CALCUL MENTAL ET RESOLUTION DE PROBLEMES NUMERIQUES AU DEBUT DU COLLEGE

Denis BUTLEN, Monique PEZARD
Iufm de Créteil,
Equipe Didirem
Irem de PARIS VII

INTRODUCTION

Dans cet article, nous appelons calcul mental aussi bien le calcul mental tel que nous l'entendons traditionnellement, que le calcul souvent qualifié de «rapide» ou de «réfléchi». Si besoin, les élèves peuvent écrire des calculs ou des résultats intermédiaires. Par contre, le recours aux algorithmes écrits standards n'est pas licite dans ce type d'activités.

Pourquoi faire du calcul mental au collège ?

Nous allons apporter des réponses de plusieurs types à cette question. Tout d'abord, le calcul mental permet d'enrichir les conceptions numériques des élèves. D'autre part, plusieurs de nos recherches ont montré qu'une pratique régulière de calcul mental peut aider à la résolution de problèmes numériques. Nous développons par la suite trois types de manifestations de cette aide. Une pratique régulière de calcul mental libère de l'espace mental pour résoudre des problèmes. Elle permet d'accroître les capacités d'initiative des élèves : ceux-ci, en faisant des essais, peuvent explorer rapidement différentes voies de résolution d'un problème. Enfin, nous présentons un dispositif d'enseignement qui renforce ces deux premiers effets. Il s'articule autour de trois axes : une pratique régulière de calcul mental, l'explicitation par le professeur de méthodes de résolution de problèmes et la production régulière par les élèves d'écrits mathématiques issus d'un débat collectif de type bilan de savoirs.

A cette occasion, nous présentons également une suite d'activités de calcul mental testées dans des classes de sixième et cinquième.

1. LE CALCUL MENTAL ENRICHIT LES CONCEPTIONS NUMÉRIQUES DES ÉLEVES

Le calcul mental nous semble un domaine privilégié pour tester les conceptions numériques des élèves et leur disponibilité. C'est un moment où l'on peut mettre à distance les algorithmes écrits et de ce fait, avoir accès plus aisément aux conceptions numériques : le temps étant limité, la nécessité de calculer rapidement amène les élèves à abandonner, dans bien des cas, les algorithmes opératoires standards, sûrs mais trop lents, et à mettre en œuvre des procédures révélatrices des conceptions qu'ils se font des nombres, ces conceptions étant évidemment liées à la numération (décimale), aux propriétés des opérations (fonctionnant souvent de façon implicite).

Prenons un exemple : *calcul du produit* 32×25 :

Si le calcul est fait par écrit, on ne peut tester que l'aptitude de l'élève à mettre en œuvre un algorithme écrit et sa maîtrise.

Si le calcul est fait rapidement et mentalement, l'élève peut être amené à abandonner cette technique au profit de procédures plus économiques mais nécessitant des décompositions additives ou multiplicatives des facteurs et ceci en liaison avec les propriétés de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité...). Voici plusieurs types de calculs possibles :

- $32 \times 25 = 30 \times 25 + 2 \times 25 = 10 \times 75 + 50$
  $= 750 + 50 = 800$
- $32 \times 25 = 32 \times 20 + 32 \times 5$
  $= 32 \times 2 \times 10 + 32 \times 5$
  $= 64 \times 10 + 160 = 640 + 160 = 800$
- $32 \times 25 = 8 \times 4 \times 25 = 8 \times 100 = 800$
- $32 \times 25 = 32 \times 100 / 4 = 3200 / 4 = 800$
- $32 \times 25 = 32 \times 50 / 2 = 1600 / 2 = 800$
- etc.

L'élève choisit telle ou telle procédure dans un souci d'économie tenant compte de sa pratique et de sa familiarisation avec certains algorithmes. Ce choix peut faire intervenir la mémoire, la disponibilité des décompositions des nombres, la fatigue due aux calculs intermédiaires...

Le calcul mental nous semble être un moment privilégié de l'apprentissage pour enrichir les conceptions numériques et leur domaine de disponibilité, accroître la familiarisation de l'élève avec les nombres et les opérations, faire fonctionner et s'approprier les propriétés des opérations, enrichir, diversifier, étendre les procédures de calcul.

Les séances de calcul mental sont des espaces de travail intensif à la fois du point de vue individuel et collectif. En effet, les élèves travaillent vite, changent plus ou moins rapidement de techniques, de démarches, sont amenés à en explorer de nouvelles. De plus, on peut constater une émulation, une dynamique dans la classe. S'il y a explicitation, les élèves sont amenés à comparer les différentes procédures, à effectuer un choix entre celles-ci ; ce choix dépend de la nature des données et des calculs à effectuer. Cette confrontation permet d'accroître les capacités calculatoires de chacun. Les activités de calcul mental sont en général des activités motivantes.

2 Dans ses numéros 398 (avril-mai 1995:531-550) et 399 (juin 1995:675-685), le Bulletin de l'APMEP a publié d'autres exemples concernant les quatre numérations de position apparues dans l'Histoire.

On constate un gain de temps provenant de l'économie réalisée par le non recours à l'écrit et par le rythme, la succession rapide des activités.

Description des activités régulières de calcul mental

Les activités de calcul mental proposées par les enseignants des classes où nous avons travaillé s'inscrivent dans les apprentissages mathématiques en cours. Les activités comportent à la fois des calculs et des résolutions mentales de problèmes numériques. Nous proposons en annexe 1 des exemples d'activités en sixième et en cinquième.

En sixième, voici quelques exemples d'exercices de calcul mental : compter et décompter de n en n (n entier ou décimal) ; additions, soustractions, multiplications et divisions mentales dans N^+, D^+ et Q^+ (notamment, opérations faisant intervenir des nombres particuliers : multiplication par 15, 25, 0,5... , «règle des zéros») ; jeux faisant intervenir des calculs mentaux comme «le compte est bon», «objectif zéro» [1] , jeu de Syracuse [2] ..., calcul d'ordres de grandeur, résolution mentale de problèmes numériques ; fractions (comparaison, recherche de fractions équivalentes, transformations d'écritures) ; proportionnalité et pourcentages.

En cinquième, on retrouve les types d'exercices précédents avec un accent mis sur les fractions et les pourcentages. Rajoutons des exercices sur la distributivité, les «expressions numériques» et les règles de priorité des opérations...

La gestion des séances de calcul mental est semblable dans les deux niveaux de classe : le professeur s'attache à faire expliciter oralement les différentes méthodes de calcul mises en œuvre par les élèves, à les faire comparer. Les stratégies erronées sont également explicitées et analysées collectivement.

2. LE CALCUL MENTAL PEUT ETRE UNE AIDE À LA RÉSOLUTION DE PROBLEMES NUMÉRIQUES

Nous développons ci-dessous trois aspects de cette aide.

2.1. Le calcul mental libère de l'espace mental pour la résolution de problèmes numériques

Nous nous appuyons sur une expérimentation décrite dans le cahier de DIDIREM n°27 “ Rapports entre habiletés calculatoires et “ prise de sens ” dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire ” (D. Butlen, M. Pezard, Paris 1996) , menée dans des classes de CM2[11].

Nous avons comparé les performances des élèves de classes de CM2 entraînées au calcul mental et de classes de CM2 témoins lors de la résolution mentale et écrite de problèmes numériques “ classiques ”. Chaque problème fait intervenir une ou deux des quatre opérations. Nous avons distingué, pour chacune d'elles, deux niveaux de difficulté liés à la “ structure ” du problème (au sens de G. Vergnaud).

1 «le compte est bon» avec cible égale à zéro.

2 n entier, si n est pair, calcul de m=n/2 et si n est impair, calcul de m=3n+1, réitération du procédé.

Pour interpréter nos résultats, nous retenons plus particulièrement le modèle de fonctionnement de l'espace mental résumé par M. Fayol dans [21] se traduisant par l'équation :

$$ET = ES + EO$$

ET : Espace de Traitement total
ES : Espace de Stockage des données et de construction de la représentation associée à un problème
EO : Espace requis par les Opérations

Que l'espace de traitement total ET reste constant ou augmente avec l'âge du sujet, l'espace EO diminue grâce à l'automatisation progressive des opérations. Cette diminution se ferait au profit d'un meilleur stockage des données dans ES et d'une meilleure construction des représentations des problèmes.

Nous avons constaté au cours de nos recherches qu'un entraînement régulier au calcul mental améliore les performances pour une certaine catégorie de problèmes numériques : ces problèmes doivent être assez familiers aux élèves mais pas trop. L'exemple type pour une classe de CM2 semble être celui des problèmes additifs de compositions de transformations, exemple : *Au premier arrêt d'un autobus 8 personnes montent, au second arrêt 12 personnes descendent, au troisième arrêt 9 personnes descendent. Y a-t-il plus ou moins de personnes dans l'autobus quand il repart après ce troisième arrêt, combien en plus ou en moins ?*

Quand le modèle sous-jacent au problème n'est pas très familier à l'élève, il semble qu'un entraînement au calcul mental réduit l'espace mémoire consacré à la gestion des opérations et au stockage des données au profit de l'espace consacré à la représentation du problème. Ainsi, les élèves des classes entraînées au calcul mental non seulement calculent mieux mais aussi reconnaissent davantage les opérations à effectuer ; les erreurs de «modèle» sont alors moins nombreuses.

Un entraînement au calcul mental, en améliorant les habiletés calculatoires , favorise une «prise de sens» dans le cas de modèles relativement familiers aux élèves sans pour autant que leur reconnaissance soit automatisée. Nous renvoyons le lecteur pour davantage d'explications au cahier de DIDIREM n°27 publié par l'IREM de Paris 7.

2.2. Le calcul mental accroît les capacités d'initiative des élèves lors de la résolution de problèmes numériques

Comme nous allons le montrer dans l'exemple qui suit, une pratique régulière de calcul mental autorise l'élève à jouer sur la taille des nombres (par exemple, simplifier les données numériques), à rechercher des procédures de résolution non «standards», à faire des essais, à recommencer, à accepter de faire des erreurs... Grâce au calcul mental, l'élève se familiarise avec les nombres et peut explorer rapidement différentes voies de résolution du problème ; il est davantage incité à ne pas recourir immédiatement à certains algorithmes fiables mais parfois coûteux... Cette phase de tâtonnement utilisant le calcul mental peut être déterminante pour trouver la ou les procédures conduisant à la réussite.

Un exemple de recherche : le problème des briques (classe de sixième)

Le problème posé : «*On empile des briques de 0,1 mètre de hauteur pour construire un mur* *de 2 mètres de haut. Combien de briques empile-t-on les unes sur les autres ?»*

Cet exercice est en général très mal réussi quand il est posé dans un devoir écrit. La reconnaissance de l'opération à effectuer ainsi que l'obtention du résultat de l'opération sont deux obstacles importants. Beaucoup d'élèves ne proposent rien ou écrivent une opération en “ tentant leur chance ”, sans chercher vraiment à comprendre.

Voyons comment la pratique du calcul mental et de la résolution mentale de problèmes peut en partie lever ces difficultés.

Lors d'une recherche individuelle, les élèves sont entraînés à mettre en œuvre diverses procédures qui leur permettent d'aborder le problème même s'ils n'en voient pas encore la solution. Nous distinguons trois types de procédures utilisées par les élèves : des procédures numériques d'essais, des procédures que l'on peut qualifier de pré-algébriques et des multiplications “ à trou ”.

Voici quelques procédures mobilisées lors des essais :

— compter combien de fois on doit ajouter 0,1 pour obtenir 2.

“*0,1+ 0,1 + 0,1 + 0,1......= 2*”

— calculer le nombre de briques dans une hauteur de 1 mètre, puis de 2 mètres :

“*0,1 x 10 = 1 donc 20 briques*”

— calculer la hauteur de 2 briques puis le nombre de briques :

“*0,1 x 2 = 0,2 donc 20 briques*”.

— multiplier 0,1 par divers nombres pour trouver lequel donnera 2 : “ *J'ai essayé de multiplier par plusieurs nombres et de me rapprocher de 2 le plus possible* ”.

Ces tentatives, fructueuses ou non, donnent du sens à la question posée ; cette étape est nécessaire pour certains élèves.

Les habitudes de recherche mises en place dans la classe, à l'occasion des activités de calcul mental, font que les procédures d'exploration et d'essai ont un statut reconnu, encouragé par le professeur. Des élèves, qui seraient peut-être bloqués dans un travail écrit habituel par la nécessité de produire une rédaction et une présentation rigoureuses, mettent en œuvre des procédures qui les font avancer dans la compréhension et la résolution du problème. Nous retrouvons ici un résultat déjà mis en évidence par R. Douady (cahier de DIDIREM n°19, IREM Paris 7) à propos du calcul mental : ces activités sont l'occasion pour le professeur de définir de nouveaux contrats.

Certains élèves recherchent un modèle du problème sans forcément utiliser les données numériques de l'énoncé. On peut qualifier ces procédures de pré-algébriques, en voici quelques exemples :

— traduction par une expression littérale très contextualisée, les lettres évoquant les grandeurs :

$B \xrightarrow{\times ?} M$ ou $B \times N ? = M$

— expression du modèle par une phrase sans nombres : “*la hauteur d'une brique multipliée par le nombre de briques est égale à la hauteur totale*”

— transformation des nombres donnés par des nombres plus “simples” : “ *je remplace par exemple 0,1 par 5 et 2 par 50, alors je sais le faire* ”.

— conversions des mesures en centimètres.

La pratique du calcul mental est propice à ce détour éliminant, dans un premier temps, les nombres “difficiles”. Nous constatons, dans ces procédures, un changement de statut des données numériques du problème : celles-ci ne sont plus figées mais peuvent varier. Notons que cela contribue sans doute à l’initialisation de la notion de variable. L’accès au modèle est alors plus aisé.

Une pratique régulière de calcul mental, une amélioration des habiletés calculatoires permettent à l’élève de ne pas recourir immédiatement aux algorithmes écrits trop coûteux dans certains domaines numériques. Par contre, l’élève est amené à explorer rapidement différentes voies mettant en œuvre divers calculs. Le calcul mental donne à l’élève une disponibilité qui est nécessaire à la construction d’une représentation du problème. Les élèves l’expriment dans des extraits de comptes-rendus rédigés quelque temps après : “*Quand un nombre nous fait peur, on le change en chiffre plus facile*” , “*ou par une lettre*”. “*J’ai converti en cm car je trouve que c’est plus simple parce que les nombres sont entiers*”. Nous retrouvons ici certains points de vue développés en psychologie cognitive notamment par J. JULO concernant les différents processus intervenant dans la construction de la représentation d’un problème. Nous reviendrons par la suite sur ce point.

Enfin, nous trouvons des procédures de type “ multiplications à trou ”, notamment la présentation “ *0,1* x *? =2* ” soit directement, soit après les procédures d’essais, soit après les recherches avec des lettres ou avec d’autres nombres : (“ *5* x *? = 50   donc 0,1* x *? = 2* ”).

Cette recherche individuelle est suivie, en sixième, d’un bilan permettant l’explicitation et la comparaison des différentes procédures des élèves. Lors de cette phase, ces derniers privilégient la multiplication à “trou” qui leur semble la mieux adaptée à la résolution du problème : “*Si on connaît le nombre de briques, en le multipliant par 0,1 on obtient 2. On écrit 0,1* x *? = 2* ”

Cette étape permet à certains élèves d’écrire l’expression “ *2 : 0,1* ” qui avait rarement été écrite directement dans la recherche individuelle. Voici ce qu’écrivent des élèves dans leur compte-rendu : “*Pour être sûr de réussir un problème, on peut quelquefois le résoudre à l’envers... Alors on trouve l’opération parce qu’une multiplication à trou correspond à une division. De même, une addition à trou correspond à une soustraction*”.

Cette démarche permet de redonner du sens à la division. Nous avons constaté que certains élèves posent la division ci-dessous et éprouvent de grandes difficultés à la calculer.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 0,1 \\ \cline{2-2} & \\ & \end{array}$$

L’algorithme écrit n’est certainement pas ici l’outil le plus économique pour résoudre le problème. Les élèves qui ne savent pas effectuer cette opération posée doivent pouvoir retrouver les étapes du calcul en revenant au sens. Le passage par la multiplication permet ce contrôle de l’algorithme par le sens.

Connaissant la règle de multiplication par 0,1, les élèves peuvent en déduire la règle correspondant à l’opération inverse : “ *pour diviser un nombre par 0,1, on le multiplie par 10* ”. Cette règle est en cours d’appropriation pour beaucoup d’élèves de sixième. C’est aussi l’occasion de redonner du sens à la propriété utilisée pour diviser par un nombre décimal : *“ on obtient le même quotient si on multiplie dividende et diviseur par un même nombre.* ” Ici, en appliquant cette règle sans recourir à l’algorithme standard, on obtient aisément le résultat.

$$\begin{array}{ccc} & n = 2 : 0{,}1 & \\ \times 10 \downarrow & & \downarrow \times 10 \\ & n = 20 : 1 & \end{array}$$

donc n = 20.

Cette règle, souvent rencontrée lors de calculs mentaux, évite à certains élèves de dérouler inutilement toutes les étapes de l’algorithme écrit comme ci-dessous :

$$\begin{array}{r|l} 20 & \underline{1} \\ \underline{-2} & 20 \\ 00 & \\ \underline{-0} & \\ 0 & \end{array}$$

Nous voyons sur cet exemple qu’une pratique régulière de calcul mental non seulement permet aux élèves de contrôler les algorithmes de calcul mais aussi les amène à explorer différentes voies de résolution. Cette diversité des approches précédant l’exposé d’une procédure “ experte ” aide les élèves à s’approprier le modèle et favorise une meilleure compréhension. Le calcul mental accroît à la fois les compétences calculatoires des élèves et leurs capacités à se construire de bonnes représentations du problème.

Toutefois, nous avons observé que les élèves, notamment en difficulté en mathématiques, ne réinvestissent pas systématiquement les connaissances construites lors des activités de calcul mental. Un dispositif spécifique d’enseignement est souvent nécessaire. Nous allons le décrire dans le paragraphe ci-dessous.

3.3. Intégrée dans un dispositif d’enseignement plus riche, une pratique régulière de calcul mental permet aux élèves de se construire des outils heuristiques

Afin d’accroître l’impact d’une pratique régulière de calcul mental sur la résolution de problèmes numériques, nous avons construit et testé dans des classes faibles un dispositif d’enseignement en sixième et cinquième.

Nous appuyant sur des résultats de recherches effectuées en didactique des mathématiques mais aussi en psychologie cognitive et en socio-linguistique, nous avons articulé notre ingénierie autour de trois axes : une pratique régulière de calcul mental, une explicitation régulière, par le professeur, des méthodes rencontrées en mathématiques ; un recours à la production d’écrits collectifs.

Cette production collective d’écrits mathématiques, de type bilan de savoirs, est supposée, dans nos hypothèses, favoriser une distanciation de l’élève par rapport à l’action et au contexte de l’apprentissage, une explicitation, par l’élève, des notions et méthodes fréquentées et plus généralement une décontextualisation de celles-ci. Or nous supposons que cette décontextualisation favorise la résolution de problèmes en général.

a. Problématique et cadre de la recherche

Nous nous appuyons en particulier sur certaines recherches en psychologie cognitive portant sur la construction de la représentation d’un problème.

Selon M. Fayol [21], la construction de la représentation d'un problème se trouverait sous la dépendance de deux facteurs : d'une part, le recours plus ou moins facile au mime de l'action et d'autre part, la familiarité plus ou moins grande avec le type de texte de l'énoncé. M. Fayol considère que le sujet se construit une représentation globale du problème numérique de type «schéma» auquel sont associées des procédures. Cela l'amène à distinguer les sujets «novices» des sujets «experts». Les premiers ne disposant pas de schéma en mémoire à long terme (MLT) doivent stocker en MCT (mémoire à court terme) les informations du problème et en élaborer une représentation globale. Dès lors, il y a risque de surcharge en mémoire de travail. Au contraire, les seconds, à la lecture de l'énoncé du problème, peuvent sélectionner et activer en mémoire le «schéma» adéquat.

J. Julo dans [27] considère que : " *se représenter un problème, c'est d'abord se représenter un objet particulier défini par un ensemble d'informations qui nous est fourni à son propos (...). C'est aussi se représenter la tâche particulière qui est associée à cet objet.* ".

En psychologie, cette notion de tâche " *sert à désigner l'ensemble formé par le but, les contraintes et les aides dans une situation où la production d'une action est attendue.* "

Il s'intéresse uniquement aux représentations qualifiées de " particularisées " : " *il s'agit de représentations ponctuelles et occasionnelles liées à une situation particulière.* ".

J.F. Richard dans Psychologie Française n°29 propose comme définition de la représentation d'un problème : « *un problème est défini par trois catégories d'éléments : la situation initiale, la situation terminale ou but à atteindre, les transformations (matérielles ou symboliques) permises pour y parvenir. La représentation du problème est l'interprétation que le sujet se donne de ces différents éléments.* «

J. Julo définit dans [27] trois processus qui lui paraissent importants dans la construction de représentations particularisées de problèmes : le processus d'interprétation et de sélection, le processus de structuration et le processus d'opérationnalisation. A propos de ce dernier, il souligne le rôle bénéfique du tâtonnement dans la construction de la représentation d'un problème : dans le cas où cette dernière ne conduirait pas immédiatement à une procédure de résolution, le tâtonnement permet à celle-ci de se transformer, d'évoluer.

Il évoque notamment deux cas permettant de mieux comprendre comment l'élève élabore des procédures de résolution. Le premier cas est celui de la mobilisation " d'un prototype de problème " " *auquel se trouvent associées des connaissances opératoires immédiatement transformables en procédures de résolution* ". Le second cas est celui des problèmes dans lesquels l'élève peut agir, faire des essais, tâtonner. L'étude de ce cas l'amène à préciser la notion d'heuristique : " *il s'agit de connaissances propres à la résolution de problèmes qui ne conduisent pas directement à la solution d'un problème donné mais qui augmentent la probabilité de découvrir celle-ci* ". Il les définit aussi comme des règles d'action qui orientent la recherche dans une direction ou dans une autre.

Grâce à l'ingénierie mise en place, nous pensons intervenir sur le processus de construction des représentations des problèmes. Nous faisons l'hypothèse que le calcul mental facilite l'action des élèves lors de la résolution d'un problème. Leurs connaissances sur les nombres étant plus disponibles, ils s'autorisent davantage à faire des essais et ce d'autant plus qu'ils sont mieux habitués à adapter, lors des calculs mentaux, leurs stratégies aux données numériques.

Nous pensons que ces tâtonnements contribuent à renforcer les processus de structuration et d'opérationnalisation évoqués plus haut et donc favorisent la construction de représentations du problème. Cet effet serait d'autant plus important qu'il s'appuie d'une part, sur une explicitation régulière de méthodes par le professeur et d'autre part, sur un retour des élèves, collectif, périodique et passant par l'écrit, sur les situations fréquentées. Nous sommes toutefois conscients que le tâtonnement a ses limites dans la mesure où il ne débouche pas forcément sur une procédure de réussite.

Notre recherche reprend aussi certains résultats de travaux portant sur un enseignement " méta " (ou de méthodes) en mathématiques, notamment ceux de A. Robert et J. Robinet [37], de D. Butlen et M. Pezard [8], de Marc Legrand [30].

b. Description du dispositif d'enseignement

Nous avons testé ce dispositif dans une classe de CM2, dans une classe de sixième (collège de Maisons-Alfort, 94) et une classe de collège suivie pendant deux ans (en sixième et cinquième, collège de Vanves, 92). Les élèves testés sont souvent en difficulté en mathématiques : la classe de sixième de Maisons-Alfort est une classe faible ; la classe de sixième, suivie en cinquième, est la plus faible du collège de Vanves.

Les activités régulières de calcul mental (voir annexe 1)

La classe de CM2 pratique régulièrement, toute l'année, du calcul mental, sous deux formes : d'une part des activités brèves et régulières (5 à 10 minutes tous les jours) ; d'autre part, des activités plus soutenues (environ trente minutes, une fois par semaine) au cours desquelles, il y a notamment une explicitation des différentes procédures utilisées ou susceptibles de l'être.

Les professeurs des deux classes de sixième et de la classe de cinquième consacrent, tout au long de l'année, 1 heure 30 sur trois semaines au calcul mental se découpant dans l'ordre de la façon suivante : trois séances de 10 minutes, une séance plus importante de quinze à vingt minutes de bilan, une séance de 45 à 50 minutes de production collective d'écrits.

La situation de production d'un écrit collectif

Tous les deux semaines en CM2, toutes les trois semaines dans les classes de collège, nous avons mis en place une situation spécifique de «bilan et production d'un écrit collectif», organisée ainsi : deux élèves de la classe doivent, en dehors du temps scolaire, rédiger un texte de quelques lignes (entre 5 et 10 lignes) résumant tout ce qui a été appris d'important en calcul mental depuis la séance précédente et notamment ce qu'il est utile de retenir de ces activités pour résoudre des problèmes numériques.

La consigne donnée aux élèves est la suivante : *«En 10 lignes maximum, vous rédigez un texte résumant tout ce qui a été appris depuis la dernière séance pendant les activi-*

tés de calcul mental et de résolution mentale de problèmes ; vous préciserez si ce que vous avez appris lors de ces activités vous a été utile dans d'autres activités.»

Cette consigne a fait l'objet d'explicitations orales renouvelées à chaque séance (du moins au début) permettant de clarifier l'attente du professeur.

Le texte, écrit au tableau ou sur une feuille lisible par tous, est soumis au débat de l'ensemble de la classe pendant vingt à trente minutes au CM2, trente à quarante minutes au collège. Il est éventuellement amélioré collectivement puis adopté par la classe. Il est ensuite recopié dans un classeur (individuel mais aussi collectif) ; chaque élève peut ainsi y avoir accès. L'ensemble de ces textes constitue une mémoire collective écrite du travail effectué par les élèves dans le domaine numérique. Ils explicitent ainsi ce qu'ils jugent collectivement important de retenir des activités pratiquées.

Cette situation a un double but de diagnostic et d'apprentissage.

D'un point de vue de diagnostic, nous pensons avoir ainsi accès à ce que les élèves retiennent des activités de calcul mental faites en classe, à ce qui est important pour eux, et dans une certaine mesure, à certaines de leurs conceptions des nombres et des propriétés des opérations. Nous pensons recueillir des indices sur le niveau de disponibilité de ces connaissances ainsi que des indications sur certains réinvestissements d'une pratique régulière de calcul mental dans la résolution mentale et écrite de problèmes.

Du point de vue de l'apprentissage, nous admettons que ces séances où les élèves doivent produire un écrit collectif leur permettent de prendre du recul par rapport aux méthodes mises en œuvre, de les dépersonnaliser, de les décontextualiser et donc de mieux se les approprier.

Afin de mieux mesurer les effets de notre ingénierie et de préciser l'apport des activités de calcul mental et de production d'écrits collectifs à la résolution de problèmes, nous avons recueilli, en fin d'année, des textes individuels de bilan dans les classes entraînées et dans des classes témoins (2 classes de CM2, de sixième et de cinquième). D'après les enseignants, ces dernières sont constituées, dans l'ensemble, d'élèves ne présentant pas de difficultés particulières.

Les élèves des classes entraînées et des classes témoins de CM2 et de sixième doivent écrire en fin d'année (mois de juin) un texte individuel correspondant à la consigne cidessous : *«Vous devez écrire un texte résumant tout ce que vous avez appris d'important cette année pour résoudre des problèmes, tout ce qu'il faut retenir, utiliser, faire, pour savoir résoudre des problèmes où interviennent des nombres. Le texte ne doit pas être trop long. Il doit tenir sur une feuille.»*

Pour les élèves de cinquième, la consigne est légèrement différente : *«Ecris tout ce qui te semble important de retenir à propos de ce que tu as appris cette année en calcul mental et plus généralement ce qui te sert dans la résolution de problèmes.»*

c. Méthodologie adoptée pour analyser les différentes productions des élèves

Nous avons conduit deux types d'analyse. La première concerne le processus de décontextualisation et de conceptualisation des notions mathématiques et des méthodes ; en particulier, nous avons étudié le rôle d'une production collective d'écrits dans ces processus. Nous renvoyons le lecteur à la lecture de communications publiées dans les actes du colloque d'Orléans (juin 1998) organisé par la Commission Inter-IREM Premier Cycle et dans ceux du colloque de Limoges (mai 1999) organisés par la COPIRELEM.

Nous ne décrivons ici que la seconde analyse qui porte sur l'impact du dispositif d'enseignement sur la résolution de problèmes numériques.

Nous n'abordons donc que les problèmes méthodologiques liés à cette dernière.

Des textes collectifs, nous ne retenons pour cette seconde analyse que les indications sur le réinvestissement éventuel du calcul mental dans la résolution de problèmes numériques.

Pour analyser les bilans individuels des élèves, nous avons construit une grille faisant intervenir différents critères : la nature des contenus mathématiques abordés, la présence d'énoncés de méthodes (méthodes générales, de résolution de problèmes, de calcul, de calcul mental), les références aux activités de calcul mental et les éléments d'explicitation d'un éventuel apport du calcul numérique à la résolution de problèmes (calcul mental ou autres types de calcul numérique).

Nous devons signaler une limite méthodologique : les informations recueillies sont essentiellement de caractère déclaratif. Les élèves, individuellement comme collectivement, sont amenés à expliciter par écrit des notions et des méthodes ; ces déclarations ne sont pas forcément synonymes d'actions ou d'apprentissages. Un élève qui explicite une méthode de résolution de problèmes ne l'utilise pas forcément et inversement un élève peut l'utiliser sans l'expliciter.

De plus, le caractère déclaratif des bilans peut être renforcé par des effets de contrat : l'élève peut, par exemple, «réciter» le discours méthodologique du maître sans pour autant l'utiliser dans la réalité.

Nous considérons toutefois que ces productions nous donnent des informations, parfois incomplètes, mais toujours révélatrices des apprentissages effectués. Notons que les textes obtenus occultent parfois certaines activités, en particulier celles devenues habituelles, au profit d'activités nouvelles.

d. Des résultats de cette expérimentation

Des références plus nombreuses aux pratiques de calcul mental ; vers la construction d'outils heuristiques

Deux élèves sur trois des classes entraînées de CM2 et de sixième de Vanves évoquent l'apport du calcul mental à la résolution de problèmes. Cette proportion est un peu plus faible en cinquième (un élève sur deux).

L'analyse comparée des textes de bilan individuel des différents niveaux fait apparaître plusieurs résultats convergents. Les élèves des classes de CM2 témoins n'évoquent pas explicitement un apport du calcul mental à la maîtrise des calculs. Certains élèves de sixième des classes témoins (en nombre très peu important) évoquent le calcul mental essentiellement à travers la connaissance des tables. Dans les classes témoins de cinquième, les rares apports du calcul mental se réduisent à une meilleure maîtrise des calculs exceptés pour 3 élèves (sur 56) qui évoquent l'utilité des arrondis ou d'un ordre de grandeur. Ce résultat n'est pas vraiment remis en cause par l'analyse des bilans individuels d'un autre échantillon constitué uniquement de bons élèves des différents niveaux. Dans les classes non entraînées, l'apport du calcul mental est donc finalement peu explicité par les élèves et essentiellement calculatoire.

L'apport est tout autre dans les classes où notre ingénierie a été mise en oeuvre.

L'analyse des déclarations des élèves des différents niveaux scolaires fait apparaître une graduation dans les apports du calcul mental à la résolution de problèmes.

Tout d'abord, en CM2, une pratique régulière de calcul mental débouche sur une plus grande aisance et une plus grande rapidité de traitement des opérations lors de la résolution de problèmes numériques.

En sixième, l'apport est plus riche : les techniques étant plus sûres, les élèves utilisent le calcul mental d'une part pour prévoir et contrôler leurs résultats (" *Pour moi, c'est important de trouver l'ordre de grandeur des opérations car après on peut comparer à son résultat et il faut trouver un résultat très proche de l'ordre de grandeur"),* d'autre part pour faciliter leur recherche, par exemple, en simplifiant les données numériques du problème.

Cet apport est encore plus riche en cinquième où nous décelons un changement de statut des nombres dans un énoncé de problème : l'élève peut remplacer les données numériques soit par des nombres plus simples (arrondis ou plus petits) soit par des lettres pour trouver plus facilement le raisonnement à effectuer (" *si dans des problèmes on a des chiffres difficiles, on peut les remplacer par des lettres ou par des nombres plus simples "* ou bien " *quand il y a des nombres compliqués, on les simplifie ; après les avoir simplifiés, on cherche une méthode et lorsque l'on trouve on l'applique aux nombres compliqués "* ou bien encore *«quand je fais du calcul mental, j'utilise beaucoup de façons pour trouver le résultat. Ma façon dépend beaucoup des nombres ou de la question du problème»*. Les données numériques ne sont plus «figées» mais peuvent varier ; l'accès au modèle est alors plus aisé. Le calcul mental devient donc un outil de recherche lors de la résolution de problèmes.

Dans un premier temps, notre ingénierie permet donc une explicitation de la part des élèves des apports du calcul mental à la résolution de problèmes ; puis, en les amenant à dépasser les habiletés calculatoires, elle débouche sur de nouveaux apports. Grâce à une prise de distance par rapport aux données numériques et à une exploration plus aisée des relations entre ces données, la recherche du modèle se trouve facilitée. Nous pouvons dire que ce nouvel apport relève de l'heuristique dans la mesure où il aide l'élève à acquérir des stratégies de résolution de problèmes numériques.

L'analyse des bilans individuels des élèves des classes témoins montre qu'un enseignement méthodologique «classique» [3] ne suffit pas seul, du moins à ce niveau de scolarité, à créer un lien entre les apprentissages effec-

3 Nous entendons par enseignement méthodologique «classique» un apprentissage des grandes étapes de résolution d'un problème, assez indépendant des contenus mathématiques ou bien l'explicitation de certaines «attitudes de bon élève».

tués en calcul mental et ceux relatifs à la résolution de problèmes. Les élèves évoquent des étapes de résolution indépendantes des contenus : lecture «intelligente» de l'énoncé, tri des données, recherche de l'opération, calcul, vérification en recalculant, rédaction d'une phrase réponse... Ils explicitent d'autre part certaines règles de conduite du «métier de bon élève» : bien présenter ses calculs, bien rédiger, réfléchir...

Ces attitudes et compétences sont sans doute importantes pour les apprentissages mais on peut légitimement s'interroger sur leur efficacité quand elles ne s'accompagnent pas d'outils mathématiques mobilisables lors de la résolution effective de problèmes.

Les effets de notre dispositif se situent davantage au niveau de l'activité mathématique de l'élève.

Les résultats de notre recherche confirment et précisent l'apport du calcul mental à la résolution de problèmes numériques. Notre ingénierie semble permettre aux élèves de dépasser les effets d'un enseignement méthodologique «classique» et leur apporter des outils de recherche qui relèvent de l'heuristique. En effet, l'élève devient davantage capable d'explorer les relations entre les données d'un problème soit en utilisant des techniques proches de l'algèbre (remplacer des nombres par des lettres et écrire les relations en jeu), soit en jouant sur la taille et la nature des nombres (remplacer par des nombres plus simples, passer de D à N...).

e. Un chemin original pour certains élèves en difficulté

Les outils heuristiques construits lors de notre expérimentation pourraient aider les élèves de collège à s'approprier une démarche algébrique. En effet, explorer les relations entre les données d'un problème, remplacer les nombres par des lettres… sont des techniques qui seront , par la suite, utilisées en algèbre, en particulier quand il s'agit de " mettre en équation " un problème. Il semble que notre ingénierie serait efficace à un moment bien particulier du cursus et sans doute pour des élèves présentant des difficultés moyennes. En effet, elle doit précéder un enseignement d'algèbre, permettre de donner du sens à celui-ci en s'appuyant sur des exemples de transformations de procédures arithmétiques en procédures " pré-algébriques ". Mais elle ne doit pas intervenir trop tard car une démarche algébrique institutionnalisée en écraserait les effets. D'autre part, ce passage risque par contre de s'avérer inutile pour certains élèves capables de s'approprier rapidement une démarche algébrique.

Ces outils heuristiques peuvent être interprétés comme une étape dans l'appropriation des méthodes explicitées par le professeur. Celles-ci, grâce aux expériences accumulées en calcul mental et à une prise de distance due aux écrits collectifs, se concrétisent tout en gardant un degré de généralisation suffisamment large pour être réutilisables dans des contextes voisins. Ainsi, par exemple, la phrase " *chercher l'opération* " afin de répondre à la question posée, se transforme en " *remplacer les nombres par des nombres plus simples pour trouver l'opération* ". La première reste souvent un " geste " vide de sens pour des élèves en difficulté , elle s'avère tout aussi inutile pour des élèves ayant déjà construit un schéma automatique de reconnaissance… Ainsi, des démarches trop formelles ou trop générales pour des élèves plutôt faibles peuvent s'ancrer dans des expériences individuelles tout en gardant un certain degré de généralisation. Ces démarches ne seraient pas possibles pour ces élèves sans l'aide de leurs pairs et sans l'explicitation de méthodes par le professeur. Chaque élève peut se construire un ensemble d'expériences, de règles d'action partiellement décontextualisées, qui lui donnent de nouvelles possibilités de formulation et d'action.

Ces étapes intermédiaires dans la construction d'outils heuristiques ou dans l'acquisition et la mise en œuvre de démarches " pré-algébriques ", peuvent constituer des étapes originales, nécessaires pour certains élèves en difficulté .

Ce cheminement n'est possible que si certaines contraintes institutionnelles et cognitives sont dépassées. En particulier, cette construction demande du temps ; notre recherche montre que les résultats ne deviennent vraiment significatifs que dans la classe de cinquième, soit donc au bout de deux années de pratique régulière de calcul mental et de production collective d'écrits mathématiques.

Dans une autre analyse [12]de notre expérimentation (ne faisant pas l'objet de cet article), nous décrivons un autre type d'étape intermédiaire. Nous montrons que notre ingénierie crée des conditions permettant à des élèves faibles, sur une durée de deux ans, de produire des énoncés mathématiques ou de méthodes intermédiaires entre l'exemple seul et l'énoncé formel. En particulier ce sont surtout des élèves en difficulté moyenne qui bénéficient de notre expérimentation. Les énoncés ainsi produits avec l'aide de leur pairs et grâce à l'explicitation de méthodes par le professeur sont davantage décontextualisés tout en restant ancrés dans leur expérience personnelle. Nous montrons que ce type d'énoncé semble correspondre à une étape intermédiaire dans la conceptualisation pouvant s'avérer indispensable pour certains élèves en difficulté moyenne .

En conclusion, nous pensons avoir montré dans cet article comment, au collège, une pratique régulière de calcul mental peut, sous certaines conditions, constituer une aide à la résolution de problèmes numériques.

ANNEXE

Cette annexe présente des exemples d'activités de calcul mental proposées dans chaque niveau de classe.

ANNEXE 1.a :
Exemples d'activités de calcul mental, niveau sixième

1. Compter décompter

Compter de 0,3 en 0,3 à partir de 7,2
Décompter de 0,3 en 0,3 à partir de 7,2

2. Ordre de grandeur

Donner une valeur approchée de 0,195 x 4,11 ; de 0,294 x 0,4
Le quotient de la division 9675 : 43 est-il de l'ordre de 2, 20 ou 200 ?
Ordre de grandeur de 21,7 x 39, à l'unité près.
Des deux fractions 5/7 et 7/5, laquelle est plus petite que 1 ?

3. Opérations mentales

407,8 – 100	407,8 – 10	407,8 – 0,1	407,8 – 1/100

4. Calcul rapide sur les fractions

1/9 x 3/5	2/7 x 3/4	23,5 + 4/100	...

Donner quatre écritures différentes de 35/8 en utilisant les signes +, -, x.

5. Problèmes à résoudre mentalement

J'achète 48 bonbons à 0,80 F l'un. J'ai 24 F. Ai-je assez ? J'ai 50 F. ai-je assez ?

J'ai 18 F. dans mon porte-monnaie, combien au maximum puis-je acheter de sucettes coûtant 1,50 l'une ?

2 groupes montent dans un car. Il y a 30 personnes dans le premier groupe, le nombre de personnes du deuxième groupe est égal au 2/3 de celui du premier. Combien de personnes sont montées ?

On sait que deux élèves sur trois ont plus de 12 au contrôle, donner 3 exemples de classes, en indiquant pour chacune le nombre total d'élèves et le nombre d'élèves ayant eu plus de 12 au contrôle.

ANNEXE 1.b :
Exemples d'activités de calcul mental, niveau cinquième

1. Ordre de grandeur d'un résultat

73 x 10,2   4731,4 + 5036   1000,3 – 218

2. Priorité des opérations, énoncé de problème

Effectue 200 + 4 x 30
Invente un problème qui se résout par ce calcul.

3. travail sur les fractions

Ecris sous forme d'un entier le plus grand possible plus une fraction

3/2   14/3

Donne une autre écriture fractionnaire de :

4/6   7/3

Ecris en ordre croissant :

4/5   2/5   7/4   7/5

Ecris une fraction égale à :

0,25   1,2

Ecris si possible un nombre décimal égal, sinon la valeur approchée à 0,01 près de :

3/2   3/4   2/3

Effectue :   3/7 + 5/7   1 – 7/9   2 + 3/5
6 x 7/3   2/5 x 4/5   2/7 x 3/4

4. Problèmes à résoudre mentalement

Julien a eu 30 sur 40 au premier devoir et 20 sur 30 au deuxième, quelle est la meilleure note ?

Huit garçons et quatre filles mangent chacun un petit pain au chocolat à 2,50F. pièce Combien les enfants ont-ils dépensé en tout ?

Un rectangle a une longueur de 6 cm et une largeur de 6 cm, un autre rectangle a une longueur de 17 cm et une largeur de 15 cm. Leurs côtés sont-ils proportionnels ?

Un pull valait 200 F. Combien vaut-il après une augmentation de 25% ?

Après 20% de réduction, un livre coûte 40 F. Combien coûtait-il avant la réduction ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLARDICE B.S., GINSBURG H.P. (1983) Children's psychological difficulties in mathematics In H.P. Ginsburg (Ed), *the development of mathematical thinking*, New-York Academic Press.

[2] BAUTIER E. (1995) *Pratiques langagières, pratiques sociales. De la sociolinguistique à la sociologie du langage*, Paris, l'Harmattan

[3] BAUTIER E. (1996) Les élèves et le rapport au savoir, In COPIRELEM*documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, Actes du stage d'Angers de la COPIRELEM*, IREM Paris VII

[4] BAUTIER E., ROBERT A. (1988) Réflexions sur le rôle des représentations méta-cognitives dans l'apprentissage des mathématiques, *Revue Française de Pédagogie* n°84, pp 13-19, INRP Paris

[5] BOERO P. (1989) Mathematical literacy for all experiences and problems Proceedings, In PME XIII

[6] BRIAND J. (1993) *l'énumération dans le mesurage des collections. Un dysfonctionnement dans la transposition didactique*, Doctorat de Didactique des mathématiques, Bordeaux, Université de Bordeaux 1

[7] BRISSIAUD R. (1989) *Comment les enfants apprennent à calculer.*, Paris, Ed. RETZ.

[8] BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de CE2 en difficulté, *cahier de DIDIREM* n°13, IREM de Paris VII, Université de Paris VII.

[9] BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Elèves en difficulté, situations d'aide et gestion de classe associée , *Grand N* n°50 , pp.29-58 , IREM de Grenoble, Université de Grenoble 1.

[10] BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Calcul mental et résolutions de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2 *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 12-2-3, La pensée sauvage, pp. 319-368

[11] BUTLEN D. et PEZARD M. (1996) Rapports entre habileté calculatoire et prise de sens dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une

pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire, *cahier de DIDIREM* n°27, IREM de Paris VII, Université de Paris VII.

[12] BUTLEN D. et PEZARD M. (1999) Rôle de l'écrit collectif dans la conceptualisation de notions mathématiques et dans l'acquisition de méthodes de résolution de problèmes, article à paraître.

[13] BROUSSEAU G. et CENTENO J.(1992), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol 11/2.3, La pensée sauvage

[14] CHARLOT B., BAUTIER E. et ROCHEX J.Y. (1992) *Ecole et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Paris, Armand Colin

[15] CHEVALLARD Y. (1984-1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre, 1ère, 2ème partie, *Petit X* n°5, 19, IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier.

[16] CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre, 3ème partie *Petit X* n° 23, IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier.

[17] CONNE F. Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problème d'arithmétique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 5-3

[18] CONNE F. (1993) Savoirs et connaissances *Recherche en Didactique des Mathématiques* , Vol. 13, La pensée sauvage, Grenoble

[19] DENIS M. (1982) Représentation imagée et résolution de problèmes. *Revue Française de Pédagogie* , n° 60.

[20] FAYOL M. (1990) *L'enfant et le nombre*., Neuchâtel, Delachaud / Niestle

[21] FAYOL M. HABDI H. et GOMBERT J.E. (1987) Arithmetic Problems Formulation and Working Memorie Load Laboratoire de Psychologie Université de Bourgogne - Dijon.

[22] FAYOL M. (1985) Nombre, numération et dénombrement. Que sait-on de leur acquisition ? *Revue Française de Pédagogie* n° 70.

[23] FAYOL M. et MAURY S. (1986) Combinatoire et résolution de problèmes aux cours moyens 1 et 2 . *Recherches en Didactique des Mathématiques*., Volume 7-1, Editions la Pensée Sauvage, pp. 63-104

[24] FISCHER J.P. (1981) Développement et fonctions du comptage chez l'enfant de

trois à six ans *Recherches en Didactique des Mathématiques*., Vol 2-3, Editions la Pensée Sauvage

[25] FISCHER J.P. (1988) Complexité de compréhension et d'exécution des opérations arithmétiques élémentaires *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 9-2. Editions la Pensée Sauvage, pp. 133-154

[26] FISCHER J.P. (1987) L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue Française de Pédagogie* n°80

[27] JULO . (1995) *Représentations des problèmes et réussite en mathématiques*, Rennes, Presses Universitaires de Rennes

[28] LABORDE C. (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique*, Thèse de Doctorat d'Etat, Grenoble, Université de Grenoble

[29] LAHIRE B. (1993) *Culture écrite et inégalités scolaires,* Lyon, Presses Universitaires de Lyon

[30] LEGRAND M. (1991) Circuit ou les règles du débat mathématique, In Commission Inter-IREM Université, *Enseigner les mathématiques autrement en DEUG A, première année*, Lyon, IREM de Lyon.

[31] LEGRAND M. (1990) Un exemple de discours sur les mathématiques et leur apprentissage, In Commission Inter-IREM Université, *Enseigner les mathématiques autrement en DEUG A, première année*, Lyon, IREM de Lyon.

[32] LEONTIEV A.N. (1959) Principles of mental development and the problem of intellectual backwardness. In B.J. Simon (Ed), *Educational Psychology in the USSR*. London : Routledge Kegan.

[33] PERRIN-GLORIAN M.J. (1992) *Aires et surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème* Thèse de Doctorat d'État, Paris, Université de Paris VII

[34] RESNICK L.B. (1983) A developmental theory of nomber understanding. In H.P. Ginsburg (Ed), *The development of mathematical thinking*. New-York Academic Press.

[35] RICHARD J.F. (1982) Mémoire et résolution de problèmes, *Revue Française de Pédagogie* n° 60.

[36] ROBERT A., TENAUD I. (1989) Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C, *Recherches en Didactique des Mathématiques* n° 9.1, La Pensée Sauvage, pp 31-70,

[37] ROBERT A. et ROBINET J. (1992) Représentations des enseignants et des élèves *Repères-IREM* n°7; Editions Tropiques, pp.93-99

[38] ROBERT A. et ROBINET J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol 16.2*

[39] ROCHEX J. Y. (1997) L'oeuvre de Vygotski : fondements pour une psychologie historico-culturelle, Note de synthèse, *Revue Française de Pédagogie* n°120, pp 105-147

[40] ROGALSKI. J. (1984) A propos de l'acquisition de la bidimensionnalité chez les élèves d'âge pré-scolaire et scolaire. et Enseignement et acquisition de la bidimensionnalité. *Cahiers de didactique des mathématiques* n° 12 et 13, Paris, IREM de Paris VII.

[41] ROUCHIER A. (1991) *Etude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaire : proportionnalité, structures itéro-récursives, institutionnalisation.* thèse de Doctorat d'état, Orléans, université d'Orléans

[42] SARRAZY B. (1997) Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies métacognitives en mathématiques , *Recherches en didactique des mathématiques* vol. 17/2,La Pensée Sauvage-Editions, pp 135-166,

[43] SENSEVY G. (1994) *Institutions didactiques, Régulation, Autonomie. Une étude des Fractions au Cours Moyen* Thèse de Doctorat, Marseille, Université de Provence

[44] TENAUD I. (1991) *Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C : enseignement de méthodes et travail en petits groupes*, Thèse de Doctorat, Paris, Université de Paris VII

[45] VERGNAUD G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Editions Peter Lang.

[46] VERGNAUD G. (1989) Questions de représentation et de formulation dans la résolution de problèmes mathématiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, Vol 2

[47] VYGOTSKI L. S. (1985) *Pensée et langage*, Paris, Editions sociales.