PROBABILITES, SUITES NUMERIQUES ET PROGRAMMATION

Michel BOURGUET,
Irem de Strasbourg

L'idée de ce travail est née dans des classes de 1ère STI, puis s'est développée en BTS, et je l'ai reprise en TL (enseignement de spécialité).

L'objectif est triple (ou peut-être encore davantage).

J'ai cherché à exploiter des problèmes qui conduisent :

— à raisonner sur des probabilités élémentaires de façon non triviale

— à faire apparaître des suites numériques, définies par des relations de récurrence

— à écrire des programmes effectifs de calcul, à partir de ces relations de récurrence, pour explorer le comportement des suites.

Suivant les classes, ce travail est une conclusion, ou au contraire une introduction à l'un ou l'autre des chapitres considérés. Il ne peut en aucun cas servir d'introduction générale aux probabilités (en 1ère...), parce que les raisonnements probabilistes sont déjà un peu délicats. Par contre, je l'ai utilisé en 1ère STI pour introduire le travail sur les suites (après le chapitre probabilités).

En lycée technique industriel, les élèves ont une approche personnelle importante de la machine programmable, et ils sont demandeurs d'éclaircissements. La partie programmation passe donc assez bien, et peut conduire à des études fines (réflexion sur les limites, sur la précision des calculs, sur la longueur des programmes). Par contre, en section littéraire, certains élèves arrivent en terminale sans avoir la moindre idée de ce qu'est un programme. Les problèmes que je présente ici sont donc très ardus pour eux.

Normalement, j'essaye de faire arriver la classe (ce qui ne veut pas dire chaque élève de façon autonome) à écrire un programme (et des variantes) pour chaque problème :

1) Calcul par récurrence, affichage des premières valeurs de la suite, une à une.

2) Mise en place d'un compte-tours, et affichage direct du 10ème, 20ème, 100ème terme.

3) Mise en place d'un test d'arrêt portant sur une valeur de la suite, ou sur la comparaison de deux valeurs consécutives de la suite.

Si ce travail ne fait pas le tour du programme de probas ou de suites, il peut par contre permettre de voir tout ce qu'un élève du secondaire devrait avoir vu sur les machines à calculer programmables.

J'ai donc employé ces sujets dans différentes classes, et de différentes manières. Il n'y a pas d'ordre privilégié ou naturel. Par contre, il me semble important d'attirer l'attention des collègues qui voudraient essayer sur quelques points :

— Il s'agit toujours de travail dirigé en classe, ce qui suppose échanges, brouhaha, lenteur.

— Il est cependant nécessaire de fractionner chaque problème sur deux ou trois séances, en donnant un travail de rédaction, de réécriture, ou d'expérimentation numérique entre les phases. Cela signifie qu'avec une classe vive, il faut commencer chaque problème vers la fin d'une séance, et finir au début de la suivante.

— Il me paraît important de traiter plusieurs problèmes (ceux que je propose, ou d'autres...) pour que l'accumulation d'exemples fasse bien ressortir l'unité des méthodes.

— J'ai essayé de donner l'un ou l'autre des problèmes en devoir personnel (en BTS, ou en colle de math. spé.). Même à un niveau post-bac, les résultats sont décevants, dès qu'on demande une réflexion totalement individuelle.

Autant la méthode générale d'approche de ces problèmes peut être comprise tôt, avec un faible bagage mathématique, autant la maîtrise complète est difficile pour un élève de lycée.

Enfin, on remarquera que deux des trois problèmes portent sur des suites infinies, et sur leurs limites, ce qui est rigoureusement hors programme actuellement. J'assume pleinement cette escapade, pour de multiples raisons :

— D'abord parce que la question est réelle et concrète, comme on le verra au problème 1, et que tout enfant se l'est posée au moins une fois (souvent de façon un peu moins formelle qu'ici).

— Ensuite parce que l'infini ne peut pas apparaître ou disparaître des préoccupations intellectuelles au gré des programmes. Seul peut varier le formalisme employé pour en parler. Ici, aucun, pour rester en accord avec la lettre des programmes officiels.

— Enfin parce que le troisième problème est rigoureusement fini, et que ça ne le rend pas pour autant plus simple.

Bien entendu, je passe plus de temps à commenter les questions liées à l'infini en TL qu'en 1ère STI !

Il est clair que tout ce travail n'a de sens qu'en classe, et en groupe. Cela pose le problème de l'évaluation individuelle, problème qui, pour moi, n'est pas résolu. A l'issue de cette longue séquence, je ne peux pas donner de note individuelle, quoique ma connaissance des élèves soit bien meilleure (compétences, assiduité au travail, qualités d'expression).

Enfin, les nouveaux programmes de seconde (rentrée 2000) introduisent l'idée de simulation d'un aléa numérique. Je n'ai pas adopté cette démarche en classe, mais je propose quelques réflexions en annexe (annexe IV).

Les deux premiers problèmes sont issus des jeux de hasard où l'on progresse à l'aide d'un dé sur une rangée de cases (jeu de l'oie, petits chevaux...).

Dans tous les cas, on joue avec un dé parfait à 6 faces, mais prenez-en un autre si ça vous chante.

PROBLEME 1

Dans ces jeux, en général, il faut tout d'abord obtenir un 6 pour commencer à avancer. Les questions qu'on se pose sont donc :

— au bout de combien de lancers de dé puis-je espérer avoir ce fameux 6 ?

— se pourrait-il que je ne l'aie jamais ? (et c'est ici que l'enfant est confronté de façon «dramatique» à la question de l'infini).

Cet énoncé très informel provoque un débat houleux dans les classes.

Certains affirment qu'on est absolument sûr d'obtenir un 6 dans les six premiers coups.

D'autres, au contraire, sont convaincus que dans certains cas on peut attendre longtemps, par exemple mille coups (tout en reconnaissant ne jamais l'avoir vu ou vécu...).

L'intérêt de ce débat (si on arrive à le canaliser) est de montrer que la répétition d'un phénomène aléatoire simple et bien maîtrisé (lancer un dé) conduit rapidement à une situation qui échappe à l'intuition.

Ce constat justifie la nécessité d'un vrai calcul des probabilités, pour arbitrer entre les divergences d'intuition.

Il est impressionnant de voir aussi que l'analyse statistique de la réalité (tout le monde se souvient de parties où un des joueurs a attendu plus de six coups pour tirer son 6, mais personne ne se souvient d'avoir attendu mille coups), qui réfute les hypothèses probabilistes spontanées extrêmes, conduit la classe à remettre en cause l'équiprobabilité de l'aléa initial (ils imaginent des dés un peu pervers, capables de faire traîner les débuts de partie, mais pas méchants au point de bloquer complètement le jeu). Bref, si le dé ne se comporte pas comme on attend qu'il le fasse (et les attentes sont contradictoires), c'est qu'il y a autre chose que du hasard (destin, justice,… voilà des mots qu'il faut savoir accepter, gérer à ce moment du cours de maths).

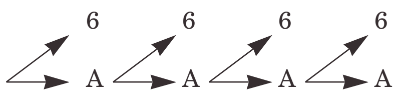
D'autres concluent à la vanité de tout pronostic, c'est du hasard, on ne peut rien dire. L'idée de lois du hasard est choquante pour eux.

Le travail suivant consiste à évaluer, de façon très artisanale, la probabilité de sortir (c'est-à-dire d'obtenir le premier 6) au deuxième, puis au troisième coup. [Sortir au premier coup étant toujours crédité d'une probabilité de 1/6, sans débat].

La difficulté de cette phase est d'amener les élèves à formaliser que «sortir au deuxième coup» signifie «ne pas sortir au premier coup, et tirer 6 au deuxième». Alors que la règle du jeu est claire, la formulation explicite est toujours lente à obtenir. Une fois le problème ainsi formulé, on peut arriver rapidement au résultat $5/6 \times 1/6$, soit avec un arbre, soit avec un tableau (qui conduit à 5/36).

Cette étape doit être menée lentement si on veut que les élèves arrivent à généraliser. Si on note P_n la probabilité de sortir au $n^{ième}$ coup, on obtient $P_n = 1/6 \times (5/6)^{n-1}$... et on a une suite géométrique bien sympathique.

Les recherches sous forme de tableau ne mènent à rien. Par contre, on peut esquisser un arbre :



où A désigne « autre chose qu'un 6 », l'arbre étant naturellement infini.

Prolongements

* P_n est une variable aléatoire. On peut donc travailler sur la somme des P_n , de deux façons :

— soit on programme le calcul des valeurs successives des P_n , et des sommes partielles, puis on constate que les sommes partielles se stabilisent à 1.

— soit on utilise la formule de sommation des suites géométriques, et on constate que, pour n assez grand, $\sum_{i=1}^{n} P_i$ est extrêmement voisin de 1.

Cette activité répond à deux questions :

— la probabilité de sortir après le 100ème coup est très faible, ce qui est conforme à l'expérience,

— la probabilité de ne jamais sortir est nulle, ce qui est très satisfaisant, mais ne veut rien dire !

* On peut introduire la notion d'espérance mathématique, pour donner le nombre moyen de coups nécessaire pour sortir. Au niveau du lycée, le calcul de $\sum_{i=1}^{n} i \times P_i$ est à peu près infaisable (voir annexe 1). Par contre, cette sommation se fait très bien à la machine, et on observe une valeur de stabilisation, qui est 6. Autrement dit, on sort, en moyenne, en 6 coups, ce qui est rassurant.

* On peut évoquer deux applications de ce dernier résultat :

— vérifier statistiquement l'équilibrage d'un dé.

— tester la mémoire d'un animal de laboratoire :

Un animal doit choisir une porte (pour quitter sa cage) ou une manette (pour avoir à manger) parmi 6. S'il lui faut en moyenne 6 coups pour gagner, c'est qu'il choisit au hasard, sans mémoire. S'il lui faut en moyenne 3,5 coups, c'est qu'il choisit au hasard, avec une mémoire parfaite des essais précédents. Entre ces deux valeurs, il a une mémoire courte... En dehors de cet intervalle, l'expérience a un gros biais caché...

Ce dernier exemple n'est pas anecdotique, mais au contraire essentiel pour montrer comment une démarche probabiliste permet de conforter ou de réfuter une hypothèse. On ne peut pas, au lycée, aborder les questions liées à l'interprétation précise des résultats statistiques obtenus dans une telle expérience (voir annexe 3).

PROBLEME 2

On a commencé à avancer sur le jeu. On numérote les cases, et on note P_n la probabilité de s'arrêter sur la $n^{\text{ième}}$ case. Cela peut paraître un peu artificiel comme problème, mais c'est important au jeu de l'oie (où certaines cases procurent des bonifications ou des pénalités à ceux qui s'y arrêtent).

On joue ici avec une règle simple, où le 6 ne fait pas rejouer immédiatement. D'autre part, le parcours est infini, sans boucle.

Les élèves considèrent d'abord que toutes les valeurs de P_n sont égales, parce qu'ils ne voient pas où le problème pourrait être dissymétrique. Puis ils calculent P_1 (1/6), et comprennent alors que P_2 est plus grand.

Assez vite, ils proposent d'écrire toutes les séquences qui permettent d'arriver à la case 2, puis 3, puis 4. Le problème qui se pose alors est celui de l'ordre dans les séquences (« (2, 1), c'est pareil que (1, 2), ou non ? »). Avec les plus courageux et les plus méthodiques, on peut espérer arriver à P_5, peut-être P_6.

Certains vont écrire P_2 , P_3 , P_4 comme sommes de puissance de 1/6. On voit alors apparaître le triangle de Pascal, qu'on peut introduire, ou reconnaître, suivant le niveau des élèves. Cela pourrait permettre d'écrire P_n comme une suite géométrique ($P_1 = 1/6$, $P_{n+1} = 7/6\ P_n$), mais ce n'est guère intéressant parce qu'à P_7, tout change.

En effet, on ne peut pas aller directement de la case départ à la case 7.

Ici s'introduit la deuxième idée, qu'il faut presque toujours souffler aux élèves : exprimer P_n en fonction des valeurs précédentes de la suite, en répondant à la question : Quel est **le** coup qui fait arriver à la $n^{\text{ième}}$ case ? Une fois la question bien posée, bien comprise, la réponse fuse vite : $P_n = 1/6 \sum_{i=1}^{6} P_{n-i}$.

Il reste encore à constater que cette formule vaut aussi pour les petites valeurs de n, en posant $P_0 = 1$ et $P_n = 0$ pour $n < o$, ce qui horrifie les élèves, à tort. En effet, cela signifie qu'on est sûr d'être sur la case départ (ça, ils l'acceptent bien), et sûr de ne jamais être sur les cases avant la case départ, puisqu'elles n'existent pas (ce dernier argument divise les classes entre ceux qui trouvent ça génial, et ceux qui y voient une preuve de plus que « les maths, c'est n'importe quoi... »). De toute manière, ça marche !

La formule de récurrence se prête très mal au calcul de limite (sauf en math. spé. MP*, en diagonalisant une matrice carrée d'ordre 6...). Par contre, on peut très facilement programmer cette formule, et constater qu'au bout d'un certain temps, après de curieuses fluctuations, P_n vaut à peu près 0,2857142857, soit 2/7.

Cette valeur limite est 1/3,5. Or, à chaque coup, on avance en moyenne de 3,5 cases. La relation entre ces deux valeurs est alors évidente pour beaucoup d'élèves, malgré la difficulté d'une moyenne non entière, alors qu'on avance toujours d'un nombre entier de coups.

PROBLEME 3

Autre domaine, sans rapport avec le précédent.

Dans un groupe de n personnes, quelle est la probabilité P_n que deux (ou plus) aient leur anniversaire le même jour ?

L'énoncé est clair, stimule l'imagination des élèves. Dans un premier temps, ils estiment que pour un groupe de la taille d'une classe ($25 \leq n \leq 35$), les conjonctions d'anniversaires sont rares. J'ai parfois fait un travail expérimental : je distribue les listes d'appel des classes de tout le lycée, chaque élève en analyse une ou deux, et on constate des conjonctions dans plus de la moitié des classes, à leur grande surprise.

Un débat curieux peut s'engager sur l'équiprobabilité des anniversaires. Certains y sont très favorables, d'autres très opposés (souvent pour des raisons mineures, du type : et le 29 février ?, ou bien : « il faudrait que la population mondiale soit un multiple de 365 »). Par contre, l'idée de fluctuations saisonnières de la natalité passe très mal, et encore plus mal l'idée de décaler artificiellement les accouchements pour éviter certaines dates (dimanches, jours fériés). Bref, on peut passer du temps sur l'idée de nature, et de lois naturelles du hasard...

Ensuite, le travail probabiliste plus classique consiste à :

1) Etablir que $P_2 = 1/365$, avec l'approximation d'équiprobabilité évoquée ci-dessus.

2) Etablir directement que $P_3 = 3/365 - 2/365^2$, et constater que le calcul direct de P_n est une horreur, surtout quand on voit les différentes conjonctions possibles.

3) Passer à l'événement complémentaire, « Dans un groupe de n personnes, tous les anniversaires sont différents », et sa probabilité Q_n .

4) Argumenter, pour établir le résultat $Q_{n+1} = Q_n \times (365 - n)/365$. En particulier, il faut ici raisonner sur tous les groupes de n personnes, ce qui pose un problème à certains élèves.

5) Application numérique et retour à l'expérience initiale :

$P_n \geq 1/2$, dès que $n \geq 23$,

ce qui est conforme à l'expérience et valide (à peu près) l'hypothèse d'équiprobabilité.

Au lycée, il n'est pas question de chiffrer les affirmations du point 5), mais il est intéressant de montrer, de façon qualitative, les liens entre l'approche théorique et l'approche expérimentale.

Ce problème, assez classique, montre bien que le caractère fini n'est pas un gage de simplicité. En particulier, une formule théorique satisfaisante, comme $Q_n = \frac{A_{365}^n}{365^n}$, ou $Q_n = \frac{365!}{(365-n)!365^n}$ est d'un maniement difficile, si on cherche un emploi direct.

Le calcul sur les factorielles est impossible (la plupart des machines refusent 365 !). Les valeurs de A_{365}^n et de 365^n peuvent aussi sortir des capacités des machines. Par contre, on peut — sur cet exemple — montrer le lien fécond entre écriture symbolique et programmation.

Le travail sur la programmation

Les instructions officielles stipulent qu'un élève de lycée doit être capable de programmer une formule de calcul, une boucle simple, et un arrêt conditionnel. Je suis au regret de constater que cette formation n'est pas partout assurée, et que des étudiants en DEUG ou en CPGE scientifiques sont parfois incapables de mettre en oeuvre ces mécanismes. Les problèmes que je présente ici permettent d'introduire toutes les idées de base. Il convient d'être très souple dans ce travail pour partir du niveau réel des élèves. Le travail à plusieurs est à encourager, malgré le désordre qui semble en résulter, parce que les élèves bidouilleurs transmettent leurs idées mieux que moi, qui reste trop attaché à un certain formalisme de l'expression.

J'ai expérimenté un travail préalable à la programmation complète, en utilisant le mode calcul des machines (T.I. ou Casio...) : Il faut enregistrer toutes les valeurs initiales, puis écrire toute la séquence de calcul en ponctuant avec « : ».

L'instruction «ENTER / EXE» commande la totalité de la boucle, et sa répétition. On peut alors calculer les valeurs successives d'une suite, sans utiliser le mode Programme (à condition de n'avoir qu'une valeur à afficher à chaque étape). Cette approche rudimentaire permet de décomposer les étapes de la programmation, de dissocier les opérations algébriques des opérations logiques.

On trouvera en annexe le schéma des programmes que j'ai élaborés avec les élèves. Il s'agit de ce que j'appelle des programmes jetables, sans aucun souci de mise en page. C'est un choix délibéré pour mettre en évidence les structures.

J'ai omis ici les problèmes techniques d'écriture, je me suis efforcé de rester au plus près d'un langage basique, qui ne tient aucun compte des astuces propres à chaque machine. Il faut prévoir une bonne dose de patience pour passer de ce langage à celui, précis, de chaque modèle de machine. On peut passer (perdre ?...) un temps fou à chercher où se niche chaque instruction, où il faut (ou pas) des signes de ponctuation, etc. On notera que si les élèves savent assez d'anglais pour comprendre le sens de « if », de « go to » ou de « end », « then » est moins naturel, et « else » est presque inconnu [et rares sont ceux qui proposent « otherwise » pour sinon].

Sans vouloir sacrifier à l'anglomanie ministérielle (Claude Allègre étant ministre au moment de la rédaction), je pense qu'on pourrait proposer aux élèves un petit lexique de base de notre discipline [et pas seulement en anglais, d'ailleurs]. Certains ouvrages scientifiques donnent ce genre de lexique en annexe. Pourquoi pas les manuels scolaires ?

En guise de conclusion

Le travail sur ces trois problèmes nécessite six à dix heures en classe. Il faut donc que ce ne soit pas seulement une illustration, une sorte de complément un peu facultatif, mais que ce soit un moment dans l'année où on affronte les questions liées au sens, et aux méthodes des mathématiques.

L'équiprobabilité des faces d'un dé, l'indépendance des tirages ne sont, au départ, que des hypothèses. L'analyse statistique d'un grand nombre de situations expérimentales (problème 1) permet, a posteriori, de les valider... tout en renvoyant à plus tard la question d'un critère de validation plus précis, permettant de diagnostiquer qu'un dé est pipé.

L'équiprobabilité d'autres phénomènes est bien plus difficile à assurer, mais la démarche hypothèse / validation statistique, assimilée sur des exemples de jeux de hasard, peut ensuite être étendue à tous les domaines. C'est alors le moment d'évoquer la notion de modèle, et la démarche de modélisation.

Le lien entre suites et probabilités est important. Dans la succession que je propose, il est intéressant de remarquer que ce lien est presque naturel pour le premier problème, tant la question de sortir à un moment donné n'a de sens que si on n'est pas sorti avant. Il faut plus d'attention pour percevoir qu'il en est de même pour le second problème, qui est pourtant très séquentiel, mais où la perception est brouillée par la difficulté à préciser l'événement antérieur d'un événement donné. Dans le dernier problème, l'approche séquentielle est très abstraite, et rebute les élèves. Curieusement, l'idée de décomposer un groupe de n personnes en un groupe plus petit, et une personne qu'on rajoute est refusée par beaucoup. On voit ici que la notion de suite est très liée à un déroulement visible d'un temps et d'un espace linéaires.

Le processus d'abstraction, qui permet de se servir des suites sur la base d'une mise en ordre choisie par le mathématicien, et non issue de la nature, ce processus est ici rendu apparent alors qu'il est trop souvent au coeur d'un malentendu entre nous et nos élèves, trop évident à nos yeux pour que nous l'explicitions, trop étranger aux yeux des élèves pour qu'ils puissent en imaginer l'existence même.

La même réticence à l'abstraction se rencontre dans ce même problème dès qu'il s'agit de l'aborder sur un plan probabiliste. Au fond, je soupçonne chez de nombreux élèves la tentation de réserver le calcul des probabilités aux situations « vraiment aléatoires ».

Je m'explique : pour eux, au moment où on lance un dé, personne ne peut savoir à l'avance le nombre qui va sortir, alors que, quand on tire au sort des personnes, leurs dates de naissance sont déjà connues. A plus forte raison, pour des groupes « non aléatoires » à leurs yeux, comme une classe, les présents à une fête, ou les généraux d'empire, le caractère déterministe de la constitution du groupe masque l'indépendance d'un autre caractère qui reste aléatoire (ou, pour mieux dire, indépendant).

On aura remarqué que je pense plus ici au problème d'abstraction qu'à celui de modélisation. D'abord parce qu'il faut rétablir l'équilibre entre l'abstraction trop souvent occultée et la modélisation omniprésente. Mais aussi parce que, pour moi, l'abstraction, comme processus dynamique d'extensions de pratiques hors du domaine qui leur a donné naissance, avec ce que cela suppose d'induction, d'associations d'idées, de transpositions ou de transcriptions, est au coeur de l'invention en mathématiques, au coeur de ce qui rend les mathématiques vivantes pour moi.

ANNEXE 1

Sommation des suites géométriques

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i \times P_i &= \sum_{i=1}^{n} P_i + \sum_{i=2}^{n} P_i + \sum_{i=3}^{n} P_i + \dots + P_n \\ &= \frac{P_{n+1} - P_1}{-1/6} + \frac{P_{n+1} - P_2}{-1/6} + \dots + \frac{P_{n+1} - P_n}{-1/6} \\ &= 6\,(P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n - nP_{n+1})\end{aligned}$$

Si on admet que :

$$\lim_{n \to \infty} nP_{n+1} = 0\,,$$

alors $$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} i \times P_i = 6$$

Cette démonstration nécessite cependant une bonne manipulation des sommations.

Variante d'écriture, difficile à lire :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i \times P_i &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} P_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i - P_{n+1}}{1/6} \\ &= 6\,[\,(\sum_{i=1}^{n} P_i) - n\,P_{n+1}\,] \\ &= 6\,[\,(P_1 - P_{n+1})6 - n\,P_{n+1}\,] \\ &= 36\,P_1 - (36 + 6n)\,P_{n+1}\end{aligned}$$

ANNEXE 2

Structure des programmes

Problème 1

On emploie 4 mémoires :

N	compte-tours
P	probabilité P_N
A	sommation des P_N
B	sommation des $N.P_N$

Valeurs initiales : $N = 1$; $A = B = P = 1/6$.

Boucle : $N + 1 \rightarrow N$: $\frac{5P}{6} \rightarrow P$: $A + P \rightarrow A$: $B + NP \rightarrow B$:

Test d'arrêt sur N.

La comparaison de deux valeurs consécutives de A ou de B suppose de modifier le programme, d'une façon un peu délicate.

Un test d'arrêt sur $P = 0$ va nous emmener inutilement loin, puisque la machine calculera jusqu'à $P \simeq 10^{-99}$, alors qu'à partir de 10^{-12}, A et B ne varient plus de façon visible, et qu'un événement qui a une probabilité de 10^{-99} est vraiment peu probable.

Problème 2

Avec un langage simple, il faut 7 mémoires pour les probabilités, et un éventuel compte-tours (peu utile ici).

Valeurs initiales : $A = B = C = D = E = 0$. $F = 1$. $(N = 0)$

Boucle $N + 1 \rightarrow N$: $(A + B + C + D + E + F) / 6 \rightarrow P$:
$B \rightarrow A$: $C \rightarrow B$: $D \rightarrow C$: $E \rightarrow D$: $F \rightarrow E$: $P \rightarrow F$:

Test d'arrêt sur N, ou sur la comparaison de deux valeurs consécutives (si E = F, alors stop, sinon continuer le calcul).

On observera de grosses différences sur le rang où les machines considèrent que E = F, suivant le nombre de chiffres significatifs pris en compte dans la comparaison.

Ce problème permet de montrer que les instructions de transferts de mémoires sont aussi importantes que les instructions de calcul, ce qui est souvent ignoré des élèves (et de bien d'autres gens). On peut ici montrer les liens forts qui existent entre « machines à calculer » et « gestion de l'information ».

Problème 3

On emploie 2 mémoires :	N	compte-tours, indispensable
	Q	probabilité Q_N
Valeurs initiales	$N = 1$, $Q = 1$.	

Boucle $N + 1 \rightarrow N$; $Q \times \dfrac{365 - N}{365} \rightarrow Q$.

Test d'arrêt sur N (calcul de Q_N pour un rang donné)
ou sur Q ($Q < 0{,}5$, ou $Q < 0{,}1$...).

A la fin, penser à afficher $1 - Q$, si le test porte sur N, ou bien N, si le test porte sur Q.

Aucun problème particulier, sauf peut-être pour justifier la valeur initiale de Q.

Remarquons que les tests sont la seule façon réaliste de résoudre les inéquations sur Q.

ANNEXE 3

Les rats ont-ils bonne mémoire ?

Soit un rat parfait, dans une cage parfaite, munie de six portes. Derrière une porte, il y a à manger, derrière les autres, il y a un truc désagréable.

Le rat essaye de trouver à manger, et recommence jusqu'à ce qu'il ait trouvé. On compte le nombre d'essais avant succès. Pour pouvoir analyser statistiquement le résultat, on doit faire un grand nombre d'expériences, et calculer une moyenne.

On analyse le résultat comme suit :

— Si les rats trouvent tous au 1^{er} coup, c'est qu'ils sentent la bonne porte. Biais expérimental qu'il faudra corriger.

— Si les rats trouvent vraiment tard, c'est qu'ils aiment ce qu'on croyait être un répulsif. Autre biais systématique !

— Si les rats trouvent en moyenne en 6 essais, c'est conforme à l'hypothèse d'essais au hasard, avec indépendance des tirages. C'est bien le modèle proposé dans le problème n° 1.

— Si les rats ont une mémoire parfaite, ils ne vont jamais deux fois à la même porte. On a alors le modèle d'un tirage de boules, sans remise, qui conduit à la loi suivante :

n	1	2	3	4	5	6
p(n)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

loi qui a pour moyenne 3,5.

— Les rats pourraient avoir la mémoire courte (essayer au hasard, sauf la dernière porte). On tombe alors sur une suite géométrique de raison 4/5, au lieu de 5/6.

Ce type de test est d'un maniement délicat, mais permet cependant de mettre en évidence que la mémoire d'une espèce animale varie en fonction de différents paramètres (lisibilité des signes qui permettent de distinguer les portes, gravité des échecs, perturbations annexes (bruit, stress), durée imposée entre les essais...). Il ne peut pas être question de mener tout le processus expérimental en classe, à la fois parce que l'élimination des biais expérimentaux est complexe, et parce que le nombre d'expériences à réaliser pour pouvoir interpréter le résultat de façon valide est très grand.

De plus, les justifications théoriques des critères de validation supposent un outillage très au-dessus des programmes de lycée (au minimum un bon maniement de la loi normale et des lois dérivées). Mais l'exemple est parlant.

ANNEXE 4

Et la simulation ?

Je suis très réticent à cette approche, parce que je trouve dangereux (sur le plan intellectuel) de proposer aux élèves une simulation d'un phénomène qui n'est ni bien perçu de façon intuitive, ni bien analysé de façon rationnelle.

Cependant, on peut exploiter ces trois problèmes ainsi :

— Sortir au $n^{\text{ième}}$ coup : raisonnement probabiliste formel, avec arbre, ou simulation sur beaucoup d'essais (voir plus loin).

— Problème des anniversaires : employer de vraies listes, sans s'occuper du critère de constitution des groupes. Listes d'appel du lycée (ou du bac de l'année précédente), listes de profs, enquêtes de voisinage (fixer une taille adaptée au problème, environ 30), mais aussi listes de personnages célèbres (écrivains, généraux, ministres de l'éducation...). La stupéfaction réside dans la régularité des résultats.

— Probabilité de tomber sur une case donnée : cet exercice se prête bien à la simulation. Il faut prévoir un parcours de 20 ou 30 cases, et pouvoir cocher les cases où on s'est arrêté. Au bout de 20 ou 30 essais, les faibles valeurs de P_1 et P_2, et la stabilité en fin de parcours apparaissent. Il faut entre 50 ou 100 essais pour bien voir les oscillations entre P_5 et P_{15}.

Dans le problème «sortir au $n^{\text{ième}}$ coup», il pourrait être intéressant de simuler les longues attentes. Mais cela est délicat, ou risqué.

La probabilité de sortir après le $20^{\text{ème}}$ coup est de l'ordre de 3 %. Il faut donc au moins 100 essais pour commencer à voir le phénomène. Mais il en faut beaucoup plus pour le simuler de façon précise.

La probabilité de sortir exactement au $20^{\text{ème}}$ coup est d'environ 5 ‰. Pour obtenir en moyenne 10 succès, il faut donc prévoir 2 000 essais, ce qui suppose beaucoup de patience, ou un programme de simulation très complexe.

De plus, 2 000 essais représentent 12 000 nombres «au hasard». Or les constructeurs ne garantissent pas que leurs suites de «nombres au hasard» soient normales à cette échelle-là. On touche ici aux limites théoriques de la simulation. La probabilité de rester bloqué 100 coups est, pour les mêmes raisons, totalement hors de portée de la simulation des élèves, il faudrait un milliard de nombreux «au hasard» pour avoir des résultats significatifs.