COPIRELEM

Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.

Concours de recrutement
des Professeurs des Écoles

Mathématiques

Préparation 2023

Épreuve écrite de mathématiques : les sujets du concours 2022 avec corrigés détaillés et compléments de formation + quelques exercices complémentaires

+

Épreuve orale de mathématiques : des pistes pour se préparer efficacement

Ces annales ont été rédigées par :

Anne BILGOT (INSPÉ de l'Académie de Paris)
Christophe BILLY (INSPÉ de Toulouse Occitanie-Pyrénées)
Richard CABASSUT (INSPÉ de l'Académie de Strasbourg)
Valentina CELI (INSPÉ de l'Académie de Bordeaux)
Pierre DANOS (INSPÉ de Toulouse Occitanie-Pyrénées)
Nicolas DE KOCKER (INSPÉ de Lorraine)
Fabien EMPRIN (INSPÉ de l'Académie de Reims)
Sylvie GRAU (INSPÉ de l'Académie de Nantes)
Christine MANGIANTE (INSPÉ de l'Académie de Lille – Hauts-de-France)
Frédéric METIN (INSPÉ de Bourgogne)
Edith PETITFOUR (INSPÉ de Normandie Rouen - Le Havre)
Arnaud SIMARD (INSPÉ de Franche-Comté)
Frédérick TEMPIER (INSPÉ de l'Académie de Versailles)
Catherine THOMAS (INSPÉ de l'Académie de Strasbourg)
Gwenaëlle VAY (INSPÉ de l'Académie de Nantes)
Claire WINDER (INSPÉ d'Aix-Marseille)
Hélène ZUCCHETTA (INSPÉ de l'Académie de Lyon)

Chaque sujet a été pris en charge par plusieurs correcteurs.

La relecture finale du document a été effectuée par :

Pierre EYSSERIC (INSPÉ d'Aix-Marseille)
Michel JAFFROT (formateur retraité de l'Académie de Nantes)

Coordination de l'ensemble :

Pierre EYSSERIC (INSPÉ d'Aix-Marseille)

REMERCIEMENTS

Ces annales ont pu être menées à bien grâce aux contributions de personnes, associations et institutions :

- **Nos collègues formateurs en mathématiques** qui nous ont transmis des sujets de concours blancs et d'examens proposés dans leurs INSPÉ.

- **L'ARPEME** (Association pour l'élaboration et la diffusion de Ressources Pédagogiques sur l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole).
  Cette association a pour but de favoriser le développement de la réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'école et sur la formation des professeurs à l'enseignement des mathématiques :
  - en aidant à la communication d'expériences, à la diffusion de documents de formation et de recherche sur l'enseignement des mathématiques ;
  - en apportant un soutien à l'organisation de colloques et séminaires de réflexion rassemblant les formateurs intervenant à divers titres dans la formation en mathématiques des professeurs ;
  - en prenant en charge l'élaboration, l'impression et la diffusion de tous documents utiles pour les formateurs en mathématiques des professeurs des écoles : documents pédagogiques écrits et audiovisuels, actes des colloques, comptes-rendus de séminaires.

- **La COPIRELEM** (Commission permanente des **IREM** pour l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire) et le réseau des **IREM**.

SOMMAIRE

LES SUJETS ET LEURS CORRIGES

EXERCICES PROPOSÉS PAR LA COPIRELEM OU ÉLABORÉS À PARTIR DE SUJETS PROPOSÉS DANS LES INSPÉ

CRPE 2022 – SYNTHESE SUR LES SUJETS DE MATHEMATIQUES (épreuve écrite)

Nombres d'exercices et de questions

Le nombre d'exercices varie entre 4 et 5, le nombre total de questions entre 34 et 40. Un exercice comporte au moins 2 questions, au plus 20 questions.

Sujet	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5	Total
1	2 parties 3 questions 7 questions	8 questions	2 questions	5 questions	9 questions	5 exercices 34 questions
2	6 questions	7 questions	2 parties 4 questions 7 questions	8 questions	8 questions	5 exercices 40 questions
3	7 questions	8 questions	3 parties 9 questions 4 questions 4 questions	4 questions		4 exercices 34 questions
4	5 questions	4 parties 4 questions 4 questions 7 questions 5 questions	5 questions	4 questions		4 exercices 34 questions

Contenus mathématiques des sujets

La géométrie (plane et dans l'espace) est **juste un habillage, un prétexte** pour travailler sur les grandeurs et les mesures.

Très peu de questions sur la **numération** et les **opérations.** Pas du tout de questions sur **l'arithmétique**.

	Sujet 1	Sujet 2	Sujet 3	Sujet 4
Géométrie plane		Théorème de Pythagore	Théorème de Pythagore Théorème de Thalès Reconnaissance « intuitive » d'une transformation géométrique (rotation)	Hexagone : prétexte pour travailler sur les grandeurs et mesures (aire et volume)
Géométrie dans espace		Prétexte pour travailler sur les grandeurs et mesures (volume d'un solide) et sur le théorème de Pythagore		Prétexte pour travailler sur les grandeurs et mesures (volume d'un prisme) Patron d'un cube

	Sujet 1	Sujet 2	Sujet 3	Sujet 4
Numération Opérations		Correspondance entre notre système de numération et le système des Mayas (relation entre les bases 10 et 20)	Nombres réels Calculs avec des fractions Calculs avec des fractions	
Arithmétique				
Équations Inéquations Mise en équations	Mise en équation d'un problème	Mise en équation Résolution d'une équation, d'une inéquation	Mise en équation	Résolution système d'équation
Combinatoire et dénombrement Probabilités Statistiques	Probabilités	Dénombrement Probabilités	Combinatoire Statistiques	Diagramme circulaire Probabilités
Algorithmique et programmation	Scratch (lien avec une figure géométrique composée)	Scratch (lien avec l'algèbre, programme de calcul)	Scratch (lien avec figures et pixels)	Scratch (lien avec la notion de patron d'un polyèdre)
Grandeurs et mesures	Rayon d'un cercle en connaissant son périmètre Volume et aire d'un solide composé d'un cône et d'une demi-sphère	Volume d'un solide (cube auquel on retire une pyramide)	Volume d'un cylindre Aire d'un triangle Aire d'un rectangle (pb d'aire maximale) Volume d'un parallélépipède rectangle	Volume d'un prisme Aire d'un triangle, d'un hexagone régulier
Proportionnalité Pourcentage Vitesses Échelles Conversions	Vitesses Pourcentage	Conversions (longueurs) Vitesse Échelle	Pourcentage Échelle Vitesse Pourcentage	Diagramme circulaire et pourcentages
Fonctions Graphiques	Fonction affine	Fonction affine, fonction linéaire Lecture d'un graphique donné	Interpréter un graphique (portion de parabole)	Fonction linéaire Interpréter un graphique Représenter une courbe dont la fonction associée est à trouver

	Sujet 1	Sujet 2	Sujet 3	Sujet 4
Tableur	Interpréter une formule donnée ; les données dans un tableau Écrire une formule Interpréter les données dans un tableau	Écrire une formule		Lire, trouver formule Compléter un tableau
Autre	Corrigé un schéma produit par un élève		Problème d'optimisation (exercice 3, partie B, question 2)	Résoudre un problème de différentes façons Analyser un raisonnement d'élève

QUELQUES PISTES POUR PRÉPARER L'ÉPREUVE ORALE DE MATHÉMATIQUES

LES ÉPREUVES DU CRPE EN 2023

Nous reproduisons ici les principaux textes en vigueur relatifs à l'épreuve de mathématiques des concours de recrutement de professeurs des écoles, tels que vous pouvez les retrouver sur le site ministériel à partir de la page https://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid157967/programmes-crpe-session-2022.html.

CONCOURS CONCERNÉS

- Concours externe de recrutement de professeurs des écoles.
- Concours externe spécial de recrutement de professeurs des écoles.
- Troisième concours de recrutement de professeurs des écoles.
- Second concours interne de recrutement de professeurs des écoles.
- Second concours interne spécial de recrutement de professeurs des écoles.

DÉFINITION DES ÉPREUVES DE MATHÉMATIQUES

« Le cadre de référence des épreuves des concours externes, troisièmes concours et seconds concours internes de recrutement de professeurs des écoles **est celui des programmes de l'école primaire**. Les connaissances attendues des candidats sont celles que nécessite un enseignement maîtrisé de ces programmes. Il est attendu du candidat qu'il maîtrise finement et avec du recul l'ensemble des connaissances, compétences et démarches intellectuelles du socle commun de connaissances, compétences et culture, et les programmes des cycles 1 à 4.
Des connaissances et compétences en didactique du français et des mathématiques ainsi que des autres disciplines pour enseigner au niveau primaire sont nécessaires. »

Épreuve écrite disciplinaire de mathématiques.

« L'épreuve est constituée d'un ensemble d'au moins trois exercices indépendants, permettant de vérifier les connaissances du candidat.
L'épreuve est notée sur 20. Une note globale égale ou inférieure à 5 est éliminatoire.
Durée : trois heures ; coefficient 1.
Les épreuves écrites prennent appui sur le programme publié ci-dessous. »

Programme de l'épreuve écrite disciplinaire de mathématiques

« Le programme de l'épreuve est constitué :

- du programme en vigueur de mathématiques du cycle 4
- de la partie "Nombres et calculs" du programme de mathématiques de seconde générale et technologique (BOEN spécial n° 1 du 22 janvier 2019).

Les notions traitées dans ces programmes doivent pouvoir être abordées avec le recul nécessaire à l'enseignement des mathématiques aux cycles 1, 2 et 3. »

Épreuve de leçon

« L'épreuve porte successivement sur le français et les mathématiques. Elle a pour objet la conception et l'animation d'une séance d'enseignement à l'école primaire dans chacune de ces matières, permettant d'apprécier la maîtrise disciplinaire et la maîtrise des compétences pédagogiques du candidat.
Le jury soumet au candidat deux sujets de leçon, l'un dans l'un des domaines de l'enseignement du français, l'autre dans celui des mathématiques, chacun explicitement situé dans l'année scolaire et dans le cursus de l'élève.
Afin de construire le déroulé de ces séances d'enseignement, le candidat dispose en appui de chaque sujet d'un dossier fourni par le jury et comportant au plus quatre documents de nature variée : supports pédagogiques, extraits de manuels scolaires, traces écrites d'élèves, extraits des programmes…
Le candidat présente successivement au jury les composantes pédagogiques et didactiques de chaque leçon et de son déroulement. Chaque exposé est suivi d'un entretien avec le jury lui permettant de faire préciser ou d'approfondir les points qu'il juge utiles, tant sur les connaissances disciplinaires que didactiques.
Durée de préparation : deux heures ; durée de l'épreuve : une heure (français : trente minutes, l'exposé de dix à quinze minutes est suivi d'un entretien avec le jury pour la durée restante impartie à cette première

partie ; mathématiques : trente minutes, l'exposé de dix à quinze minutes est suivi d'un entretien avec le jury pour la durée restante impartie à cette seconde partie).
Coefficient 4.
L'épreuve est notée sur 20. La note 0 est éliminatoire. »

MATÉRIEL AUTORISÉ LORS DE L' ÉPREUVE ÉCRITE

« Pour les concours enseignants, **la réglementation sera modifiée à partir de la session 2022** afin de s'aligner sur la note de service n°2015-056 du 13 mars 2015. Les candidats devront alors disposer d'une calculatrice avec mode examen qui sera activé le jour des épreuves ou d'une calculatrice dépourvue de mémoire. »
https://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid148885/utilisation-calculatrice.html

AVERTISSEMENT

Dans le corrigé des **exercices de mathématiques**, nous proposons souvent plusieurs méthodes de résolution pour une question. Certaines solutions sont plus longues que d'autres. Nous les donnons cependant pour que chacun puisse éventuellement reconnaître et valider la méthode qu'il a utilisée ou dans laquelle il s'est engagé sans peut-être savoir terminer.
Une méthode même longue donnera tous les points attribués à la question, du moment qu'elle a abouti au résultat demandé. Elle pénalise cependant le candidat car le temps passé à la rédiger n'est plus disponible pour traiter d'autres questions. Mais il est possible que le lecteur de ces annales la comprenne mieux qu'une méthode courte, même « élégante ». Le lecteur jugera donc par lui-même quelle(s) méthode(s) il lui convient de s'approprier.
Par ailleurs, ces différentes méthodes proposées constituent des compléments de formation aux mathématiques en jeu l'exercice du métier de professeur des écoles.

D'autre part, nous complétons la plupart des corrigés d'exercices avec des éléments liés à la didactique des mathématiques. Ces éléments ne sont pas attendus des candidats pour l'épreuve d'admissibilité mais ils contribueront aussi bien à la formation du futur professeur des écoles qu'à la préparation de la partie mathématique de la première épreuve orale d'admission au CRPE. Ils apparaissent sous la rubrique "Compléments de formation" et sont regroupés après l'ensemble des corrigés d'exercices.

CONSEILS AUX CANDIDATS

La lisibilité, la correction et la rigueur des réponses sont, bien entendu, les critères principaux d'évaluation. Par ailleurs, une écriture difficilement lisible, la présence de « fautes » d'orthographe par trop grossières et fréquentes, les coquilles fâcheuses, le verbiage pompeux et vide, l'abus d'expressions hors de propos, finissent par avoir une incidence sur l'évaluation, et cela, quelle que soit la précision du barème de notation appliqué. Nous conseillons donc de relire la copie en tenant compte de tout cela.

LES ÉNONCÉS DES EXERCICES DE MATHÉMATIQUES

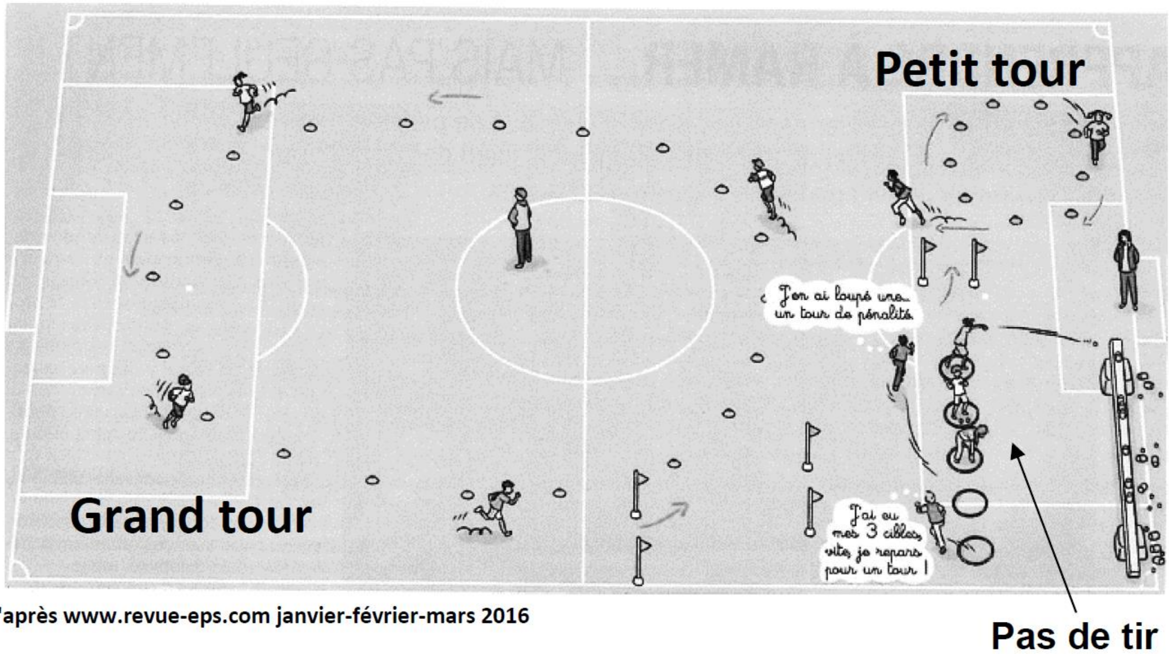
sujets concours 2022

SUJET DU GROUPEMENT 1 – avril 2022

Ce sujet est composé de cinq exercices indépendants.

EXERCICE 1

Dans cette version adaptée du biathlon, les élèves ont à parcourir, en courant, 4 grands tours tracés avec des plots sur un stade comme dans la figure ci-dessous. À l'issue de chacun des 3 premiers tours, ils se présentent au pas de tir et lancent 3 balles sur des cibles. S'ils atteignent 3 fois leur cible, ils n'ont pas de pénalité et repartent pour le grand tour suivant. En revanche, pour chaque lancer manqué, ils doivent effectuer un petit tour avant de repartir sur le grand tour.
Pour chaque élève on mesure la durée mise pour faire un parcours complet (grands tours + lancers + petits tours de pénalité le cas échéant). L'objectif est de mettre le moins de temps possible pour effectuer le parcours complet.



D'après www.revue-eps.com janvier-février-mars 2016

PARTIE 1

Dans cette partie, les élèves s'entraînent à la course sur le grand tour, sans effectuer de lancer de balles.

1) Pour un élève de CE1, la longueur du grand tour est de 250 m.
   a) On considère un élève, qui effectue les 4 tours en 10 minutes. Quelle est sa vitesse moyenne de course, en mètre par minute ?
   b) Un autre élève a couru les 4 tours à la vitesse moyenne de 150 m/min. Déterminer sa vitesse moyenne en kilomètre par heure.
2) Dans le tableau ci-dessous, les longueurs d'un grand tour pour des élèves de CM1 et de CM2 sont données, ainsi que les temps de course pour effectuer 4 grands tours, de deux élèves (un en CM1 et un en CM2).

Élève	Longueur de 1 grand tour	Temps de course pour 4 grand tours
Élève de CM1	400 m	9 minutes et 30 secondes
Élève de CM2	500 m	11 minutes et 8 secondes

Déterminer la vitesse moyenne (en mètre par minute, arrondie à l'unité) de chacun de ces deux élèves, lorsqu'ils ont réalisé les 4 grands tours.

PARTIE 2

Dans cette partie, des élèves de CE1 font l'épreuve de biathlon dans sa totalité :

les 4 grands tours + les 3 épreuves de lancers de 3 balles + les éventuels tours de pénalité.

On rappelle que pour un élève de CE1, la longueur du grand tour est de 250 m.

1) La longueur du tour de pénalité est de 20 m.

   a) Sachant que le tour de pénalité forme un cercle, déterminer son rayon. Arrondir au centimètre.

   b) Un élève de CE1, qui court à la vitesse moyenne de 150 m/min, prend le départ de l'épreuve. On suppose que pour effectuer 3 lancers, il passe, à chaque fois, 30 secondes sur le pas de tir.
   Quelle sera la durée totale que met cet élève pour réaliser le parcours complet, s'il ne rate aucune cible au premier tour et qu'il rate une cible au 2^{e} tour puis deux cibles au 3^{e} tour ? Donner la réponse en minutes et secondes.

2) Le professeur des écoles souhaite aider ses élèves à développer une stratégie pour améliorer leurs résultats. Il relève les performances d'un même élève de CE1 qui fait 3 fois l'épreuve de biathlon dans sa totalité en modifiant certains paramètres à chaque essai. Dans le tableau ci-dessous, V_{moy} est la vitesse moyenne de cet élève sur les périodes de course (4 grands tours + éventuels tours de pénalités).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	élève	tirs n°1		tirs n°2		tirs n°3		distance totale parcourue	temps de course (s)	V moy (m/min)	durée totale (min)
2		durée (s)	cibles manquées	durée (s)	cibles manquées	durée (s)	cibles manquées				
3	essai 1	30	0	30	1	30	2		418		
4	essai 2	30	0	32	0	35	0		300		
5	essai 3	19	3	21	3	21	3		341		

   a) La formule saisie en H3 puis recopiée vers le bas est =1000+(C3+E3+G3)*20.
   Expliquer le terme (C3+E3+G3)*20 dans le contexte de l'exercice.

   b) Donner une formule qui pourra être introduite dans la cellule J3, de telle sorte qu'elle puisse être recopiée vers le bas pour effectuer le calcul pour les autres essais.

   c) Donner une formule qui pourra être introduite dans la case « durée totale » K3, de telle sorte qu'elle puisse être recopiée vers le bas pour effectuer le calcul pour les autres essais.

   Après calculs, on obtient le tableau complet ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	élève	tirs n°1		tirs n°2		tirs n°3		distance totale parcourue	temps de course (s)	V moy (m/min)	durée totale (min)
2		durée (s)	cibles manquées	durée (s)	cibles manquées	durée (s)	cibles manquées				
3	essai 1	30	0	30	1	30	2	1060	482	132	9,53
4	essai 2	30	0	32	0	35	0	1000	469	128	9,43
5	essai 3	19	3	21	3	21	3	1180	566	125	10,45

   d) Interpréter le tableau pour déterminer ce que l'élève a modifié entre l'essai 2 et l'essai 3.

   e) Si on analyse les performances de l'élève aux essais 2 et 3, quelle hypothèse ce tableau permet-il de faire du point de vue des stratégies à adopter ?

EXERCICE 2

On dispose d'un dé cubique non truqué dont les faces opposées sont identiques : deux faces numérotées 0, deux faces numérotées 1 et deux faces numérotées 2.

1) On effectue deux lancers et on lit, à chaque lancer, le chiffre inscrit sur la face supérieure.
   Les deux lancers permettent d'obtenir un nombre décimal : le résultat du premier lancer donne le chiffre des unités et celui du second lancer le chiffre des dixièmes.

   a) Donner la liste de tous les nombres que l'on peut obtenir.

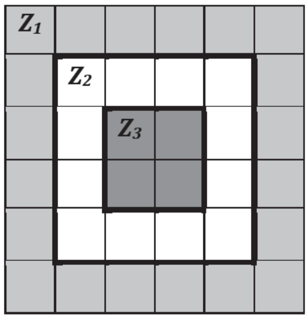
   b) Justifier que la probabilité d'obtenir 1,2 est égale à 1/9.

   c) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre strictement inférieur à 1 ?

d) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre entier ?

e) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre décimal ?

2) Le tapis représenté ci-dessous est constitué de 36 carrés de côté 10 cm. Ces carrés définissent trois zones Z_1, Z_2 et Z_3 repérées par des couleurs différentes.



Avec le même dé que précédemment, on effectue un lancer sur ce tapis et on regarde la face supérieure. Si le dé tombe à cheval sur deux zones, on le relance. On admet que la probabilité que le dé tombe dans une zone est proportionnelle à l'aire de la zone.

a) Quelle est la probabilité que le dé tombe dans la zone Z_2 ?

b) Quelle est la probabilité que le dé tombe en zone Z_2 et donne le nombre 1 ?

c) Quelle est la probabilité que le dé tombe en zone Z_2 et donne un nombre pair ?

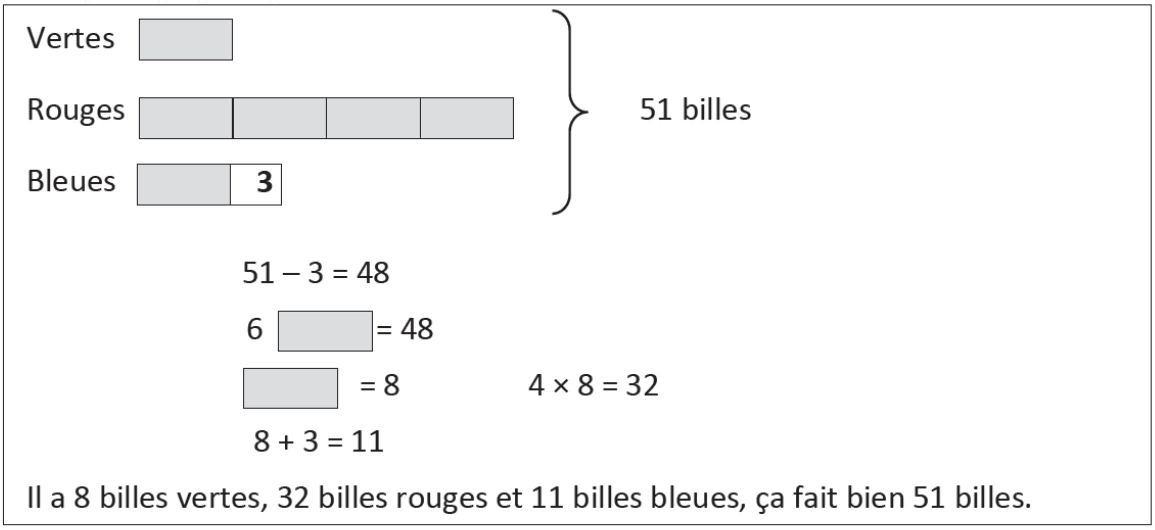
EXERCICE 3

Un enseignant d'une classe de CM2 a proposé ce problème à ses élèves.

> *Dans un bocal, un enfant a des billes vertes, des billes rouges et des billes bleues. Il a 4 fois plus de billes rouges que de billes vertes et il a 3 billes vertes de plus que de billes bleues. En tout il a 51 billes.*
> *Combien a-t-il de billes de chaque couleur ?*

D'après un problème du Guide pour enseigner la résolution de problèmes au cours moyen, ministère de l'Éducation nationale, 2021

1) Voici la réponse proposée par Samira, une élève de la classe de CM2 :



Proposer une version corrigée du schéma utilisé par Samira pour résoudre le problème.

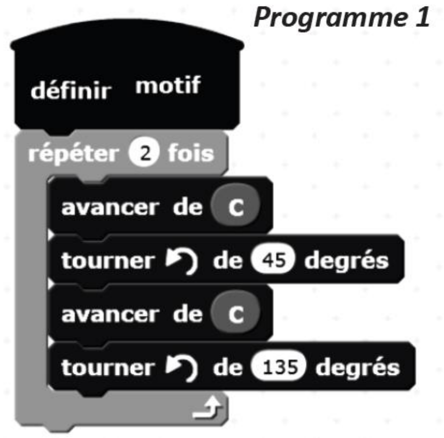
2) a) En notant v le nombre de billes vertes, déterminer, en fonction de v, le nombre de billes rouges et le nombre de billes bleues.

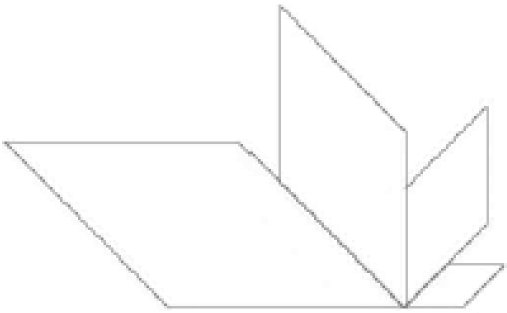
b) Mettre le problème en équation et la résoudre pour répondre algébriquement à la question posée dans l'énoncé.

EXERCICE 4

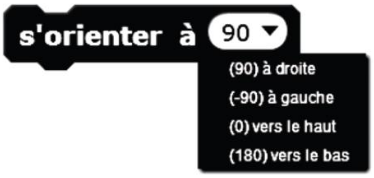
Le programme ci-contre (*Programme 1*) a été écrit avec le logiciel Scratch.

1) En prenant C = 50 et 1 cm pour 10 pixels, tracer la figure construite en utilisant le *Programme 1*.
2) Quelle est la nature de la figure tracée ? Justifier la réponse.
3) On écrit le *Programme 2* en utilisant le bloc précédent, afin d'obtenir la figure représentée ci-après.





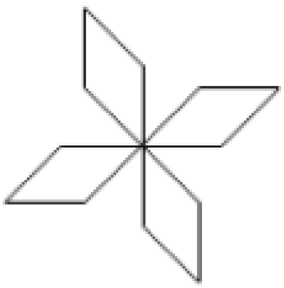
Rappel :



a) Quelles valeurs attribuer aux lettres A et N dans le programme 2 pour obtenir la figure correspondante ?

b) Quelle est la valeur de la variable C une fois le programme exécuté ?

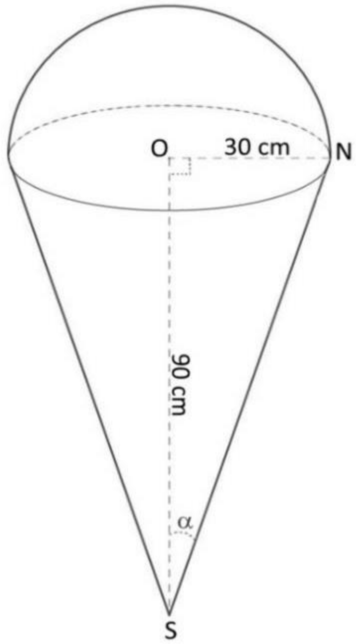
4) Comment peut-on modifier le programme 2 pour obtenir la figure ci-dessous pour laquelle chaque segment mesure 30 pixels ?



EXERCICE 5

Un ballon-sonde est un ballon à gaz utilisé pour faire des mesures locales dans l'atmosphère.

Dans le cadre du projet scientifique qu'elle anime pour sa classe de CM2, une professeure des écoles a reçu un petit ballon-sonde, représenté ci-dessous.

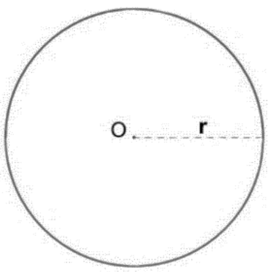
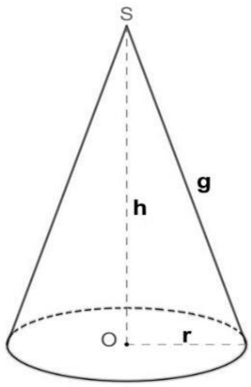
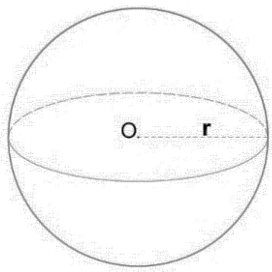


Son enveloppe, composée de matières plastiques et de latex, a la forme, une fois gonflée, d'un cône de révolution surmonté d'une demi-sphère.

Les dimensions données sur la figure sont celles du ballon-sonde au sol, sur le lieu du lâcher situé au niveau de la mer.

La pression atmosphérique diminuant avec l'altitude, le ballon se dilate en prenant de la hauteur et ses dimensions augmentent jusqu'à l'éclatement après une ascension de plus de vingt kilomètres.

On pourra, si nécessaire, utiliser le formulaire ci-dessous.

	 g est la longueur d'une génératrice du cône.	
Périmètre du disque $2\,\pi r$	Volume du cône de révolution $\frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h$	Volume de la boule $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$
Aire du disque $\pi\, r^2$	Aire de la surface latérale $\pi\, r\, g$	Aire de la sphère $4\,\pi\, r^3$

1) a) Montrer, en indiquant les étapes du calcul, que le volume exact du ballon-sonde au niveau de la mer, est égal à $45\,000\,\pi$ cm^3.

   b) Donner le volume du ballon sonde en litre, arrondi à l'entier.

2) Montrer qu'une génératrice du cône mesure $\sqrt{9000}$ cm.

3) En déduire que l'enveloppe totale du ballon-sonde, au niveau de la mer, a une aire d'environ 1,5 m^2 au dixième près.

4) Entre 0 mètre d'altitude et 4 500 mètres d'altitude, les longueurs du ballon-sonde augmentent de 25 %.

   a) Par quel nombre les longueurs initiales sont-elles multipliées ?

   b) Montrer que, à 4 500 mètres d'altitude, l'enveloppe totale du ballon-sonde a une aire d'environ 2,3 m^2 arrondie au dixième près.

   c) Donner un arrondi, au litre près, du volume du ballon-sonde à 4 500 mètres d'altitude.

5) On lâche le ballon à 0 mètre d'altitude. On relève alors une température de 15°C. À 4 500 mètres d'altitude, la température transmise est de -12°C. Entre 0 et 12 000 m d'altitude, la température, en degré Celsius, en fonction de l'altitude x, en mètre, peut être modélisée par une fonction affine notée t.
   Montrer que pour tout x entre 0 et 12 000, on a $t(x) = -0{,}006\,x + 15$.

6) À partir de quelle altitude la température devient-elle négative ? Justifier le résultat en résolvant une inéquation.

7) La professeure des écoles a réalisé, à l'aide d'un tableur, le calcul des températures en fonction de l'altitude du ballon-sonde.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	altitude en mètre	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500	7000	7500	8000	8500	9000	9500	10000	10500	11000	11500	12000
2	température en degrés	15	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12	-15	-18	-21	-24	-27	-30	-33	-36	-39	-42	-45	-48	-51	-54	-57

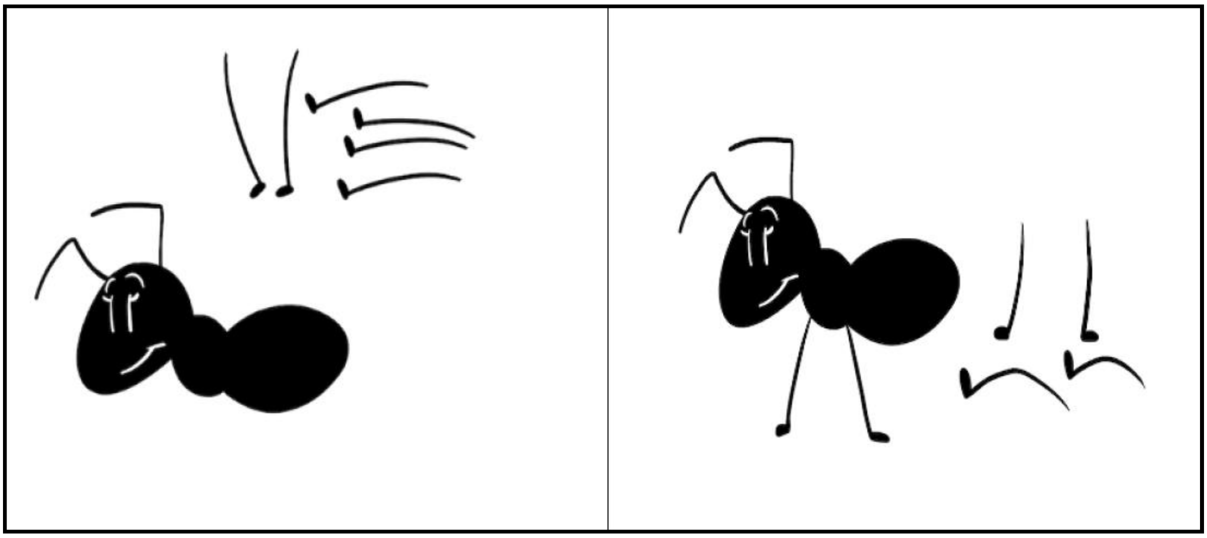
   En observant les données du tableau, sachant que le ballon part de 0 mètre d'altitude, à quelle altitude se trouve-t-il lorsque la température a baissé de 30°C ?

SUJET DU GROUPEMENT 2 – avril 2022

Ce sujet est composé de cinq exercices indépendants.

EXERCICE 1

Un enseignant de grande section propose à ses élèves un jeu pour travailler la décomposition et la recomposition de nombres. Le jeu se compose de deux dés cubiques équilibrés et de corps de fourmis à compléter avec des pattes comme sur le dessin ci-dessous.



Sur les six faces du premier dé sont inscrits les nombres suivants : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.

Sur les six faces du deuxième dé sont inscrits les nombres suivants : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 5.

On donne à chaque élève un corps de fourmi et 6 pattes à fixer sur le corps.

Au début de la partie, chaque élève choisit un nombre compris entre 2 et 10. Ce nombre reste le même durant toute la partie. À tour de rôle, chaque élève joue. Il lance les deux dés :

- si la somme des nombres inscrits sur les faces supérieures des deux dés est égale au nombre choisi par cet élève, alors celui-ci fixe une patte à sa fourmi et relance les dés ;
- sinon, c'est au joueur suivant de lancer les dés.

Il donne ensuite les dés au joueur suivant.

La partie se termine lorsqu'un élève a gagné, en fixant les six pattes de sa fourmi.

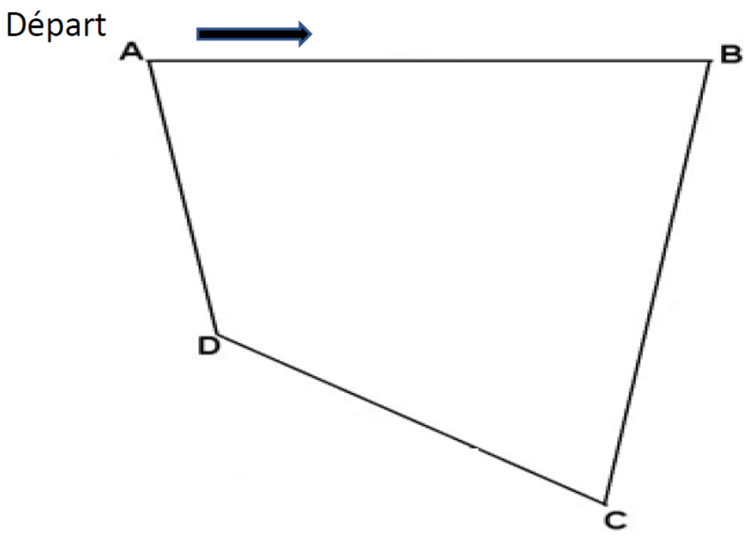
1) Un élève choisit un nombre et lance les dés.
   a) Quelles sont les différentes sommes qu'il peut obtenir ?
   b) Montrer que la probabilité qu'il obtienne 8 est égale à 4/36.
2) Un autre élève choisit le nombre 6 et lance les dés.
   a) Quelle est la probabilité qu'il gagne une patte pour sa fourmi dès son premier lancer ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il gagne deux pattes pour sa fourmi en 2 lancers ?
3) Eden et Axelle commencent une partie. Eden choisit le nombre 6 et Axelle choisit un autre nombre.
   a) Qui a le plus de chance de gagner la partie ? Justifier.
   b) Eden est-il sûr de gagner la partie ? Justifier.

EXERCICE 2

Dans le cadre d'une liaison écoles-collège, une professeure d'EPS et une professeure des écoles organisent une course à vélo dont le parcours est composé de quatre tronçons en ligne droite.

La figure ci-dessous représente le parcours et n'est pas à l'échelle.
Les élèves partent du point A et tournent dans le sens des aiguilles d'une montre.

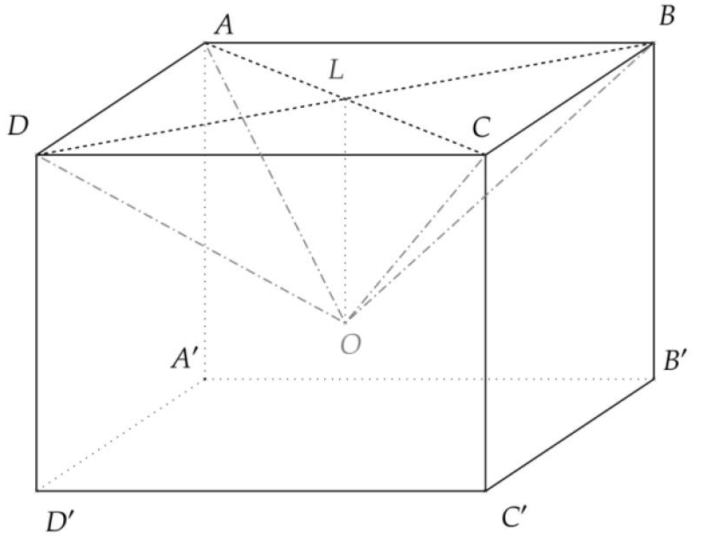
Les dimensions sont les suivantes :
AB = 960 m, BC = 1,05 km, CD = 780 m et AD = 660 m.



1) Montrer que le parcours a pour longueur 3 450 m.
2) Durant l'épreuve, Léo a réalisé, en 48 minutes, 2 tours complets et un tiers de tour du parcours.
   a) Déterminer la distance parcourue par Léo.
   b) Donner la vitesse moyenne de Léo en km/h.
   c) En gardant la même vitesse moyenne, Léo aura-t-il parcouru 15 km en moins d'une heure et demie ? Justifier.
3) Une épreuve en relais est ensuite proposée. Tara parcourt les distances AB et BC à une vitesse moyenne de 10 km/h et Kevin parcourt les distances CD et DA à une vitesse moyenne de 6 km/h. Quelle est la vitesse moyenne de ce binôme sur l'ensemble du parcours ? Justifier.
4) a) La diagonale [BD] mesure 1,05 km. Représenter le parcours à l'échelle 1/20 000.
   b) Amina a roulé à vélo pendant 25 minutes à une vitesse moyenne de 11,5 km/h.
   Placer sur la figure tracée à la question 4) a) le point S à l'endroit où se trouve Amina au bout de sa course. Justifier.

EXERCICE 3

On considère un pavé droit ABCDA'B'C'D' avec DD' = 5 cm ; DC = 6 cm et DA = 7 cm.
On note L le point d'intersection des diagonales [AC] et [BD].
On souhaite creuser ce pavé, en retirant une pyramide OABCD de hauteur [OL].



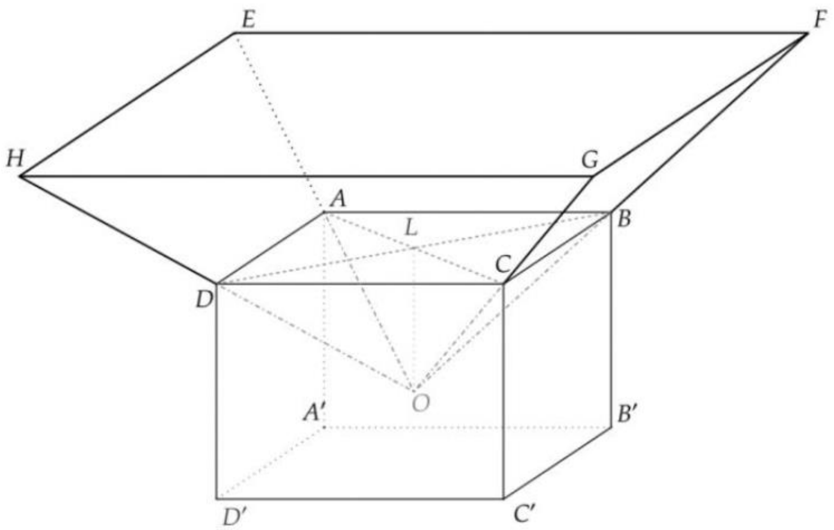
PARTIE A

Dans cette partie, on suppose que OL = 4 cm.

1) Montrer que AL ≈ 4,6 cm.
2) Construire le triangle ALO en vraie grandeur.
3) a) Calculer le volume de la pyramide OABCD. On rappelle que le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.
   b) Calculer le volume du pavé creusé.

PARTIE B

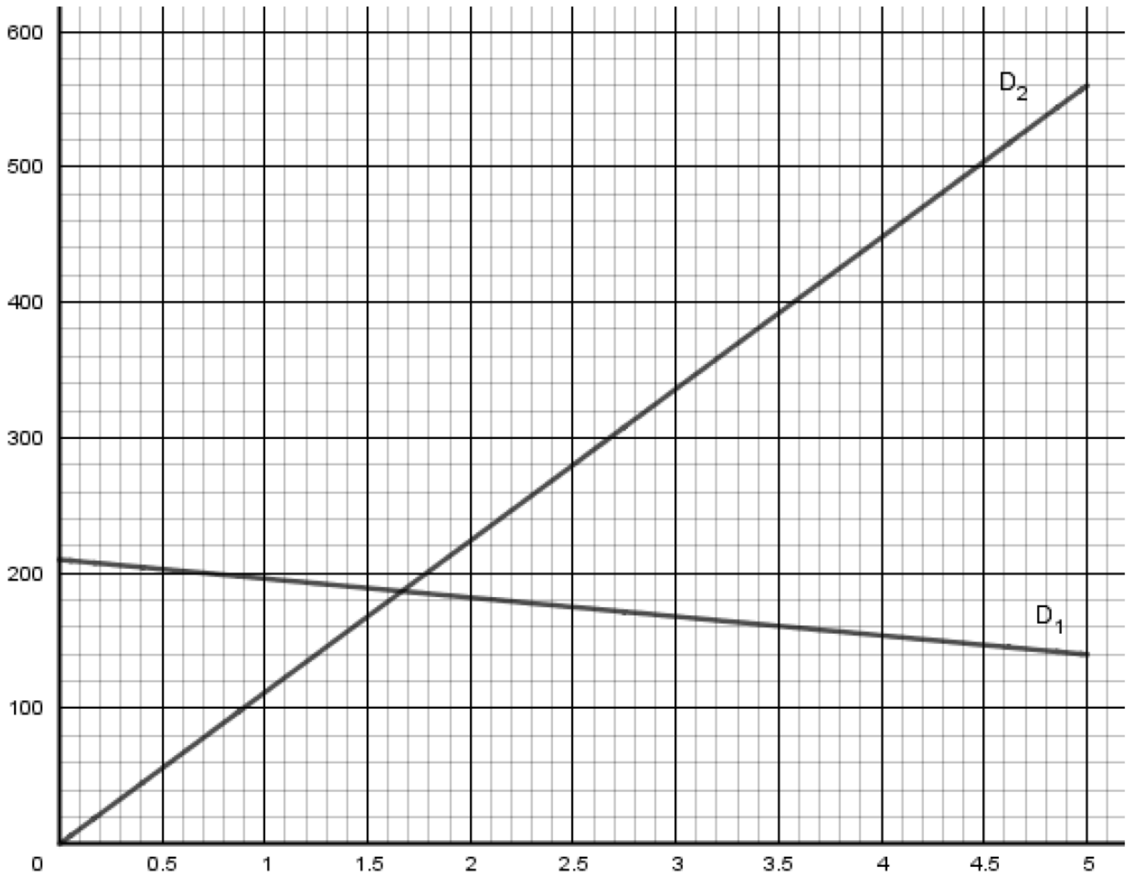
Dans cette partie, on pose OL = x, où x est un nombre compris entre 0 et 5.
Le pavé creusé que l'on obtient est le socle en bois d'un trophée.
Sur ce socle, on pose une pyramide en verre OEFGH qui est un agrandissement de la pyramide OABCD de rapport 2.



1) Exprimer le volume de la pyramide OABCD en fonction de x.
2) Montrer que le volume du socle en bois est $210 - 14x$.
3) Montrer que le volume de la pyramide en verre OEFGH est $112x$.
4) Quelle valeur choisir pour x, pour que le volume de la pyramide en verre soit égal au double du volume du socle en bois ?
5) On considère les fonctions f et g définies pour tout x compris entre 0 et 5 par :

$$f(x) = 210 - 14x \quad \text{et} \quad g(x) = 112x$$

On a représenté dans un repère orthogonal ces deux fonctions.



a) Déterminer quelle fonction (f ou g) est représentée par chacune des droites D_1 et D_2 ? Justifier.
b) Déterminer avec la précision permise par le graphique les valeurs de x pour lesquelles le volume du socle en bois est inférieur ou égal au volume de la pyramide en verre.
c) Retrouver le résultat précédent en posant puis en résolvant une inéquation.

EXERCICE 4

1) Adam a réalisé le programme ci-contre à l'aide du logiciel Scratch.

   a) Montrer que si le nombre de départ est 3, le résultat est égal à 9.

   b) Quel est le résultat donné par le programme si le nombre de départ est 2,4 ?

   c) Soit x le nombre de départ. Montrer que le programme d'Adam retourne le nombre

$$2x^2 - x - 6.$$

2) Pauline propose le programme de calcul suivant.

> *Choisis un nombre.*
> *Élève-le au carré*
> *Soustrais 3.*
> *Multiplie par 2.*
> *Soustrais le nombre de départ.*

   a) Montrer que si le nombre de départ est 3, le résultat obtenu est égal à 9.

   b) Quel est le résultat donné par le programme si le nombre de départ est $\frac{7}{3}$?

3) Montrer que, pour un même nombre de départ, les programmes de calcul d'Adam et Pauline donnent le même résultat.

4) Déterminer le ou les nombres de départ possibles pour que les résultats des programmes de calcul soient nuls. Justifier.

5) Adam souhaite automatiser les calculs de son programme pour les entiers naturels. Il utilise un tableur dont la copie d'écran est donnée ci-dessous.
Quelle formule doit-il saisir dans la case B2 pour qu'il puisse l'étirer vers le bas sur l'ensemble de la colonne ?

	A	B
1	**Nombre de départ**	**Résultat du programme**
2	1	-5
3	2	0
4	3	9
5	4	22
6	5	39

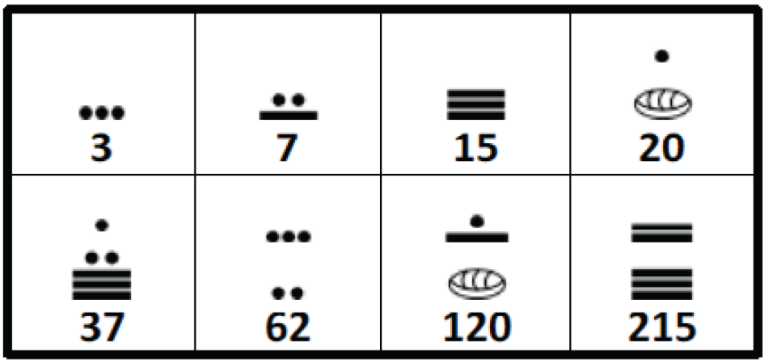
EXERCICE 5

En Amérique centrale, les Mayas utilisaient un système de numération comprenant trois signes.

Le point	•
Le trait	—
La coquille	

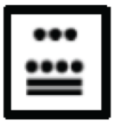
Le signe « coquille » indique l'absence de quantité.

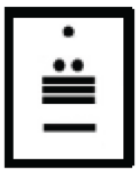
Quelques correspondances entre écriture Maya et écriture décimale sont données dans le tableau ci-dessous :



1) Donner la valeur du signe « point » et celle du signe « trait » dans l'écriture de 7 ?
2) Le système maya est un système vigésimal (système qui a pour base 20).

   Donner l'écriture maya du nombre 21.
3) Justifier l'écriture maya du nombre 37.
4) Donner l'écriture des deux nombres suivants dans notre système de numération.

   a) 

   b) 

5) a) Donner l'écriture maya du nombre 25.

   b) Donner l'écriture maya du nombre 101.

   c) Le système de numération maya est qualifié, tout comme le système de numération que nous utilisons, de système positionnel. Expliquer pourquoi.

SUJET DU GROUPEMENT 3 – avril 2022

Ce sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Donner la bonne réponse en la justifiant.
Une réponse erronée n'enlève pas de point. Une réponse non justifiée ne rapporte pas de point.

Questions :	**A**	**B**	**C**	**D**
1) Quel est le volume d'un cylindre d'une hauteur de 6 cm et de base un disque d'un diamètre de 8 cm ? On rappelle que le volume d'un cylindre se calcule avec la formule suivante : $aire\ de\ la\ base \times hauteur$	48π cm^3	96π cm^3	144π cm^3	384π cm^3
2) Le 1er juin, Nicolas lance une rumeur en la partageant avec trois personnes. Chaque jour, une personne prévenue la veille prévient trois nouvelles personnes qui ne sont pas encore informées. Combien de personnes apprennent la rumeur le 10 juin ?	30	1000	59 049	177 147
3) Le prix d'un article subit une hausse de 10 % suivie d'une baisse de 10 % quelques semaines plus tard. Au final :	le prix de l'article a baissé de 1 %.	l'article a retrouvé son prix initial.	le prix de l'article a augmenté de 1 %.	le prix de l'article a augmenté de 5 %.
4) $\frac{4}{25}$ est …	un nombre réel mais n'est pas un nombre rationnel.	un nombre rationnel mais n'est pas un nombre décimal.	un nombre décimal mais n'est pas un nombre entier.	un nombre entier.
5) Le quart de $\frac{4}{12}$ est …	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{48}$	$\frac{4}{48}$
6) $\frac{2}{3} \times 5 \ + \ 5 \times \frac{1}{3}$ est égal à …	5	$\frac{20}{9}$	$\frac{15}{15}$	$\frac{20}{90}$
7) Le triangle ABC est rectangle en B. De plus, $AB = 8$ cm et $AC = 10$ cm. L'aire du triangle ABC est …	24 cm^2	40 cm^2	48 cm^2	80 cm^2

EXERCICE 2

Célia s'entraîne à courir tous les jours de la semaine sur le même parcours.

1) Elle aimerait comparer ses résultats d'entraînement sur une semaine à ceux de sa sœur qui s'entraîne également sur le même parcours.

Résultats obtenus par Célia cette semaine :	Résultats obtenus par sa sœur cette semaine :
Lundi : 33 min et 12 secondes	Moyenne : 31 min et 13 secondes
Mardi : 32 min et 4 secondes	Médiane : 30 min
Mercredi : 40 min et 25 secondes	Étendue : 3 min
Jeudi : 27 min et 11 secondes	
Vendredi : 30 min	
Samedi : 26 min et 38 secondes	
Dimanche : 29 min et 1 secondes	

a) Comparer les durées moyennes de course.

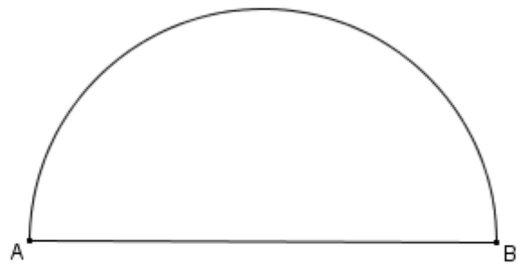
b) Comparer les durées médianes de course.

c) Avec les informations ci-dessus, Célia affirme « Je suis la seule de nous deux à avoir réussi à effectuer ce parcours en moins de 28 minutes cette semaine ». Cette affirmation est-elle vraie ?

d) Avec les informations ci-dessus, sa sœur lui répond « Moi, j'ai été la plus régulière de nous deux sur la semaine ». Expliquer ce commentaire.

2) Le parcours d'entraînement de Célia est représenté ci-contre.

Le diamètre [AB] du demi-cercle reliant le point A au point B a pour longueur 2 300 m.



a) Représenter le parcours à l'échelle $\frac{1}{20\ 000}$.

Justifier les mesures retenues pour réaliser la construction à l'échelle.

b) Montrer que la distance du parcours, arrondie à l'unité, est d'environ 5 913 m.

c) Aujourd'hui, Célia a bouclé le parcours sur une durée de 33 minutes et 36 secondes.

Quelle a été sa vitesse moyenne en km/h, arrondie au dixième près ?

d) Célia a l'habitude d'effectuer le parcours dans le sens des aiguilles d'une montre en partant du point A.

Sur la représentation de la question 2) a), placer les points L, M et N correspondants respectivement au quart, à la moitié et aux trois quarts du parcours.

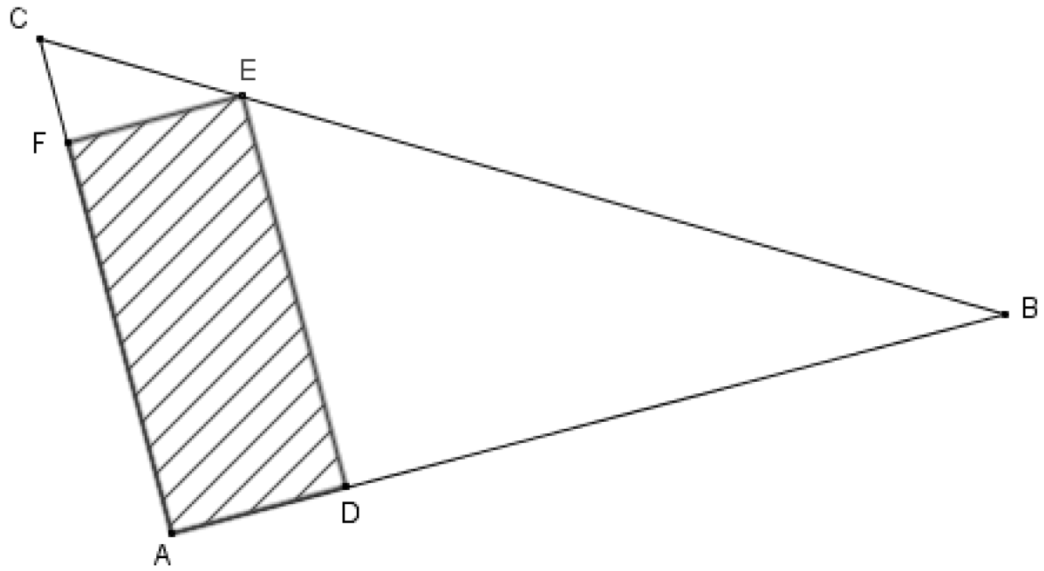
EXERCICE 3

Dans ce problème, les figures qui sont dessinées ne sont pas représentées à l'échelle.

PARTIE A : installation du potager

Une enseignante a le projet d'installer un potager rectangulaire ADEF sur une parcelle de forme triangulaire ABC dans l'enceinte de l'école.
Les points A, B, C, D, E et F sont tels que :

- $AB = 24$ m, $AC = 10$ m et $BC = 26$ m ;
- $D \in [AB]$, $E \in [BC]$ et $F \in [AC]$.



La figure ci-dessus n'est pas à l'échelle.

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

   Dans la suite de cette partie, on souhaite déterminer où positionner le point D sur [AB] pour que l'aire du rectangle hachuré ADEF soit la plus grande possible.

2) Dans cette partie on considère que $AD = 4{,}8$ m.

   a) Montrer que la longueur DE est égale 8 m.

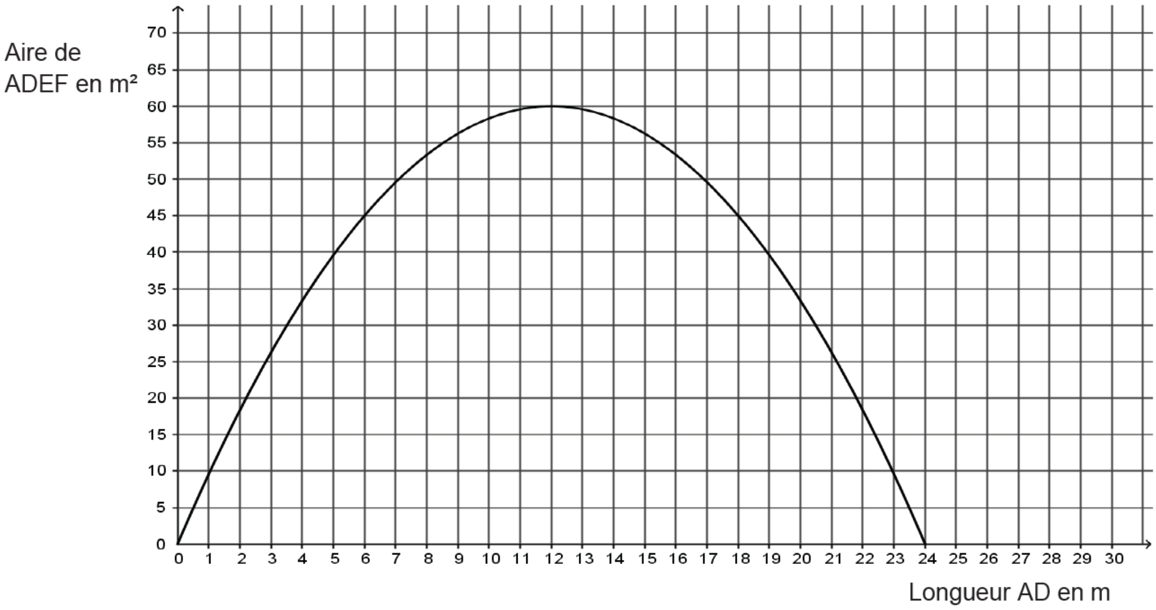
   b) En déduire l'aire du rectangle ADEF en m^2.

3) On note x la longueur, exprimée en mètre, du segment [AD].

   a) Montrer que $DE = 10 - \frac{5}{12}x$.

   b) En déduire l'aire du rectangle ADEF en fonction de x.

4) Le graphique ci-dessous représente l'aire, exprimée en mètre carré, du rectangle ADEF en fonction de la longueur x en mètre.



À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :

a) Quelle est l'aire du potager si la longueur AD vaut 5 m ?

b) Pour quelle(s) valeur(s) de la longueur AD l'aire du potager est-elle égale à 45 m^2 ?

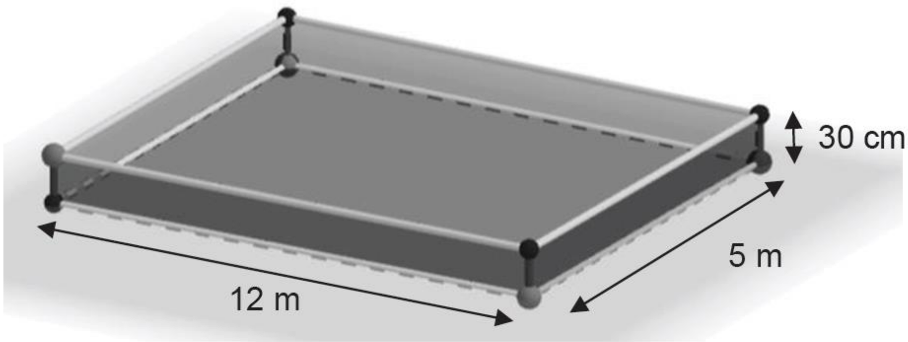
c) Pour quelle(s) valeur(s) de la longueur AD l'aire du potager est-elle supérieure ou égale à 50 m^2 ?

d) Quelle est l'aire maximale du potager ? Donner la longueur et la largeur du rectangle ADEF correspondant.

PARTIE B : choix du terreau

Dans cette partie, le jardin est assimilé à un rectangle qui a pour longueur 12 m et pour largeur 5 m. On souhaite entourer le jardin d'une bordure de 30 cm de hauteur afin de remplir le pavé droit obtenu d'un mélange de terre et de terreau. On négligera, dans cette partie, l'épaisseur de la bordure du jardin.

Le mélange est composé d'un tiers de terreau et de deux tiers de terre.



1) Montrer que le volume de terreau nécessaire pour le potager est de 6 m^3.

2) Trois magasins proposent les offres suivantes :

Magasin 1	**Magasin 2**	**Magasin 3**
Livraison : 20 €. 0,10 € le litre de terreau	Livraison offerte 2,35 € le sac de 20 litres de terreau 20 % de remise immédiate après l'achat d'une carte de fidélité au prix de 10 €	Livraison offerte pour tout achat supérieur à 50 € 5,37 € le sac de 50 litres de terreau

Quel magasin choisir pour avoir le tarif, livraison comprise, le plus économique possible pour les 6 m^3 nécessaires ?

PARTIE C : plantation des fleurs

Dans la perspective d'offrir des bouquets de fleurs pour la fête de l'école, l'enseignante souhaite planter des graines dans le potager. Dans la classe il y a 26 élèves et chaque élève reçoit 20 graines à semer.

On a reporté ci-contre ce que l'on peut lire sur le paquet de graines choisi.

On rappelle que le taux de germination d'un paquet de graines indique le pourcentage de graines qui devraient germer et donc produire une fleur.

Taux de germination des graines : 90 %

Prix du paquet de graines : 4,53 €

Ce paquet contient 50 graines.

Période de semis : d'avril à juin

Hauteur adulte : 50 cm

1) Combien de fleurs un élève peut-il espérer voir pousser ?
2) Quel sera le budget à prévoir pour l'achat des graines ?
3) En plus des graines, des bulbes de tulipes et de jonquilles sont plantés.
   a) L'enseignante en plante sur un sixième du potager puis un peu plus loin sur un huitième de ce même potager.

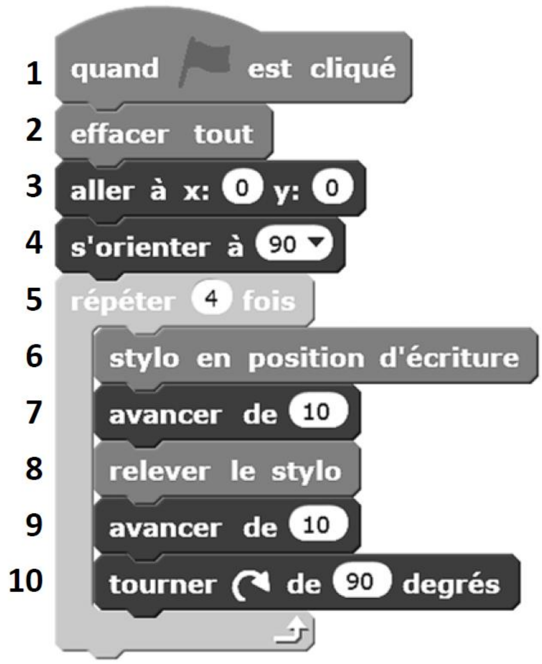
      Un élève affirme que les bulbes représentent plus de 25 % du potager. A-t-il raison ? Justifier votre réponse.
   b) Elle met dans un panier 30 bulbes de jonquilles et des bulbes de tulipes.

      La proportion de bulbes de jonquilles dans le panier est de $\frac{5}{6}$.

      Calculer le nombre de bulbes de tulipes dans ce panier.

EXERCICE 4

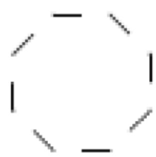
Voici un programme écrit avec le logiciel Scratch.



1) Représenter la figure obtenue lorsque le programme est exécuté. On prendra 1 mm pour 1 pixel.
2) Marie souhaite obtenir la figure ci-dessous où chaque tiret mesure 10 pixels et est séparé du précédent de 10 pixels.

   Quelle(s) modification(s) doit-elle apporter au programme ?

3) a) Léo souhaite modifier le programme donné pour que l'on obtienne la figure ci-dessous.



   Quelle(s) modification(s) doit-il apporter au programme de départ ?

   b) Quel type de transformation géométrique permet de passer d'un tiret à un autre ?

SUJET DU GROUPEMENT 4 – avril 2022

Ce sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Une enseignante construit pour ses élèves un jeu de 80 cartes, avec 20 cartes de chacune des quatre couleurs : rouge, bleu, jaune et vert. Pour chaque couleur, les cartes sont numérotées de 0 à 9 et chaque numéro apparaît sur deux cartes. L'enseignante donne une carte du jeu au hasard à Déborah.

1) Quelle est la probabilité :

   a) que la carte de Déborah soit bleue ?

   b) que la carte de Déborah porte le numéro 2 ?

   c) que la carte de Déborah soit bleue et porte le numéro 2 ?

   d) la carte de Déborah soit bleue ou porte le numéro 2 ?

2) L'enseignante décide d'ajouter des cartes *Joker* à son jeu.

   Combien doit-elle ajouter de cartes *Joker* pour que la probabilité que Déborah reçoive une carte *Joker* soit de $\frac{1}{6}$?

EXERCICE 2

PARTIE A

Une enquête réalisée dans le secteur des confitures (ensemble des produits de type confitures à base de fruits) a permis d'étudier l'évolution de l'offre entre 2009 et 2017.
Le tableau ci-dessous présente la répartition par année des différentes familles de produits.
Les effectifs indiqués correspondent au nombre de marques. Par exemple, en 2009, il y avait sur le marché 227 marques différentes proposant des produits du type « confitures, gelées ou marmelades ».

FAMILLES DE PRODUITS	2009	2017
Confitures, gelées ou marmelades	227	452
Préparations à base de fruits	12	103
Confitures, gelées ou marmelades allégées	58	121
Préparations à base de purée de fruits	29	73
Crèmes de marrons ou pruneaux	11	32
TOTAL	**337**	**781**

Source : https://www.oqali.fr/content/download/3607/34342/version/1/file/OQALI_2019_Rapport_evolution_Confitures.pdf

1) a) On sait qu'entre 2009 et 2010 le nombre de marques de la famille « Confitures, gelées ou marmelades allégées » a augmenté de 58,6 %.

   Calculer le nombre de marques dans cette catégorie en 2010 ; on arrondira à l'entier.

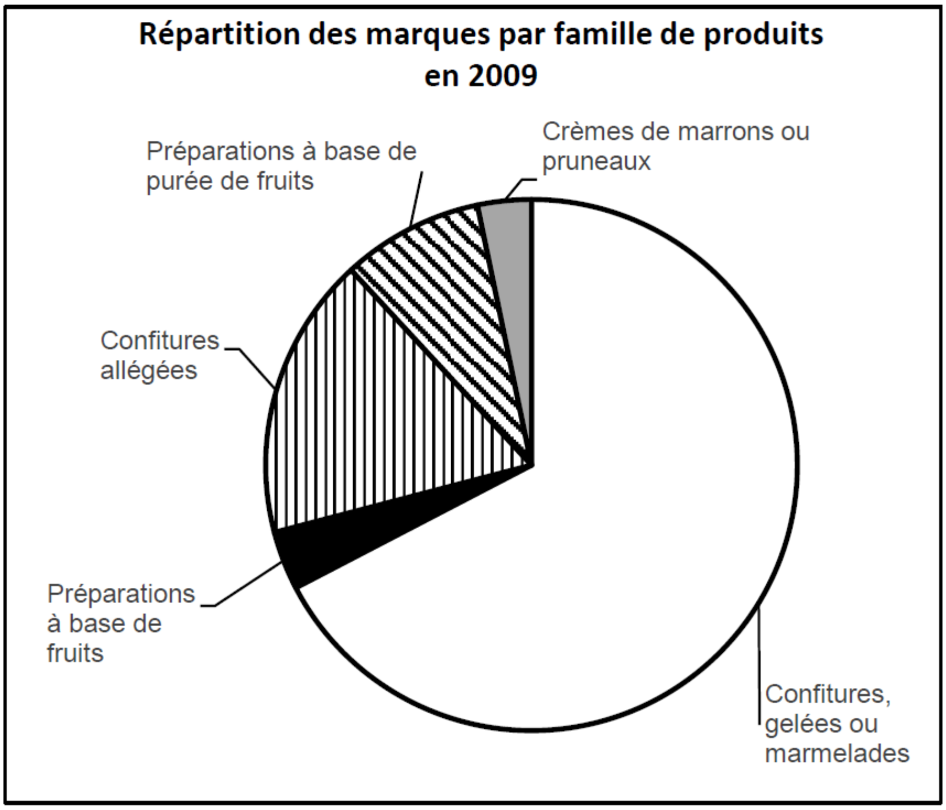
   b) On sait qu'entre 2010 et 2017 le nombre de marques de la famille « Confitures, gelées ou marmelades » a augmenté de 52,7 %.

   Quel était le nombre de marques dans cette catégorie en 2010 ? On arrondira le résultat à l'entier.

2) Calculer l'augmentation, en pourcentage, du nombre de marques des « Crèmes de marrons ou pruneaux » entre 2009 et 2017. On donnera le résultat arrondi au dixième d'unité de pourcentage.

3) Le diagramme circulaire ci-dessous représente la répartition des marques par familles de produits en 2009.

   Calculer la mesure, au degré près, de l'angle correspondant aux « Confitures, gelées ou marmelades ».



PARTIE B

Un micro-entrepreneur se lance dans la fabrication artisanale de confitures de fruits. On appelle préparation le mélange avant cuisson de fruits et de sucre ajouté. La masse des autres ingrédients pouvant intervenir dans la recette sera négligée.

1) Il souhaite choisir une recette dont la préparation a une proportion de sucre ajouté comprise entre 20 % et 30 % pour obtenir une consistance satisfaisante après cuisson.

Préparation 1 : 240 g de sucre ajouté pour 1 kg de fruits.
Préparation 2 : $\frac{3}{4}$ de fruits et $\frac{1}{4}$ de sucre ajouté.
Préparation 3 : 330 g de sucre ajouté pour 1,5 kg de préparation

   Parmi ces trois préparations, laquelle ou lesquelles peut-il choisir pour respecter son choix ? Justifier.

2) Le micro-entrepreneur choisit la préparation 2.

   a) Pour 1 kg de fruits quelle masse de sucre, arrondie au gramme, devra-t-il ajouter ?

   b) Il doit indiquer sur les étiquettes des pots de confitures : « préparé avec … g de fruits pour 100 g de produit fini », le produit fini étant la confiture après cuisson. Le micro-entrepreneur estime que 100 g de préparation donneront 83 g de produit fini.

      Que devra-t-il inscrire sur son étiquette ? Justifier. On arrondira la masse au gramme.

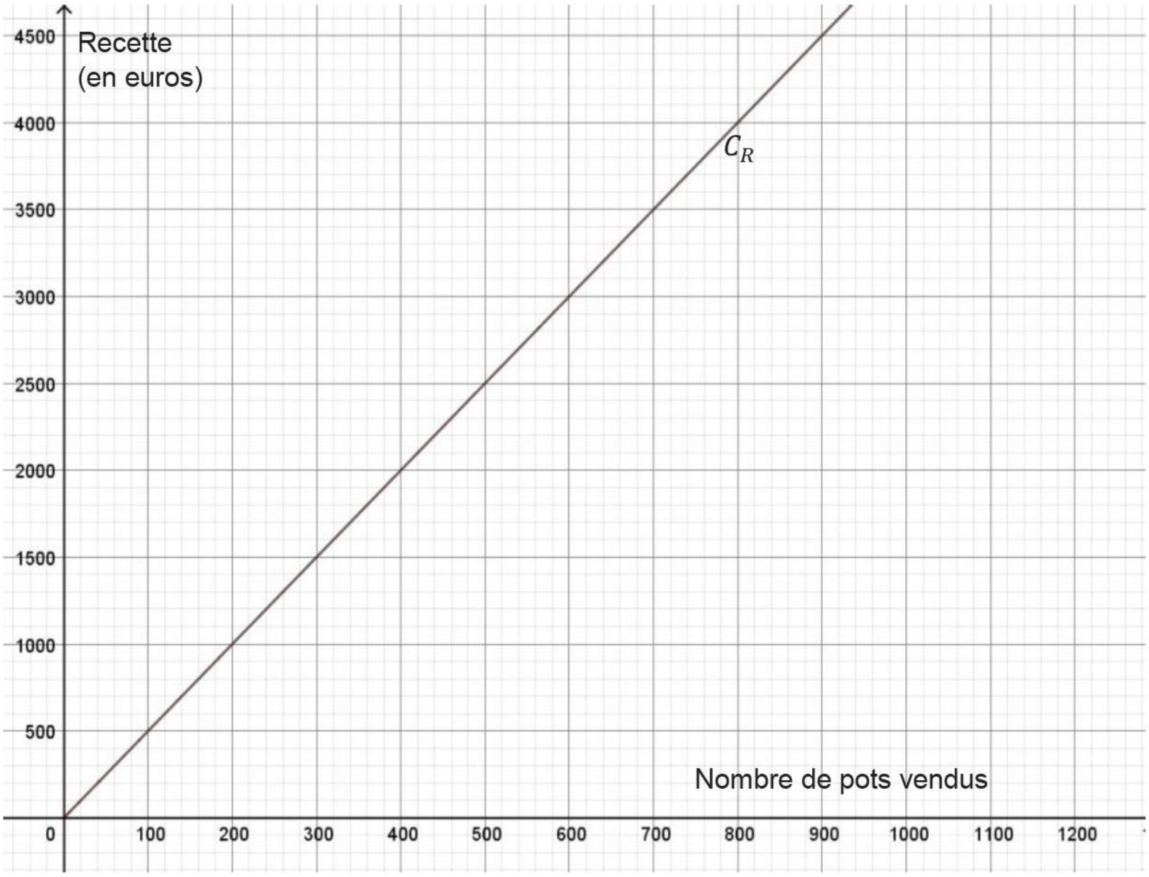
   c) Pour connaître la proportion exacte de sucre avant cuisson, il faut tenir compte aussi du sucre naturellement présent dans les fruits.

      En considérant que les fruits utilisés contiennent naturellement 10 % de sucre, montrer qu'avec la recette retenue, le pourcentage de sucre dans la préparation est égal à 32,5 %.

PARTIE C

Le micro-entrepreneur s'intéresse dans cette partie à la rentabilité de son entreprise.

1) La courbe ci-dessous est la représentation graphique C_R de la fonction R qui modélise la recette obtenue (en euros) en fonction du nombre de pots vendus.



   a) Quelle est la nature de cette fonction ? Justifier.

   b) En utilisant le graphique, estimer le prix auquel le micro-entrepreneur a décidé de vendre un pot de confiture.

2) On considère que tous les pots fabriqués sont vendus.
   Les coûts de fabrication sont estimés par le micro-entrepreneur à 3,25 € par pot de confiture, auxquels s'ajoute une charge fixe mensuelle de 500 €.
   On note x le nombre de pots vendus et $F(x)$ le coût mensuel de production (intégrant les coûts de fabrication et les charges fixes) en fonction de x.

   a) Exprimer $F(x)$ en fonction de x .

   b) Reproduire sur la copie la courbe C_R et représenter graphiquement dans le même repère la fonction F.

   c) Par lecture graphique, estimer le nombre de pots vendus à partir duquel le micro-entrepreneur dégage un bénéfice.

   d) Trouver le résultat exact par un calcul.

PARTIE D

On rappelle la formule suivante :

> Volume d'un prisme ou d'un cylindre : $V = B \times h$,
>
> où B désigne l'aire de la base du prisme ou du cylindre et h sa hauteur.

Les confitures produites sont conditionnées dans des pots. Les pots sont remplis au maximum à 90 % de leur volume.

1) Le pot n° 1 est un cylindre, de hauteur 8 cm et de diamètre 7 cm.
   a) Déterminer le volume du pot n° 1, en centimètre cube, arrondi à l'entier.
   b) Quel volume maximum de confiture, en centimètre cube, arrondi à l'entier, peut-il contenir ?
2) Le pot n° 2 est un prisme (figure A) dont la base (figure B) est un hexagone régulier de centre 0. Sa hauteur est de 8 cm et les côtés de l'hexagone régulier mesurent 4 cm.

Figure A : pot n° 2

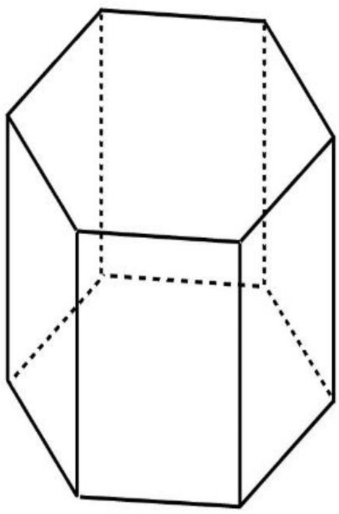
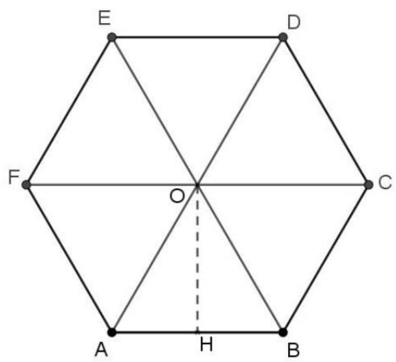


Figure B : base du pot



On admet que les six triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OFA sont des triangles équilatéraux.

On admet également que l'aire d'un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur x est $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

a) Montrer que l'aire de l'hexagone ABCDEF est égale à $24\sqrt{3}$ cm².

b) En déduire le volume du pot n° 2, en centimètre cube, arrondi à l'entier.

c) Quel volume maximum de confiture, en centimètre cube, arrondi à l'entier, peut-il contenir ?

EXERCICE 3

Le problème suivant est proposé en classe de cycle 3 :

> *Vincent achète 24 cartes à jouer pour compléter sa collection. Certaines coûtent 1,25 € pièce et d'autres le double. Sa dépense totale s'élève à 48,75 €.*
> *Combien de cartes de chaque type a-t-il achetées ?*

1) Un enseignant souhaite utiliser un tableur pour effectuer les calculs. Il propose la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E
1					
2	**Nombre de cartes à 1,25 €**	**Coût des cartes à 1,25 €**	**Nombre de cartes à 2,50 €**	**Coût des cartes à 2,50 €**	**Somme totale dépensée (€)**
3	0	0,00	24	60,00	60,00
4	1	1,25	23	57,50	58,75
5	2	2,50	22	55,00	57,50
6	3	3,75	21	52,50	56,25
7	4	5,00	20	50,00	55,00
8	5	6,25	19	47,50	53,75
9	6	7,50	18	45,00	52,50
10	7	8,75	17	42,50	51,25
11	8	10,00	16	40,00	50,00
12	9	11,25	15	37,50	48,75
13	10	12,50	14	35,00	47,50
14	11	13,75	13	32,50	46,25
15	12	15,00	12	30,00	45,00
16	13				
17	14	17,50	10	25,00	42,50
18	15	18,75	9	22,50	41,25
19	16	20,00	8	20,00	40,00
20	17	21,25	7	17,50	38,75
21	18	22,50	6	15,00	37,50
22	19	23,75	5	12,50	36,25
23	20	25,00	4	10,00	35,00
24	21	26,25	3	7,50	33,75
25	22	27,50	2	5,00	32,50
26	23	28,75	1	2,50	31,25
27	24	30,00	0	0,00	30,00

a) En observant la feuille de calcul ci-dessus, donner la solution du problème.

b) Recopier et compléter la ligne 16 de la feuille de calcul.

c) Quelles formules ont pu être écrites dans les cellules B3, C3, D3 et E3, pour être ensuite recopiées dans les autres lignes ?

2) Une élève de CM2 propose la résolution suivante :

$$24 \times 2{,}50\text{ €} = 60\text{ €}$$
$$60\text{ €} - 48{,}75\text{ €} = 11{,}25\text{ €}$$
1 carte à 2,50 € = 2 cartes à 1,25 €
$$1125 \div 125 = 9$$
$$24 - 9 = 15$$
Vincent achète donc 9 cartes à 1,25 € et 15 cartes à 2,50 €.

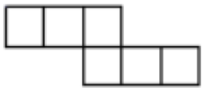
Expliquer le raisonnement de cette élève.

3) Répondre au problème en résolvant un système de deux équations à deux inconnues, en notant x le nombre de cartes à 1,25 euros et y le nombre de cartes à 2,50 euros.

EXERCICE 4

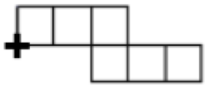
Une enseignante travaille la notion de patron de solides avec ses élèves. Elle souhaite leur faire construire des dés cubiques, de 3 cm de côté.

1) Un élève propose d'utiliser ce patron du cube :

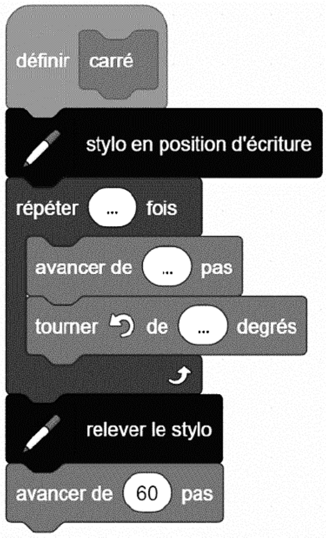


À l'aide du logiciel *Scratch*, on souhaite écrire un algorithme permettant de construire ce patron. Le Lutin est initialement orienté vers la droite et 1 pas de *Lutin* mesurera 0,05 cm.

a) Recopier et compléter, avec les trois nombres manquants, le bloc « carré » ci-contre, permettant de construire le premier carré de gauche, en partant du sommet inférieur gauche.

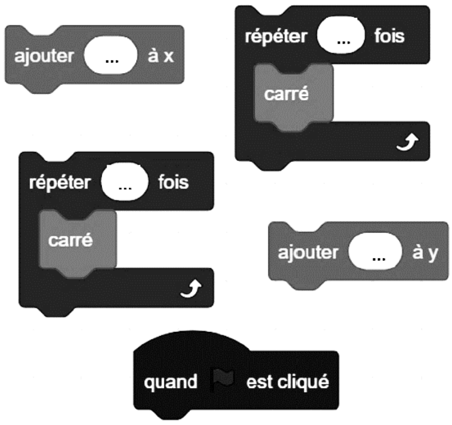


Position initiale du lutin

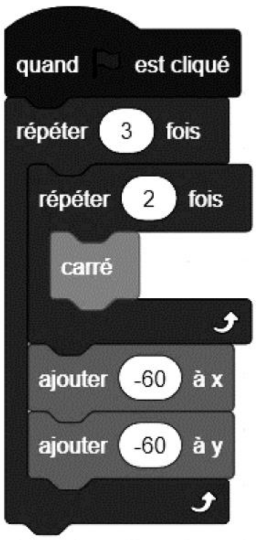


b) Reproduire le patron et indiquer la position du stylo, à la fin de ce bloc « carré ».

c) Le bloc « carré » étant défini, ordonner, recopier et compléter les instructions ci-dessous pour que l'algorithme permette de construire ce patron de cube.



2) L'algorithme ci-contre permet de représenter un nouveau patron de cube. Dessiner ce patron à main levée.



LES ÉNONCÉS DES EXERCICES DE MATHÉMATIQUES

exercices complémentaires

EXERCICES ISSUS D'ÉPREUVES PROPOSÉES DANS LES INSPÉ

EXERCICE SUR MULTIPLES ET DIVISEURS, d'après un sujet de l'INSPÉ du Mans

1) Les enseignants d'une école rurale qui accueille au maximum cent élèves organisent, pour Noël, un Escape Game par équipes.
   Chaque équipe est constituée d'au moins deux élèves. Les enseignants souhaitent qu'il y ait le même nombre d'élèves dans chaque équipe mais, quand ils regroupent les élèves par trois, il en reste deux. Quand ils les regroupent par quatre, il en reste un, et quand ils les regroupent par cinq, il en reste deux. Finalement, ils réussissent à former leurs équipes, toutes avec le même nombre d'élèves.
   a) Combien d'élèves y a-t-il dans cette école ?
   b) Combien d'équipes sont-elles ainsi formées ?
2) Dans l'école, il y a un gigantesque baril de polydrons contenant 4 862 carrés, 3 553 triangles équilatéraux et 2 717 pentagones réguliers que l'équipe enseignante compte bien utiliser pour concevoir l'une des épreuves de l'Escape Game.

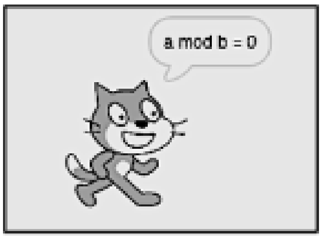
L'épreuve consiste à faire fabriquer aux élèves, à l'aide de ces polydrons, des cubes, des tétraèdres et des prismes droits à base pentagonale.
L'enseignante de la classe de CM2 charge ses élèves de remplir des boîtes avec la consigne suivante :
- les boîtes doivent être toutes identiques ;
- tous les carrés, les triangles et les pentagones doivent être utilisés.

   a) Combien les CM2 vont-ils pouvoir former de boîtes au maximum ?
   b) De combien de polydrons de chaque sorte seront composées les boîtes ?
   c) Combien pourra-t-on fabriquer au maximum de prismes droits à base pentagonale avec le contenu d'une boîte ?

EXERCICE SUR SCRATCH, d'après un sujet de l'INSPÉ de Bordeaux

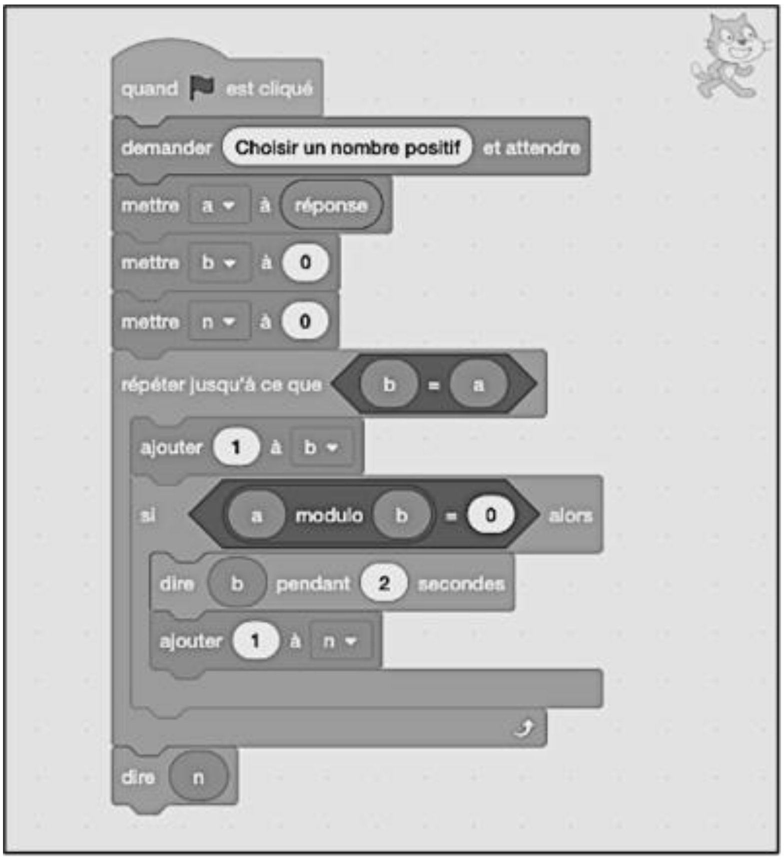
L'opérateur 

du logiciel Scratch renvoie le reste de la division euclidienne du premier nombre (dividende) par le deuxième nombre (diviseur).



1) On s'intéresse à deux nombres entiers a et b (avec $0 \leq b < a$).
   Quelle propriété vérifient a et b si l'opérateur a module b renvoie 0 ?

2) On fait exécuter le programme suivant dans le logiciel Scratch :



a) Le premier nombre choisi est 6.
Compléter le tableau suivant qui donne les valeurs successives prises par les variables a, b et n, ainsi que les valeurs « dites » pendant 2 secondes au cours de l'exécution du programme.

Valeurs initiales	6	0		0	
	Valeurs de a	Valeurs de b	Test a modulo b = 0	Valeurs de n	Valeur « dite » pendant 2 secondes
Étape 1	6	1	OUI	1	1
Étape 2					
Étape 3					
Étape 4					
Étape 5					
Étape 6					

b) On saisit maintenant le nombre 48 dans le programme. Quelles sont les valeurs « dites » pendant 2 secondes ? Que représentent-elles pour le nombre entré ? Quelle est la valeur de n affichée à la fin ? Que représente-t-elle ?

3) Quel est le plus petit nombre à saisir au début de façon à ce que la valeur de n affichée à la fin soit 5 ?

EXERCICE SUR LES FRACTIONS, d'après un sujet de l'INSPÉ de Bordeaux

Les questions portent sur l'énoncé de problème ci-dessous :

> *François a consommé les trois quarts de son forfait téléphonique pendant les deux premières semaines.*
> *Durant la deuxième partie du mois, il a consommé les deux tiers du reste.*
> *À la fin du mois, il lui reste encore 10 minutes non utilisées.*
> *De quelle durée de communication téléphonique François disposait-il au début du mois ?*

1) Résoudre le problème en mettant en œuvre une procédure algébrique.
2) Résoudre le problème en ayant recours à une procédure arithmétique. On pourra s'appuyer sur une schématisation de la situation.

EXERCICE VRAI-FAUX, d'après un sujet de l'INSPÉ de Bordeaux

Vrai, Faux ? Justifier

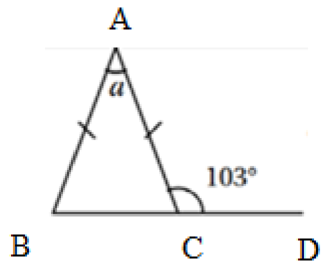
Affirmation 1
Si un nombre est divisible par 6 et 8, alors il est divisible par 48.

Affirmation 2
Le carré d'un nombre réel positif est toujours supérieur ou égal à ce nombre.

Affirmation 3
Sur une carte à l'échelle 1/1000, si un terrain a une aire de 60 cm^2 alors dans la réalité, ce terrain a une superficie de 600 m^2.

Affirmation 4
Un quadrilatère ayant trois côtés de même longueur et des diagonales qui se coupent en leur milieu est un losange.

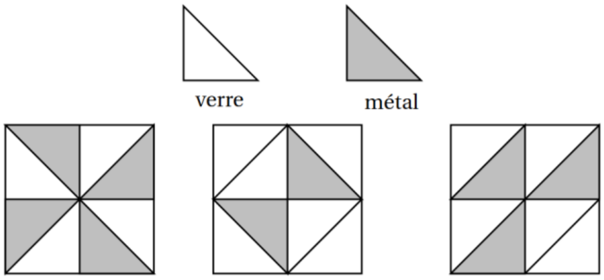
Affirmation 5
Si dans la figure ci-dessous les points B, C, D sont alignés, alors l'angle a vaut 36°.



EXERCICE SUR TRANSFORMATIONS, PROBABILITÉ, RÉSOLUTION DE PROBLÈME, d'après un sujet de Paris

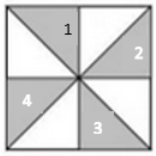
Un père d'élève tient une boutique dans laquelle il fabrique des bijoux à l'aide de triangles qui sont tous égaux. Certains triangles sont en verre transparent et les autres en métal.

Trois exemples de bijoux sont donnés ci-dessous. Les triangles en verre sont représentés en blanc et ceux en métal sont représentés en gris. Une enseignante s'inspire de ces bijoux pour les faire reproduire à ses élèves sur du papier cartonné.



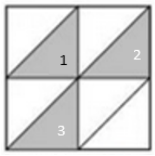
Bijou n° 1 Bijou n° 2 Bijou n° 3

1) **Sur l'annexe,** tracer les axes de symétrie, s'ils existent, de chaque bijou représenté. Il sera tenu compte de la couleur des motifs dans la recherche des axes de symétrie.
2) On considère les bijoux n°1 et n°3 dont on a numéroté les triangles en métal comme indiqué sur chacune des figures ci-dessous.



Bijou n°1

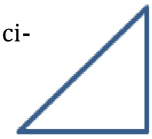
a) Sur le bijou 1, quelle transformation permet d'obtenir le triangle 2 à partir du triangle 1 ?
b) Sur le bijou 1, quelle transformation permet d'obtenir le triangle 3 à partir du triangle 1 ?
c) Sur le bijou 1, quelle transformation permet d'obtenir le triangle 4 à partir du triangle 1 ?



Bijou n°3

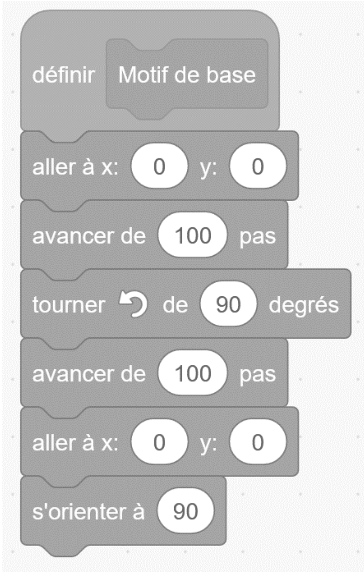
d) Sur le bijou 3, quelle transformation permet d'obtenir le triangle 2 à partir du triangle 1 ?

3) On utilise le logiciel scratch pour créer des figures à partir du motif de base représenté ci-contre, obtenu à l'aide du bloc d'instructions « motif de base » donné ci-après.



Tracer la figure obtenue à l'écran quand on clique sur le drapeau vert pour exécuter le programme ci-après. Sur votre figure, 50 pixels seront représentés par 1cm.

On rappelle la convention utilisée dans le logiciel scratch : « s'orienter à 90 » signifie que l'on oriente le lutin vers la droite de l'écran.



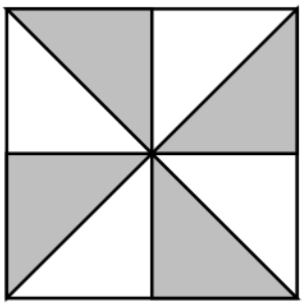
4) Pour reproduire le bijou n°2, l'enseignante demande à ses élèves de colorier les triangles qui correspondent aux triangles en métal sur le modèle. Les couleurs possibles sont Vert et Jaune et sont déterminées par un tirage aléatoire, à l'aide de jetons qui indiquent les couleurs à utiliser.

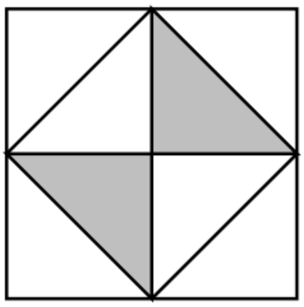
   Pour cela, l'enseignante met dans un sac opaque quatre jetons indiscernables au toucher, dont trois de couleur verte et un de couleur jaune. Elle demande successivement à deux élèves de venir piocher un jeton en fermant les yeux, de noter sa couleur puis de le remettre dans le sac.

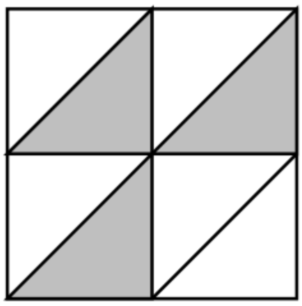
   Quelle est la probabilité que le bijou obtenu soit unicolore ?

5) Quand le père d'élève commande les triangles pour confectionner ses bijoux, tous les triangles en métal ont le même prix et tous les triangles en verre ont le même prix. Le bijou n°1 revient à 11 € et le bijou n°2 revient à 9,10 €. Quel est le coût du bijou n°3 ?

ANNEXE


Bijou nº 1


Bijou nº 2


Bijou nº 3

EXERCICE ISSU D'UN SUJET DE L'INSPÉ DE BOURGOGNE

De nombreuses portes d'hôtels particuliers de Bourgogne présentent dans leur partie inférieure un motif géométrique spécifique, constitué de quatre quadrilatères identiques insérés dans un cadre incomplet (cf. les trois illustrations ci-dessous).

19, rue du lycée Amyot, Auxerre

15, rue de la Préfecture, Dijon

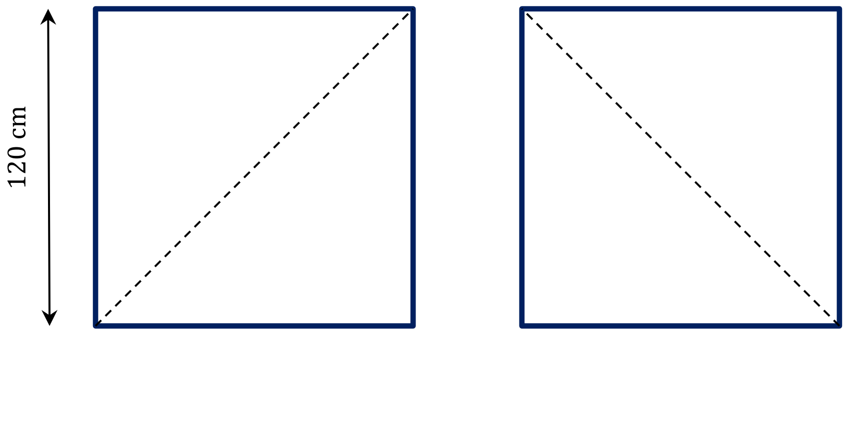
8, rue du 14 juillet, Nevers

Nous nous intéressons dans cette partie au motif de la porte du 15, rue de la Préfecture à Dijon, pour laquelle le menuisier semble avoir tenu à respecter des contraintes particulières : motifs centraux carrés et condition d'égalité sur les aires, que nous allons détailler à la partie I.

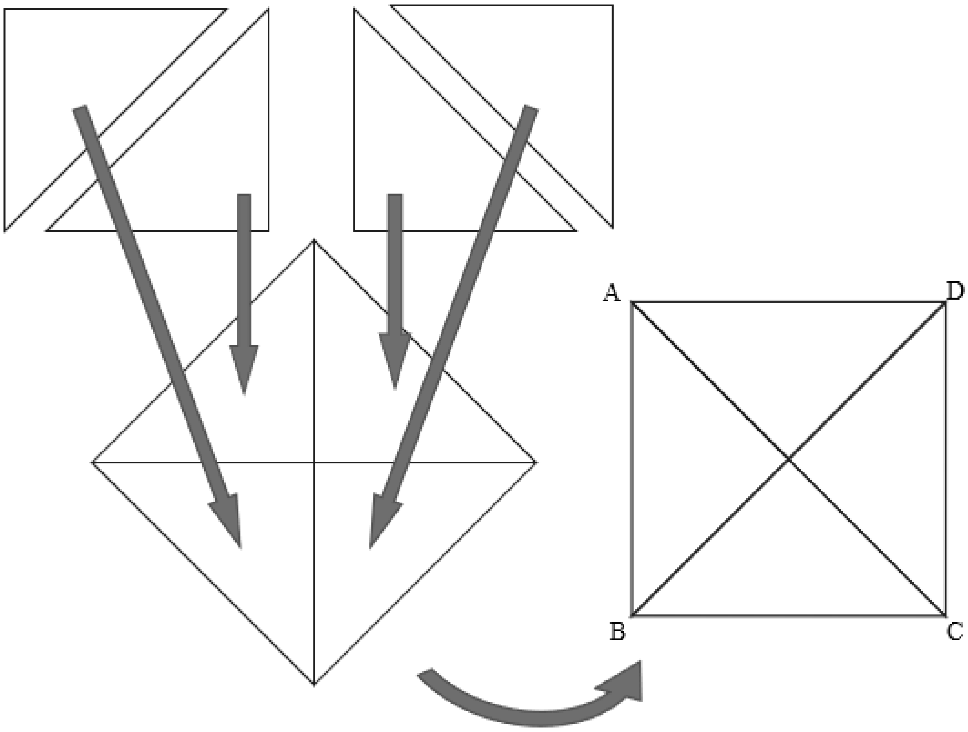
I LE TRAVAIL DU MENUISIER

Pour créer ces motifs, voici comment s'y prend le menuisier en fonction des contraintes de son époque.

Dans une planche de noyer, il découpe deux supports carrés de côté 120 cm, qu'il découpe chacun en deux parties superposables suivant une de ses diagonales.



Il réassemble ensuite les quatre parties obtenues de manière à obtenir un grand support carré ABCD.

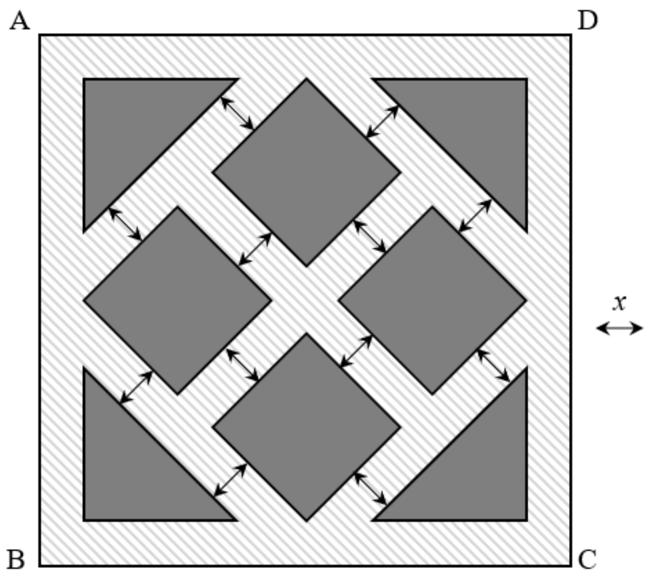


1) Montrez que le support ABCD obtenu est bien un carré, dont vous donnerez la mesure exacte, exprimée en centimètres, de la longueur du côté [AB], puis sa mesure approchée au cm près.

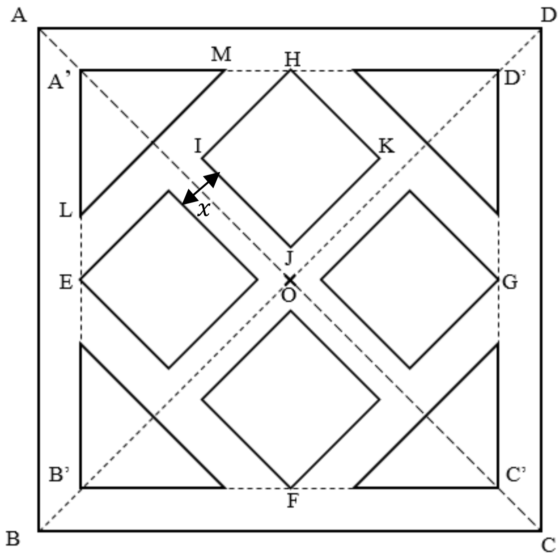
Sur ce support initial, le menuisier fixe huit autres pièces afin d'obtenir le motif désiré : quatre carrés identiques et quatre triangles rectangles isocèles identiques ; pour des raisons esthétiques, l'espacement entre ces pièces (dont la mesure en centimètre est notée x sur la figure) doit être le même partout.

Le but du menuisier est de créer un bas de porte dans lequel l'aire des pièces grises est égale à l'aire restante (hachurée sur la figure).

2) Montrez que chacune de ces aires doit être égale exactement à 14 400 cm².



II ÉTUDE DE LA CONFIGURATION



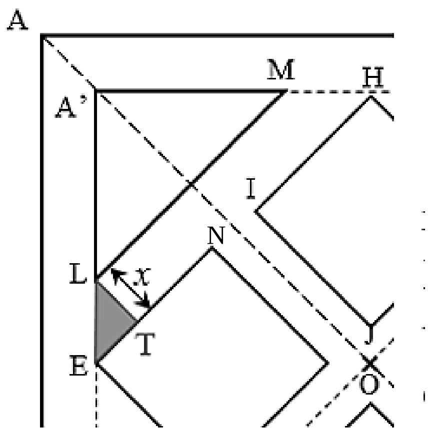
Sur ce modèle géométrique du bas de porte :

- O est le centre du carré ABCD ;
- les points A', B', C' et D' sont tous situés à 100 cm de O ;
- les points E, F, G et H sont les milieux respectifs de [A'B'], [B'C'], [C'D'] et [D'A'] ;
- les carrés centraux sont tous identiques à HIJK et les triangles rectangles isocèles tous superposables au triangle A'ML.

1) Démontrez que le quadrilatère A'B'C'D' est un carré. Donnez la mesure exacte, exprimée en centimètre de la longueur A'D'.

2) On note x la distance séparant deux carrés centraux consécutifs.
   a) Montrez que la longueur EH est égale à 100 cm.
   b) En déduire l'expression de IH, en fonction de x.
   c) Exprimez alors l'aire totale des quatre carrés centraux en fonction de x.

3) On peut également assembler les quatre triangles rectangles isocèles pour obtenir un autre grand carré, dont le côté est LM (assemblage similaire à celui du menuisier présenté au I).



   a) En considérant le triangle A'LM, montrez que l'on a : $\text{LM} = \text{A'L} \times \sqrt{2}$.

b) On considère le point T, tel que T soit un point du segment [EN] et l'angle $\widehat{LTE}$ soit droit (voir la figure ci-dessus). Exprimez LE en fonction de x puis en déduire l'égalité :

$$A'L = (50 - x)\sqrt{2}\text{ cm}$$

c) Exprimez l'aire totale des quatre triangles en fonction de x.

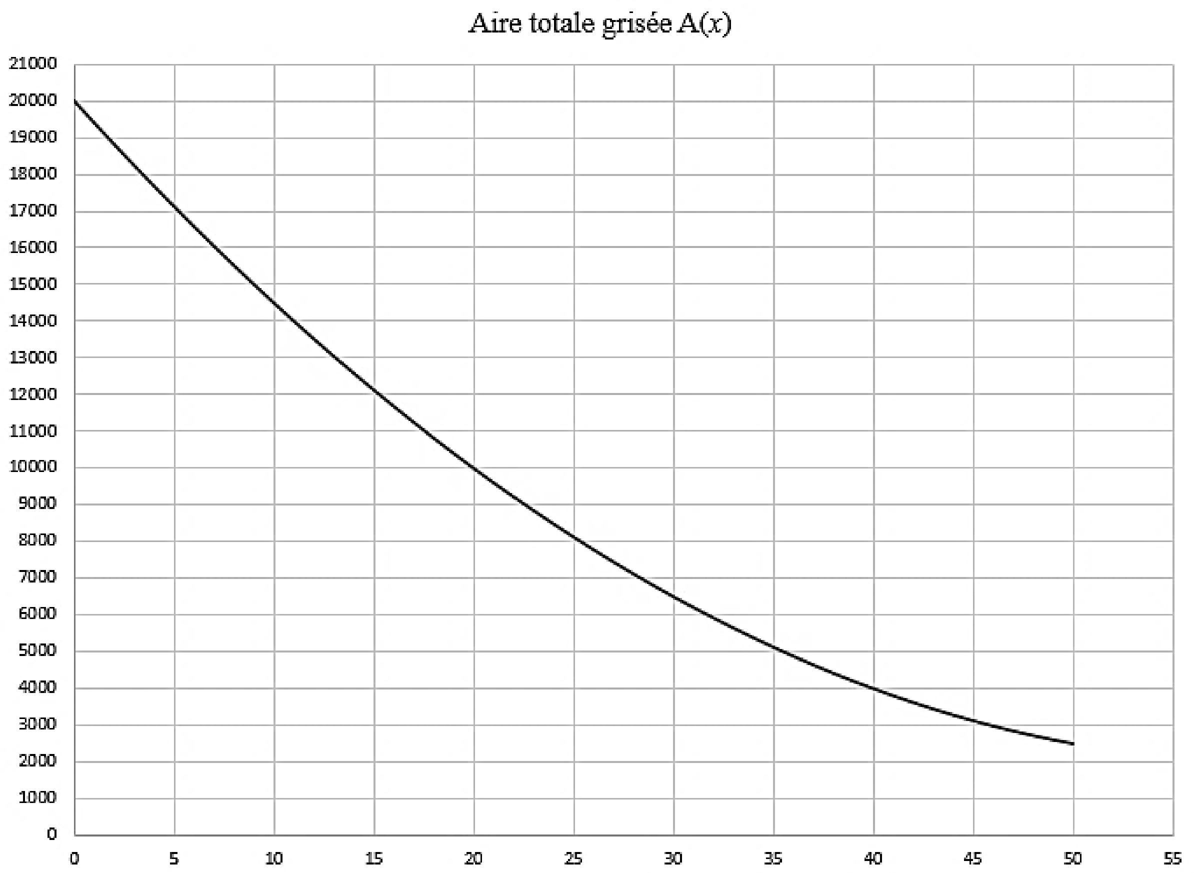
III RÉSOLUTION APPROCHÉE DU PROBLÈME

Dans toute la suite, on admettra que la mesure, exprimée en cm^2, de l'aire grisée est donnée par la fonction A dont l'expression est, pour tout x positif :

$$A(x) = (100 - x)^2 + (100 - 2x)^2.$$

1) En développant l'expression ci-dessus, montrez que l'on a : $A(x) = 5x^2 - 600x + 20\,000$.

2) Dans un tableur, on a calculé certaines valeurs de $A(x)$ et tracé une représentation graphique de la fonction A :



Répondez aux questions suivantes par lecture du graphique.

a) L'aire grisée est-elle proportionnelle à la longueur LT ? Justifiez votre réponse.

b) Quelle est la mesure en cm^2 de l'aire grisée si l'écartement entre les pièces est nul ?

c) Quelle est la valeur de x recherchée, c'est-à-dire celle pour laquelle l'aire grisée est 14 400 cm^2 ? Vous donnerez une valeur arrondie à l'entier le plus proche.

3) Le résultat des calculs du tableur est donné ci-contre pour les valeurs de x comprises entre 10 et 11 avec un incrément de 0,1.

   a) Quelle formule a pu être saisie dans la cellule B2 et recopiée vers le bas pour obtenir ces résultats ?

   b) À la lecture de cet extrait de la feuille de calcul, proposer une valeur pour x, arrondie au dixième près, répondant au problème rappelé à la question 2)c) ?

   c) La valeur exacte est-elle supérieure ou inférieure à cette valeur approchée ? Pourquoi ?

	A	B
1	x	A(x)
2	10	14500
3	10,1	14450,05
4	10,2	14400,2
5	10,3	14350,45
6	10,4	14300,8
7	10,5	14251,25
8	10,6	14201,8
9	10,7	14152,45
10	10,8	14103,2
11	10,9	14054,05
12	11	14005

IV RÉSOLUTION DU PROBLÈME

On rappelle le problème posé initialement : trouver la valeur de x pour laquelle l'aire des pièces grises est égale à l'aire hachurée sur le schéma en fin de partie I.

1) Montrez que le problème posé se traduit par l'équation (E) : $5x^2 - 600x + 5600 = 0$.

2) Un ordinateur équipé d'un logiciel de calcul algébrique donne deux solutions à cette équation :

$$x_1 = 60 - 4\sqrt{155} \qquad \text{et} \qquad x_2 = 60 + 4\sqrt{155}.$$

   a) Pourquoi faut-il écarter la solution x_2 ?

   b) En développant l'expression du carré de x_1 à l'aide d'une identité remarquable, montrez que l'on a :

$$x_1^2 = 6080 - 480\sqrt{155}.$$

   c) En déduire que x_1 est bien une solution de l'équation (E).

   d) Ce résultat est-il cohérent avec ce qui avait été trouvé aux questions III 2) *c)* et III 3) c) ?

QUELQUES PROPOSITIONS DE SUJETS POUR PRÉPARER L'ÉPREUVE ORALE

PRÉPARATION DE L'ÉPREUVE ORALE DE MATHÉMATIQUES

INTRODUCTION

Textes de cadrage

Depuis la session 2022, une des épreuves d'admission au CRPE est une épreuve orale de présentation d'une « leçon » en mathématiques. C'est l'arrêté du 25 janvier 2021 qui fixe les modalités d'organisation de cette épreuve. Cet arrêté est complété par une note de commentaires du 21 octobre 2021, publiée sur le site du ministère, apportant des précisions dont nous rappelons le contenu ci-dessous.

Arrêté du Journal officiel	Note de commentaires
Organisation de l'épreuve de leçon	
L'épreuve porte successivement sur le français et les mathématiques. Durée de préparation : deux heures ; durée de l'épreuve : une heure (français : trente minutes, l'exposé de dix à quinze minutes est suivi d'un entretien avec le jury pour la durée restante impartie à cette première partie ; **mathématiques : trente minutes, l'exposé de dix à quinze minutes est suivi d'un entretien avec le jury pour la durée restante impartie à cette seconde partie**).	
Nature et objectifs de l'épreuve	
Elle a pour objet **la conception et l'animation d'une séance d'enseignement à l'école primaire** dans chacune de ces matières, permettant d'apprécier **la maîtrise disciplinaire et la maîtrise des compétences pédagogiques du candidat**.	À la suite des épreuves écrites de français et de mathématiques dont l'objectif est l'évaluation des connaissances et compétences disciplinaires, **la leçon a pour ambition d'évaluer les compétences didactiques et pédagogiques des candidats**. La leçon n'est donc pas un exposé disciplinaire, mais **une épreuve pratique s'appuyant sur les connaissances didactiques et pédagogiques du candidat.**
Déroulement	
Le candidat **présente successivement au jury les composantes pédagogiques et didactiques de chaque leçon et de son déroulement**. Chaque exposé est **suivi d'un entretien avec le jury** lui permettant de faire préciser ou d'approfondir les points qu'il juge utiles, tant sur les connaissances disciplinaires que didactiques.	
Le sujet	
Le jury soumet au candidat deux sujets de leçon, l'un dans l'un des domaines de l'enseignement du français, l'autre dans celui des mathématiques**, chacun explicitement situé dans l'année scolaire et dans le cursus de l'élève.**	Elle porte sur un sujet fourni par le jury pour un niveau scolaire donné. Le sujet précise **le niveau ou les niveaux de classes visés et indique la période de l'année à laquelle se situe la séance à construire**. Par exemple, il peut s'agir d'une classe CP en période 1 ou d'un cours double CM1-CM2 en période 3. Le sujet est **explicitement articulé au programme.** En mathématiques, le sujet porte sur l'un des trois cycles de l'école primaire. Par exemple :

<table>
<tr><td></td><td>• enseigner les décompositions et recompositions en petite section (dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas cinq)
• enseigner les tables de multiplication de 6 à 9 au CE2
• enseigner la résolution de problèmes en deux étapes au CM1.
Le sujet précise la séquence dans laquelle se situe la séance que doit présenter le candidat, ainsi que le positionnement de la séance dans cette séquence.
Par exemple, il peut s'agir de la séance d'introduction d'une nouvelle notion, ou d'une séance de remédiation à la suite d'une évaluation intermédiaire (dans ce cas des productions d'élèves pourront être fournies), ou encore d'une séance située en fin de séquence en amont d'une évaluation.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Le dossier fourni</th></tr>
<tr><td>Afin de construire le déroulé de ces séances d'enseignement, le candidat dispose en appui de chaque sujet d'un dossier fourni par le jury et comportant au plus quatre documents de nature variée : supports pédagogiques, extraits de manuels scolaires, traces écrites d'élèves, extraits des programmes…</td><td>Le dossier ne saurait excéder 2 ou 3 pages A4, compte tenu du temps de préparation imparti et de la durée de l'épreuve.
Si cela est jugé utile par les concepteurs, le dossier fournit un extrait du programme ou d'autres documents institutionnels tels que les Attendus de fin d'année ou les Repères annuels de progression.
Le dossier intègre des éléments variés jugés utiles. Il peut s'agir d'extraits de documents ressources institutionnels, d'extraits de manuels, d'albums ou de livres de littérature, de documents produits par un enseignant, de travaux d'élèves, etc.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Evaluation et attendus</th></tr>
<tr><td>Coefficient 4.
L'épreuve est notée sur 20. La note 0 est éliminatoire</td><td>Le candidat indique clairement ses objectifs d'enseignement.
Le candidat expose, face au jury, le déroulement de sa séance ainsi que ses choix pédagogiques, justifiés par sa réflexion didactique. Il s'agit d'un exposé et non de la simulation d'une situation de classe. Le candidat intègre l'activité des élèves à sa présentation de séance.
Le candidat s'appuie sur l'extrait du programme qui lui a été éventuellement fourni. Si les grandes lignes des programmes doivent lui être familières, il n'en est en effet pas exigé une connaissance précise.
Le candidat exploite le dossier. Il peut, s'il l'estime nécessaire, faire appel à des documents extérieurs au dossier dont il aurait connaissance. Il explicite, lors de l'entretien, les motifs qui l'ont amené à minorer éventuellement un document fourni par le dossier. Le candidat est évalué sur sa capacité à construire une réflexion d'ordre didactique et pédagogique et à la justifier ou à la faire évoluer lors de l'entretien.</td></tr>
</table>

Bilan de la session 2022

La session 2022 était la première mise en œuvre de cette épreuve. La COPIRELEM a collecté des retours de candidats dans les académies sur les intitulés des sujets, les documents fournis et les questions posées par les jurys. Une synthèse de ces témoignages sera diffusée sur le site www.copirelem.fr en fin d'année 2022.

Nos propositions pour ces annales

Dans la suite, nous faisons une proposition de quatre sujets, illustrant la variété des domaines des mathématiques pouvant être abordés dans cette épreuve :

- un sujet sur l'apprentissage des premiers nombres à l'école maternelle ;
- un sujet sur les grandeurs et mesures (longueurs) au cycle 2 ;
- un sujet sur la géométrie (symétrie) au cycle 2 ;
- un sujet sur le calcul (division posée) au cycle 3.

Pour présenter des éléments de réponse, nous avons adopté la structure générale ci-après qui va volontairement au-delà de ce que le jury pourrait attendre lors de l'exposé oral. L'ensemble des éléments proposés peut contribuer à la formation des candidats, en particulier en les aidant à construire une réflexion didactique, et à la bonne préparation à cette épreuve.

1) Les incontournables didactiques sur le thème
Explicitation des savoirs disciplinaires et didactiques attendus d'un futur professeur des écoles sur le thème correspondant au sujet traité.

2) Analyse des documents du sujet
Résolution de l'exercice, analyse des travaux d'élèves, etc.

3) Proposition(s) d'éléments de contenu pour l'exposé devant le jury [en intégrant des éléments dégagés dans les paragraphes 1 et 2]
   a. Enjeux d'apprentissage, objectifs
   b. Déroulement : différentes phases – organisation spatiale – matériel
   c. Verbalisation : de la consigne à l'institutionnalisation
   d. Éléments de différenciation et d'aide envisagés

4) Questions possibles pendant l'entretien
Les réponses ne sont pas systématiquement explicitées, notamment lorsqu'elles figurent déjà dans ce qui a été écrit dans les parties précédentes.
Des éléments de réponse sont proposés lorsque cela complète les éléments déjà présentés.

CONSTRUCTION DU NOMBRE EN MATERNELLE

Domaine

Acquérir les premiers outils mathématiques : découvrir les nombres et leurs utilisations.

Niveau

PS

Période de l'année

Période 3 ; au cours des périodes précédentes, les élèves ont travaillé à partir d'activités permettant d'appréhender la notion de collection, et ont commencé à comparer des collections du point de vue des quantités, dans le cas de collections avec des quantités très différentes (« beaucoup », « pas beaucoup »).

Connaissance ou compétence visée

Évaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures non numériques ou numériques.

Consigne pour le candidat

Vous êtes enseignant(e) en Petite Section, et vous souhaitez mettre en œuvre une séquence destinée à développer chez les élèves la compétence indiquée ci-dessus, afin de stabiliser la connaissance des petits nombres et de faire apparaitre le nombre comme mémoire de la quantité.
Un travail préalable portant sur la notion de quantité, en lien avec la correspondance terme à terme, a été effectué au cours des périodes précédentes. Il a été construit en suivant notamment les indications fournies en **annexe 1**. Les nombres un, deux et trois ont ensuite été introduits et mobilisés lors d'activités ritualisées.

Vous présenterez la première séance de cette séquence. Pour organiser cette séance, vous pourrez prendre appui, sans vous y limiter, sur la ressource de l'annexe 2.

Les documents placés **en annexe 3** pourront vous être utiles pour préciser et justifier les choix que vous effectuerez pour concevoir cette séance.

Documentation fournie

Annexe 1 : Valentin, D., Salin, M.-H., Verdenne, D., Charnay, R. (2015). Les boites d'œufs. *Découvrir les mathématiques. Petite Section.* Hatier.

Annexe 2 : document issu d'une séquence proposée par un groupe de travail des circonscriptions de Besançon 2 et Besançon 3.

Annexe 3 : extrait du BOEN n°25 du 24 juin 2021.

<u>ANNEXE 1 :</u> Les boites d'œufs

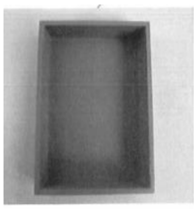
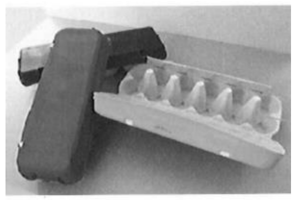
Extraits de *Découvrir les mathématiques PS,* D. Valentin et al., Hatier, 2015.

Il s'agit de mettre un objet dans chacune des douze alvéoles d'une boite d'œufs, la quantité d'objets pris à chaque « tour » du jeu étant laissée à l'initiative de l'enfant. Si trop d'objets ont été pris, la boite est vidée et il faut recommencer.

Objectif

Évaluer une quantité dans une tâche de construction progressive d'une collection équipotente à une collection de référence.

Matériel

		
Une centaine de châtaignes placées dans une grande corbeille.	Un petit plateau par enfant.	Une douzaine de boites de 12 œufs vides, peintes grossièrement de couleurs différentes ou portant un repère bien visible, pour pouvoir être facilement identifiées et nommées.

Mots et expressions utilisés

Un dans chaque, il en reste, il y en a trop, il en manque, juste ce qu'il faut, pas un de plus, boite remplie, boite pleine, boite complète, trop, assez, juste assez, beaucoup, peu, un peu de châtaignes.

Activité 1 : S'approprier les règles d'action et le but

Cette phase permet à chaque enfant d'accepter et de comprendre les règles d'action, le rôle du petit plateau, le déroulement d'une partie avec plusieurs coups. De plus, après une ou deux parties, l'enfant doit pouvoir dire, de lui-même, s'il peut ou non fermer sa boite (parce qu'elle est remplie).

- L'enseignant s'adresse au premier joueur : « *Anaïs*, tu prends des châtaignes et tu les mets sur ton plateau ; maintenant tu en mets une dans chaque trou (montrer). Est-ce qu'il y a une châtaigne dans tous les trous ? » Si l'enfant ne peut répondre, on ajoute : « Tu vois, il y a encore des trous qui n'ont pas de châtaigne. Au prochain coup, tu pourras encore prendre des châtaignes. »
- Au second coup : « Attention, tu vas encore prendre des châtaignes et les mettre d'abord sur ton plateau, mais essaie de ne pas en prendre trop. **Si tu en as mis une dans chaque trou et si tous les trous sont pleins, alors tu peux fermer la boite et tu as réussi.** » C'est l'enfant qui décide de fermer la boite, ce qui signifie qu'il a atteint le but fixé.
- Lorsque l'enfant ferme une boite, **l'enseignant le félicite et verbalise les actions** : « Oui, tu as bien mis une châtaigne dans chaque trou » et l'interroge sur ce qui reste dans son plateau : « Est-ce qu'il te reste des châtaignes dans ton plateau ? Est-ce que tu en as pris juste ce qu'il fallait ? »

Activité 2 : Construction de stratégies

- L'enseignant précise pour cette 2e activité : « Aujourd'hui, il va falloir faire très attention. Tu dois placer juste ce qu'il faut de châtaignes, pas trop. Il ne faut pas qu'il reste de châtaignes sur ton plateau quand la boite est remplie. **Tu peux prendre les châtaignes en plusieurs fois, mais tu ne peux pas en remettre dans le panier.** S'il reste des châtaignes sur ton plateau, la boite est vidée et tu n'as pas réussi pour cette boite. »
- **Pour les enfants qui ne comprendraient pas, l'adulte effectue lui-même la tâche et se trompe au dernier coup.**
- **Quand une boite a été vidée, elle reste vide ; elle est « perdue» et on passe à la suivante.** Si les boites sont de couleurs différentes, chaque enfant peut visualiser où il en est : « Tu as gagné la jaune, mais tu as perdu la rouge. Tu peux encore essayer de gagner la verte. » De cette manière, l'activité n'est pas trop longue puisqu'un enfant ne remplit pas plus de trois boites.
- **Il** est important qu'à la fin d'une partie (trois boites remplies, puis vidées ou non), **l'enseignant effectue un bilan ou une synthèse des acquis :** « La première fois, nous avons vidé la boite : tu te souviens pourquoi ? Après tu en prenais toujours un seul parce que tu avais peur d'en prendre trop… »

ANNEXE 2

<u>Source</u> **:** projet *Mathernelle* (Circonscriptions de Besançon 2 et 3) - http://mathernelle.free.fr/

Caractéristiques et spécificité

Cette situation a été conçue à partir de l'observation d'élèves dans une activité présentée par D. Valentin[1] sous le titre « Les boîtes d'oeufs ». Nous avons relevé des régularités dans les conduites des élèves (notamment de PS) confrontés à la tâche de remplissage des alvéoles de boîtes d'oeufs :

1. Lors des premières tentatives, ils apportent beaucoup d'objets ; souvent plus que d'alvéoles.
2. Quand l'enseignant introduit la nécessité de ne pas avoir plus d'objets que d'alvéoles (*« On ferme la boîte s'il y a exactement un objet par alvéole. Tu auras réussi si la boîte est fermée et si à côté de la boîte, il n'y a pas d'objets en trop. »*), on observe une évolution dans les conduites des élèves qui tendent à contrôler le remplissage des boîtes en rapportant un seul objet (ou le même petit nombre) lors de chaque déplacement.
3. Cette régularité est souvent transgressée quand il manque 2, 3 ou 4 objets. Ainsi, des élèves complètent en un seul déplacement un nombre d'alvéoles qui diffère du nombre d'objets régulièrement rapportés ; ils restent toutefois dans une cardinalité comprise entre 2 et 4.

C'est ce constat qui nous a amenés à envisager cette situation où les élèves doivent compléter une collection par 1, 2, 3 ou 4 objets manquants en exerçant cette capacité de reconnaissance directe de petites collections dans des configurations variables ; capacité qui recouvre des connaissances fondamentales dans l'élaboration des principes de dénombrement.

compléter des boîtes partiellement remplies
avec les boules à distance

PS	MS	GS
X	X	

Consigne

« Vous devez aller chercher, en un seul voyage, avec votre panier les boules nécessaires pour que votre boîte soit remplie. Vous aurez réussi si votre boîte est remplie et si vous n'avez rien dans votre panier. »

Matériel :

- Boites d'œufs : grand nombre de boîtes d'œufs comportant 6, 9, 10 ou 12 alvéoles. Elles doivent être équipées d'un couvercle (les boîtes seront partiellement remplies : 1 à 4 alvéoles sont vides)
- Grand nombre de boules de cotillons placées en vrac dans un grand récipient
- 1 récipient pour chaque élève (« panier » pour transporter les boules)

Déroulement – organisation :

1. Chaque élève reçoit une boîte partiellement remplie. Le récipient des boules est placé à distance.
2. Chaque élève reçoit une petite boîte(« panier ») pour aller chercher et transporter les boules.
3. L'élève a réussi s'il a rempli sa boîte en un seul voyage et s'il ne reste plus de boules dans son « panier ».




Commentaire

La distance entre la boîte et la réserve de boules impose aux élèves de conserver en mémoire une représentation de la collection de référence (ici les alvéoles vides). Cette représentation peut s'appuyer sur un dénombrement verbal ou non. L'objet est de mettre en évidence chez les élèves qu'une collection absente peut néanmoins exister en mémoire et peut être représentée par une autre collection dont on vérifiera ensuite l'equipotence.

ANNEXE 3

Extrait du BOEN n°25 du 24 juin 2021 : *Programmes du cycle 1*.

4.1. Découvrir les nombres et leurs utilisations

Depuis leur naissance, les enfants ont une intuition des grandeurs qui leur permet de comparer et d'évaluer de manière approximative les longueurs (les tailles), les volumes, mais aussi les collections d'objets divers (« il y en a beaucoup », « pas beaucoup », etc.). **À leur arrivée à l'école maternelle**, ils commencent à discriminer les petites quantités, un, deux et parfois trois. Enfin, s'ils savent énoncer les débuts de la suite numérique, cette récitation ne traduit pas une véritable compréhension des quantités et des nombres.

L'école maternelle doit conduire progressivement chacun à comprendre que les nombres permettent à la fois d'exprimer des quantités (usage cardinal) et d'exprimer un rang ou une position dans une liste (usage ordinal). Cet apprentissage demande du temps et la confrontation à de nombreuses situations impliquant des activités pré-numériques puis numériques. Il nécessite un enseignement structuré, **pendant toute la durée du cycle 1**, afin qu'à l'issue de l'école maternelle les connaissances et compétences acquises forment un socle solide sur lequel appuyer les apprentissages ultérieurs.

[...]

Construire le nombre pour exprimer les quantités

Si les enfants peuvent appréhender la quantité par la perception (plus, moins, pareil, beaucoup, pas beaucoup), il leur faut aussi progressivement comprendre que les nombres servent à décrire et mémoriser les quantités. De plus, il leur faut comprendre que les nombres obéissent à une logique particulière : le nombre change lorsqu'on ajoute ou retire un objet, il ne change pas lorsqu'on remplace un objet par un autre.

La comparaison des collections et la production d'une collection de même cardinal qu'une autre sont des activités essentielles pour l'apprentissage du nombre. L'apprentissage de la notion de nombre se fait progressivement, l'enfant commençant par être en mesure de produire une collection d'un ou deux éléments lorsque cela lui est demandé, avant de pouvoir produire une collection de trois puis quatre éléments. **Vers l'âge de quatre ans**, les enfants commencent à comprendre et utiliser des nombres plus grands. Le nombre en tant qu'outil de mesure de la quantité est stabilisé quand l'enfant peut l'associer à une collection, quels qu'en soient la nature, la taille des éléments et l'espace occupé : cinq permet indistinctement de désigner cinq fourmis, cinq cubes ou cinq éléphants ou une collection de cinq objets différents les uns des autres.

[...]

Stabiliser la connaissance des petits nombres

Au cycle 1, la construction des quantités jusqu'à dix est essentielle. Cela n'exclut pas le travail de comparaison sur de grandes collections. Avoir stabilisé la connaissance d'un nombre, par exemple trois, c'est être capable de donner, montrer ou prendre un, deux ou trois et composer et décomposer deux et trois. **Entre deux et quatre ans**, stabiliser la connaissance des petits nombres (jusqu'à cinq) demande des activités nombreuses et variées portant sur la décomposition et recomposition des petites quantités (trois c'est deux et encore un ; un et encore deux ; quatre c'est deux et encore deux ; trois et encore un ; un et encore trois), la reconnaissance et l'observation des constellations du dé, la reconnaissance et l'expression d'une quantité avec les doigts de la main, la correspondance terme à terme avec une collection de cardinal connu. Ultérieurement, au-delà de cinq, la même attention doit être portée à l'élaboration progressive des quantités.

Grâce à la pratique régulière d'exercices de passage d'un nombre à un autre, (dans des jeux), les enseignants encouragent les élèves à comprendre que les nombres consécutifs sont liés par l'itération de l'unité (trois, c'est deux et encore un). Au départ, l'accent est mis sur les tout petits nombres de 1 à 4. **Après quatre ans,** les activités de décomposition et recomposition s'exercent sur des quantités jusqu'à dix.

Au-delà des activités spécifiques concernant le nombre, menées sur des temps dédiés, il convient de rendre explicites les usages du nombre tout au long de la journée, dans toutes les occasions : « Nous allons constituer des groupes de quatre enfants », « J'ai déposé cinq étiquettes sur la table », « Il y a deux élèves dans le coin cuisine », etc.

[...]

Dénombrer

Une grande attention doit être portée aux activités de dénombrement pour que soit évité le « comptage-numérotage ». Elles doivent faire apparaître, lors de l'énumération de la collection, que chacun des noms de nombres désigne la quantité qui vient d'être formée. Ainsi, par exemple, pour des éléments déplaçables, « trois » est dit seulement au moment où l'élément pointé rejoint les deux précédents pour former ainsi une collection de trois. Les enfants doivent comprendre que toute quantité s'obtient en ajoutant un à la quantité précédente (ou en enlevant un à la quantité supérieure) et que sa dénomination s'obtient en avançant ou en reculant de une unité dans la suite des noms de nombres.

Pour dénombrer une collection d'objets, l'enfant doit être en mesure lors du dénombrement de synchroniser la récitation de la suite des mots-nombres avec le pointage des objets à dénombrer, en pointant chaque élément une seule fois et sans en oublier aucun. Cette capacité d'énumération doit être enseignée selon différentes modalités en faisant varier la nature des collections et leur organisation spatiale car les stratégies ne sont pas les mêmes selon que les objets sont déplaçables ou non (mettre dans une boîte, poser sur une autre table), et selon leur disposition (collection organisée dans l'espace ou non, collection organisée alignée sur une feuille ou pas).

COMPARER DES LONGUEURS EN UTILISANT LEUR MESURE

Domaine
Grandeurs et mesures.

Niveau
CP

Période de l'année
Période 3

Connaissance ou compétence visée
Comparer des longueurs en utilisant leur mesure.

Documentation fournie
Le dossier fourni est composé de quatre documents :
- **document A :** extraits du document d'accompagnement Grandeurs et mesures au cycle 2 ;
- **document B :** repères de progressivité cycle 2 ;
- **document C :** attendus de fin d'année de CP ;
- **document D :** extrait du manuel Opération Maths CP - Hatier 2019.

Consigne pour le candidat
À l'aide de ces documents, vous présenterez la première séance d'apprentissage, en période 3, visant la compétence comparer des longueurs en utilisant leur mesure au CP.

DOCUMENT A

Extraits du document d'accompagnement Grandeurs et mesures au cycle 2

Progressivité des apprentissages

Il semble préférable de prendre le temps de construire chacune des grandeurs étudiées à l'école primaire avec les élèves. Cela implique de travailler dans un premier temps les grandeurs pour elles-mêmes, indépendamment des mesures, en invitant les élèves à observer un objet ou comparer plusieurs objets selon différents points de vue. Il est important, en effet, qu'à de multiples occasions les élèves constatent que l'on peut associer plusieurs grandeurs à un même objet : par exemple, pour un objet de forme parallélépipédique, on peut considérer l'aire de l'ensemble ses faces, son volume ou encore sa masse. Un autre objet de forme parallélépipédique peut avoir le même volume, une aire de l'ensemble de ses faces plus grande, et une masse plus petite. La comparaison des deux solides nécessite donc l'identification précise des critères de comparaison. Comparer des solides selon une grandeur donnée développe chez les élèves la capacité à prendre de la distance par rapport à un objet, à mettre de côté certaines données observables pour n'en cibler qu'une seule ; il s'agit là d'une première étape vers l'abstraction et la modélisation.

Dans un deuxième temps, lorsque la grandeur retenue est bien identifiée, il sera alors possible d'introduire une puis plusieurs mesures associées : par exemple, la notion de masse étant acquise, on pourra introduire sa mesure en kilogrammes.

Stratégies d'enseignement

Le travail mené gagne à s'appuyer en priorité sur la manipulation d'objets réels pour « percevoir » les différentes grandeurs étudiées :
- de simples baguettes, ficelles ou encore bandelettes de papier permettent de donner du sens à la notion de longueur ;
- les objets du quotidien de l'élève (crayon, trousse, manuel, cartable, etc.) ou de la vie courante (téléphone portable, paquet de céréales, paquet de sucre, bouteille d'eau, lot de six bouteilles d'eau, voiture, etc.) peuvent aider à donner du sens à la notion de masse, en particulier en manipulant des matériaux de densités différentes et donc permettant de bien dissocier masse et volume : le paquet de céréales a un volume supérieur à celui de la bouteille d'un demi litre, mais sa masse est inférieure.

Les élèves vont ensuite progressivement être amenés à déterminer des mesures des grandeurs des objets manipulés. Ce travail va contribuer à donner du sens aux unités usuelles et à développer l'esprit critique des élèves. En effet, les mesures de certaines grandeurs d'objets manipulés effectuées en classe vont permettre de créer progressivement un répertoire de références utiles pour estimer d'autres mesures.

Comparer et ordonner des grandeurs

La comparaison des grandeurs peut s'effectuer dans un premier temps à partir de manipulations d'objets, par comparaison directe, par exemple : ranger des bandes de papiers selon leur longueur, de la plus courte à la plus longue, ou encore ranger des boîtes selon leur masse de la plus légère à la plus lourde, etc.

On peut alors ordonner des objets de différentes façons selon la grandeur à laquelle on fait référence, en effet, une boîte peut avoir un volume inférieur à une autre boîte, mais une masse supérieure.

Ajouter des grandeurs

La masse de deux objets distincts réunis est égale à la somme des masses de chacun de ces objets ; la masse de trois objets identiques et distincts est égale à trois fois la masse d'un de ces objets. Toutes les grandeurs géométriques rencontrées au cycle 2 vérifient ces propriétés[1], on peut ajouter de la même façon les longueurs de deux segments mis bout à bout. Ces opérations associées à des manipulations ou à des tracés permettent de renforcer le sens des grandeurs étudiées et préparent aussi les activités de mesurage par report d'une unité. Par exemple, si un segment donné est trois fois plus long qu'un autre, il est possible de vérifier qu'en mettant bout à bout deux segments de même longueur que le premier segment, on obtient un segment six fois plus long que le second segment. Ces activités proposées avant que des unités de mesure ne soient définies contribuent à donner du sens à la grandeur étudiée, mais elles peuvent aussi être proposées après l'introduction des unités, pour encourager la variété des approches. Par exemple, un segment étant donné, construire un segment de longueur triple peut se faire par report à l'aide d'un calque, à l'aide du compas, ou encore par l'utilisation de la règle graduée. La confrontation des méthodes utilisées par les élèves est une nouvelle occasion de conforter la notion de longueur.

DOCUMENT B

Repères de progressivité cycle 2

<table>
<tr><th colspan="3">GRANDEURS ET MESURES</th></tr>
<tr><td colspan="3">Il est possible, lors de la résolution de problèmes, d'aller au-delà des repères de progressivité identifiés pour chaque niveau.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Les élèves travaillent sur des grandeurs diverses en commençant par les comparer (plus long que, plus léger que, aussi cher que, plus tard que…) pour appréhender le concept avant d'adopter les conventions usuelles. Ils apprennent ensuite à effectuer des mesures au moyen d'instruments adéquats en s'appropriant peu à peu les unités usuelles. Les différentes unités sont introduites et mises en relation progressivement au cours du cycle.
Les opérations sur les grandeurs sont menées en lien avec l'avancée des opérations sur les nombres, de la connaissance des unités et des relations entre elles.</td></tr>
<tr><td colspan="3">la longueur</td></tr>
<tr><td>Les élèves comparent des objets, des segments selon leur longueur, d'abord en les estimant. Ils donnent du sens aux expressions « plus long que », « plus court que », « aussi long que », « moins long que », et aussi « double » et « moitié ».
Ils mesurent des segments en utilisant des unités de référence puis en utilisant la règle graduée pour des mesures en centimètres entiers.
Ils appréhendent le mètre (100 cm) à travers par exemple la règle du professeur.</td><td>Les élèves consolident les comparaisons, les estimations et les mesures de longueur en cm. Puis le travail se poursuit en utilisant les unités m, dm et km. Ces unités sont mises en relation.
Les élèves continuent à comparer des objets, des segments selon leur longueur en utilisant les unités cm, m, dm et km. Ils mettent ces unités en relation cm, dm, m et m, km.</td><td>Les élèves consolident les comparaisons, les estimations et les mesures de longueur en cm, m, dm et km.
Le travail se poursuit en utilisant le mm.
Les élèves mettent ces unités en relation : m, dm, cm et mm.</td></tr>
</table>

DOCUMENT C

Attendus de fin d'année de CP

Comparer, estimer, mesurer des longueurs, des masses, des contenances, des durées - Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs

Longueurs

Ce que sait faire l'élève

- Il compare des objets selon leur longueur.
- Il compare des segments selon leur longueur.
- Il sait que le m et le cm mesurent des longueurs.
- Il mesure des segments en utilisant une règle graduée, en cm entiers ou dans une autre unité (définie par les carreaux d'une feuille par exemple).
- Il trace des segments de longueur donnée, en cm entiers en utilisant une règle graduée, ou dans une autre unité (définie par les carreaux d'une feuille par exemple).
- Il reproduit des segments en les mesurant en cm entiers ou en utilisant une bande de papier.
- Il commence à s'approprier quelques longueurs de référence :
  – 1 cm (unité utilisée en classe),
  – 20 cm (double-décimètre),
  – 1 m (règle du professeur).
- Il utilise le lexique spécifique associé aux longueurs : plus long, plus court, plus près, plus loin, double, moitié.

Exemples de réussite

Les situations s'appuient toutes sur des manipulations.

- Il compare et ordonne cinq baguettes ou cinq bandelettes selon leur longueur.
- Il compare les longueurs de deux segments en utilisant un étalon ou une règle graduée.
- Avec une règle graduée en centimètres, il mesure un segment de 8 cm de longueur.
- Il trace un trait droit de longueur 8 unités ou 8 cm.
- Il sait estimer une longueur par rapport à quelques longueurs repères. Exemple : il sait dire si sa trousse mesure plutôt 2 cm, 20 cm ou 1 m.

DOCUMENT D

Étape 70 du manuel Opération maths CP, Hatier 2016

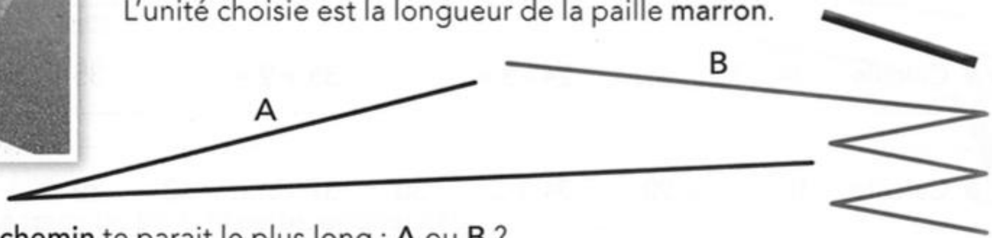
70 Longueurs

Les mesurer avec une unité

DÉCOUVRONS ENSEMBLE

Tu mesures les chemins en reportant plusieurs fois la longueur choisie comme unité.

L'unité choisie est la longueur de la paille **marron**.



1 **Quel chemin** te parait le plus long : **A** ou **B** ?

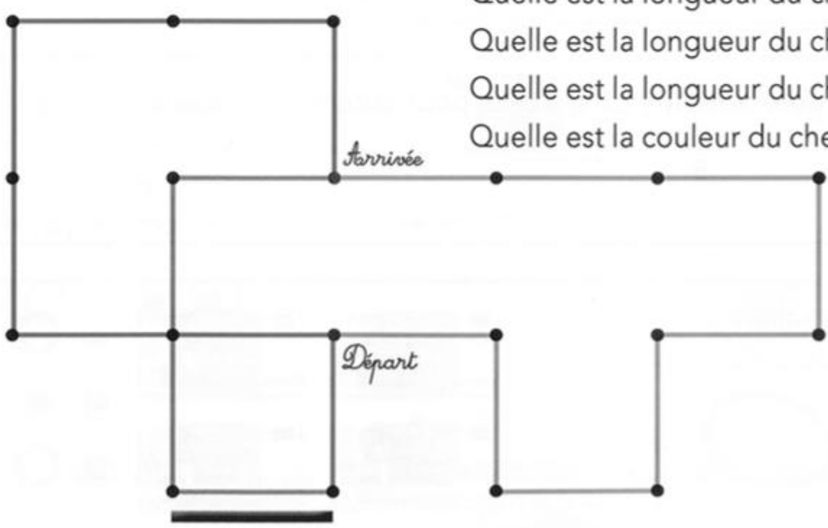
2 **Découpe** dans ton matériel la paille marron pour mesurer les deux chemins.
Quelle est la longueur du chemin **A** ? **Quelle est la longueur** du chemin **B** ?
Quel chemin est le plus long : **A** ou **B** ?

Mémo 13 p. 82

JE M'ENTRAINE

3 À l'œil, **lequel des chemins** est le plus long : le vert, l'orange ou le bleu ?
Pour vérifier, **mesure** en te servant de la paille **marron** comme unité.

Quelle est la longueur du chemin vert ?
Quelle est la longueur du chemin orange ?
Quelle est la longueur du chemin bleu ?
Quelle est la couleur du chemin le plus long ?



Manipulation GUIDE : comparer des longueurs difficiles à comparer à l'œil dans la classe, se servir des pieds ou d'un bâton, puis sur une feuille de papier, se servir de la paille unité.

CALCUL MENTAL ▶ Jeu de mémoire : écrire 3 nombres (≤ 40) au tableau puis les cacher. Après 10 s, les élèves les écrivent dans l'ordre croissant.

70 soixante-dix

LA SYMETRIE AU CE2

Domaine
Espace et géométrie.

Niveau
CE2

Période de l'année
Période 3.

Connaissance ou compétence visée
Compléter une figure par symétrie.

Documentation fournie
Ce dossier est composé de 3 documents.
- Document 1 : programme de cycle 2, publié au bulletin officiel n°31 du 30 juillet 2020 (extrait pp. 62-63).
- Document 2 : extraits de manuels (*Outils pour les maths CE2*, Magnard, 2017 ; *Maths au CE2*, ACCÈS Éditions, 2020).
- Document 3 : productions d'élèves.

Consigne pour le candidat
À l'aide de ces documents, vous présenterez une séance d'apprentissage qui sera intitulée « Compléter une figure par symétrie », en CE2 période 3, en prenant en compte la diversité des élèves.
Cette séance pourra s'appuyer sur les activités proposées dans le document 2.

DOCUMENT 1

Extrait des programmes

Espace et géométrie

Au cycle 2, les élèves acquièrent à la fois des connaissances spatiales comme l'orientation et le repérage dans l'espace et des connaissances géométriques sur les solides et sur les figures planes. Apprendre à se repérer et se déplacer dans l'espace se fait en lien étroit avec le travail dans « Questionner le monde » et « Éducation physique et sportive ». Les connaissances géométriques contribuent à la construction, tout au long de la scolarité obligatoire, des concepts fondamentaux d'alignement, de distance, d'égalité de longueurs, de parallélisme, de perpendicularité, de symétrie.
Les compétences et connaissances attendues en fin de cycle se construisent à partir de manipulations et de problèmes concrets, qui s'enrichissent tout au long du cycle en jouant sur les outils et les supports à disposition, et en relation avec les activités mettant en jeu les grandeurs géométriques et leur mesure.
Dans la suite du travail commencé à l'école maternelle, l'acquisition de connaissances spatiales s'appuie sur des problèmes visant à localiser des objets ou à décrire ou produire des déplacements dans l'espace réel. L'oral tient encore une grande place dans l'ensemble du cycle mais les représentations symboliques se développent et l'espace réel est progressivement mis en relation avec des représentations géométriques. La connaissance des solides se développe à travers des activités de tri, d'assemblages et de fabrications d'objets. Les notions de géométrie plane et les connaissances sur les figures usuelles s'acquièrent à partir de manipulations et de résolutions de problèmes (reproduction de figures, activités de tri et de classement, description de figures, reconnaissance de figures à partir de leur description, tracés en suivant un programme de construction simple). La reproduction de figures diverses, simples et composées est une source importante de problèmes de géométrie dont on peut faire varier la difficulté en fonction des figures à reproduire et des instruments disponibles. Les concepts généraux de géométrie (droites, points, segments, angles droits) sont présentés à partir de tels problèmes. En géométrie comme ailleurs, il est particulièrement important que les professeurs utilisent un langage précis et adapté et introduisent le vocabulaire approprié au cours des manipulations et situations d'action où il prend sens pour les élèves, et que ceux-ci soient progressivement encouragés à l'utiliser.

Attendus de fin de cycle

Reconnaître, nommer, décrire, reproduire, construire quelques figures géométriques **Reconnaître et utiliser les notions d'alignement, d'angle droit, d'égalité de longueurs, de milieu, de symétrie**
- utiliser la règle (non graduée) pour repérer et produire des alignements ; - repérer et produire des angles droits à l'aide d'un gabarit, d'une équerre ; - reporter une longueur sur une droite déjà tracée, en utilisant une bande de papier avec un bord droit ou la règle graduée ou le compas (en fin de cycle) ; - reconnaître si une figure présente un axe de symétrie (à trouver), visuellement et/ou en utilisant du papier calque, des découpages, des pliages ; - reconnaître dans son environnement des situations modélisables par la symétrie (papillons, bâtiments, etc.) ; - compléter une figure pour qu'elle soit symétrique par rapport à un axe donné : → symétrie axiale ; → une figure décalquée puis retournée qui coïncide avec la figure initiale est symétrique : elle a un axe de symétrie (à trouver) ; → une figure symétrique pliée sur son axe de symétrie, se partage en deux parties qui coïncident exactement.

DOCUMENT 2

Extraits de manuels

a) Outils pour les maths CE2, Magnard, 2017 (extrait p. 136)

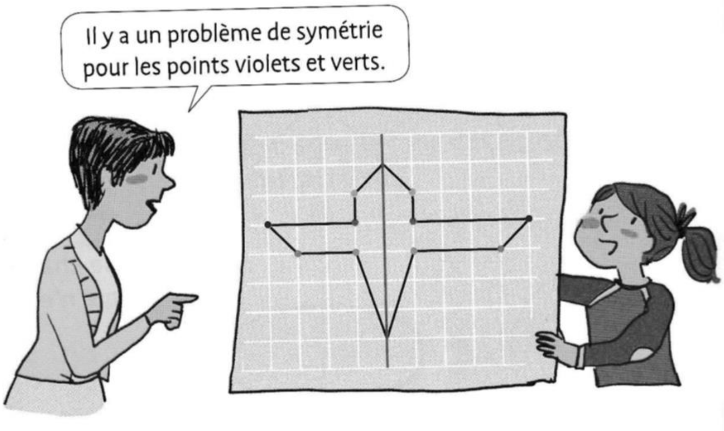
Compléter une figure par symétrie

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES : lienmini.fr/opmce2

Cherchons

La maitresse a demandé à ses élèves de dessiner un avion symétrique par rapport à l'axe rouge. Voici le tracé de Léna.

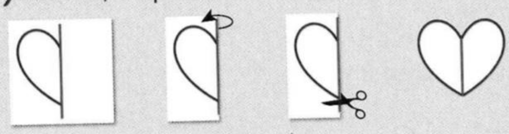
- **Observe les points jaunes, rouges et bleus. Comment sont-ils placés par rapport à l'axe rouge ?**
- **Pourquoi y a-t-il un problème de symétrie avec les points violets et verts ?**



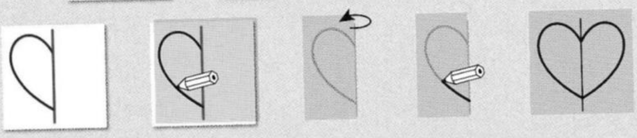
Je retiens

Pour **compléter une figure par symétrie**, on peut créer la partie symétrique :

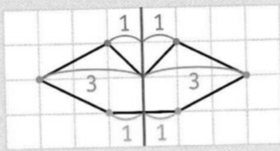
- en pliant et découpant :



- en décalquant :

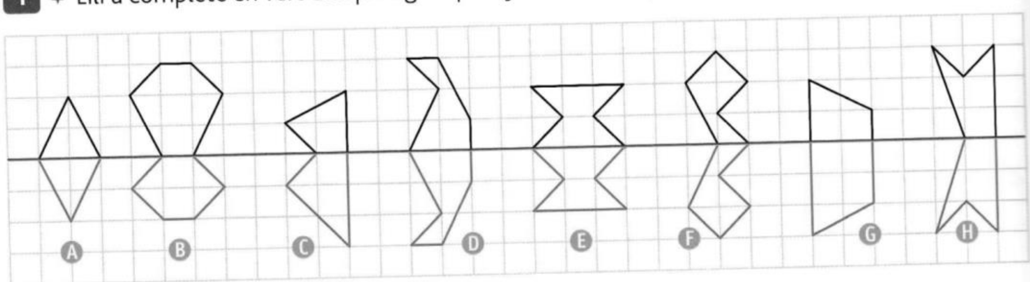


- en plaçant chaque point et son symétrique à égale distance de l'axe :

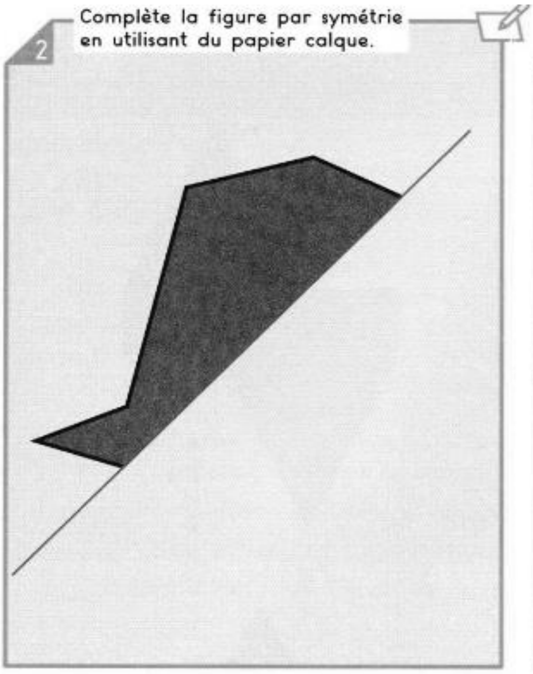


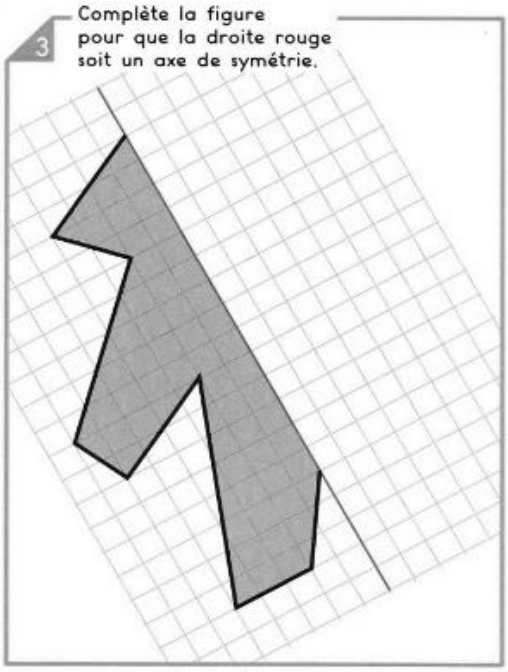
Repérer des tracés symétriques

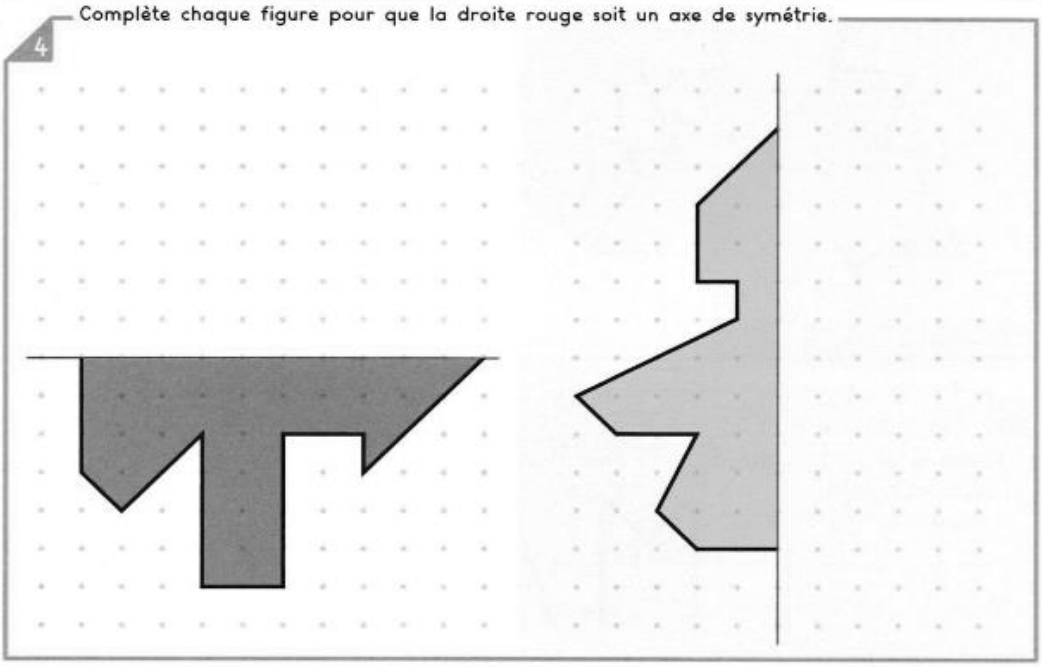
1 ⋆ Lili a complété en vert chaque figure par symétrie. **Indique les tracés faux.**



b) Maths au CE2, ACCÈS Éditions, 2020 (extrait p. 101)

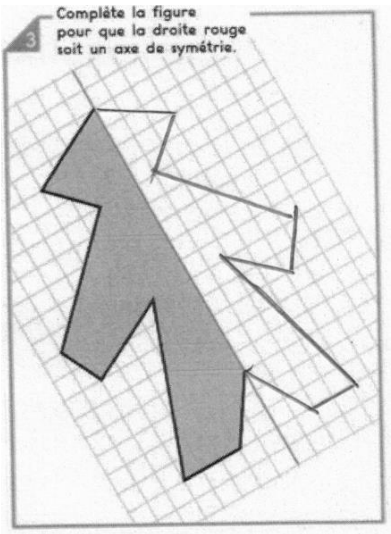




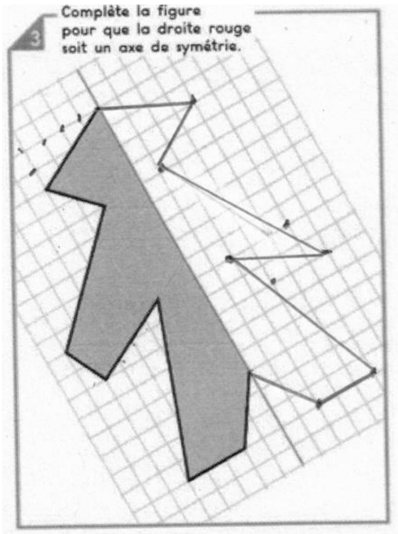


DOCUMENT 3

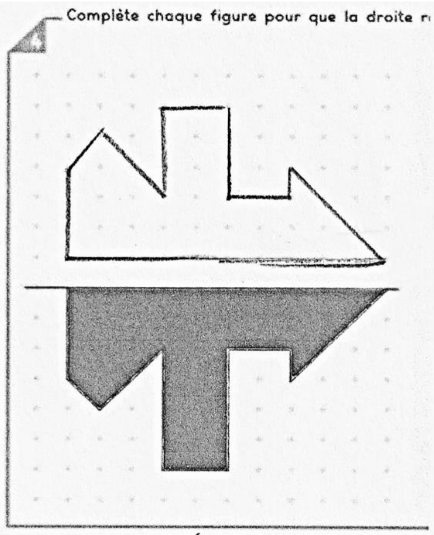
Productions d'élèves



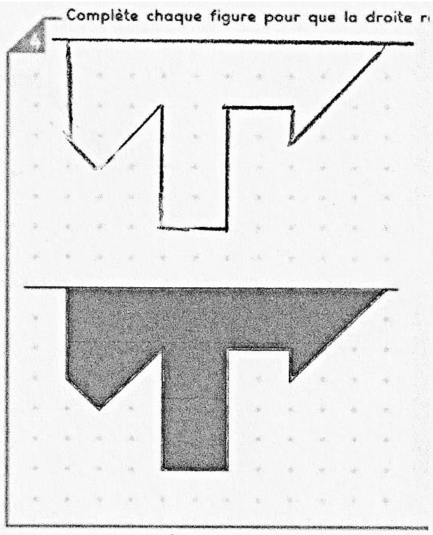
Élève 1



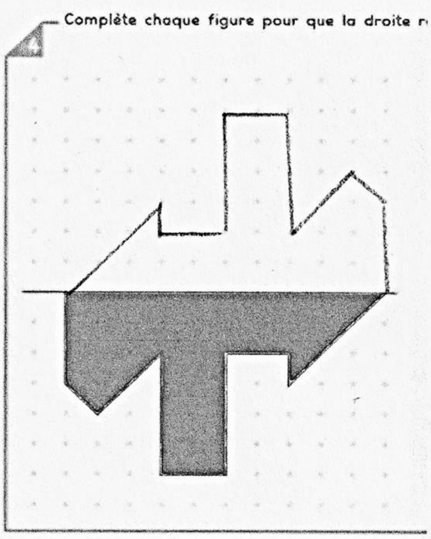
Élève 2



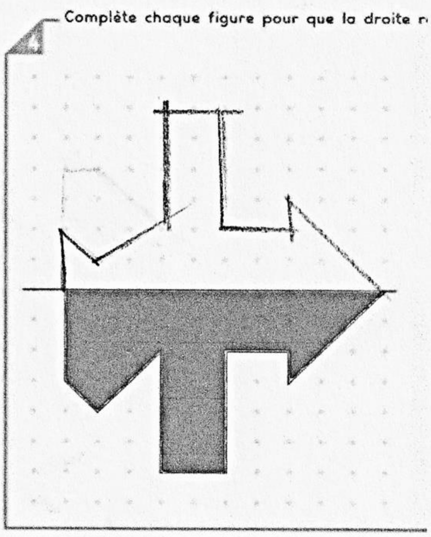
Élève 3



Élève 4



Élève 5



Élève 6

LA DIVISION POSÉE

Domaine
Nombres et calculs.

Niveau
CM1.

Période de l'année
Non précisée.

Connaissance ou compétence visée
Connaître et mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour effectuer la division euclidienne d'un entier par un entier.

Documentation fournie
- Annexe 1 : extraits des programmes de mathématiques du cycle 3 publié au BO n°31 du 30 juillet 2020.
- Annexe 2 : extraits de la brochure *Les divisions,* IREM de Rennes, 2011, pp. 37-39.
- Annexe 3 : extraits du manuel *Maths au CM1*, ACCES, 2021, pp. 122-123.
- Annexe 4 : extraits du manuel *Maths explicites CM1*, Hachette, 2015, pp. 74-75.

Consigne pour le candidat
Vous êtes enseignant(e) en CM1, et vous souhaitez mettre en œuvre une séquence visant à apprendre aux élèves à « *mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour effectuer la division euclidienne d'un entier par un entier* »
En prenant appui sur les documents proposés mais sans vous y limiter, vous proposerez **une séance** de cette séquence.
Dans un premier temps, vous préciserez les problématiques d'apprentissage du sujet, notamment dans leur dimension didactique, puis vous développerez les différentes phases pédagogiques de la séance, leurs objectifs et leur mise en œuvre.

ANNEXE 1

Extraits des programmes de cycle 3

Le cycle 3 vise à approfondir des notions mathématiques abordées au cycle 2, à en étendre le domaine d'étude, à consolider l'automatisation des techniques écrites de calcul introduites précédemment (addition, soustraction et multiplication) ainsi que les résultats et procédures de calcul mental du cycle 2, mais aussi à construire de nouvelles techniques de calcul écrites (division) et mentales, enfin à introduire des notions nouvelles comme les nombres décimaux, la proportionnalité ou l'étude de nouvelles grandeurs (aire, volume, angle notamment).

(…)

Calcul posé

Connaître et mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour effectuer :

- l'addition, la soustraction et la multiplication de nombres entiers ou décimaux ;
- la division euclidienne d'un entier par un entier ;
- la division d'un nombre décimal (entier ou non) par un nombre entier.

ANNEXE 2

Extraits de la brochure *Les divisions*, IREM de Rennes, 2011 (pp. 37-39)

Ce document, à destination des enseignants, présente une explication du fonctionnement d'une technique de division posée en appui sur du matériel de numération.

Nous nous plaçons dans le cadre d'une utilisation d'un matériel de type échange.
Soit une valeur de 6658 à répartir équitablement entre 27 personnes.
Cette valeur est représentée par 6 plaques de 1000, 6 plaques de 100, 5 plaques de 10 et 8 plaques de 1.

Phases du raisonnement :

1) recherche de nombre de chiffres du quotient euclidien.

Il est impossible de donner 1 plaque de 1000 à chacune des 27 personnes. Nous ne disposons que de 6 plaques de 1000.
Nous devons donc échanger les 6 plaques de 1000 contre 60 plaques de 100 (1 plaque de 1000 contre 10 plaques de 100), nous avons donc à notre disposition 60 + 6 plaques de 100. La répartition des 66 plaques de 100 entre les 27 personnes est maintenant possible.
Le premier type de plaques à distribuer est de type centaine.
Il y a donc 3 chiffres au quotient euclidien.

2) recherche des chiffres successifs du quotient euclidien.

Le résultat[9] de cette première répartition des plaques de 100 est une distribution de 2 plaques par personne.
On utilise donc 2 × 27 = 54 plaques et il reste 12 (66 – 54) plaques.
Le processus d'échanges est à nouveau nécessaire : les 12 plaques de 100 sont échangées contre 120 plaques de 10 auxquelles on ajoute les 5 plaques de 10.

Nous disposerons de 125 plaques de 10 et une nouvelle répartition est à nouveau possible.
125 plaques à répartir entre 27 personnes, combien de plaques par personne ?

(...)

Chaque personne recevra donc 4 plaques de 10. On utilise ainsi 108 plaques de 10 sur les 125 plaques disponibles et il restera donc 17 plaques de 10.
Les échanges sont à nouveau indispensables.

17 plaques de 10 sont échangées contre 170 plaques de 1 auxquelles on ajoute les 8 plaques de 1.
Nous disposons donc de 178 plaques de 1 à répartir équitablement entre les 27 personnes.

178 entre 27 ou combien de fois 27 dans 178 ?
C'est approximativement la même situation que de rechercher
combien de fois 25 dans 175 ? soit 7
ou
combien de fois 30 dans 180 ?
combien de fois 3 dizaines dans 18 dizaines ? soit 6

27 × 6 = 162 **chaque personne recevra donc 6 plaques de 1 et il restera 16 plaques de 1.**

3) Ecriture de l'égalité caractéristique

$6658 = (246 \times 27) + 16$ avec $16 < 27$ ou $6658 = (27 \times 246) + 16$ avec $16 < 27$

[9] Ce résultat est facile à obtenir à l'aide d'un calcul mental réfléchi et ne nécessite pas d' « essais multiplicatifs posés ».
27 personnes c'est presque 30, on donnant 2 plaques à chaque personne on utiliserait alors 60 plaques.

(…)

CM1

	C	D	U			
	3	4	6			3
−	3			C	D	U
	0	4		1	1	5
−		3				
		1	6			
−		1	5			
			1			

346 = (115 × 3) + 1 avec 1 < 3

CM2

	M	C	D	U			
	6	6	5	8		2	7
−	5	4					
	1	2	5		C	D	U
−	1	0	8		2	4	6
		1	7	8			
−		1	6	2			
			1	6			

6658 = (246 × 27) + 16 avec 16 < 27

ANNEXE 3

Extraits du manuel *Maths au CM1,* ACCES, 2021(p. 122 et p.123)

20 Division (2) : calcul posé

Résoudre des problèmes de division

1 Quatre pirates découvrent un coffre contenant 493 pièces d'or. Ils veulent partager ce trésor en 4 parts égales. Chaque pirate doit recevoir le plus grand nombre possible de pièces. En utilisant le matériel de numération, trouve combien de pièces recevra chaque pirate et combien il en restera.

2 Trois pirates découvrent un coffre contenant 284 pièces d'or. Ils veulent partager ce trésor en 3 parts égales. Chaque pirate doit recevoir le plus grand nombre possible de pièces. En utilisant le matériel de numération, trouve combien de pièces recevra chaque pirate et combien il en restera.

3 ★ Louise distribue 52 cartes entre 4 enfants. Chaque enfant reçoit le plus possible de cartes.
Combien chaque enfant reçoit-il de cartes ?
Combien en reste-t-il dans la pioche ?

5 ★★ Pour arroser son jardin, Sophie utilise un arrosoir de 5 litres. Elle possède une cuve de récupération d'eau de pluie de 1000 litres.
Combien d'arrosoirs peut-elle remplir si sa cuve est pleine ?

(*D'autres exercices sont ensuite proposés, parmi lesquels les suivants*)

Poser et effectuer une division

13 ★ Recopie et termine les divisions que Capucine a commencées.

```
  8 4 9 3 | 7          6 9 1 | 5
- 7       | 1        - 5     | 1 . .
  1 4                  1 9
                     - . .
                         . .
                       - . .
                           .
```

14 ★★ Pose et effectue les divisions.

a. 763 divisé par 6
b. 6987 divisé par 9
c. 6504 divisé par 4
d. 2140 divisé par 7

15 ★ Recopie et complète les divisions.

```
  8 2 7 2 | 1 7          5 4 9 1 | 2 1
- 6 8     | 4          - . .     | . . .
  1 4 7                  . . .
                       - . . .
                             . .
                           - . .
                             . .
```

16 ★★ Pose et effectue les divisions.

a. 478 divisé par 12
b. 7056 divisé par 15
c. 9631 divisé par 37
d. 82901 divisé par 23
e. 70547 divisé par 19

ANNEXE 4

Extraits du manuel Maths explicites CM1, Hachette 2015,

CALCUL **29** **Diviser par un nombre à un chiffre**

DÉCOUVRONS ENSEMBLE

A Un jardinier a 87 bulbes de tulipes. Il en plante 5 par pot de fleurs. Combien de pots pourra-t-il remplir ?

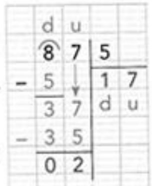
Je cherche une partie d'un tout dont toutes les parties sont égales. Je dois effectuer une **division**. → Je cherche 87 divisé par 5.

Je cherche d'abord le **nombre de chiffres au quotient**. → $5 \times 10 < 87 < 5 \times 100$ Il y a donc 2 chiffres au quotient.

Je commence par diviser le ***1er chiffre à gauche**. S'il est inférieur au diviseur, je prends les 2 chiffres à gauche. Je trace un chapeau au-dessus du ou (des) nombre(s) à partager.*

En ***8 dizaines***, *combien de fois 5 ? 1 fois. J'écris* ***1*** *au quotient dans la colonne des dizaines.* ***1 × 5 = 5***. *Je soustrais* ***5*** *de* ***8*** *; il reste 3.*

J'abaisse le 7. En ***37 unités***, *combien de fois 5 ? 7 fois. J'écris 7 au quotient.* ***7 × 5 = 35***. *Je soustrais* ***35*** *de* ***37*** *; il reste* ***2*** *unités.*



Je vérifie, à chaque soustraction, que le reste est inférieur au diviseur. Je vérifie mon résultat. 5 × 17 = 85 ; 85 + 2 = 87. Mon résultat est juste.

Le jardinier peut remplir 17 pots. Il lui reste 2 bulbes de tulipes.

B Le lendemain, le jardinier a 142 bulbes à planter. Combien de pots remplira-t-il ?

(…)

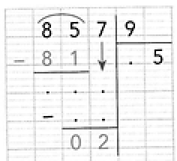
1 Dans ces divisions, **indique** combien il y aura de chiffres au quotient.
a. 75 : 3 ; 75 : 7 ; 75 : 9
b. 645 : 3 ; 645 : 7 ; 645 : 9
c. 6 481 : 3 ; 6 481 : 7 ; 6 481 : 9

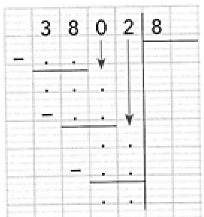
2 **Cherche** le nombre de chiffres au quotient de ces divisions et **trouve** le seul quotient possible parmi ceux proposés.

a. 72 : 3	4	24	240
b. 651 : 7	9	93	930
c. 1 526 : 7	21	218	2 018
d. 4 806 : 6	81	981	801

4 **Pose** et **effectue** les divisions suivantes.
a. 73 : 2
b. 797 : 3
c. 434 : 4
d. 841 : 8
e. 704 : 6

5 **Recopie** et **complète** ces divisions.

a. 

b. 

(…)

J'AI COMPRIS

Pour poser une division :
- Je trace une potence.
- Je place le **dividende** et le **diviseur**.
- Je cherche le nombre de chiffres au quotient en encadrant le dividende entre 2 multiples successifs du diviseur.
- Je pose et j'effectue la division.
- À chaque soustraction, je vérifie que le **reste** est inférieur au diviseur.