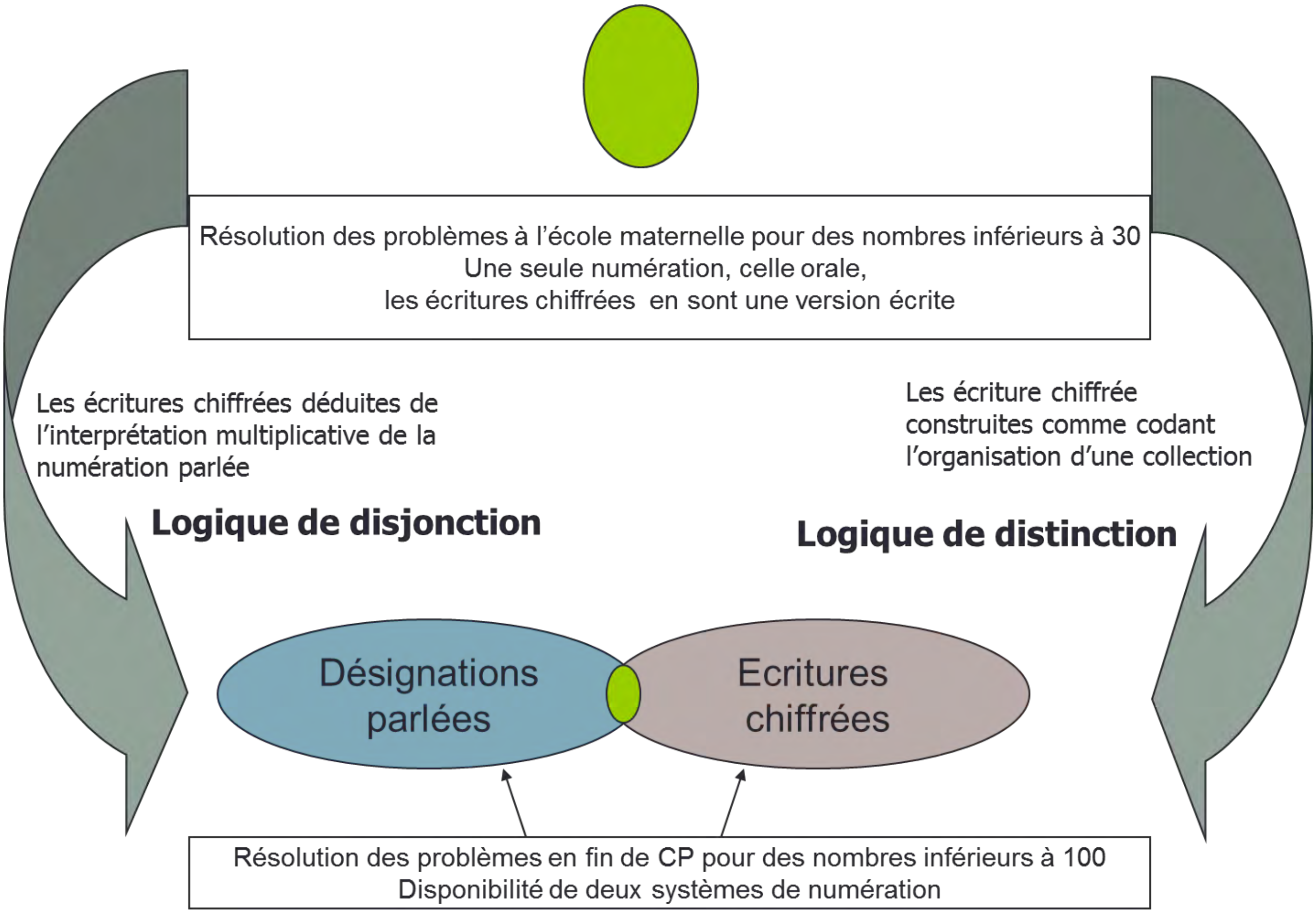
Contrairement à la 4e, dans les trois premières procédures l'écriture chiffrée est obtenue à partir nom du nombre (en français).

3 Sur l'enseignement de la numération en France

Ces différentes procédures interviennent lors de l'enseignement de la numération au CP pour les nombres inférieurs à cent, mais pas toujours de la même façon. Deux grands itinéraires cognitifs d'enseignement peuvent être définis (Mounier, 2010).

---

[3] Les repérants sont les mots qui structurent la comptine orale tels que dix, vingt, trente, etc.



Le premier itinéraire, la logique de disjonction, consiste à expliciter les écritures chiffrées à partir de la numération orale. Par exemple il va s'agir d'expliquer pourquoi « trente-deux » s'écrit « 32 » avec des chiffres. Dans le deuxième, la logique de distinction, l'écriture chiffrée est vue directement comme un système de codage de l'organisation d'une collection en dizaines et unités. Ensuite des liens sont étudiés entre ce système positionnel et le nom des nombres. Ce deuxième itinéraire rend disponible plus tôt dans les apprentissages la procédure 4. Le premier itinéraire n'engage pas nécessairement un apprentissage de cette procédure 4, pourtant identifiée comme utilisant les ressources propres au système de numération que constituent les écritures chiffrées. Par ailleurs le deuxième itinéraire n'est pas proposé dans les manuels scolaires de CP (Mounier, 2010). Cette analyse montre l'influence potentielle, à un niveau très général, de l'enseignement reçu sur les procédures favorisées, en particulier concernant l'emploi de la dizaine.

4 Problématique

La question générale que nous nous posons concerne l'accès aux connaissances sur le nombre des élèves de fin de CP. Nous nous demandons ce que peut nous apprendre la tâche de dénombrement consistant à indiquer le cardinal d'une collection par une écriture chiffrée. L'analyse *a priori* nous a montré qu'une réussite à une telle tâche pouvait relever d'utilisations différentes de la dizaine, voire du non emploi de celle-ci, et révéler des difficultés dans l'énumération. L'analyse de l'enseignement montre par ailleurs qu'une des procédures, celle ne mettant pas en jeu la traduction du nom du nombre, n'est pas favorisée par les ressources actuellement disponibles en France. Il s'agit donc d'explorer ce que cette tâche peut dire des connaissances des élèves en tenant compte de l'enseignement reçu à un niveau très général, celui des itinéraires cognitifs. Ajoutons ici qu'à notre connaissance les analyses usuellement proposées dans les recherches ou la littérature pédagogique ne distinguent pas fréquemment explicitement les procédures 2 et 3 de la procédure 4, cette dernière mettant pourtant directement en jeu les possibilités sémiotiques du système des écritures chiffrées. Le cadre théorique que nous proposons d'utiliser permet donc d'apporter un regard nouveau.

Pour avoir des éléments de réponse à cette problématique nous avons effectué deux tests en nous concentrant sur certaines valeurs des variables de la tâche de dénombrement.

II - LES TESTS

Nous présentons ici deux tests qui nous permettent d'ébaucher des questions et hypothèses.

1 Un premier test portant sur 260 élèves

1.1 Présentation

Ce premier test concerne 260 élèves de début de CE1 (première semaine de l'année). Le nombre important d'élèves, venant de 18 classes et 6 établissements différents, permet d'atténuer un effet lié aux conditions spécifiques d'enseignement et d'apprentissage d'une classe. Par ailleurs nous voulons savoir comment la dizaine peut être utilisée (ou non) par les élèves. Nous avons alors testé deux populations. La moitié de l'effectif environ (9 classes, 132 élèves sur les 260) a suivi l'itinéraire cognitif classiquement proposé par les manuels scolaires en France, celui de disjonction des numérations. Les autres élèves (128 provenant de 9 classes) ont suivi un itinéraire de distinction. Pour proposer ce second itinéraire, nous avons utilisé la ressource nommée Champion des Nombres (CDN) que nous avons élaborée à partir d'une ingénierie envisagée dans la thèse de Mounier (2010) qui a été introduite et développée en classe ordinaire sur plusieurs années, constituant ainsi une ingénierie dite de deuxième génération (Perrin-Glorian, 2011). Les grandes lignes de cette ressource sont décrites dans l'annexe 1. Ceci nous permet d'avoir une population homogène quant à l'enseignement reçu concernant le lien de la dizaine avec l'écriture chiffrée.

Ce premier test comprend 3 exercices (voir annexe 2) dont nous étudions les résultats en utilisant l'analyse *a priori* précédente. Les élèves ont à leur disposition un crayon à papier et une gomme : ils peuvent laisser des traces, faire des essais. Le premier exercice teste leur capacité à traduire en chiffres le nom du nombre prononcé à l'oral, ce qui est en partie en jeu dans les procédures 1 à 3. Dans le deuxième exercice on demande d'écrire avec des chiffres le nombre de ronds (53) dessinés sur une feuille sans organisation. Il est proche de celui proposé aux évaluations nationales de 2009. Cependant ici nous avons recueilli les productions et donc nous pouvons voir les traces d'énumération et de groupements (des dizaines). Le troisième et dernier exercice est identique au 2^{e}, mais cette fois-ci il s'agit de 75 carrés organisé en 5 carrés seuls et 7 rangées de chacune dix carrés (les élèves sont informés que chaque rangée comporte dix carrés). Il nous permet de savoir ceux qui mobilisent la dizaine dans une situation qui le requiert : le temps est en effet limité, les élèves n'ont pas le temps d'utiliser la procédure 1, le comptage un à un de tous les éléments la collection.

1.2 Résultats et premières analyses

Exercice 1 : écrire avec des chiffres le nom des nombres

Le nom des nombres qui posent des difficultés sont ceux après soixante-dix ; les autres sont très bien réussis, au-delà de 93% pour huit, treize, vingt-six et cinquante-trois. Le tableau suivant précise les effectifs des réponses exactes.

	cinquante-trois	soixante quinze	quatre-vingt-treize
Total des 260 élèves	248 (95 %)	201 (77 %)	185 (71%)
Non CDN, 132 élèves	123 (93%)	96 (73%)	88 (67%)
CDN, 128 élèves	125 (98%)	105 (82%)	97 (76%)

On voit un faible écart de réussite entre les deux groupes qui montre que les élèves CDN savent écrire les nombres avec des chiffres à partir de leur nom même si le lien entre écriture chiffrée et le nom des nombres est peut être travaillé plus tardivement dans l'année par rapport aux autres méthodes. Ce lien est quand même travaillé régulièrement à partir de la période 3 (sur 5 périodes d'environ 7 semaines). Presque tous les élèves savent écrire cinquante-trois en chiffres, le nombre en jeu dans l'exercice suivant du test (dénombrer 53 ronds).

Exercice 2 : dénombrer 53 ronds non organisés (écriture chiffrée demandée)

Réponse	53	52	54	51	55	Pas de réponse	Autres réponses
Total des 260 élèves	118 45%	17 7%	15 6%	10 4%	2 1%	17 7%	81 31%
Non CDN (132)	59 45%	9 7%	5 4%	4 3%	0 0%	10 8%	45 34%
CDN (128)	59 46%	8 6%	10 8%	2 2%	2 2%	7 5%	40 31%

Il n'y a pas d'écart de réussite entre CDN et non CDN mais moins de la moitié des élèves réussissent cet exercice. Ce résultat est cohérent avec les 60% de réussite à l'exercice de dénombrement des triangles de l'évaluation nationale 2009 pour des élèves de fin de CE1 : sur une année on passe de 45% à 60 %.

La différence entre CDN et non CDN est significative sur l'emploi de la dizaine dans les procédures utilisées. Ici nous considérons que les élèves tentent de faire des dizaines lorsque nous relevons des groupements matérialisés comportant 9, 10, ou 11 objets.

Réponse	Présence dizaines	Réussite si dizaine	Non présence dizaines	Réussite si non dizaines
Total des 260 élèves	108 41%	55/108 (51%)	152 59%	63/152 (41%)
Non CDN, 132 élèves	31 23%	18/31 (58%)	101 77%	41/101 (41%)
CDN, 128 élèves	77 60%	37/77 (48%)	51 40%	22/51 (43%)

60% des élèves CDN effectuent des groupements par dix alors que c'est le cas pour seulement 23% des élèves non CDN. Par contre, ils ne réussissent guère mieux en effectuant des groupements. De manière générale, l'emploi de la dizaine n'assure pas une réussite supérieure. Une difficulté commune concerne l'énumération comme le montre le tableau suivant.

Réponse	Traces d'énumération	Réussite	Pas de traces d'énumération	Réussite
Total des 260 élèves	164 63%	84/164 (51%)	96 37%	34/96 (35%)
Non CDN, 132 élèves	90 68%	46/90 (51%)	42 32%	13/42 (31%)
CDN, 128 élèves	74 58%	38/74 (51%)	54 42%	21/54 (39%)

Dans ce tableau nous n'avons pas comptabilisé les productions avec des groupements sans traces d'énumération, ce qui représente 47 élèves sur les 132 de CDN et 22 sur les 128 de non CDN. Les traces d'énumération considérées ici sont le numérotage ou le marquage des ronds un à un, que ce soit pour constituer des groupements ou non. Globalement, nous avons remarqué l'importance des erreurs d'énumération, CDN ou non CDN. Plus d'un tiers des élèves ne laisse pas de traces. En examinant les traces laissées nous constatons en outre que même ceux qui font des marques ont des difficultés à énumérer tous les éléments : certains sont oubliés, que ce soit avec ou sans groupement. Ainsi, le dénombrement semble poser des difficultés moins par une incompréhension d'une procédure à mettre en œuvre que par des erreurs de comptage dues à l'énumération : mauvais comptage des groupements, oubli de compter certaines unités, groupements effectués ne comportant pas toujours 10 ronds mais 8, 9 ou 11. La connaissance de la comptine numérique et celle de la coordination avec l'énumération semblent jouer un rôle moins important. Un facteur significatif de réussite proviendrait donc d'une énumération exacte, que ce soit avec des dizaines ou non. Le gain de performance sur l'année de CE1, 45% de réussite à notre test de début d'année et 60% au test national de fin d'année, proviendrait-il de manière significative de l'amélioration des compétences en énumération en cours d'année ?

Exercice 3 : dénombrer 75 carrés organisés avec 7 dizaines visibles et 5 « tout seuls » visibles

Réponse	75	73 ou 74	65	Pas de réponse	Autres réponses
Total des 260 élèves	114 44%	8 3%	5 2%	87 33%	46 18%
Non CDN, 132 élèves	48 36%	1 1%	4 3%	51 39%	28 21%
CDN, 128 élèves	66 52%	4 3%	1 1%	36 39%	21 16%

Les nombreuses non réponses sont imputables au fait que les élèves qui dénombraient tous les carrés de un en un n'ont pas eu le temps de terminer (le temps imparti étant de moins d'une minute). Un écart de réussite entre CDN et non CDN est perceptible mais on peut constater une certaine faiblesse de réussite pour un tel exercice mettant en jeu les compétences attendues en fin de CP : à peine la moitié pour les CDN et un peu plus d'un tiers pour les non CDN. Pourtant la tâche de l'exercice 2 nécessite de les employer pour réussir, contrairement à celle précédente.

Croisement des exercices 2 et 3

L'analyse des productions à l'exercice 2 et plus encore au 3 nous montre une utilisation plus fréquente des dizaines pour les élèves CDN, résultat qui était envisageable avec cette ressource puisque c'est son axe majeur. Cela questionne les autres ressources utilisées par les non CDN, mais notre protocole ne permet pas d'aller plus loin. Cependant, comme nous l'avons signalé, les élèves CDN n'ont pas significativement une plus grande réussite à l'exercice 2. En outre, l'emploi de dizaines à l'exercice 2 n'entraîne pas automatiquement une réussite à l'exercice 3.

	Présence dizaines ex 2	Réussite ex 3 si dizaines ex 2	Non présence dizaines ex 2	Réussite ex 3 si non dizaines ex 2
Total des 260 élèves	108 *41%*	59/108 *(55%)*	152 59%	55/152 *(36%)*
Non CDN, 132 élèves	31 *23%*	15/31 *(48%)*	101 *77%*	33/101 *(33%)*
CDN, 128 élèves	77 *60%*	44/77 *(57%)*	51 *40%*	22/51 *(43%)*

On aurait pu s'attendre à ce que les élèves mobilisant la dizaine quand ce n'est pas indispensable (exercice 2) pensent à mobiliser celle-ci quand c'est nécessaire (exercice 3) : ce n'est pas significativement le cas puisqu'ils ne sont que 55% dans cette situation. Dans ce cas, la mobilisation de la dizaine dans le 3^{e} exercice est néanmoins plus importante que pour les élèves qui n'ont pas mobilisé la dizaine dans l'exercice 2 (36% dans ce dernier cas). Les résultats sont un peu meilleurs dans le groupe CDN mais ne changent pas ce constat.

Ces résultats questionnent l'interprétation de ce type de tests quant aux connaissances des élèves sur le nombre. La réussite ne semble pas indiquer un niveau de conceptualisation facilement identifiable. Pour aller plus loin, nous avons observé de plus près les procédures des élèves dans des tâches similaires.

2 Un deuxième test portant sur 155 élèves

2.1 Présentation

Dans les deux dernières tâches du test précédent, les collections ne sont pas manipulables et nous n'observons pas les procédures des élèves. Il n'est donc pas possible de distinguer les élèves ayant utilisé les procédures 2, 3 ou 4. Pourtant celles-ci renvoient à une utilisation différente de la dizaine en lien avec le nom du nombre ou/et son écriture chiffrée. C'est pourquoi nous avons fait un second test dans lequel nous proposons trois autres exercices à 155 élèves ayant tous suivis le même itinéraire cognitif d'enseignement à travers CDN. Ce groupe CDN qui comprend les mêmes 128 élèves précédent plus d'autres qui n'ont pas pu être testé dans le premier test, nous apparait plus intéressant à étudier pour mieux comprendre les questions soulevées par le 1e test, en particulier relatives à l'utilisation de la dizaine puisqu'ils ont suivi un itinéraire dans lequel la dizaine est utilisée d'emblée pour introduire les écritures chiffrées, sans passer par le nom des nombres. Par ailleurs, nous avons limité un éventuel effet de contrat dans lequel les élèves seraient habitués à réaliser les tâches proposées selon une procédure attendue par le professeur. Nous avons donc proposées des tâches dans un contexte problématique et non plus sous forme de tâches simples et isolées rencontrées usuellement en classe. En outre chaque élève est testé de manière individuelle par le chercheur. Il nous a aussi semblé important de proposer des objets manipulables afin en particulier que la dizaine puisse être mieux identifiable que dans l'exercice 2 du test précédent : des barres dizaines sont constituées de cubes sécables déjà vues en classe et il est prévu pour chaque élève un nouveau temps d'appropriation de ce matériel. Nous cherchons ici des résultats qualitatifs sur l'emploi de la dizaine.

Le 1^{e} exercice, l'exercice A, permet de vérifier les connaissances des élèves quant à la lecture et l'écriture des nombres. Les 2^{e} et 3^{e} exercices sont insérés dans une même tâche inspirée de la « situation fondamentale du nombre » de Brousseau (voir par exemple Margolinas & Wozniak, 2012). L'élève peut manipuler une réserve de cubes emboîtables constituée de barres sécables de dix cubes déjà assemblés et de cubes « seuls ». A un autre endroit on lui présente une collection de carrés non organisés dessinés sur une feuille (voir annexe 2). On demande à l'élève d'aller chercher en un seul voyage le nombre de cubes nécessaire pour mettre un cube par carré. On fournit une barquette pour le transport. A son retour il vérifie sa réponse en posant les cubes sur les carrés. L'élève a réussi si un cube est sur chaque carré et s'il ne reste rien dans sa barquette : il ne peut défaire les cubes assemblés que dans ce moment de vérification et non au moment où ils les prennent. Pour s'assurer de la compréhension de la tâche on lui propose tout d'abord une collection de 3 carrés puis s'il échoue de 4 carrés. Ensuite commence le test avec une collection de 52 carrés. Avant d'aller chercher les cubes, on impose à l'élève d'écrire sur un morceau de papier le nombre qu'il lui faut. Nous appelons exercice B cette tâche de dénombrement de carrés dessinés qui est similaire à l'exercice 2 du test précédent. Nous appelons exercice C la tâche suivante constituant à prélever dans sa barquette le nombre de cubes à l'aide du morceau de papier sur lequel est écrit en chiffre le nombre obtenu précédemment. Cet exercice C s'apparente à la tâche réciproque de l'exercice 3 du 1e test et nous permet de voir de quelle manière les élèves mobilisent la dizaine dans une situation qui favorise sa convocation, sans que cela soit absolument nécessaire. On observe la procédure utilisée pour les deux exercices.

2.2 Résultats et premières analyses

Exercice A : écrire et lire les nombres

Les résultats à l'exercice A sont similaires à l'exercice 1 précédent et montrent que les élèves savent bien lire et écrire les nombres proposés (correspondance écriture chiffrée/nom du nombre), moins en ce qui concerne les nombre au-delà de 70. Ceci n'empêche donc pas la mobilisation des procédures 1 à 3 pour la suite du test lorsqu'il y a 52 carrés à dénombrer.

Exercices B et C : dénombrer des carrés sur une feuille, écrire le nombre, aller chercher la quantité correspondante de cubes (disponibles sous forme de dizaines et de cubes isolés)

Nous livrons les résultats des exercices B et C sous la forme d'un tableau.

		Exercice B : écrire 52 pour dénombrer les carrés					
		Procédure 1	Procédure 2	Procédure 3	Procédure 4	Autre	**Total ex. C**
Ex. C Prendre … cubes	Procédure 1	44	1	0	2	3	50
	Procédure 2	24[4]	10	1	1	0	36
	Procédure 3	4	1	0	0	0	5
	Procédure 4	26	1	0	22	1	50
	Autres	8	0	0	6	0	14
	Total exercice B	106	13	1	31	4	155

Pour l'exercice B, 106 élèves, les 2/3, n'utilisent pas de groupement pour dénombrer, alors que 60% les utilisaient dans le test précédent, et ceci pour une tâche similaire. Pour expliquer cette différence, nous avançons l'hypothèse qu'il existe effectivement un effet de contrat lié à la proposition d'une tâche isolée couramment travaillée en classe dans un même contexte de passation (exercice 2 précédent proposé en classe, même s'il ne s'agissait pas de la classe de CP). En outre ceci renforce l'idée déjà ébauchée à la suite des résultats précédents que l'utilisation de groupements n'est pas perçue par les élèves de cet âge comme élément facilitateur de la tâche de dénombrement d'une collection d'objets (ici entre cinquante et soixante). Leurs connaissances du rôle de la dizaine sont-elles insuffisantes pour être mobilisables pour la tâche de dénombrement de l'exercice B ou la réussite de cette tâche ne requiert-elle pas la mobilisation de telles connaissances ?

[4] Lecture de cette case du tableau : 24 élèves ont utilisé la procédure 1 pour faire l'exercice B suivie de la procédure 2 pour l'exercice C.

Concernant l'exercice B, ils sont 91 sur 155 (58%) à mobiliser la dizaine dans une tâche dont la réussite est largement facilitée par un tel emploi. Ce résultat est à rapprocher des 52% de l'exercice 3 précédent.

Observons maintenant l'évolution des procédures entre les deux exercices proposant deux tâches liées.

Environ la moitié des élèves conservent la même procédure pour résoudre les deux exercices.

***Le profil* $\boxed{1 : 1}$ (44 élèves, 28%) :** Procédure 1 (un, deux, etc.) → Procédure 1 (un, deux, etc.)
Dans les tâches effectuées, les élèves comptent un par un, même si le milieu matériel favorise l'utilisation de la dizaine. L'interprétation ordinale est convoquée que ce soit avec repérant ou non, et ceci sans utilisation du fait qu'entre deux repérants (dix à vingt, vingt à trente, etc.) il y a une dizaine.

***Le profil* $\boxed{2 : 2}$ (10 élèves, 6%) :** Procédure 2 (dix, vingt, trente, etc.) → Procédure 2 (dix, vingt, trente, etc.)
Dans les tâches effectuées, les élèves convoquent de la dizaine via la numération parlée, sans mettre en jeu le nombre de dizaines. La structuration de la numération parlée de dix en dix est perçue sans que le nombre de dizaines indiqué par le nom du nombre le soit nécessairement.

***Le profil* $\boxed{4 : 4}$ (22 élèves, 14%) :** Procédure 4 (codage de l'organisation des carrés à l'aide de deux chiffres ordonnés) → Procédure 4 (le chiffre « 5 » de l'écriture « 52 » indique que le nombre de dizaines). La place et le sens des chiffres sont utilisés pour résoudre les tâches proposées.

L'autre moitié des élèves change de procédure :
***Les profils* $\boxed{1 : 2, 3, 4}$ (54 élèves, 35%) :** Procédure 1 → Procédure 2, 3 ou 4.

Dans les tâches proposées, les élèves passent du comptage un par un (interprétation ordinale) à la prise en compte de la dizaine quand le milieu matériel s'y prête (exercice C).

Ces profils identifiés *a posteriori* sont liés à l'itinéraire cognitif proposé via la ressource dans la mesure où les effectifs relevés dépendent de celui-ci. Si on observait des élèves n'ayant pas suivi la ressource CDN, on peut penser que d'autres profils *a posteriori* pourraient être relevés, en particulier liés à la procédure 3 dans laquelle le nombre de dizaines est perçu via le nom du nombre (aucun élève ne relève ici du profil **3 : 3**). La ressource CDN ne favorise pas cette procédure puisqu'elle propose un itinéraire cognitif de distinction et non disjonction. Mais la tâche est aussi à questionner. Rien ne permet de dire que les profils ci-dessus sont des catégories qui partitionnent les élèves. L'appartenance à un profil peut changer suivant les tâches proposées et les connaissances des élèves vont évoluer au fur et à mesure des apprentissages. Pour autant, l'analyse effectuée permet de percevoir des conceptions qui peuvent s'avérer intéressantes à considérer en particulier si des difficultés d'apprentissages sont constatées. Ainsi, certains élèves perçoivent le nombre essentiellement de manière ordinale (à travers le comptage), même quand la tâche proposée rend cette utilisation peu efficace pour sa résolution (exercice C). Les autres mobilisent la dizaine pour l'exercice C et certains aussi pour le B (seuls 3 élèves sur 155 mobilisent la dizaine dans l'exercice B sans le faire dans le C). Cependant, cette mobilisation s'opère de manière différente à la fois dans la perception ou non du nombre de dizaines et dans son lien avec le système de numération, comme l'illustre le tableau suivant.

	Via le nom du nombre		Via l'écriture chiffrée
	Procédure 2 (dix, vingt, trente, …)	Procédure 3 (5 dizaines dans cinquante-deux)	Procédure 4 (5 dizaines dans 52)
Dénombrer 52 carrés non organisés (écrire la quantité)	8%	0,6%	20%
Prendre … cubes (autant de cubes que de carrés précédents)	23%	3%	32%
	Pas d'utilisation ostensible du nombre de dizaines	Utilisation ostensible du nombre de dizaines	

Des élèves utilisent la dizaine à travers la comptine des dizaines, la procédure 2. Ce type de procédure peut être efficace dans un certain nombre de tâches proposées aux élèves de CP, mais cela n'atteste pas qu'ils perçoivent le nombre de dizaines dans un nombre. D'autres encore perçoivent le nombre de dizaines dans un nombre via son nom, la procédure 3. Le lien avec l'écriture chiffrée n'est cependant pas forcément immédiat. Réciproquement, certains élèves perçoivent le nombre de dizaines dans un nombre via son écriture chiffrée, la procédure 4. Le lien avec le nom du nombre n'est ici pas forcément immédiat.

III - CONCLUSIONS

Concernant la tâche de dénombrement telle que proposée par l'évaluation nationale de 2009, nous avons montré que l'énumération a une influence notable sur sa réussite. Ainsi, en ne considérant que le taux de réussite, le test national nous apparaît comme un test des connaissances sur l'énumération dans le sens où ce sont des échecs dans l'énumération qui contribuent notablement aux résultats. Par ailleurs, la réussite n'indique pas si la dizaine est convoquée. Le groupement en dizaine, qui semble la procédure attendue si on se réfère aux documents institutionnels, n'est d'ailleurs pas le gage d'un meilleur succès pour les élèves de cet âge. Un élève peut ne pas utiliser la dizaine dans ce type de test en étant pour autant capable de le faire dans des exercices qui la requièrent. Nous l'avons relevé dans le changement de procédures entre les exercices 2 et 3 du premier test. Un autre facteur intervient en outre sur cette mobilisation : ce sont certaines conditions de passation – hors ou dans la classe ; en présence de l'enseignant ou non – ou relevant du contexte dans lequel est proposée l'exercice – tâche isolée ou problématisée. C'est ce que nous avons inféré de la différence d'emploi de la dizaine entre l'exercice 2 du 1e test (60% convoquent la dizaine) et l'exercice B du 2e (seulement 33%). En conclusion, même les informations supplémentaires provenant de l'analyse des traces des productions des élèves, en particulier concernant la mobilisation ou non de la dizaine, ne nous permettent pas de rendre compte du niveau de mise en fonctionnement des connaissances des élèves concernant la numération.

Un exercice tel que l'exercice 3 du premier test pourrait révéler si les élèves emploient la dizaine, cette fois-ci dans une tâche qui la requiert. Notre analyse théorique nous alerte cependant sur le fait que cette dernière pouvait être utilisée de manière très différente, en particulier sans que la connaissance du nombre de dizaines ne soit nécessaire à l'obtention d'une réponse exacte (procédure 2). La réussite à un tel exercice ne permet donc pas de mettre en évidence certaines des connaissances essentielles à la compréhension du système positionnel des écritures chiffrées.

Dans le 2e test, nous avons exploré plus attentivement une population d'élèves ayant tous suivi un enseignement dans lequel l'écriture chiffrée a été introduite directement comme codage d'une collection d'objets organisée en dizaines. Dans un premier temps, nous avons confirmé les résultats précédents concernant la tâche de dénombrement telle que proposée à l'évaluation nationale. En particulier, dans ce contexte de passation hors la classe avec des tâches problématisées, non seulement il y a encore plus d'élèves qui ne convoquent pas la dizaine mais 35% d'entre eux le font pourtant ensuite dans l'exercice

C dans lequel la dizaine facilitait beaucoup sa réalisation. Dans un second temps nous avons élaboré des profils d'élèves révélant non seulement l'emploi ou non de la dizaine dans les deux tâches liées du test, mais aussi et surtout la façon dont elle est employée. Parmi les 54 élèves qui utilisent la dizaine dans l'exercice B, proche de l'item de l'évaluation nationale, les 24 élèves empruntant la procédure 2, c'est-à-dire 44% des 54, n'ont pas besoin de savoir le nombre de dizaines pour donner l'écriture chiffrée indiquant la quantité d'objets à dénombrer. En ce qui concerne l'exercice C, ils sont 36 dans ce cas parmi les 91 qui utilisent la dizaine, c'est-à-dire 40%. Les résultats montrent donc que pour un nombre important d'élèves les chiffres ne désignent pas nécessairement un nombre de dizaines et d'unités. Les écritures chiffrées sont perçus avant tout comme une traduction écrite des mots de la langue, comme les lettres ou les syllabes le sont. Cette proportion est relativement importante, d'autant qu'elle a été obtenue sur une population dont l'itinéraire cognitif introduisait l'écriture chiffrée directement comme codage d'une organisation. Nous faisons l'hypothèse que ce phénomène est au moins aussi important pour l'ensemble des élèves en France puisqu'ils suivent l'autre itinéraire cognitif via les manuels scolaires, l'itinéraire qui présente l'écriture chiffrée comme une traduction écrite du nom des nombres.

Les résultats obtenus sont à affiner. Par exemple les effectifs des profils relevés sont susceptibles de différer selon que les élèves aient suivis un itinéraire cognitif ou un autre. Les recherches menées dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) nous permettent de nous alerter sur d'autres facteurs à prendre en compte. Ainsi pour une même ressource, un même manuel, les résultats peuvent être relativement différents selon la classe. En quoi les connaissances des élèves, les conditions d'exercice du métier ou ce qui relève de la composante personnelle de l'enseignant influent-ils ? Par ailleurs les tâches proposées ici ne suffisent pas à fournir un état des lieux sur la conceptualisation des élèves concernant le nombre, en particulier du fait qu'elles ne relèvent que de certaines classes de problèmes du champ conceptuel de ce dernier (Vergnaud, 1991 ; voir aussi Fénichel & Pfaff, 2004-2005). Ceci indique des directions pour poursuivre le travail.

Au-delà de ces limites et perspectives, les conclusions de notre recherche apportent un éclairage sur les conceptions des élèves quant à la numération via la tâche de dénombrement, en particulier dans le lien entre la dizaine et la numération écrite chiffrée. Ceci donne des pistes pour comprendre les difficultés de certains élèves dans certains exercices mettant en jeu les nombres, par exemple dans les opérations, qu'elles soient posées donc utilisant la signification des chiffres ou effectuées mentalement avec les mots de la numération orale.

BIBLIOGRAPHIE

BRIAND, J., LACAVE-LUCIANI, M-J., HARVOUËT, M., BEDERE, D., & GOUA DE BAIX, V. (1999-2000). Enseigner l'énumération en moyenne section, *Grand N*, *66*, 7-22.

COLLET, M. (2003). Le développement du système en base dix chez des élèves de 2ème et de 3ème année primaire, une étude exploratoire, *Education et francophonie*, *XXXI:2*, 218-241.

FENICHEL, M., & PFAFF, N. (2004-2005). *Donner du sens aux Mathématiques* (2 tomes). Paris : Bordas.

LE POCHE, G. (2010). Débuter la numération, In *Le nombre au cycle 2,* Durpaire J.-L. et Mégard M. (dir.), Poitiers (Futuroscope) : Scérén CNDP, 39-50.

MARGOLINAS, C., & WOZNIAK, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle, une approche didactique*. Bruxelles : De Boeck.

MOUNIER, E. (2010). *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP : vers de nouvelles pistes*. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris Diderot (Paris 7). Repéré à http://tel.archives-ouvertes.fr/

MOUNIER, E. (2012). Des modèles pour les numérations orales indo-européennes à usage didactique, application à la numération parlée en France. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 17*, 27-58.
Repéré à http://turing.scedu.umontreal.ca/annales/index.html.

MOUNIER, E., & PFAFF, N. (2012). Quoi de neuf dans la numération au CP ?, In Actes du XXXVIIe Colloque COPIRELEM, *Faire des mathématiques à l'école : de l'activité de l'élève à la formation des enseignants*, 22-24 juin 2011, IREM de Dijon, France.

PERRIN-GLORIAN, M-J. (2011). L'ingénierie à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57-78). Grenoble : La Pensée Sauvage.

ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématique : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10 (2/3)*, 133-170.

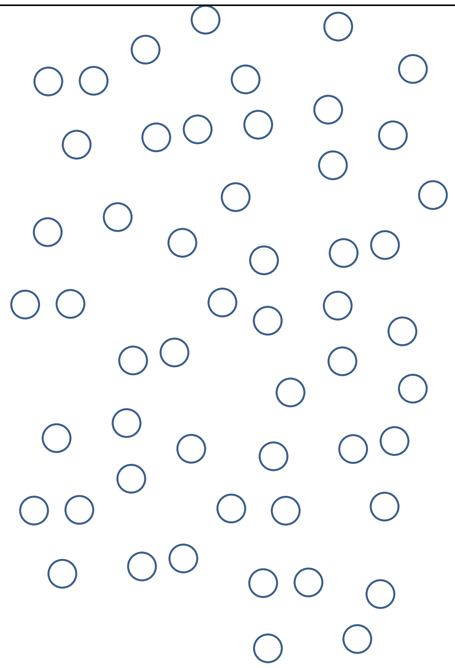
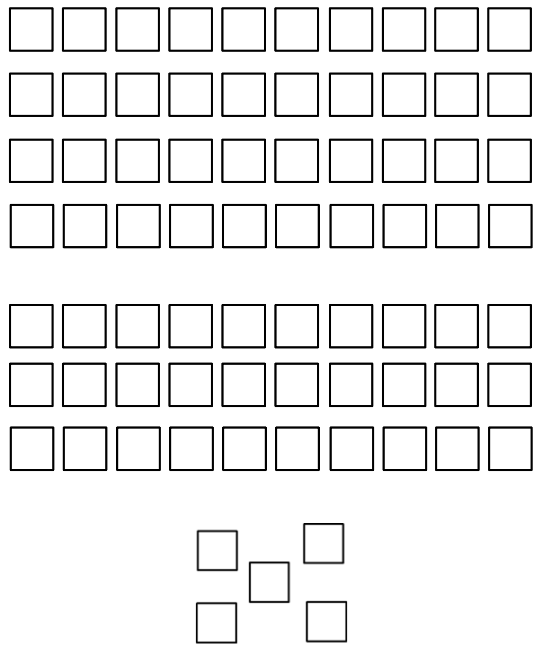
ANNEXE 1 : LA RESSOURCE CHAMPION DES NOMBRES (CDN)

En 2012-2013, l'enseignant dispose, pour les périodes 1 et 2, d'un recueil développant une séquence thématique hebdomadaire, avec une description de la séance à mener chaque jour. Ce dispositif a été étendu à toute l'année en 2013-2014. Les situations didactiques dans lesquelles de nouvelles notions apparaissent se veulent des situations problèmes au sens pris par Pfaff et Fénichel (2004-2005). L'itinéraire d'enseignement cognitif proposé est celui de distinction des numérations. Les écritures chiffrées sont introduites via la comparaison de collections qu'il va s'agir d'organiser pour réussir ces comparaisons (étapes 1, 2 et 3). Ces organisations sont ensuite codées (étapes 4 et 5). Ceci conduit en particulier les élèves à savoir indiquer le cardinal d'une collection avec des écritures chiffrées directement pour tous les nombres inférieurs à 100. La comptine numérique est, elle, introduite progressivement en s'appuyant sur les repérants. Dès que le système des écritures chiffrées est élaboré, des liens explicites sont faits entre les deux numérations pour les nombres dont les noms sont connus. La distinction entre les deux numérations est reprise pour les opérations : les opérations posées sont dites opérations « avec les chiffres », le calcul mental est dit « avec le nom des nombres ». Voici un tableau indiquant la programmation de la progression.

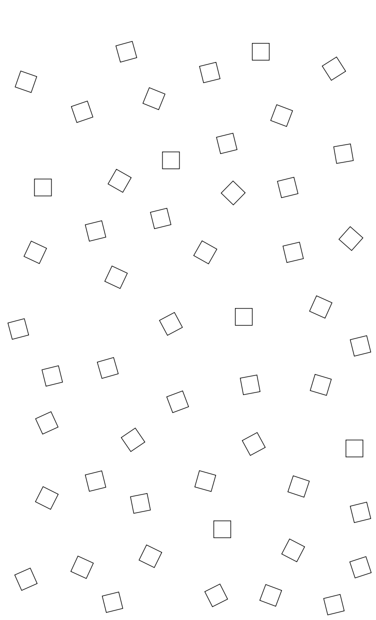
<table>
<tr><th></th><th colspan="3">PERIODE 1</th><th colspan="4">PERIODE 2</th><th>PERIODES 3 A 5</th></tr>
<tr><td rowspan="3">NUMERATION ECRITE CHIFREE
(via des problèmes)</td><td colspan="4">CHAMPION DES NOMBRES ≤ 100</td><td>PAUSE</td><td colspan="2">CHAMPION DE L'ECRITURE ≤ 100</td><td rowspan="4">Addition posée
Liens entre les 2 numérations
PROBLEMES NUMERIQUES utilisant les 2 numérations
Comptine jusqu'à cent ;
tables ;
Calcul mental</td></tr>
<tr><td>ETAPE 1
(SEPTEMBRE)</td><td>ETAPE 2
(SEPTEMBRE OCTOBRE)</td><td>ETAPE 3 (1)
(OCTOBRE)</td><td>ETAPE 3 (2)
(NOVEMBRE)</td><td>CONSOLIDATION
(NOVEMBRE)</td><td>ETAPE 4
(DECEMBRE)</td><td>ETAPE 5
(DECEMBRE)</td></tr>
<tr><td>Grouper pour réussir</td><td>Un même type de groupement</td><td>Le groupement par dix</td><td>Le groupement par dix</td><td>Organiser/désorganiser Utilisation de groupements : « autant que »</td><td>L'utilité de l'écriture : différentes possibilités</td><td>L'écriture employée dans le monde entier</td></tr>
<tr><td>NUMERATION PARLEE
(via des problèmes)</td><td colspan="3">COMPTINE JUSQU'A VINGT
TABLES JUSQU'À DIX</td><td colspan="4">COMPTINE JUSQU'A TRENTE
TABLES JUSQU'À DIX</td></tr>
</table>

ANNEXE 2 : LES TESTS

1 Le premier test

Exercice 2 (feuille A4) On demande à l'élève d'écrire avec des chiffres le nombre de ronds.	Exercice 3 (feuille A4) On demande à l'élève d'écrire avec des chiffres le nombre de carrés. On lui indique que chaque rangée comporte exactement dix carrés et que l'exercice se fait en temps limité, moins d'une minute.
	

2 Le second test

Exercice B (feuille A4) On demande à l'élève d'écrire sur une feuille le nombre de carrés (écriture chiffrée) afin de savoir le nombre qu'il faut pour réussir l'exercice C.	Exercice C Des cubes sont disposés dans un endroit non visible du lieu où se trouve la feuille avec des carrés de l'exercice B. Les carrés sont disponibles en barres dizaines et en unités (matériel manipulé et testé auparavant avec chaque élève) : 8 barres dizaines et 9 cubes seuls. On a demandé à l'élève de compter les cubes seuls et de constater qu'on ne peut former une nouvelle dizaine. On demande à l'élève d'apporter dans une barquette le nombre de cubes nécessaires, ni plus ni moins, afin que sur chaque carré de la feuille précédente il y ait un cube. Il dispose du nombre écrit avec des chiffres obtenu auparavant (exercice B). Les barres dizaines sont sécables en dix cubes mais ne doivent être dissociées que lors de la vérification. La barquette ne contient donc que des barres dizaines et des cubes seuls (9 au maximum).
Classe : ...... 	

QUELS CRITERES DE VALIDITE, QUELLE APPROPRIATION PAR LES ENSEIGNANTS DE RESSOURCES ISSUES DE RECHERCHES EN DIDACTIQUE ?

Jacques DOUAIRE
Équipe ERMEL - IFé
LDAR – ESPE Académie de Versailles - UCP
jacques.douaire@u-cergy.fr

Fabien EMPRIN
Équipe ERMEL - IFé
CEREP - Université Reims Champagne Ardennes - ESPE
fabien.emprin@univ-reims.fr

Résumé
Sous quelles conditions l'appropriation par les enseignants des ressources produites par des recherches en didactique des mathématiques peut-elle conduire à une modification stable des pratiques professionnelles ? Cette communication, vise à contribuer à une réflexion sur le statut, pour les enseignants et les formateurs, de ressources issues ou inspirées par des recherches dans le champ de la didactique, à partir de l'expérience des recherches conduites par l'équipe ERMEL. Cette communication a aussi pour but de proposer des perspectives de travail pour un atelier en 2015.

I - POSER LES BASES DU QUESTIONNEMENT

Cette communication a pour but d'initier un travail collectif, en nous appuyant sur l'expérience de nos propres recherches et des ressources, questionnant les apports des recherches en didactique dans les processus de documentation professionnelle visant une transformation des pratiques. Trois axes sont concernés dans notre communication :

1. L'évolution des pratiques

   Au travers des ressources, quelles compétences professionnelles peuvent être développées et conduire à une modification stable des pratiques ? Nous prenons l'exemple des ressources produites par l'équipe ERMEL pour développer des outils d'analyse.

2. La formation

   En quoi les ressources produites peuvent-elle être des points d'appui pour la formation initiale et continue des enseignants ?

   Au moment où les M2 assureront un demi-service d'enseignement, l'articulation entre une formation universitaire s'appuyant sur une activité de recherche et une imprégnation de pratiques véhiculées dans les écoles présente un défi majeur. Quelles réponses peuvent apporter à la formation les ressources issues de travaux de recherche?

   Pour la formation initiale des enseignants, la réforme de la formation, dite de la masterisation, a positionné l'initiation à la recherche comme un passage obligé pour devenir enseignant. En effet le mémoire fait partie des caractéristiques des masters alors qu'un mémoire professionnel était demandé dans le cadre de la formation PE2. La réforme en cours continue dans cette voie tout en apportant des modulations. Concernant le mémoire de Master, la recommandation n°6 du comité de suivi de la réforme de la formation des enseignants du 30 mai 2014 précise :

   « *Évaluer le mémoire, afin de mesurer le degré de professionnalité de l'étudiant alternant et sa capacité à mobiliser les savoirs disciplinaires et scientifiques, en relation avec la finalité pédagogique et les pratiques professionnelles.* »

3. L'articulation recherche – ressources

A quelles conditions, une réflexion portée par les formateurs (chercheurs ou non) peut-elle construire des liens entre recherches en didactiques et ressources pour les enseignants ?

Pour aborder ces trois questions nous devons faire le choix d'un cadre d'analyse qui nous permette de regarder les pratiques enseignantes dans leur globalité, c'est à dire de la préparation de la séance à la mise en œuvre en classe.

II - DE LA RECHERCHE A LA PRODUCTION DE RESSOURCES : UN CADRE D'ANALYSE

Pour illustrer la complexité du problème, nous présentons ci-dessous un schéma qui présente les deux strates structurant le déroulement de nos recherches (schéma 1) : la première strate est celle de la situation d'apprentissage (centrée sur l'élève est les processus d'apprentissage), la deuxième est celle de la situation d'enseignement centrée sur l'enseignant et ses choix pédagogiques et didactique (une troisième strate, non représentée ici, serait celle de la situation de formation centrée sur le formateur).

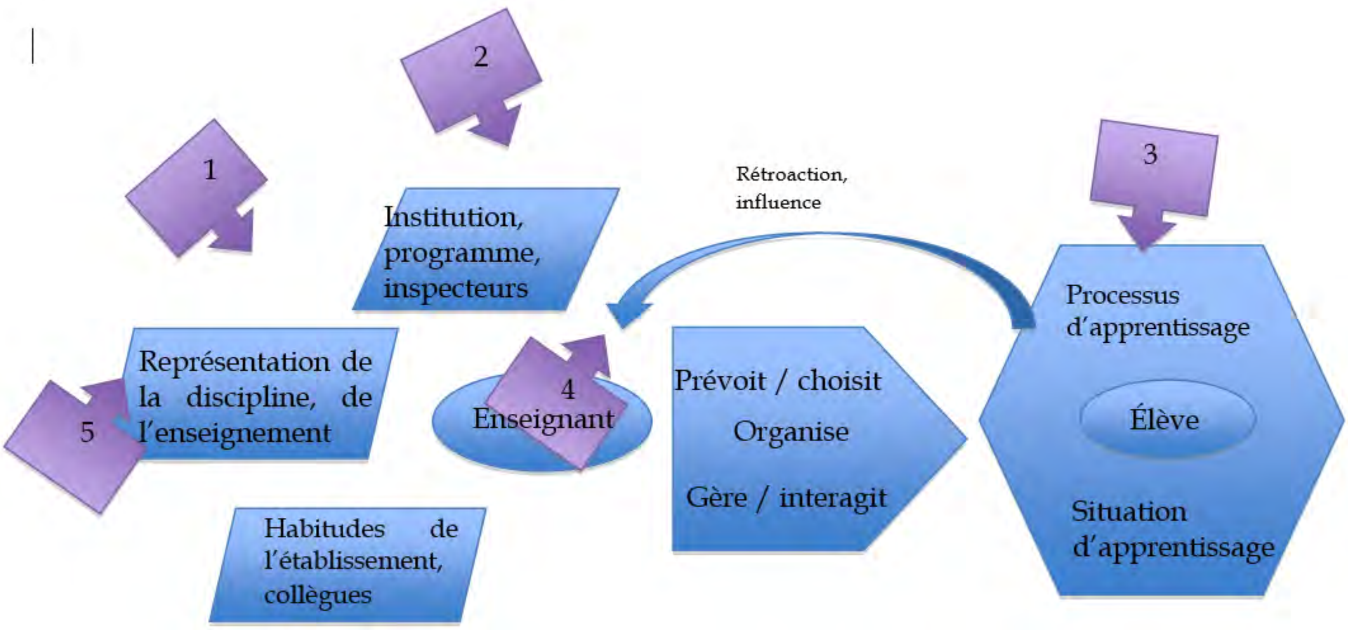


Schéma 1. *Représentation de la situation d'enseignement*

De par sa focalisation sur les processus d'apprentissage, la première strate est accessible en utilisant les cadres théoriques développés par la didactique des mathématiques ou la psychologie cognitive en fonction du point de vue adopté.

Les processus d'apprentissage dépendent des choix didactiques et pédagogiques de l'enseignant qui prévoit organise et gère cette situation. Ce travail de l'enseignant constitue donc une deuxième strate englobant la première et qui peut être analysée avec des cadres théoriques spécifiques : par exemple celui de la double approche (Robert et Rogalski, 1998) mais d'autre cadres sont disponibles comme la clinique de l'activité (Clot, 2008), la didactique professionnelle (Mayen 2007 ; Pastré 1999)... Notre choix de la double approche, pour cette communication est déterminé par le fait qu'elle prend en compte les mathématiques qui sont données à voir aux élèves (approche didactique) et l'activité de l'enseignant dans sa globalité (approche ergonomique).

Les pratiques professionnelles, au sens de la double approche, peuvent être recomposées à partir de cinq composantes : cognitive et médiative qui permettent d'analyser le savoir en jeu et les interactions enseignant – élèves et institutionnelle, sociale, personnelle qui permettent d'analyser certains déterminants des pratiques comme les habitudes professionnelles, les programmes …

Où peuvent intervenir les recherches qui produisent des ressources dans ce schéma ? Nous illustrons chacun des aspects en prenant l'exemple des ressources produites par notre équipe. Nous avons placé des marqueurs sur chacun des aspects dans le schéma 1. Nous illustrons ces différents points à partir de nos recherches en identifiant les questions que nous nous posons.

1. Les ressources peuvent modifier les représentations des enseignants sur leur discipline, les démarches d'enseignement. Que ce soient des lectures plus ou moins théoriques, des vidéos, des dispositifs vus en formation, des conférences, l'expérience de l'enseignant qui teste ce qu'il a vu ou lu, parfois une combinaison de ces éléments.
   Dans le cas des ressources ERMEL, chaque ouvrage est précédé de « parties théoriques » et de « chapeaux par thème ». Ces parties visent à éclairer les enseignants sur les choix qui ont été opérés. Les parties théoriques constituent également des apports de connaissances théoriques, épistémologiques, didactiques…pour les enseignants et les formateurs. Ces connaissances et la démarche globale de l'ingénierie c'est à dire l'approche de l'enseignement des mathématiques par la résolution de problème doit /peut amener les enseignants qui la pratiquent à modifier leur vision de la discipline. Plusieurs questions peuvent se poser : Pourquoi est-ce qu'un enseignant prendrait le temps de lire ces parties ? Quels sont les éléments déclencheurs : formation, situations vues, situation testée, envie de changement, problème rencontré, avis d'un pair… ? Ensuite, une fois que la lecture est enclenchée, quels sont les éléments qui peuvent être facteurs d'évolution : l'étayage théorique, la méthodologie, des illustrations vidéo… ?
2. Elles peuvent être considérées comme une obligation institutionnelle. Certaines démarches sont explicitement citées dans les programmes ou sont sous-jacentes. Quand le formateur est aussi l'évaluateur, la démarche prônée par le formateur peut apparaître comme une contrainte institutionnelle.
   Les travaux issus de recherches peuvent être, en fonction des programmes, plus ou moins éloignés de la demande institutionnelle. Il n'en reste pas moins qu'ils peuvent être repris par des représentants de l'institution comme c'est le cas pour les travaux de l'équipe ERMEL par exemple dans le site de la circonscription de Dijon – Avallon (http://circo89-avallon.ac-dijon.fr/IMG/pdf/la_construction_du_nombre_au_cycle_2.pdf). Dans ce cas, il y a une forme de recommandation institutionnelle. Le poids de la contrainte institutionnelle sur les choix de l'enseignant serait à étudier de façon plus approfondie mais nos études sur les pratiques utilisant les outils numériques nous montrent (Emprin, 2007) qu'au moins dans ce cadre, les programmes et les dispositifs nationaux (B2I par exemple) ne sont pas déterminants dans les choix de l'enseignant.
3. Les productions de ressources fournissent des situations d'apprentissage, décrites plus ou moins exhaustivement que l'enseignant adapte plus ou moins.
   Dans les ouvrages produits par ERMEL, la description des processus d'apprentissage visés est explicitée dans le chapeau du thème et dans les parties théoriques. Les étapes de la situation d'apprentissage, notamment les phases sont également précisées. L'enseignant qui met en œuvre les situations a donc à sa disposition les connaissances nécessaires pour comprendre ce qui est en jeu dans la situation d'apprentissage qu'il mène. Ceci étant, mettre à disposition ne veut pas dire permettre de s'approprier. La question de l'accessibilité des contenus didactiques dans ce type d'ouvrage ainsi que, en quelque sorte, les prérequis nécessaires pour pouvoir profiter des contenus proposés est importante à poser.
4. Ces descriptions de situations fournissent également de façon plus ou moins exhaustive des éléments de pilotage, de gestion de classe ou des résultats d'expérimentations qui peuvent prendre le statut de rétroactions. Les descriptions des situations concernent les déroulements, les interactions enseignant – élèves et anticipent les procédures des élèves. Néanmoins, différents éléments sont plus ou moins parcellaires ou sous-entendus. La question du niveau de description des gestes professionnels se pose : faut-il une description exhaustive qui risque d'être modélisante ou trop fermée et empêcher l'appropriation, des indications générales qui risquent d'être inutiles si l'enseignant ne parvient pas à gérer la situation d'apprentissage ?
5. Autour de ressources peuvent se constituer des communautés de pratiques, éventuellement facilitées par les usages numériques actuels (Georget, 2009). Ces communautés peuvent être plus ou moins virtuelles. Le choix d'un type d'ouvrage ou d'une « méthode » peut se faire par équipe de cycle, dans

ce cas les enseignants sont liés par ce choix. Cela peut générer des échanges entre eux, des collaborations (échange de matériel, préparations communes)… Il serait donc intéressant de questionner les déterminants et les conséquences de ces choix : Est-ce que choisir les ouvrages d'une même collection permet de travailler ensemble et de donner de la cohérence aux apprentissages ou au contraire un moyen de se dispenser d'échanger sur le fond puisque la continuité est assurée par les ouvrages utilisés ? Les forums d'entraides, les sites d'enseignants peuvent également contribuer à la création d'une communauté qui partagerait des pratiques, sans être lié à la localisation des personnes. La question à laquelle nous devons maintenant répondre est : à quelles conditions cette influence peut-elle réellement exister ? Nos recherches, notre méthodologie et les critères de validité relatifs à nos ressources sont antérieurs à la production des cadres théoriques cités, toutefois ceux-ci devraient pouvoir fournir des outils pour comparer différentes ressources produites au sein de la communauté.

III - DE LA RECHERCHE A LA PRODUCTION DE RESSOURCES : LES RECHERCHES DE L'EQUIPE ERMEL

Chaque recherche de l'équipe ERMEL a pour origine un état des pratiques enseignantes. Prenant en charge l'intégralité des contenus d'enseignement dans un champ donné, numérique ou géométrique, les ressources produites à l'issue de la recherche visent une modification des pratiques qui ne se limite pas à une amélioration ponctuelle de l'apprentissage d'une notion.

L'équipe ERMEL a conduit des recherches sur les apprentissages mathématiques à l'école, d'abord dans le domaine numérique puis géométrique. Le but de la recherche actuelle est d'analyser les compétences spatiales et géométriques que les élèves de l'école primaire, principalement au cycle 2, peuvent construire par l'utilisation conjointe de différents environnements notamment d'outils numériques.

Cette recherche conduit à la production de savoirs sur ces apprentissages et à la production de ressources pour les enseignants et les formateurs. Les étapes de la recherche comportent (Douaire, Emprin, 2012) :

1. L'identification de besoins sociaux ou scientifiques
2. Une analyse du savoir (problèmes, propriétés, représentations, preuves…), ainsi que des connaissances que les élèves ont pu développer
3. La formulation d'hypothèses sur les apprentissages et l'enseignement
4. L'organisation de l'étude des différentes notions
5. L'élaboration de situations didactiques, leur expérimentation dans plusieurs académies et la remise en cause éventuelle des hypothèses et des choix

   Ces composantes sont en interaction : l'identification des connaissances initiales et des potentialités des élèves étant aussi issue des expérimentations menées.
6. La rédaction d'un ouvrage pour les formateurs et pour les enseignants du premier degré comportant une explicitation des enjeux des apprentissages et des problématiques de l'enseignement dans ce domaine et parmi les dispositifs d'enseignement expérimentés, les progressions et les situations qui ont été retenues
7. L'étude des conditions de l'appropriation de ces dispositifs

Nous illustrons les deux premiers points en nous appuyant sur nos recherches précédentes et actuelles.

1. L'identification des besoins

   Par exemple dans notre projet de recherche sur les apprentissages géométriques au cycle 3, nous avions formulé des constats : l'enseignement était souvent réduit à celui du vocabulaire et des tracés (peu de problèmes étant proposés en géométrie) et explicité la nécessité d'une articulation avec l'acquisition antérieure de connaissances spatiales et avec la construction progressive d'une géométrie déductive au collège. Cela nous a conduits à répondre notamment aux questions : quelles relations entre les apprentissages spatiaux et géométriques ? Quels problèmes poser ?

Dans notre recherche actuelle sur les apprentissages spatiaux et géométriques au cycle 2, nous avons à prendre en compte les pratiques spécifiques en GS (projets pluridisciplinaires, jeux…) et les besoins spécifiques à ce niveau : des enseignants transforment, modifient les situations de façon à les adapter à leur projet en cours ou au matériel disponible… Il nous semble donc important de réfléchir à la place qu'il est possible de laisser à ces adaptations dans la conception de nos situations et en particulier dans l'articulation entre les situations didactiques et les situations de construction d'expérience.

2. Une analyse du savoir

L'importance des apports des savoirs mathématiques, psychologiques ou didactiques sont différents pour nos recherches. Prenons trois exemples : les recherches sur les apprentissages numériques en élémentaire, la recherche sur les apprentissages géométriques au cycle 3 et celle en cours sur les apprentissages spatiaux et géométriques au cycle 2.

Pour les recherches sur les apprentissages numériques et la résolution de problèmes au cycle 2 : nous pouvions, au milieu des années 80, nous appuyer sur de nombreux travaux de psychologie qui décrivaient les compétences et les connaissances des élèves dans les premiers apprentissages numériques. L'ouvrage postérieur de Fayol «L'enfant et le nombre » (1990) en présente d'ailleurs une synthèse. De façon analogue, la théorie des champs conceptuels et les structures additives de Vergnaud (1990) fournissaient un cadre. Par ailleurs, la théorie des situations didactiques nous donnait des outils pour construire des situations. Une partie de notre travail a consisté à expérimenter une continuité entre ces apprentissages sur les trois années du cycle, au moyen de progressions dont nous avons expérimenté la robustesse, et une cohérence dans les gestes professionnels de l'enseignant (par exemple gestion des mises en commun, mise en œuvre de choix de différenciation…).

La situation a été assez différente pour notre recherche sur les apprentissages géométriques au cycle 3. Si des travaux de didactiques apportaient un éclairage sur des objets particuliers de savoir, et plus encore ceux de Berthelot et Salin (1992) qui analysent la nature des différents types de géométrie et posent la question de leur articulation dans l'enseignement. Toutefois le champ conceptuel n'était pas aussi structuré que dans le numérique et en particulier sur l'articulation entre les apprentissages portant sur les objets géométriques et ceux sur les relations géométrique. De plus, des questions essentielles comme l'évolution des significations spatiales et des procédures concernant de nombreuses notions (par exemple le parallélisme) étaient aussi à élaborer. Cette recherche a donc dû prendre en charge de façon accrue la production de savoir sur les apprentissages et l'enseignement dans ce domaine et, ensuite, bien entendu faire des choix de progression ou de situation.

Dans notre recherche actuelle, cette production de connaissances sur les apprentissages spatiaux au cycle 2 est d'autant plus nécessaire que les travaux en didactique et en psychologie sont nettement plus rares, notamment les relations entre les expériences spatiales des élèves et les apprentissages géométriques.

Nous pensons que pour permettre le développement de l'activité mathématique de l'élève, condition d'un apprentissage, il est nécessaire de contribuer à rendre les enseignants du premier degré plus autonomes dans leurs choix. C'est pour cette raison, que dans nos ouvrages, et aussi lors de leur utilisation en formation, il nous paraît essentiel de distinguer d'une part les apports mathématiques, historiques, épistémologiques, ou portant sur les apprentissages (issus de travaux de psychologie ou de didactique), et d'autre part nos choix sur tel ou tel enseignement qui sont des propositions cohérentes et expérimentées sans prétendre être des paradigmes scientifiques.

En quoi nos ressources peuvent entrainer une évolution des pratiques ? La validité de nos propositions d'enseignement, qui constituent souvent une ressource pour les formateurs, ne s'appuie pas sur la simple application de résultats issus de théories didactiques.

Elle nous apparaît due à la cohérence de nos choix entre les différents domaines traités (rôle de la résolution de problèmes dans les apprentissages, analyse et prise en compte des connaissances initiales des élèves, …) et, surtout, à la robustesse des situations proposées. En effet, les procédures et résultats qui seront produits par les élèves dans une classe particulière font bien partie de ceux décrits dans l'analyse de la situation, ce qui permet au maître de pouvoir anticiper ses décisions. Cette robustesse est liée à notre méthode de recherche : l'expérimentation de chaque situation dans une vingtaine de classes de plusieurs académies et de milieux sociaux différents s'est effectuée durant plusieurs années. En fonction des résultats, des situations ont pu être abandonnées ou modifiées. Quelquefois l'approche même d'une notion a pu être remise en cause et repensée. La nécessité de résultats concordants a été un critère pour retenir des situations. Grâce à cette méthodologie de travail, les apprentissages des élèves correspondent donc en général à ceux attendus.

De plus, si le descriptif de nos situations suggère une organisation pédagogique (type de travail : en groupe ou individuel…), les retours des enseignants montrent que cette organisation est adaptable sans porter préjudice à l'organisation didactique de la séquence.

Les transformations crées par ces ressources ne se limitent pas à un changement de type de séquence ou de progression, mais visent à modifier la conception de l'enseignement des mathématiques et à éclairer l'enseignant sur les choix didactiques favorisant l'activité mathématique de l'élève.

En effet pour que les maîtres puissent mettre en œuvre les situations, il est nécessaire qu'ils en perçoivent les enjeux, que ceux-ci soient généraux et relèvent par exemple de la conception des apprentissages et de l'enseignement (rôle de la résolution de problèmes, prise en compte des connaissances et des procédures des élèves, dévolution aux élèves de la validation,…), ou plus spécifiques à un champ concerné. Des notions issues de théories didactiques comme le contrat didactique, la dévolution, la validation, les variables didactiques constituent alors des outils conceptuels pour conduire les séquences.

IV - LIENS RESSOURCES, RECHERCHES ET FORMATION

1 Une analyse des obstacles à la diffusion des résultats de recherche

Depuis les années 90, la didactique des mathématiques s'est intéressée à la question des pratiques enseignantes (Margolinas (1992), Robert (1999)) et même des pratiques de formation (Abboud-Blanchard (1994), Emprin (2007)). Ces travaux ont permis de mettre en évidence la complexité de ce champ ainsi que des résultats locaux, comme par exemple ceux de Robert (2003) pour les enseignants de mathématiques de collège et lycées :

« un certain nombre d'obstacles à cette adoption effective, au niveau des pratiques, de résultats de didactique des mathématiques, notamment de séquences d'enseignement :

– l'échelle des recherches – trop peu de séances concernées par des propositions effectives sur une même année scolaire ;

– le travail de mise au point de l'enseignant avant les séances, souvent important, avec des décalages éventuels par rapport aux programmes et beaucoup d'implicites à décoder (sur l'esprit et non la lettre des séances) ;

– le changement de contrat avec les élèves trop important par rapport aux habitudes, qui nécessite d'être mis en place pendant un certain temps ;

– le temps « perdu » pendant les séances (il y a souvent un important travail autonome des élèves) ;

– la tension nécessaire à la gestion des séances – les élèves peuvent résister au travail demandé par l'enseignant, ils peuvent aussi avoir du mal à passer d'un travail autonome aux corrections ;

– la difficulté de savoir si l'essentiel de ce qui était visé par le concepteur est « passé » ;

– la difficulté d'évaluer les résultats des séances sur les élèves…

Cela nous a amenée à réfléchir aux pratiques des enseignants en préalable à la conception de formations. »

Toutefois, même si on considère que ces difficultés identifiées chez des enseignants du secondaire, spécialiste d'une discipline, sont en partie transférables à des enseignants polyvalents du primaire, nous remarquons que les caractéristiques citées précédemment de nos ressources nous ont permis dès la publication d'ERMEL CP (1990) et dans les ouvrages suivants de prendre en charge ces questions et de traiter en amont cet ensemble de difficultés (ensemble des contenus pris en charge, description précise des séances, cohérence du contrat,…). Cela suppose aussi que l'enseignant donne toute son importance, dans ses analyses à l'activité mathématique réelle de l'élève.

Le concept de professionnalisation apporte un éclairage nous permettant de comprendre comment les enseignants évoluent et construisent leur identité professionnelle.

2 Le concept de professionnalisation

Plusieurs chercheurs proposent des cadres d'analyse du concept de professionnalisation.

Wittorski (2008) explique le succès du thème de la professionnalisation dans la recherche par la nécessité accrue actuellement «de finaliser davantage les apprentissages par rapport aux situations de travail, d'articuler plus étroitement travail et formation, de développer des expertises multiples » (p. 15).

Kaddouri (2005) propose de distinguer les processus de professionnalisation aux niveaux :

- individuel (porté par l'individu avec ou sans accord de l'individu)
- collectif (groupe professionnel qui développe des stratégies de reconnaissance de la profession)
- institutionnel (l'intériorisation des normes et des valeurs de l'institution)

Cette distinction nous semble adaptée pour porter notre réflexion d'autant que l'auteur précise que *« reste posée la question du rapport entre ces différents projets, plus précisément entre projet institutionnel, d'un côté, et projet personnel et/ou collectif de l'autre. Leur complémentarité ainsi que leur décalage ne vont pas sans générer des tensions dans les rapports de l'individu aux responsables de son organisation » (Kaddouri, 2005, p.147).*

La communauté des chercheurs et des formateurs pourrait être considérée comme porteuse de projets de professionnalisation des enseignants qui ne pourraient évidemment pas être considérés comme strictement institutionnels. En ce sens notre questionnement porte sur la nature de ces projets de professionnalisation et sur la difficulté de faire coïncider les trois niveaux de projets.

3 Les voies de professionnalisation pour lire les formes de formation et les pratiques de recherche

Wittorski (2009) propose une grille de lecture des voies de professionnalisation proposées par les organisations. Cette grille d'analyse nous permet de lire, les pratiques de formation et dans le tableau suivant de les relier avec les cultures de travail et de recherche.

Voies de la profession-nalisation	Logique de l'action 1	Logique de la réflexion et de l'action 2	Logique de la réflexion sur l'action 3	Logique de la réflexion pour l'action 4	Logique de la traduction culturelle par rapport à l'action 5	Logique de l'intégration assimilation 6
Nature du processus de développement professionnel mis en œuvre par l'individu	Situation connue présentant un caractère de nouveauté qui conduit à une adaptation dans l'action des process d'action habituellement mis en œuvre.	Situation inédite mettant en échec les façons de faire habituelles et conduisant à une itération entre la recherche d'informations et leur utilisation pour agir.	Situation de formalisation (orale ou écrite) de ses propres pratiques par une réflexion rétrospective sur l'action.	Situation de formalisation de pratiques nouvelles par une réflexion anticipatrice de changement sur l'action.	Situation de transmission de connaissances, de co-construction de pratiques nouvelles et de modification des façons habituelles de voir la situation par l'intervention d'un tiers.	Situation d'apprentissage de savoirs théoriques ou d'action nouveaux.
Exemples de situations de profession-nalisation	Au travail, en formation ou dans la vie courante : ajuster son process d'action au cours de sa mise en œuvre (sans avoir à y réfléchir).	Au travail, en formation ou dans la vie courante : réaliser une tâche inédite seul ou à plusieurs.	Au travail ou dans la vie courante : participer à un groupe d'analyse de pratiques, prendre un temps de réflexion sur son action.	Au travail ou dans la vie courante : participer à un cercle de qualité, réfléchir à un nouveau process d'action.	Au travail ou dans la vie courante : intervention d'un tiers pour nous aider à traiter une situation.	Au travail ou dans la vie courante : lire un ouvrage donnant des indications utiles pour agir (plus tard).

Tableau 1. *Tableau schématisant les 6 voies de professionnalisation présentées*

Voies de la professionnalisation	Logique de l'action	Logique de l'intégration assimilation	Logique de la réflexion et de l'action	Logique de la traduction culturelle par rapport à l'action	Logiques de la réflexion sur et pour l'action
Cultures de formation (et figures sociales[3] d'acteurs)	**Culture de l'apprentissage sur le tas** « se former par le faire » *Figure du collègue*	**Culture de l'enseignement** (Formation magistrale) « se former par l'acquisition de savoirs » *Figure de l'enseignant*	**Culture de la formation** (Formation alternée) « se former par l'accès à des savoirs et leur mise en œuvre » *Figure du formateur*	**Culture de l'accompagnement** (Tutorat/ coaching) « se former en situation grâce à un tiers » *Figure du tuteur*	**Culture de l'analyse de pratiques** « se former par l'analyse de son action » *Figure de l'animateur*
Cultures de travail	Organisation prescriptive évitant l'imprévu (taylorisme), prescrivant spécialisation et routine *Organisation du travail « à effet formateur »*		Organisation faiblement prescriptive délégant au sujet la gestion de l'imprévu (situations nouvelles) *Organisation du travail qualifiante*	Organisation favorisant le coaching (salariés et tiers consultant) *organisation du travail qualifiante*	Organisation instituant des moments de formalisation des pratiques (cercles de qualité) *organisation du travail qualifiante, apprenante*
Cultures de recherche		Paradigme de la recherche classique	Paradigme de la recherche-action	Paradigme de la recherche inter, pluri ou trans-disciplinaire	Etude de l'épistémologie et des paradigmes de recherche

3 *« Figure sociale » d'acteur signifie le rôle ou la fonction dominante représentée par le tiers présent dans le dispositif proposé.*

Tableau 2. *Cultures de travail, de formation, de recherche et voies de professionnalisation*

Utiliser ces grilles permet de relier les différents processus de professionnalisation :

« Ce choix traduit notre conviction que la compréhension de la professionnalisation passe par l'étude combinée de l'offre (côté organisation) et de la dynamique de développement professionnel (côté individu). Elle permet ensuite de penser ensemble, et non de façon dissociée, la professionnalisation des individus, des activités et des organisations. » (Wittorski, 2009)

Le cadre de la professionnalisation nous fournit donc à la fois un cadre nouveau d'analyse des difficultés d'appropriation des produits de la recherche mais également des hypothèses concernant les conditions de cette appropriation.

4 Une illustration

Dans les référentiels de compétence des enseignants de 2010 et de 2013 on peut trouver des références à l'appropriation des produits de la recherche.

Dans le référentiel de 2010 : « *se former et innover* »

Le professeur connaît l'état de la recherche :

- *dans sa discipline ;*
- *dans le domaine de la didactique, de la pédagogie et de la transmission de savoirs (processus d'apprentissage, didactique des disciplines, utilisation des technologies de l'information et de la communication, etc.).*
- *Le professeur est capable de tirer parti des apports de la recherche et des innovations pédagogiques pour actualiser ses connaissances et les exploiter dans sa pratique quotidienne.*

Dans le référentiel de 2013 :

- *Connaître les processus et les mécanismes d'apprentissage, en prenant en compte les apports de la recherche.*
- *Se tenir informé des acquis de la recherche afin de pouvoir s'engager dans des projets et des démarches d'innovation pédagogique visant à l'amélioration des pratiques.*
- *Ils prennent en compte les concepts fondamentaux relatifs au développement de l'enfant et de l'adolescent et aux mécanismes d'apprentissage, ainsi que les résultats de la recherche dans ces domaines.*

Les deux descriptions des compétences attendues par l'institution renvoient à la logique de « l'intégration » : « actualiser ses connaissances », « connaître les processus d'apprentissage », « se tenir informé des acquis de la recherche » et à la logique de la « formation et de l'action » : « actualiser ses connaissances et les exploiter dans sa pratique » « prennent en compte » « visant à amélioration des pratiques ».

Cette analyse renvoie au « paradigme de la recherche classique » c'est à dire recherche visant une production de connaissances et nécessairement coupée des problématiques de formation.

Les problématiques que nous abordons dans cet article et qui guident également une partie de notre travail d'équipe de recherche semblent donc en décalage avec la visée de l'institution.

La réforme de la formation mise en place à la rentrée 2014, instaurant une alternance en master 2 dans les masters MEEF (Métier de l'enseignement, de l'éducation et de la Formation) semble quant à elle renvoyer à une formation qui mêle les cinq types de formation. Nous pouvons identifier d'ores et déjà plusieurs difficultés : celle de la juxtaposition des différentes logiques et de leur compatibilité, la nécessité de développer plusieurs cultures de recherche qui ne sont peut-être pas existante ou également développées, les difficultés de mise en cohérence entre la logique de formation et les autres contraintes institutionnelles comme le référentiel de compétence ou les concours de recrutement.

Ainsi nous voyons que le cadre de la professionnalisation nous permet effectivement de mettre en évidence des difficultés.

V - EN CONCLUSION, QUELLES PERSPECTIVES ?

Notre projet initial était de susciter, au sein de la communauté des formateurs, une réflexion sur la contribution pour les enseignants et les formateurs, de ressources issues ou inspirées par des recherches dans le champ de la didactique, en particulier sur l'analyse de leurs usages et de leurs effets sur les pratiques, et plus précisément sous quelles conditions cet usage peut contribuer à une modification stable des pratiques ? Ce qui conduit aussi à s'interroger sur les liens entre recherche et production de ressources.

Cette communication nous a permis aussi de présenter des cadres théoriques aidant à mieux comprendre les sources des difficultés d'appropriation des ressources par les enseignants : dues, à la nature des recherches elles-mêmes, aux ressources produites, à la nature du travail de l'enseignant, à ses intention de professionnalisation et à la compatibilité entre les niveaux auxquels ses situent les différents processus , aux prescriptions de l'institution …

Pour aller plus loin dans ce questionnement il nous faut collectivement préciser ce qui est réellement visé en termes d'évolution des enseignants et donc définir des critères. Nous proposons de premiers critères intuitifs pour caractériser les enjeux de la production de ressource :

- entrainer des changements stables de pratiques.
- analyser les changements transférables à d'autres champs d'enseignement. Une hypothèse serait, par exemple que, quand un enseignant s'approprie des démarches de différenciation en utilisant la recherche qui a abouti à l'ouvrage « Chacun, tous, différemment » (équipe de didactique des mathématiques de l'INRP, 1995), il peut les utiliser dans d'autres champs que celui des mathématiques (il ne peut pas faire autrement que d'utiliser...)

Nous avons envisagé différentes apports pouvant aider à cette réflexion :

- Pour l'axe 1 : En plus des cadres que nous venons de présenter et qui devraient être approfondis, il serait possible de regarder les apports de travaux étrangers : PCK (Pedagogical Content Knowledge) aux USA (Rowan et Al., 2001), Four parameters (Monaghan, 2003) pour expliciter des critères communs sur l'évolution des pratiques.
- Pour l'axe 2 : une mutualisation des usages et des pratiques de formations : par exemple quel mémoire de Master MEEF ? et d'autres dispositifs (Neop@ss action …).
- Pour l'axe 3 : une mutualisation d'autres équipes de recherche travaillent sur la production de ressources.

Comme nous l'avons annoncé, nous préparons actuellement un atelier pour le prochain colloque COPIRELEM, privilégiant une réflexion sur les axes 1 et 3.

VI - BIBLIOGRAPHIE

ABBOUD-BLANCHARD M. (1994) *L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement secondaire : symptômes d'un malaise*, Thèse de doctorat, Université Paris VII

BERTHELOT R. & SALIN M.-H. (1992) L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Thèse de l'Université de Bordeaux 1. LADIST

DOUAIRE J., EMPRIN, F. & RAJAIN C. (2009) L'apprentissage du 3D à l'école, des situations d'apprentissage à la formation des enseignants. *Repères IREM* n° 77.

DOUAIRE J. & EMPRIN F. (2012) Apprentissages géométriques au cycle 2 et formation des enseignants, *Actes du XXXVIIIe colloque de la COPIRELEM* Dijon

EMPRIN F. (2007) Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique, Thèse de didactique des disciplines, Université Paris VII – Denis Diderot

ÉQUIPE DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES DE L'INRP (1995) Chacun, tous… différemment ! Différenciation en mathématiques au cycle des apprentissages, *rencontre pédagogique*, n°34, INRP, Paris

ÉQUIPE ERMEL (2006) Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3, (Hatier ed)

KADDOURI M. (2005) Professionnalisation et dynamiques identitaires. In Maryvonne Sorel et Richard Wittorski, la professionnalisation en actes et en question, pp. 145-157. Paris : l'Harmattan.

MARGOLINAS C. (1992) Éléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 12, n°1, pp. 113-158.

ROBERT A. (1999) Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe, *Didaskalia 15*

ROBERT A. (2003) De l'idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques: le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et lycée), *Didaskalia*, n° 22, p. 99-116.

ROWAN B. et al. (2001) Measuring teachers' pedagogical content knowledge in surveys: An exploratory study. Consortium for Policy Research in Education.

VERGNAUD G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. Volume 10.2, 133-170.

WITTORSKI R. (2008) La professionnalisation : note de synthèse, Savoirs, 17, 11-39.

WITTORSKI R. (2009) A propos de la professionnalisation, in JM Barbier, E Bourgeois, G Chapelle et JC Ruano-Borbalan (éd. 2009) Encyclopédie de l'éducation et de la formation (p. 781-793). Paris : PUF.