CONSTRUIRE LA GEOMETRIE ELEMENTAIRE

Evelyne BARBIN
Irem de Paris 7

La géométrie est un domaine privilégié pour l'exercice du raisonnement, du côté de l'initiative. Mais l'enseignement instaure un énorme malentendu entre enseignants et élèves. Pour certains enseignants, la géométrie «servirait à apprendre à démontrer», c'est-à-dire à écrire des textes de démonstration. Du coup, bon nombre d'élèves ne soupçonnent pas un instant qu'il y ait à raisonner pour écrire, et, pire, ils n'ont guère d'indication sur ce que seraient ces raisonnements. Alors, ils ne produisent aucun texte ou des textes incohérents. Les enseignants qui ont en tête l'apprentissage de la démonstration, c'est-à-dire selon eux la production de textes, s'obstinent et accusent un manque de logique ou des lacunes dans la langue, dans l'usage du «donc» ou du «car». Alors, ils remédient en proposant aux élèves de remplir des tableaux «je-sais-que/je-déduis-que» ou de faire des «démonstrations à trous». Ces activités occupent les élèves, ils vont réussir finalement à remplir les tableaux ou les trous, mais ils n'apprendront pas à raisonner.

Cette façon schématique de poser les problèmes rencontrés dans l'enseignement de la géométrie a pour but d'indiquer que la source du malentendu porte sur l'essentiel, à savoir sur ce que c'est que faire de la géométrie. Faire de la géométrie, c'est étudier des figures : nous l'avons oublié depuis la réforme des mathématiques modernes. Certains enseignants reprochent aux élèves de s'appuyer sur les figures pour démontrer, alors que travailler sur des figures c'est déjà raisonner. Ils n'envisagent, comme effectuation d'un raisonnement, que la production d'un texte écrit, de plus en plus rituel - nous avons sans doute atteint un paroxysme avec les tableaux. Alors que la première effectuation d'un raisonnement géométrique c'est la production d'une figure. Construire la géométrie, c'est d'abord construire ses objets, les figures. Ainsi, notre façon de poser les problèmes de l'enseignement conduit à s'interroger sur la place que nous attribuons aux constructions de figures et de lieux géométriques dans notre enseignement. Commençons par examiner rapidement quelques questions relatives aux constructions dans la géométrie.

1. Des théorèmes et des constructions

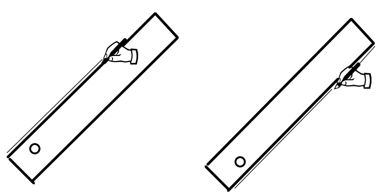
On pourrait dire que le but premier de la géométrie est d'élaborer des théorèmes, lesquels peuvent servir à prouver des constructions. En se reportant à l'histoire des mathématiques, on aurait plutôt envie de dire que le but de la géométrie est de construire des figures exactes, ce qui nécessite d'élaborer des théorèmes. En effet, les constructions à la règle et au compas sont moteurs dans la géométrie grecque, comme construire un carré de même aire qu'une figure rectiligne ou curviligne, diviser un segment ou un angle en parties égales, construire des polygones réguliers, etc. Il est important, pour comprendre le statut de ces constructions, de savoir, qu'après la «découverte des irrationnels», elles viennent pallier l'impossibilité de déterminer le rapport entre des grandeurs géométriques à l'aide de nombres (entiers). Par exemple, il est impossible de dire exactement (l'irrationnel est «ce qui ne se dit pas») le côté d'un carré ayant une aire double de celle d'un carré de côté deux, mais il est possible d'en donner une construction géométrique exacte. Les constructions à la règle et au compas correspondent au souci d'exactitude du géomètre. Ainsi, dans *Les éléments* d'Euclide, les théorèmes et les problèmes de constructions sont complètement imbriqués : pour énoncer un théorème concernant une figure, il faut qu'elle soit construite à la règle et au compas, et, inversement, pour prouver une construction, il faut s'appuyer sur des théorèmes.

2. Les problèmes de géométrie

Dans l'introduction de ses *Problèmes de construction géométrique* de 1879, Petersen distingue deux formes de proposition, selon qu'il s'agit d'un théorème ou d'un problème. Dans le premier cas, la proposition énonce qu'une figure, tracée d'une certaine manière, satisfait à certaines conditions. Dans le second cas, il faut tracer une figure vérifiant certaines conditions. Cette distinction se retrouve dans le chapitre sur la méthode des *Leçons de géométrie élémentaire,* destinées aux classes de lycées, où Hadamard distingue la méthode pour démontrer des théorèmes et la méthode pour résoudre des problèmes de construction. Démontrer un théorème, c'est «transformer les propriétés énoncées dans l'hypothèse de manière à en dégager celles qui constituent la conclusion». Démontrer est un travail de transformation sur les énoncés. En revanche, résoudre un problème de construction est un travail de transformation sur les figures. Réserver le terme de problème aux constructions se comprend, ainsi, dans le souci de maintenir que la géométrie est un travail sur des figures.

3. Le matériel de construction

Puisqu'il s'agit de raisonner, le choix du matériel de construction est essentiel. Briques ou préfabriqués ? La règle et le compas sont des instruments de tracés. Mais surtout, ils permettent de comprendre ce que sont les objets géométriques, droites et cercles, et ce qu'est l'égalité géométrique de segments ou d'arcs de cercles. Ainsi, pour vérifier qu'une règle est bien droite, on trace un premier trait puis on retourne l'instrument pour tracer avec le même bord de la règle un second trait coïncidant avec le premier. On a réalisé de sa main qu'une seule droite passe par deux points.



Un compas permet de tracer des cercles, mais il permet d'abord de transporter des longueurs égales, ou de comparer des longueurs, sans utiliser de règles graduées. Diviser un segment en deux parties égales ne nécessite pas de numériser, mais cela réalise en acte un théorème sur la médiatrice d'un segment. Mener des parallèles et construire des perpendiculaires ne nécessitent pas non plus de numériser. De même, pour diviser une segment en trois, quatre, cinq, etc., mais cela réalise en acte le théorème dit de Thalès. Les constructions simples s'imbriquent ensuite les unes aux autres pour donner des constructions plus complexes.

Les constructions à la règle et au compas cumulent quatre avantages. D'abord, elles sont tellement simples qu'elles demandent vite des élaborations suffisamment complexes pour être intéressantes. Ensuite, elles permettent de réaliser les théorèmes « à la main ». Elles évitent aussi tout recours au numérique, dont on sait qu'il est un obstacle à l'apprentissage de la démonstration au collège. Enfin, le mouvement continu de la main ou de la pointe du compas permet d'accéder à l'idée du continu géométrique.

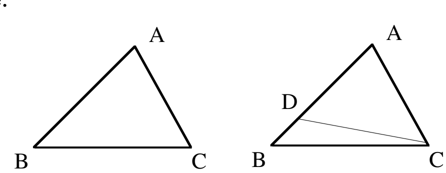
On peut, de ce point de vue, comparer ces constructions avec celles d'un logiciel. Ces dernières sont obtenues sur un écran contenant un nombre fini de points, et de procéder, de manière implicite ou non, avec du numérique. Le continu géométrique n'est pas accessible, et, dans la géométrie de l'ordinateur, il n'y a pas de longueurs incommensurables. En revanche, elles ont l'avantage d'être rapides, surtout en proposant à l'utilisateur de nombreuses macro-procédures. Ceci peut se révéler un inconvénient, si, pour aller encore plus vite, on en use trop rapidement. Le risque étant, à la limite, que la partie constructive soit très restreinte, voire inexistante.

4. Des constructions aux démonstrations

Faire des constructions oblige à une mise en ordre. Par exemple, «pour construire tel cercle, je dois d'abord construire son centre». Ce travail de mise en ordre est essentiel dans l'apprentissage du raisonnement géométrique. De plus, écrire des constructions peut constituer, pour les élèves, une première étape dans l'écriture d'un texte ordonné et argumenté.

Par ailleurs, pour construire une figure, il faut partir des conditions du problème, c'est-à-dire procéder par analyse, afin de remonter aux figures plus simples à partir desquelles elle peut être obtenue. Or le travail d'analyse est nécessaire pour trouver des démonstrations. Certains enseignants reprochent aux élèves de mélanger hypothèses et conclusions, ou, ce qui peut être la même chose, de partir de la conclusion et non des hypothèses pour démontrer. Or, il est clair que pour démontrer quelque chose, il faut bien d'une certaine façon, partir de ce quelque chose pour y aboutir. Cette dernière phrase dit ce qu'il y a de paradoxal dans la démonstration, car on la trouve dans un sens puis on l'écrit généralement dans l'autre. Oublier que l'analyse est la principale « méthode » pour trouver une démonstration revient à confondre la démonstration avec son écriture a posteriori, c'est-à-dire très souvent, à court-circuiter le raisonnement. Alors que le travail de mise en ordre et de décomposition d'une figure complexe en figures simples demande de raisonner.

Ce travail aide d'une autre façon encore à l'apprentissage de la démonstration. En effet, une démonstration nécessite souvent de modifier la figure initiale, d'introduire des lignes supplémentaires. Par exemple, il faut souvent penser à joindre un point d'une circonférence à son centre. Pour les élèves, le segment qui joint deux points n'existe pas tant qu'ils ne l'auront pas tracé. L'habitude de construire peut permettre une telle initiative.



Ainsi, soit à démontrer que dans tout triangle, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle. Si aucune construction n'est tentée, aucune autre solution ne s'offre que de mesurer avec double-décimètre et rapporteur pour le triangle ABC ici tracé. Mais si le compas est un instrument usuel de report, alors savoir que AB est plus grand que AC c'est construire le point D de AB tel que AC égale AD. Maintenant, considérer la conclusion, ce qu'il faut bien faire, conduit à découper l'angle ACB en menant DC. Tout ceci est construction, mais toute construction suppose un raisonnement.

5. Des courbes comme lieux géométriques

Considérer une figure géométrique comme un lieu de points vérifiant certaines conditions porte en général en soi l'idée du continu géométrique, et enrichit la compréhension de la figure. Les droites et les cercles (ou des portions) sont les lieux usuels de la géométrie élémentaire. Mais certaines courbes usuelles peuvent aussi être considérées comme des lieux, ce qui rappelle leur statut oublié d'objets géométriques. En effet, l'enseignement regarde surtout les courbes comme les graphes de fonction.

Ceci revient à les examiner toutes comme lieux de points dont les distances à deux droites données vérifient une certaine relation (ce qu'on appelle l'équation de la courbe). Ceci est parfait s'il s'agit de les comparer toutes entre elles. Mais cette conception unificatrice et systématique peut s'avérer lourde lorsqu'il s'agit de construire une courbe ou de l'obtenir comme solution d'un problème. Par exemple, l'équation d'une ellipse permet de déduire de nombreuses propriétés de cette courbe, mais la considérer comme le lieu des points dont la somme des distances à deux points donnés est constante permet de la construire et de l'obtenir comme solution de problèmes cinématiques ou optiques.

Rappeler, par le biais des lieux géométriques, que nombre de courbes usuelles sont des objets de géométrie élémentaire, permet d'envisager un autre enseignement pour des objets qui sont devenus par trop analytiques et routiniers dans l'enseignement.

6. Les constructions : l'éternel retour ?

Lorqu'on se reporte à l'histoire des mathématiques et à celle de son enseignement, on peut observer à plusieurs reprises un intérêt des mathématiciens et des enseignants pour les constructions géométriques. Aujourd'hui un tel intérêt existe. En même temps, fait unique dans l'histoire, les constructions ne sont plus nécessairement réalisées à la main, mais à l'aide de logiciels, dits «constructeurs». D'après ce que nous avons vu ci-dessus, l'utilisation de ces logiciels doit s'accompagner d'une nouvelle réflexion sur la géométrie et sur ses figures. Ceci sans repousser à plus tard l'examen de la différence radicale entre la géométrie continue de la main et la géométrie discrète de l'écran. La fascination technique aidant, on peut aussi imaginer un enseignement organisé autour de logiciels, et déclaré ensuite inutile. En effet, on pourrait dire que ce n'est pas la peine d'enseigner la géométrie, puisqu'il y a des logiciels pour construire les figures. Pour tenter de repousser un nouveau malentendu, je répèterais donc ma première phrase : la géométrie est un domaine privilégié pour l'exercice du raisonnement, du côté de l'initiative.