# DES AIRES SANS MESURE A LA MESURE DES AIRES

Françoise CHAMONTIN,
en collaboration avec
Bernard CAZIER, Marc PICOT
Irem de Lille

*La création des IREM est très liée à la réforme de 1971 dite des maths modernes. Les mathématiques modernes, nous les avions rencontrées à la fin de nos études et nous étions très enthousiasmés par la clarification qu'elles opéraient dans nos connaissances. Mais le travail avec les professeurs de Collège nous fit prendre conscience rapidement de l'absurdité de leur application telle qu'elle était faite au niveau du programme de géométrie.*

*A l'Irem de Lille, Rudolf Bkouche nous invita à revenir aux sources : nous irons lire le programme d'Erlangen de Félix Klein*[1] *puisqu'il était dit qu'il avait inspiré ces programmes.*

Une géométrie ne se réduit pas à un ensemble de points, de droites, de plans mais elle est caractérisée par le groupe des transformations qui opère sur lui[2].

*Ce texte avait mis un terme aux grandes controverses du XIXème siècle autour de la géométrie après l'apparition de la géométrie projective et des géométries non-euclidiennes.*

*La recherche des origines de la géométrie projective nous conduisit à étudier l'histoire de la perspective, celles des géométries non-euclidiennes, à lire Euclide naturellement.*

*Tout professionnel des mathématiques d'aujourd'hui, qu'il soit du secondaire ou du supérieur, reçoit un véritable choc à la lecture des Éléments d'Euclide : la fin du Livre I développe la théorie des aires — comparaison,*

1 Klein F., Le programme d'Erlangen, coll. Le discours de la méthode, Gauthier-Villars,1969.

2 C'est moi qui traduit

*égalité, démonstration — avant qu'il n'y ait eu la moindre allusion à des nombres. Notre époque est tellement «numérisée», que nous en oublions une vérité première : les nombres ne font partie de l'univers dans lequel nous naissons, que parce des hommes les ont inventés[3]. La théorie des proportions du Livre V des Éléments jette les premières pierres pour combler ce gouffre : «les nombres entiers ne suffisent pas pour rendre compte du rapport de deux grandeurs». Il faudra attendre plus de vingt siècles pour que soit défini précisément et étudié l'ensemble des nombres réels[4].*

*Dans les IREM, l'étude des textes anciens a pris de l'essor et nombre de professeurs de collège et de lycée sentirent la profondeur de la théorie des aires, et son potentiel pédagogique. Ils s'en inspirèrent pour enrichir leur enseignement au quotidien[5].*

*Aujourd'hui, dans son rapport d'étape sur la Géométrie[6], la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques, légitime cette démarche par la théorie, puisque Daniel Perrin y rappelle que si une géométrie est caractérisée par son groupe de transformations, le concept opératoire de la théorie des groupes est celui d'invariant. Or la géométrie dite élémentaire, celle du Collège et du Lycée, recouvre la* ***géométrie euclidienne*** *et la* ***géométrie affine****.*

- *la géométrie euclidienne est caractérisée par le groupe des isométries, ses invariants majeurs sont les longueurs et les angles — du point de vue algébrique, ce qui dérive du produit scalaire,*

- *la géométrie affine est caractérisée par le groupe des transformations affines (affinités, transvections, projections parallèles), son invariant majeur est l'aire[7] — du point de vue algébrique, ce qui dérive du déterminant.*

*La Commission préconise que soit faite une plus grande place à ces notions — longueurs, angles et aires — dans l'enseignement de la géométrie élémentaire. Si on les aborde en tant que «grandeurs», avant de tout réduire à des nombres par la mesure, on se dotera de moyens efficaces de démonstration et de compréhension[8], mais on préparera aussi des liens plus naturels avec la physique et ses professeurs.*

*Cet article est issu des réflexions sur la nature des choses que nous menons au sein du groupe Collège de l'IREM de Lille depuis plusieurs années, en collaboration avec Marc Picot et Bernard Cazier.*

## 1. Objet de cet article

Ce travail sur les aires est une réflexion sur les questions suivantes :

- qu'est-ce qu'une grandeur ?
- comment la mesurer ?

à partir de celles qui sont les plus fonda-

3 et peut-être des femmes, mais l'histoire ne le dit pas

4 Dédekind 1852, Cantor, Meray, Weierstrass...

5 voir les publications de la Commission inter-IREM Premier Cycle, en particulier les Actes du Colloque de 1999 : Mathématiques au Collège : les enjeux d'un enseignement pour tous édité par l'IREM de Lille.

6 voir les n°430 - septembre 2000 - et 431 - novembre 2000 -du Bulletin de l'APMEP

7 plus précisément l'aire est l'invariant du sous-groupe des applications affines de déterminant ±1 qui est l'équivalent en géométrie affine du groupe des isométries en géométrie euclidienne

8 compréhension de la nature des choses : je crois qu'on ne gagne pas en clarté quand on confond une aire et un périmètre comme le fait Marc Rogalski (en collaboration avec Aline Robert et Nicolas Pouyanne) dans son livre : «Carrefour entre Analyse, Algèbre et géométrie» paru chez Ellipses à la page 96 : Pourquoi le périmètre du cercle unité est-il le double de son aire ?

mentales et élémentaires : la longueur des segments et l'aire des polygones plans.

*Qu'est-ce qu'une grandeur ?*

Il faut être bien aventureux pour tenter de définir ce concept primitif qui comme bien d'autres en géométrie, s'élabore dans les relations qu'il entretient avec les autres concepts de la théorie. Néanmoins je prends ce risque, surtout pour dire ce qu'il n'est pas. En première approximation, je dirai donc :

> *«une grandeur est une qualité d'un objet géométrique, susceptible d'augmenter et de diminuer, qu'on va chercher à quantifier»*

**Ce n'est jamais un nombre** : dans le meilleur des cas c'est le rapport de deux grandeurs de même nature qui sera peut-être un nombre. Il y a donc trois niveaux :

• le segment, la longueur, la mesure de cette longueur dans un système d'unités donné

• le polygone, l'aire, la mesure de l'aire dans un système d'unités donné

• le secteur angulaire, l'angle, la mesure de l'angle ?

Si on analyse les gestes que l'on fait quand on doit mesurer une longueur — que ce soit la couturière, l'arpenteur ou l'écolier — on amène, par un *mouvement*, le segment à mesurer, en coïncidence partielle ou totale, avec un étalon gradué.

Ce qui veut dire que l'on a choisi une longueur de référence, à laquelle *on compare* les autres par superposition après déplacement.

***On voit ainsi que la comparaison des longueurs précède leur mesure.***

On définit :

• des longueurs égales.

• une longueur plus grande que l'autre.

• la somme de deux longueurs.

• des longueurs multiples d'une autre.

• le rapport de deux longueurs si elles sont commensurables…

***De même, pour les aires, il faut les comparer pour pouvoir les mesurer.***

Dans un premier temps, on dira que des figures égales [9] ont des aires égales — mais on étendra vite cette notion d'égalité d'aire à l'aide des découpages et recomposition après déplacement —.

*Des figures planes sont égales si elles sont superposables par un mouvement de déplacement.*

Dans les *Éléments* [10] pour éviter le mouvement, Euclide établit les cas d'égalité des triangles : critères portant sur les longueurs des côtés et les angles pour que deux triangles soient égaux [11].

Dans l'optique des programmes actuels, ce sont les déplacements qui vont permettre de définir des figures égales. Ces transformations de l'espace, permettent aussi d'oublier le mouvement, en effaçant à la fois le temps et les péripéties de la trajectoire, pour ne garder que l'état initial et l'état final.

---

9 J'emploie le terme d'«égalité» en géométrie élémentaire, réservant le terme «congruence» pour les niveaux supérieurs.

10 Euclide, Les Éléments, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, Livre I,

11 Cf.Article «Autour des cas d'égalité des triangles» de Rudolf Bkouche dans le bulletin n°430 de l'APMEP.

## 2. Déplacements du plan et parallélogramme

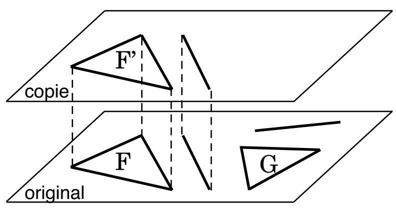
Précisons le cadre : on travaille dans un plan dont on a dégagé les propriétés suivantes [12] :

- *Deux points distincts déterminent une droite.*
- *Sur chaque droite, il existe deux sens de parcours, inverses l'un de l'autre, qui permettent de définir les demi-droites et les segments.*
- *Chaque droite (d) partage le plan en deux demi-plans disjoints, tels que si M et* N *sont deux points d'un même demi-plan, le segment* [MN] *ne rencontre pas la droite (d).*
- *Par un point extérieur à une droite, il passe une parallèle et une seule à cette droite. — Postulat ou axiome d'Euclide.*

### 2.1 Des glissements aux déplacements

On part de l'expérience fondatrice du papier calque pour la comparaison des figures : le plan peut glisser sur lui-même en "conservant" toutes ses propriétés.

*Faire glisser un plan sur lui-même.*

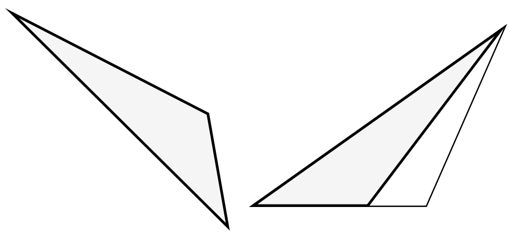



Etant données sur une feuille des figures quelconques, on fait de cette feuille une copie « transparente » qu'on pose et fait glisser sur l'originale.

Les relations mutuelles des divers éléments ou configurations restent les mêmes constamment sur la feuille originale et sur la copie, quelle que soit la position de l'une par rapport à l'autre.

*Faire coïncider la figure F' copie de la figure F avec la figure G :*

Ayant effectué une copie F' de la figure F, on l'amène par glissement en coïncidence avec la figure G. De cette expérience, on peut dégager l'égalité des longueurs, l'égalité des angles, mais aussi un premier critère d'égalité des aires.



Si F' est amenée par glissement en coïncidence avec un figure G' incluse dans G on déduira des critères d'inégalité des longueurs, aires et angles.

La longueur d'un segment est plus petite que la longueur de tout segment qui le contient après glissement éventuel. L'aire d'une surface est plus petite que l'aire de toute surface qui la contient après glissement éventuel.

Les relations mutuelles des éléments de la configuration étant les mêmes sur la copie et sur l'original, on remarque que :

12 Il n'est pas question ici de faire de l'axiomatique, mais plutôt de la géométrie élémentaire structurée par des règles précises que l'on élabore de façon expérimentale.

• deux droites concourantes ne pourront se superposer qu'à deux droites concourantes
• deux droites parallèles à deux droites parallèles.

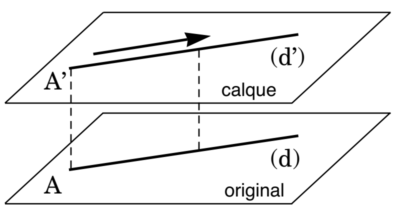
L'angle d'un secteur est plus petit que l'angle de tout secteur qui le contient après glissement éventuel.

*Revenir au point de départ.*

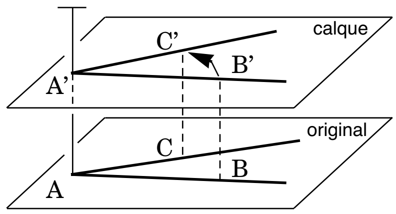
On peut toujours ramener F' sur F, F' apparaît alors indistinctement comme copie de G ou copie de F. Donc tout glissement a un mouvement inverse, et si une copie de F peut coïncider avec G, une copie de G peut aussi coïncider par glissement avec F.

Ces gestes là se font sans y penser ou en y pensant dans une visée autre (comme le décalque d'un motif par exemple). Les mathématiques commencent, pourrait-on dire, quand on se met à y penser et à élaborer dans la langue certains caractères de ces gestes et de ce qu'ils produisent : égalité ou inégalité des longueurs ou des aires, conservation du parallélisme etc. ; l'idéalisation des objets mathématiques est un acte de langage à propos de «gestes» et s'appuyant sur des actes «musculaires» et «visuels».

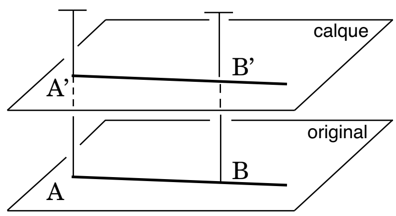
*Glissements avec contrainte.*




Si on impose à la droite (d') de rester constamment superposée à la droite (d), on obtient un glissement qu'on peut appeler « pas de patinage » le long de la droite (d).




Si on fixe A' sur A avec une punaise (solide), on obtient un glissement qu'on peut appeler « pivotage » autour du point A.




Si ensuite on fixe également B sur B' avec une autre punaise : c'est l'immobilité, plus de glissement possible.

*Du glissement au déplacement.*

L'expérience du décalque est une première approche de ce passage, puisque, une fois le motif calqué de l'original sur la copie transparente, peu importe ensuite la manière dont ce support transparent va glisser sur l'original, pourvu que le glissement s'arrête à l'endroit prévu et dans la disposition voulue pour le décalque.

Le déplacement, oubliant donc le glissement qui l'engendre, ne s'intéresse plus qu'à la correspondance entre le motif original et le motif décalqué ; il constitue donc une classe d'équivalence de glissements par identité de décalque. De là la question de savoir décider simplement quand deux glissements sont équivalents.

Des expériences sont possibles :

• il y a immobilité dès qu'il y a fixation de deux points ;

• si un glissement qui superpose le couple de points (A,B) au couple de points (C,D) amène la figure F sur la figure G, il en ira de même de tout autre glissement superposant le couple (A,B) au couple (C,D) ;

• en particulier, tout glissement qui ramène (A,B) sur (A,B) revient à l'immobilité ;

• il n'y a qu'un déplacement correspondant au pas de «patinage» le long de la droite (AA') qui envoie A sur A'.

D'où cette règle tirée de l'expérience :

Si AB = CD (en longueur, ce qui à ce niveau signifie qu'un glissement amène A sur C et B sur D), il existe un déplacement et un seul amenant A sur C et B sur D.

Si un déplacement a deux points fixes, c'est l'identité.

**Si dans un déplacement un segment** [AB] **coïncide exactement avec un segment** [CD]**, on dit que ces segments ont même longueur, on écrit** AB = CD.

**En particulier** AB = BA.

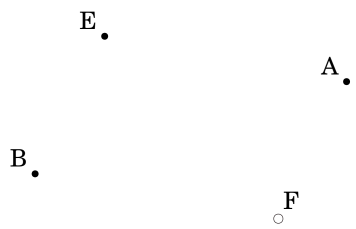
On a des énoncés analogues pour les angles des secteurs angulaires et les aires des polygones.

**Si dans un déplacement un polygone** P **coïncide exactement avec un polygone** Q**, on dit que ces polygones ont la même aire, on écrit** Aire(P) = Aire(Q).

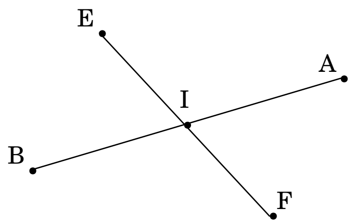
**2.2 La symétrie centrale.**

On va étudier le **déplacement qui échange deux points** A **et** B.

Soit trois points A , B et E non alignés. On considère l'application obtenue par glissement[13] du plan sur lui-même qui porte A sur B et B sur A. La droite (AB) se porte sur la droite (BA), donc sur elle-même. Dans ce déplacement E est porté, dans le demi-plan opposé, en un point qu'on appelle F.




En recommençant l'opération, F revient sur E car l'inverse de ce déplacement est lui-même (il a les mêmes propriétés caractéristiques).




La droite (EF) est portée sur la droite (FE),

13 je garde volontairement cette formulation car les raisonnement qui vont suivre pourront être fait pour ou par l'élève en s'aidant du calque aussi longtemps qu'il en aura besoin.

c'est-à-dire sur elle-même. Le point I à l'intersection des droites (AB) et (EF) est porté sur l'intersection des droites (BA) et (FE) c'est-à-dire sur I. Le point I est donc un point fixe.

Le segment [IA] est porté sur [IB] et [IE] est porté sur [IF] d'où l'égalité des longueurs :

$$IA = IB \text{ et } IE = IF.$$

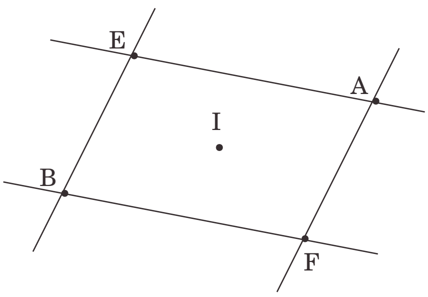
La même opération envoie un point quelconque M du plan sur M' tel que I, milieu de [AB], soit aussi le milieu de [MM'].

**Ce déplacement est la symétrie centrale $S_I$ de centre I.**

Tout point d'une droite passant par I a son image sur elle. Et réciproquement, tout point de cette droite est l'image d'un point lui appartenant.

**Dans une symétrie centrale, l'image d'une droite passant par le centre, est la droite elle-même.**

La droite (AE) est portée sur (BF) et la droite (BF) est portée sur (AE).




Ces deux droites n'ont aucun point commun. En effet s'il en existe un P, il serait sa propre image. Or $P \neq I$ car $E \notin (AB)$ serait un deuxième point fixe de $S_I$. Ce qui est impossible.

Par suite les droites (AE) et (BF) sont parallèles. Il en est de même des droites (EB) et (FA).

**Dans une symétrie centrale, l'image d'une droite ne passant pas par le centre est une droite parallèle.**

Dans ce déplacement apparaît un nouveau quadrilatère…

### 2.3 Le parallélogramme.

L'étude de la symétrie centrale fait apparaître une figure nouvelle, le parallélogramme qui possède toutes les propriétés suivantes :

- les diagonales ont même milieu,
- les côtés opposés sont parallèles deux à deux,
- les côtés opposés sont égaux deux à deux,
- les angles opposés sont égaux deux à deux.

**Définition 1** *Une figure déterminée par les sommets A, B, C, D non alignés, est un parallélogramme ABCD si et seulement si une symétrie centrale échange A et C d'une part, B et D d'autre part.*

2. 3. 1 *Trois propriétés caractéristiques du parallélogramme.*

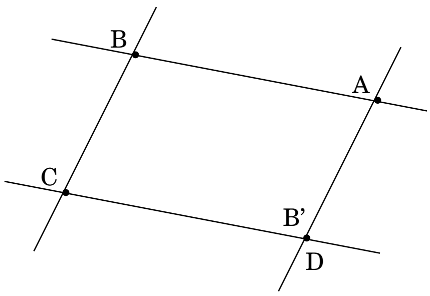
Les propriétés de ce quadrilatère sont nombreuses. Il est important qu'un débutant comprenne assez tôt qu'il n'est pas nécessaire de vérifier toutes ces propriétés pour être sûr d'avoir affaire à un parallélogramme.

Parmi ces propriétés certaines seront *déterminantes*. Il suffira qu'elles soient vérifiées pour que le quadrilatère soit un parallélogramme.

**1°. Si les diagonales d'un quadrilatère ABCD ont même milieu, alors c'est un parallélogramme.**

*Preuve :* C'est une conséquence immédiate de sa définition.

**2°. Si les supports des côtés opposés d'un quadrilatère ABCD sont parallèles et distincts deux à deux, alors ABCD est un parallélogramme.**



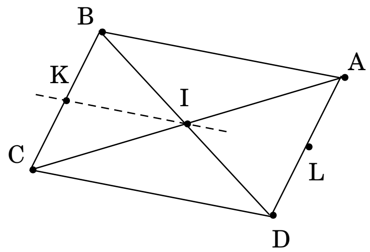

*Preuve :* Le déplacement, qui échange A et C envoie B sur B'. Alors ABCB' estun parallélogramme et (CB') est parallèle à (AB). Mais (CD) est aussi parallèle à (AB) : d'après *l'axiome d'Euclide*,(CD) et (CB') sont confondues. Donc B' est sur (CD). Pour la même raison (AD) et (AB') sont confondues. Donc B' est sur (AD).

Par suite B' = D et ABCD est un parallélogramme.

**Application**

**Théorème 1** *La droite qui joint les milieux de deux côtés opposés d'un parallélogramme est parallèle aux deux autres côtés.*

Soit K le milieu de [BC]. La symétrie de centre I porte le parallélogramme ABCD sur lui-même CDAB.

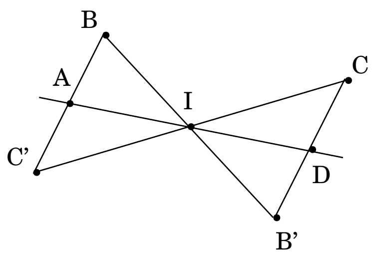



En particulier, le milieu K de [BC] est porté sur L le milieu de [DA]. La parallèle à (AB) passant par K coupe (AD) en L'.

Les quadrilatères ABKL' et CDL'K sont des parallélogrammes, et L'A = KB = CK = DL' d'où L'= L .

**3°. Si un quadrilatère ABCD a deux côtés parallèles et égaux,et s'il est entièrement situé dans un demi-plan délimité par le troisième côté, alors c'est un parallélogramme.**

Ce troisième critère est fondamental pour l'étude de la translation.

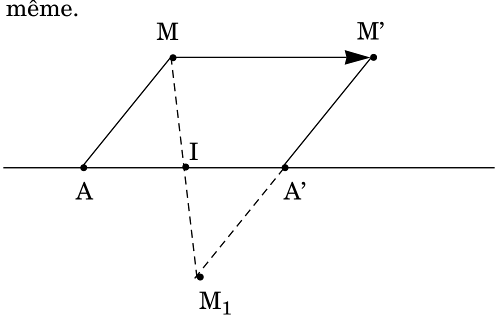



*Preuve :* Si [AB] et [DC] sont deux segments parallèles et d'égale longueur, situés dans le même demi-plan délimité par (AD), soit I le milieu de AD. La symétrie centrale $S_I$ de centre I porte le segment [AB] sur le segment [DB'] qui lui est égal en longueur et parallèle, donc D est milieu de [CB'].

De même A est milieu de [BC']. Alors (AD) apparaît comme la droite qui joint les milieux des côtés opposés du parallélogramme BCB'C'. Elle est parallèle à (BC) d'après le théorème 1. Par suite, ABCD est un parallélogramme.

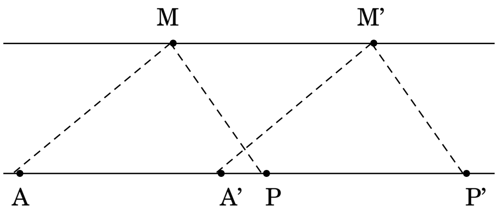
**2. 4 La translation.**

On donne deux points A et A' distincts. Étudions l'unique déplacement correspondant au *pas de patinage* qui envoie A sur A' par glissement de la droite (AA') sur elle-même.




Soit un point M extérieur à cette droite, et I le milieu de [AA'] . Si on compose la symétrie centrale $S_1$ de centre I avec la symétrie $S_2$ de centre A', on a un déplacement T qui amène A sur A', fait glisser la droite (AA') sur elle-même, en conservant chacun des demi-plans qu'elle délimite.

Le déplacement $T = S_2 \circ S_1$ porte le segment [AM] sur [A'M']. Ces deux segments sont donc parallèles et égaux. Comme ils sont situés dans le même demi-plan délimité par (AA'), le quadrilatère MAA'M' est un parallélogramme.




Si P est un point de la droite (AA') et P' son image par T , le segment MP est porté sur M'P'. Ils sont donc parallèles et égaux et situés dans le même demi-plan délimité par PP' donc MPP'M' est un parallélogramme. Et on a PP' = MM' = AA'

**Le déplacement T est une translation du plan.**

**Définition 2** *La translation qui envoie* A *sur* A' *est la transformation du plan qui à tout point* M *du plan associe le point* M' *tel que :*

- *le quadrilatère* AMM'A' *est un parallélogramme si* M $\notin$ (AA')
- *les segments* [AM'] *et* [A'M] *ont même milieu.*

On pourra se poser les questions suivantes :
— «la translation qui envoie M sur M' est-elle la même que celle qui envoie A sur A' ?» ou
— «quand on enchaîne deux parallélogrammes, obtient-on encore un parallélogramme ?»

Ces questions sont moins anodines qu'il y paraît puisque sur la sphère, la réponse est non [14].

14 Voir Rudolf Bkouche : Du raisonnement à la démonstration - in it Mathématiques au Collège, les enjeux d'un enseignement pour tous Colloque Inter-IREM Premier Cycle - Lille 1999.

## 3. Des aires sans mesure

### 3. 1 Des longueurs sans mesure

Quand la propriété d'enchaînement des parallélogrammes est vérifiée, on montre que la composée de deux translations est encore une translation. Ceci permet de définir la **somme de deux longueurs sur «la» droite** :

Soient deux segments AB et DE de *même sens portés par une même droite*.

- Si $T_{\overrightarrow{AB}}(D) = E$ alors $AB = DE$
- Si $T_{\overrightarrow{AB}}(D) = F$ et si $F \in [DE]$ alors $DF < DE$ et $AB < DE$

Pour avoir un segment dont la longueur est la somme des longueurs de AB et DE il suffit de mettre les segments bout à bout, c'est-à-dire : On prend BC = DE et dans le même sens, ce qui revient à composer les translations $T_{\overrightarrow{AB}}$ et $T_{\overrightarrow{DE}}$ :

$$T_{\overrightarrow{AB}}(A) = B \text{ et } T_{\overrightarrow{DE}}(B) = C$$

on a : $AC = AB + BC = AB + DE$

Pour additionner les longueurs de deux segments AB et DE dans le plan, par un déplacement on amène DE sur un segment D'E' porté par la droite (AB) et de même sens que AB. Si on postule que :

*le plus court chemin pour aller d'un point à un autre est la ligne droite.*

on obtient l'inégalité triangulaire et la caractérisation des points M du plan qui appartiennent au segment [AB] par AB = AM + MB. On vérifie aisément les propriétés de compatibilité de la somme et de la relation d'ordre sur les longueurs [15].

On voit apparaître deux façons de graduer une droite :

- Par symétries centrales successives. — Ce qui correspond à l'arpentage des petits hommes sautillants avec un compas bloqué — Mais la symétrie centrale ne conserve pas le sens sur la droite.
- Par translations successives — ou plutôt une translation itérée — . La translation conserve l'orientation de la droite et donc elle permet de définir l'addition des longueurs égales. Plus précisément, pour un segment donné [AB] et un entier n, on peut déterminer un segment n fois plus grand, en itérant n fois la translation qui porte A sur B. Si :

$$C = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ}_{(n\ fois)} T(A) = T^n(A)$$

alors $AC = n \,.\, AB$ . On dit que AC est *multiple* de AB.

### 3. 2 Des aires égales et inégales.

Nous nous limiterons aux aires des polygones.

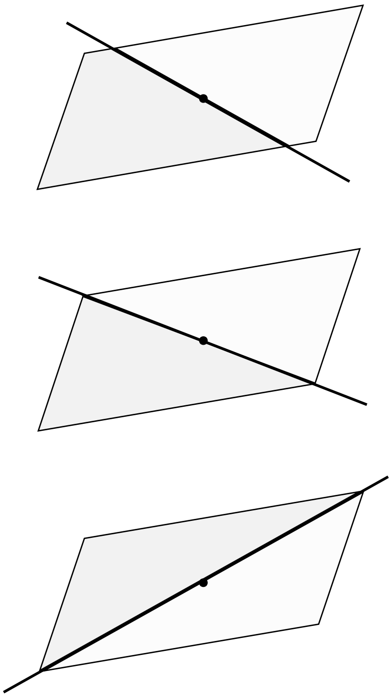
Dans un premier temps on compare les aires à l'aide des deux déplacements : la symétrie centrale et la translation.

**Définition 3** *Etant données deux surfaces polygonales, si après un déplacement l'une d'elles peut recouvrir exactement l'autre, alors ces deux surfaces ont des aires égales.*

15 Voir en Annexe.

**3. 2. 1 Première propriété.**

Tout parallélogramme est son propre symétrique par rapport à son centre.

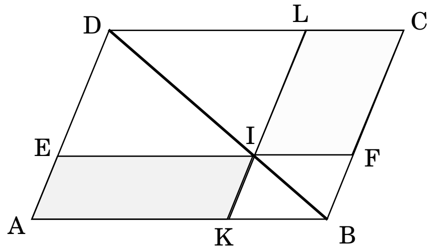


D'où :

**Lemme 1** *Un parallélogramme est partagé en deux surfaces d'aires égales par toute droite passant par son centre. En particulier chaque diagonale du parallélogramme le partage en deux triangles d'aires égales.*

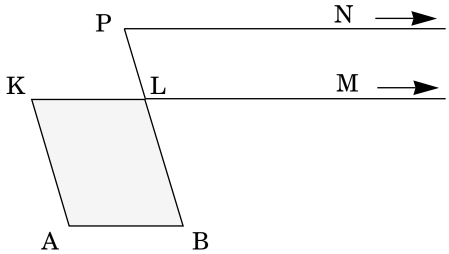
**3. 2.2 Applications**

• ABCD est un parallélogramme, I est un point de la diagonale [DB], les parallèles aux côtés, passant par I, forment les parallélogrammes IFCL et IEAK.



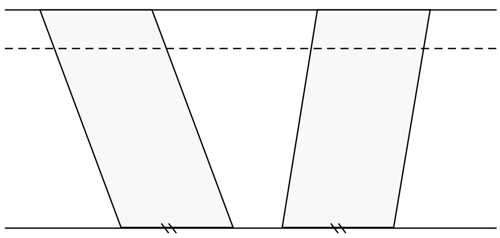

On montre que leurs aires sont égales.

• ABLK est un parallélogramme, le point P, sur la droite (BL), est donné.

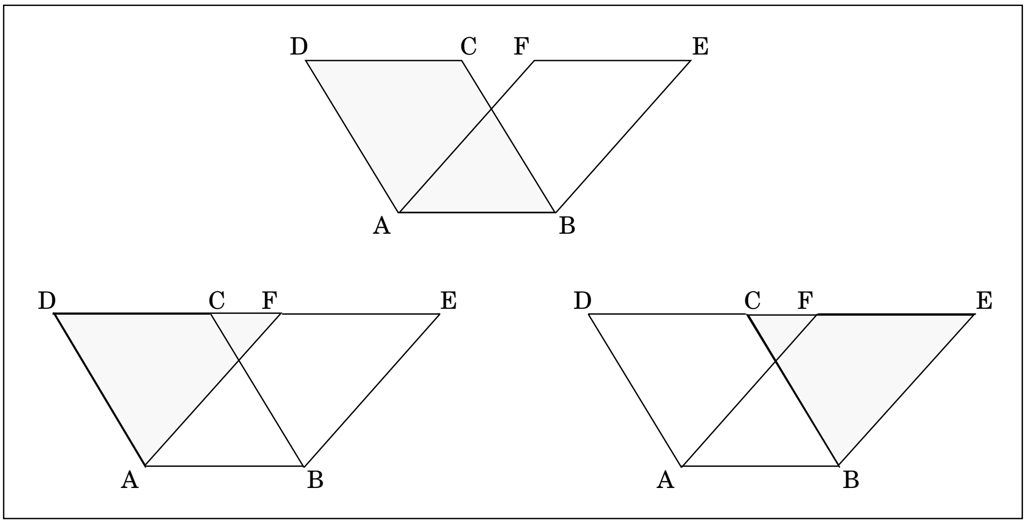



On peut construire M sur la demi-droite [KL) et N pour que l'aire du parallélogramme LMNP égale l'aire du parallélogramme ABLK.

**3. 2. 3 Propriété fondamentale pour les parallélogrammes**



**Théorème 2** *Si des parallélogrammes appartiennent à la même bande et s'ils ont des bases égales alors leurs aires sont égales.*




*Preuve :* On peut se ramener par translation, à deux parallélogrammes ABCD et ABEF appartenant à la même bande et ayant une base commune. (cf. figure ci-dessus)

Soit T la translation qui envoie A sur B.

— ABCD est un parallélogramme donc

$$T(D) = C$$

— ABEF est un parallélogramme donc

$$T(F) = E$$

Les triangles DAF et CBE coïncident par translation, donc ils ont même aire :

$$\begin{aligned} \text{Aire(CBE)} &= \text{Aire(DAF)} \\ \text{Aire(DABE)} &= \text{Aire(DABC)} + \text{Aire(CBE)} \\ \text{Aire(DABE)} &= \text{Aire(DAF)} + \text{Aire(FABE)} \end{aligned}$$

donc : Aire(ABCD) = Aire(ABEF) .

On voit apparaître ici une extension de l'égalité d'aires, par découpage, comparaison et recomposition, qui va être très importante dans la suite.

D'un point de vue algébrique, il y a sous ce théorème une application affine de déterminant 1 : la transvection [16] d'axe AB et qui envoie D sur F.

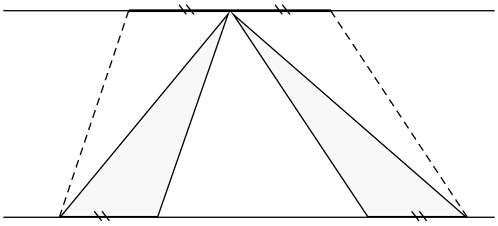
On peut remarquer que si la bande est plus large, à base égale, l'aire est plus grande. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder la figure située au-dessus de l'énoncé, à laquelle on a ajouté subrepticement une parallèle en pointillé…

**Remarque 1** *On voit apparaître ici des sommes d'aires par juxtaposition, et des différences par passage au complément ; d'où des comparaisons — égalité et inégalité — par découpage et recomposition.*

16 C'est une application qui est l'identité sur AB et une translation sur chaque parallèle à AB, de vecteur variable, de telle sorte que des points alignés se transforment en des points alignés.

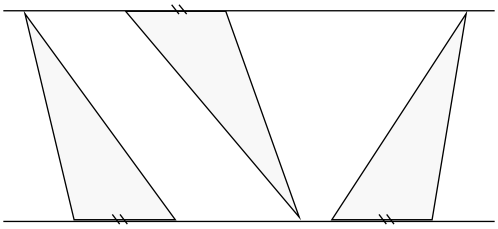
*L'ensemble des aires des polygones du plan munies de l'ordre et de la somme est un demi-groupe ordonné. Il est plus aisé de travailler avec un groupe : on pourrait faire une théorie naïve des aires orientées — d'autant qu'ici on ne s'appuie que sur des déplacements qui les conservent — ce qui rend les théorèmes plus précis et les démonstrations plus faciles. Nous ne développerons pas ce point de vue qui serait envisageable au lycée.*

### 3. 2. 4 Propriété fondamentale des triangles



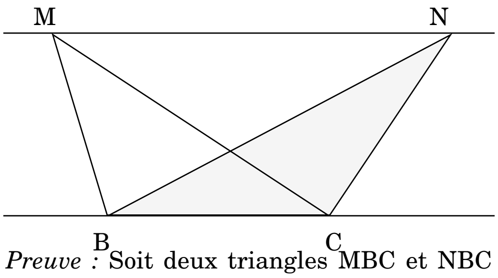
**Théorème 3** *Si deux triangles ont un sommet commun et des bases égales placées sur un support commun alors leurs aires sont égales.*

*Preuve :* Ce résultat se déduit du précédent en appliquant le lemme 1.



**Théorème 4** *Si des triangles appartiennent à la même bande et s'ils ont des bases égales alors leurs aires sont égales.*

Plus précisément : **Théorème 5** *Deux triangles ayant une base commune et situés dans le même demi-plan délimité par la droite support de cette base, ont même aire si et seulement si la droite qui joint leur troisième sommet est parallèle à la base.*




*Preuve :* Soit deux triangles MBC et NBC ayant des aires égales. La parallèle à (BC) passant par M coupe la droite (BN) en N', d'après le théorème 4 :

$$\text{Aire}(N'BC) = \text{Aire}(MBC) = \text{Aire}(NBC)$$

Or

- soit $N' \in [BN] \setminus \{N\}$ alors :

$$\text{Aire}(BN'C) < \text{Aire}(BNC)$$

- soit $N \in [BN'] \setminus \{N'\}$ alors :

$$\text{Aire}(BN'C) > \text{Aire}(BNC)$$

Il y a contradiction sauf si N' = N .

## 3. 3 Des aires égales pour démontrer

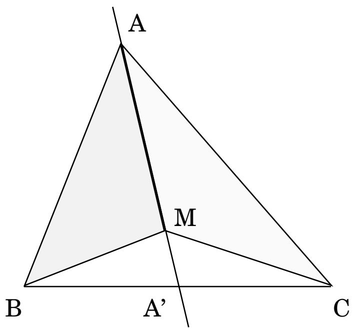
### 3. 3. 1 Le triangle et une médiane

**Théorème 6** *Si M appartient à la base du triangle ABC :*

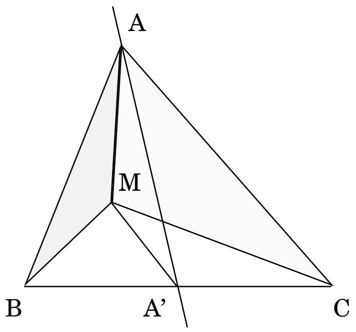
$$Aire(MAB) = Aire(MCA)$$

*si et seulement si (AM) est la médiane du triangle ABC.*

**Théorème 7** *Dans le triangle ABC si A' est le milieu du côté [BC] et M un point de l'intérieur du triangle. M appartient à la médiane (AA') si et seulement si les triangles MAB et MCA ont la même aire.*




*Preuve :* Le théorème direct est une conséquence du théorème précédent.




Réciproquement, si Aire(MAB) = Aire(MCA) et M $\notin$ [AA'] , on raisonne par l'absurde : si M appartient à l'intérieur du triangle ABA'. Alors :

Aire(BA'A) > Aire(BA'M) + Aire(BMA)
Aire(CA'A) < Aire(CA'M) + Aire(CMA)

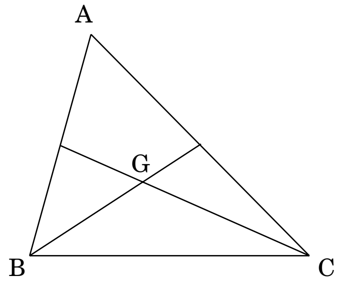
Mais

Aire(BA'A) = Aire(CA'A)

ce qui est contradictoire. Donc M $\in$ [AA'] .

### 3. 3. 2 Le triangle et ses médianes

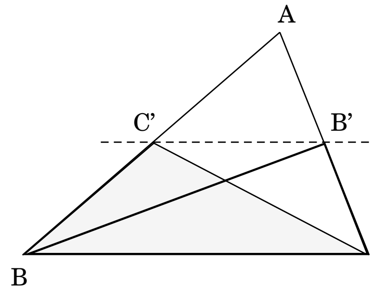
**Théorème 8** *Les médianes d'un triangle sont concourantes.*




Si G est l'intersection de deux médianes du triangle ABC, on démontre à l'aide des aires que la troisième médiane passe par G…

### 3. 3. 3 La droite des milieux

**Théorème 9** *La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle, est parallèle au troisième côté.*




Les triangles CBB' et BCC' ont même aire, la moitié de celle du triangle ABC. Les deux points B' et C' appartiennent tous deux au demi-plan délimité par (BC) contenant A. D'après le théorème 5, la droite B'C' est parallèle à BC.

### 3. 3. 4 Comparer les aires de deux polygones

Étant donnés deux polygones $P_1$ et $P_2$ , on va montrer qu'on peut géométriquement déterminer si :

— Aire( $P_1$ ) = Aire( $P_2$ )

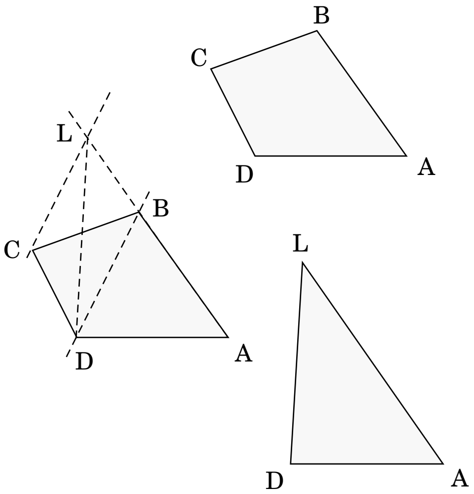
— ou Aire( $P_1$ ) < Aire( $P_2$ )

— ou Aire( $P_1$ ) > Aire( $P_2$ )

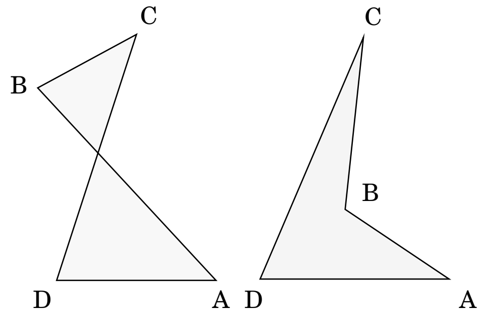
On procède par étapes :

*1 - Tout polygone peut être transformé en un triangle de même aire en respectant un de ses côtés.*

On montre d'abord le résultat pour un quadrilatère à l'aide du théorème 5. Par exemple :

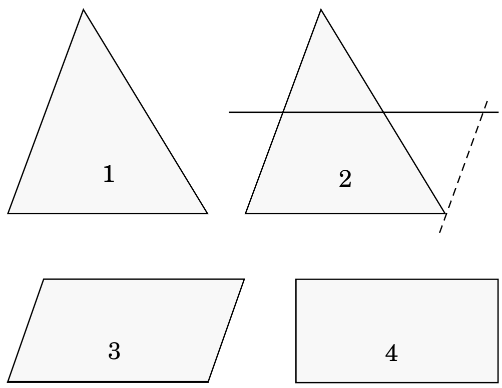



La parallèle à (DB) passant par C coupe (AB) en L. Les triangles DBC et DBL ont même aire. On obtient Aire(ABCD) = Aire(ALD). Je laisse le soin au lecteur de se convaincre que la même méthode peut être appliquée aux deux cas de figures ci-dessous :



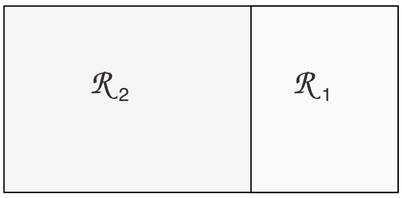

Soit un polygone quelconque. Quatre de ses sommets consécutifs, par exemple A, B, C et D déterminent un quadrilatère ABCD qui peut être transformé par une telle construction en un triangle ALD de même aire. On obtient ainsi un polygone de même aire mais ayant un côté de moins. En itérant un nombre de fois suffisant cette construction le polygone peut être transformé en un triangle de même aire.

*2 - Tout triangle peut être transformé en un parallélogramme de même aire et ce parallélogramme transformé en un rectangle de même aire.*



*3 - Tout rectangle peut être transformé en un rectangle de même aire ayant un côté donné.*

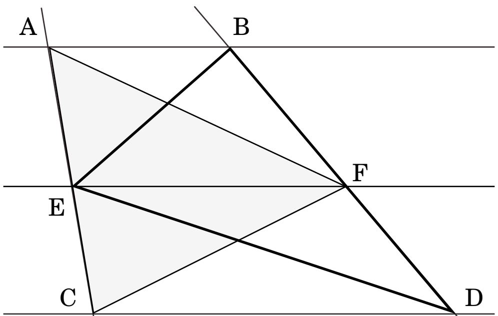
Pour cela on utilise la méthode de l'application 3. 3. 2




Ce qui achève la démonstration, puisqu'on peut trouver deux rectangles $R_1$ et $R_2$ ayant un côté commun et même aire que $P_1$ et $P_2$ .

### 3. 3. 5 Des parallèles équidistantes

**Théorème 10** *Si des parallèles partagent une sécante en segments égaux entre eux alors ces parallèles partagent toute autre sécante en segments égaux entre eux.*




*Preuve :* Si trois parallèles découpent deux segments égaux, AE = EC alors (FE) est la médiane issue de F dans le triangle FAC :

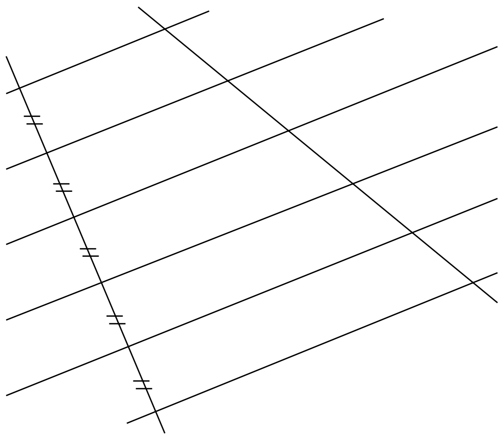
Aire(FAE) = Aire(FEC)

Aire(BEF) = Aire(AEF) [théorème 6]

Aire(CFE) = Aire(DFE)

donc (EF) est la médiane issue de E dans le triangle EBD et BF = FD.

*Conséquence :* Il en résulte une méthode pour découper un segment en n segments égaux en longueur que nous expliciterons plus loin.

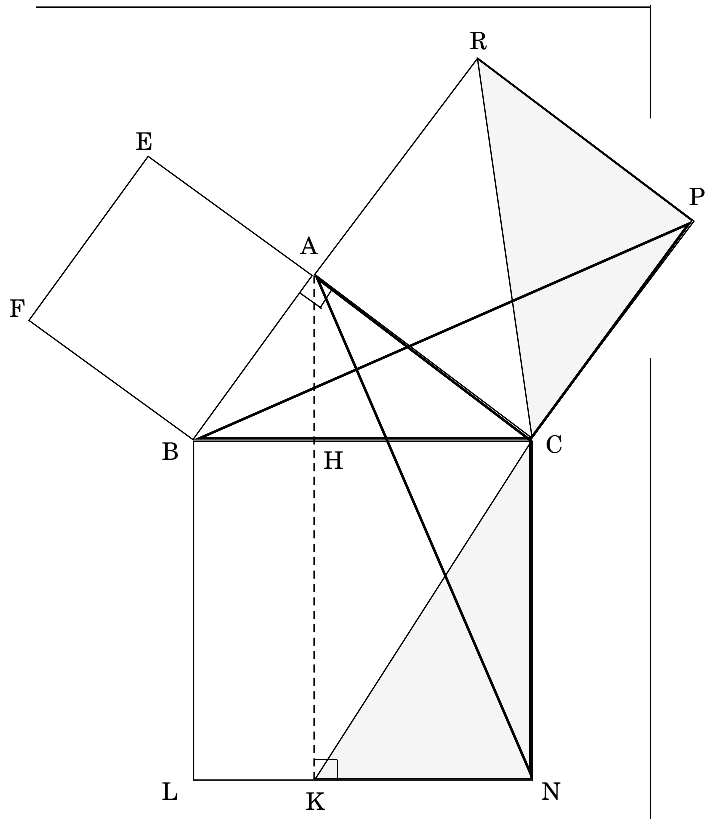


### 3. 3. 6 Le théorème de Pythagore

**Théorème 11** *L'aire du carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés.*

*Preuve (*inspirée de celle d'Euclide) *:*

Montrons (cf. figure page suivante) que l'aire du carré ACPR est égale à celle du rectangle HKNC, ou que les triangles PRC et KNC moitiés de ces surfaces ont même aire.




Par le théorème 5, on a :

Aire(PRC) = Aire(PBC)

Aire(KNC) = Aire(ANC)

La rotation d'un quart de tour, de centre C , qui envoie P sur A, porte B sur N. Donc :

Aire(PBC) = Aire(ANC)

On conclut en faisant la même chose de l'autre côté…

Tous les résultats vus jusque là, sont des résultats d'une très grande simplicité puisqu'ils s'obtiennent uniquement avec des égalités d'aires. En particulier le théorème de Pythagore [17] fait partie de cette catégorie.

Il en est tout autrement pour le théorème de Thalès. Là on aura besoin de la proportionnalité des aires et des longueurs qui nécessite le passage du discret au continu et qui est donc beaucoup plus cher.

**4. Rapport de deux aires**

**4. 1 Rapport de deux longueurs**

Soit à comparer les longueurs de deux segments [AB] et [CD]. On peut par la translation T qui envoie C sur A se ramener à comparer des segments [AB] et [AE] qui ont un point commun. Puis par un «pivotage» autour de A, on peut amener les demi-droites [AB] et [AE] en coïncidence. Donc par la suite on supposera toujours que les segments ont même origine et sont portés par la même demi-droite. Nous avons vu au § 2.4 comment, à l'aide des translations, on pouvait élaborer des segments multiples d'un segment donné. Plus précisément, pour un segment donné [AB] et un entier n, on peut déterminer un segment n fois plus grand, en itérant n fois la translation T qui porte A sur B : si $C = T^n(A)$ , alors $AC = n \cdot AB$ ou $\frac{AC}{AB} = n$ . On admet que l'ensemble des mul-

17 voir l'article de Jean-Pierre FRIEDELMEYER «Les aires : outil heuristique, outil démonstratif» dans le n°31 de REPÈRES-IREM

tiples de AB recouvre complètement la demi-droite [AB), ce qui se traduit par la :

**Propriété d'Archimède**

*Étant donnés deux segments* [AB] *et* [AC], *il existe un multiple de* [AB] *qui surpasse* [AC], *et un multiple de* [AC] *qui surpasse* [AB].

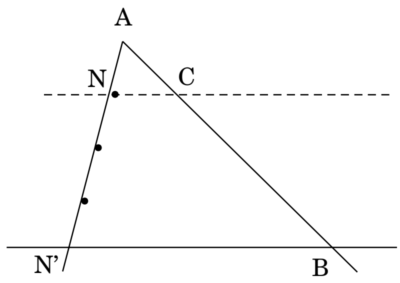
On en déduit que si AB < AC, il existe un entier k tel que :

$$k \cdot AB \leq AC < (k+1) \cdot AB .$$

On peut aussi *fractionner un segment*. Plus précisément, étant donné un segment [AB] et un nombre entier q, on peut déterminer un segment [AC] tel que :

$$AB = q \cdot AC \quad \text{ou} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{1}{q} .$$

On prend N $\notin$ (AB) et N' défini par : AN' = q . AN.




D'après le théorème 10 des parallèles équidistantes, la parallèle à (BN') passant par N coupe (AB) en C et q . AC = AB . Donc [AC] répond à la question.

Inversement, si trois points A, B, C sont alignés, peut-on déterminer le rapport des longueurs $\frac{AC}{AB}$ ?

**4. 1. 1 Si les segments [AB] et [AC] sont commensurables**

**Définition 4** *Deux segments* [AB] *et* [AC] *sont dits commensurables s'il existe un segment* [AE] *tel que* AB *et* AC *soient tous deux multiples de* AE.

*On dit que* [AE] *mesure* [AB] *et* [AC] *en nombres entiers, ou encore que c'est une partie aliquote commune à* [AB] *et* [AC] .

Alors il existe des entiers p, q tels que : AB = q . AE et AC = p . AE .

Alors p . AB = q . AC et on pose *par définition* :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad AC = \frac{p}{q} \cdot AB .$$

*Ici l'expression «par définition» est à double sens, car on donne du sens à la notion de fraction et de rationnel en fractionnant des segments et des aires, et inversement on élabore la notion de rapport de longueur, à partir des entiers et des fractions.*

*Tant d'un point de vue épistémologique que pédagogique, l'élaboration des nombres est ancrée dans l'étude du rapport des longueurs, dont l'élaboration complète va déboucher sur la «droite réelle» et ce n'est pas qu'une métaphore.*

**Comment déterminer si AE existe ?**

Par divisions successives :

Supposons AB < AC . D'après la propriété d'Archimède, il existe $k_1$ tel que :

$$k_1 \cdot AB \leq AC < (k_1+ 1) \cdot AB .$$

Donc il existe une suite de points $R_1$ , $R_2$ ,… tels que :

$$\begin{array}{ll} AC - k_1 \,.\, AB = AR_1 \,, & \text{avec} \quad 0 \leq AR_1 < AB \\ AB - k_2 \,.\, AB = AR_2 \,, & \text{avec} \quad 0 \leq AR_2 < AR_1 \\ AR_1 - k_3 \,.\, AB = AR_3 \,, & \text{avec} \quad 0 \leq AR_3 < AR_2 \\ \ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots \end{array}$$

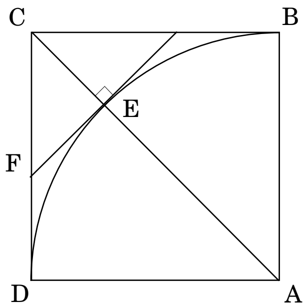
Si cette suite s'arrête, il existe $R_n$ tel que :

$$AR_{n-1} = k_{n+1} \,.\, AR_n \,,$$

et AB et AC sont tous deux des multiples de $AR_n$. Ils sont donc commensurables, et leur rapport est défini : c'est un rationnel.

Il existe des situations où cette suite ne s'arrête pas : **les segments alors sont incommensurables**. Par exemple la diagonale d'un carré et son coté sont deux segments incommensurables.

**Anthyphérèse.** Soit à comparer AB et AC.



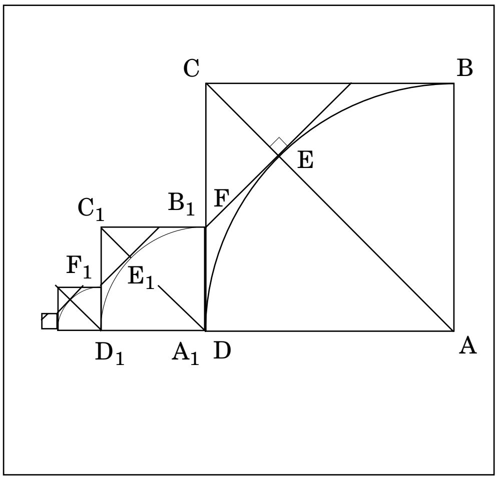

Pour retrancher AB à AC on trace le quart de cercle de centre A et de rayon AB.

Il coupe la diagonale [AC] en E. La tangente en E au cercle coupe le côté [DC] en F. Le triangle CEF est rectangle isocèle en E, donc :

$$CE = EF.$$

Les droites (FE) et (FD) sont deux tangentes au cercle issues de F, donc FE = FD. Par suite :

$$CE = EF = FD \,.$$




Si un segment de longueur $l$ mesure le côté du carré ABCD et sa diagonale AC en nombres entiers, il mesure également leur différence, donc les segments CE et CF.

En effet, si $AC = p \,.\, l$ et $AD = q \,.\, l$ alors :

$$CE = EF = FD = (p - q) \,.\, l$$

et

$$CF = [q - (p - q)] \,.\, l = (2q - p) \,.\, l \,.$$

Il reste à chercher $l$ qui mesure DE et DF en nombres entiers. Par réflexion autour de (AF), le triangle CEF est appliqué sur la moitié du carré $A_1B_1C_1D_1$ dont on est amené à comparer le coté et la diagonale.

Situation semblable à la situation initiale, avec $A_1B_1 < \frac{1}{2} AB$ .

En réitérant l'opération on obtient une suite infinie de carrés dont les côtés ont une longueur qui tend vers zéro, et $l$ devrait mesurer chacun de leurs côtés en nombres entiers. Il y a contradiction.

#### 4. 1. 2 Si les segments [AB] et [AC] sont incommensurables

Il y a différents moyens de définir le rapport $\frac{AC}{AB}$ :

— soit par dichotomie,

— soit par coupure :

Soit S( AB , AC ) =

$$\{ s = \frac{p}{q} \text{ tels que } p . AB \leq q . AC \}$$

qui définit un réel r = $\frac{AC}{AB}$ [18],

— soit par des valeurs décimales approchées.

Chacun des points de vue correspond à une approche différente des nombres réels. Je choisis le troisième, car au collège, on travaille à l'approche des nombres réels par leur développement décimal, par défaut et par excès (par exemple $\sqrt{2}$ , $\sqrt{3}$ ).

Il existe un entier k éventuellement nul tel que :

$$k\ AB \leq AC < (k+1)\ AB$$

On partage [AB] en $q_n$ segments égaux [$AE_n$], par exemple $q_n=10^n$.

On a : $AB = q_n\ AE_n$ . *Ceci correspond à faire des subdivisions de plus en plus petites sur une règle que l'on a graduée initialement avec* [AB], *puis on «zoome» de plus en plus.*

Il existe un entier $p_n$ tel que :

$$p_n\ AE_n \leq AC < (p_n + 1)\ AE_n .$$

18 Voir en Annexe

Soit $F_n$ et $G_n$ les points de la demi-droite [AC] tels que :

$$AF_n = p_n . AE_n = \frac{p_n}{q_n} . AB ,$$

$$AG_n = (p_n + 1) . AE_n = \frac{p_n + 1}{q_n} . AB$$

et $AF_n \leq AC < AG_n$ soit :

$$\frac{p_n}{q_n} . AB \leq AC < \frac{p_n + 1}{q_n} . AB$$

On met ainsi en évidence deux suites adjacentes $\frac{p_n}{10^n}$ et $\frac{p_n + 1}{10^n}$ qui seront les développements décimaux par défaut et par excès d'un nombre réel r qui sera par définition $\frac{AC}{AB}$ .

*Ici encore l'expression «par définition» est à double sens : qui est l'œuf et qui est la poule ?*

*Historiquement c'est pour évaluer le rapport des grandeurs telles que les longueurs et les aires qu'Euclide élabore la théorie des proportions qui aboutira après plus de vingt siècles et bien des vicissitudes à la construction des nombres réels ; mais dans le livre V*[19] *les rapports de grandeurs sont des objets mathématiques qu'on compare, qu'on additionne, mais sûrement pas des nombres.*

*Dans l'enseignement, il semble que la géométrie et la mesure des grandeurs permettent une approche concrète des nombres réels et de la problématique du calcul approché. Mais les deux se définissent l'un par l'autre, le rapport de deux longueurs et le réel qui l'évalue.*

19 Euclide Les Éléments o.c.

### 4. 1. 3 Application : Graduation d'une droite

Soit une droite (d). Choisir un repère sur (d) c'est se donner un point origine A et un point I. Graduer la droite c'est considérer les multiples entiers de AI, puis les multiples des parties décimales $AE_n = 10^{-n} . AI$ .

— à tout point $P \in [AI)$ correspond le réel positif $\frac{AP}{AI}$ appelé «abscisse» de M dans le repère (A,I).

— à tout réel positif r correspond l'unique point $M \in [AI)$ tel que : $AM = r . AI$ .

On obtient ainsi une bijection entre la demi-droite [AI) et la «demi-droite des réels positifs». Si on se donne [AI], il est facile géométriquement de construire deux segments [AB] et [AC] tels que :

$$AB = \sqrt{2} . AI \quad \text{et} \quad AC = \sqrt{3} . AI .$$

En reportant BC = AC sur la demi-droite qui ne contient pas A, on obtient :

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{AB}{AI} + \frac{BD}{AI} = \frac{AD}{AI} .$$

Ce qui permet d'accréditer l'idée que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ existe à défaut de valoir $\sqrt{5}$ [20].

### 4. 2 Proportionnalité entre l'aire d'un triangle et la longueur de sa base

*On voit que le concept de rapport des longueurs a été un problème difficile, historiquement et il le reste dans l'enseignement. Néanmoins au cours de son élaboration, on voit apparaître un outil «la règle graduée» qui va rendre des services même s'il se révèle très imparfait. Pour les angles géométriques, on aura le rapporteur… qui présente des qualités et des défauts analogues.*

*Pour les aires rien de semblable, il n'y a pas d'outil matériel pour évaluer le rapport de deux aires. Et c'est une difficulté supplémentaire.*

*Les Grecs ont cherché à construire des carrés d'aires égales à celles d'un rectangle [21], d'un cercle… On peut se demander si c'était dans le but de les comparer par le biais du côté du carré obtenu.*

*Pour l'heure, comme les rapports de longueurs ont conduit aux réels, ce qu'on peut traduire en disant que **la droite est la métaphore universelle des réels**, on va montrer que le rapport de deux aires peut se définir en passant par le rapport de deux longueurs.*

*Dans un deuxième temps, on passera par un calcul : calcul exact ou calcul approché.*

***Comme on n'a pas d'instrument pour mesurer une aire, on la calcule.***

### 4. 2. 1 Quand les bases AB et AC sont commensurables

Il existe une longueur AE et des entiers p, q tels que :

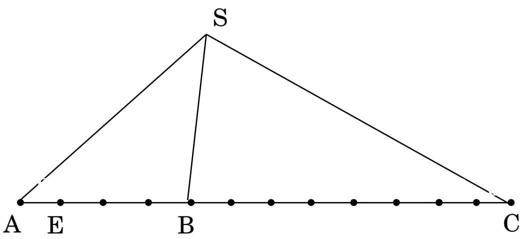
$$AB = p . AE \quad \text{et} \quad AC = q . AE .$$

Le segment [AB] se partage en p segments égaux. Le segment [AC] en contient q. Cha-

20 Voir l'Article de Marc Picot « $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ça se peut pas» à paraître dans un prochain numéro.

21 fin du Livre II des Éléments d'Euclide

cun de ces segments détermine avec le point S un triangle :




Le triangle SAB est partagé en p triangles d'aires égales à celle du triangle SAE.

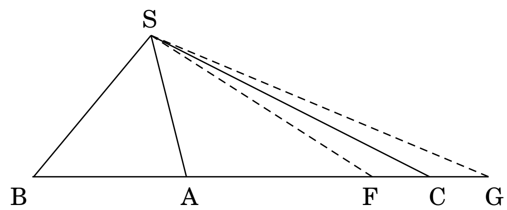
Le triangle SAC en contient q. Donc :

$$\left[ \frac{AC}{AB} = \frac{q}{p} \right] \Longrightarrow \left[ \frac{\text{Aire(SAC)}}{\text{Aire(SAB)}} = \frac{q}{p} \right]$$

On obtient :

$$\frac{\text{Aire(SAC)}}{\text{Aire(SAB)}} = \frac{AC}{AB}.$$

### 4. 2. 1 Quand AB et AC ne sont pas commensurables




Il existe un entier k éventuellement nul tel que $k \cdot AB \leq AC < (k + 1) \cdot AB$.

Soit F et G les points de demi-droite [AC] tels que $AF = k \cdot AB$ et $AG = (k + 1) AB$
On a :

$$\text{Aire(SAF)} \leq \text{Aire (SAC)} < \text{Aire(SAG)}$$

Donc : $\left[ k \leq \frac{AC}{AB} < k + 1 \right] \Longrightarrow$

$$k.\text{Aire(SAB)} \leq \text{Aire (SAC)} < (k+1).\text{Aire(SAG)}$$

On partage [AB] en $q_n$ segments égaux $[AE_n]$, par exemple $q_n = 10^n$. Il existe un entier $p_n$ tel que $p_n\, AE_n \leq AC < (p_n + 1)\, AE_n$.

Soit $F_n$ et $G_n$ les points de demi-droite [AC] tels que :

$$AF_n = p_n \cdot AE_n \quad \text{et} \quad AG_n = (p_n + 1) \cdot AE_n.$$

On a :

$$\text{Aire}(SAF_n) \leq \text{Aire (SAC)} < \text{Aire}(SAG_n)$$

$$\frac{p_n}{q_n}.\text{Aire(SAB)} \leq \text{Aire(SAC)} < \frac{p_n + 1}{q_n}.\text{Aire(SAB)}$$

Donc : $\left[ \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{AC}{AB} < \frac{p_n + 1}{q_n} \right] \Longrightarrow$

$$\left[ \frac{p_n}{q_n} \leq \frac{\text{Aire(SAC)}}{\text{Aire(SAB)}} < \frac{p_n + 1}{q_n} \right]$$

Les deux suites décimales $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ et $\left(\frac{p_n + 1}{q_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ définissent l'une par défaut, l'autre par excès, un nombre réel unique qui est égal au rapport $\frac{AC}{AB}$.

On vient de montrer que le rapport $\frac{\text{Aire(SAC)}}{\text{Aire(SAB)}}$ est égal au même nombre réel. Donc : $\frac{\text{Aire(SAC)}}{\text{Aire(SAB)}} = \frac{AC}{AB}$.

**Conclusion.** *Si deux triangles ont un sommet commun et si leurs bases ont un support commun, alors leurs aires sont proportionnelles à la longueur de leurs bases.*

**Remarque 2** *Les rapports qui figurent dans cette relation sont relatifs à des grandeurs qui ne sont pas de même nature — les physiciens diraient qu'elles ne sont pas de même dimension — chaque rapport est bien défini et il y a égalité mais **le produit en croix** des extrêmes et des moyens **n'a pas de sens**.*

**Relation entre des aires.**

En posant le rapport des longueurs $\frac{AC}{AB} = \alpha$ on obtient $\frac{Aire(SAC)}{Aire(SAB)} = \alpha$, qui peut s'écrire :

$$Aire(SAC) = \alpha \,.\, Aire(SAB)$$

*On a ainsi exprimé dans tous les cas une relation entre les aires de deux triangles ayant un sommet commun et leurs bases sur un support commun.*

### 4. 3 Démonstration du théorème de Thalès

Les droites (AB), (EF) et (CD) sont parallèles (cf. figure ci-dessus) :

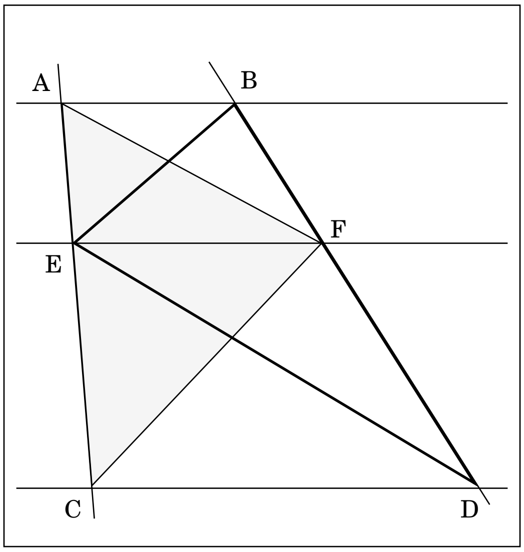
$$\frac{AE}{EC} = \frac{Aire(FAE)}{Aire(FEC)} = \frac{Aire(EBF)}{Aire(EFD)} = \frac{BF}{FD}$$

On a aussi :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{Aire(FAE)}{Aire(FAC)} = \frac{Aire(EBF)}{Aire(EBD)} = \frac{BF}{BD}$$

**Théorème 12 de Thalès :** Si deux droites δ et δ' sont découpées respectivement en A, E, C et B, F, D par trois droites parallèles on a :

$$\frac{AE}{EC} = \frac{BF}{FD}.$$



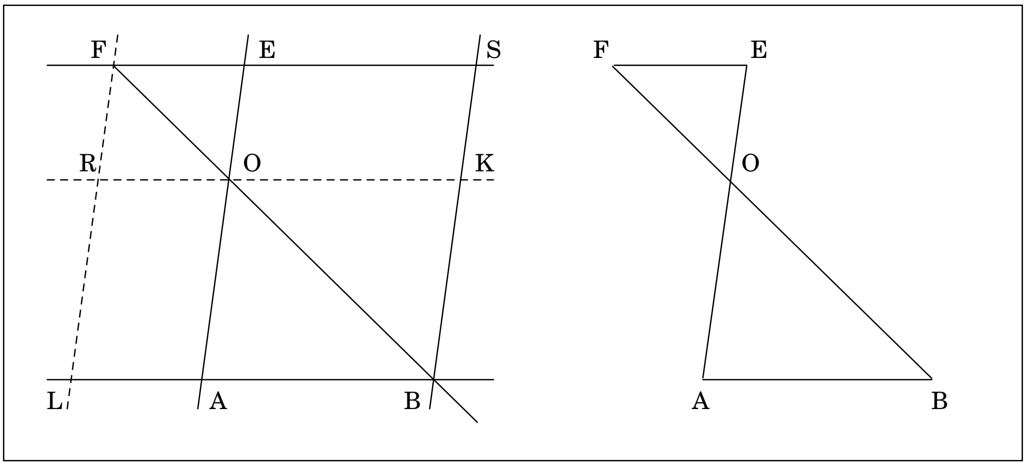

Sous cette forme, le théorème de Thalès exprime que la projection parallèle à une direction donnée d'une droite sur une autre est une application affine[22], elle transforme le barycentre de deux points en le barycentre de leurs images, avec les mêmes coefficients.

### 4. 4 Démonstration du théorème de Thalès dans le cas du triangle.

On considère (cf. figure page suivante) les triangles OAB et OEF, où les droites (AB) et(FE) sont parallèles.

On ajoute une parallèle passant par O à la droite (AB) et deux parallèles passant par F et B à la droite (AO).

22 Voir l'article de Jean-Claude DUPERRET : «Pour un Thalès dynamique», dans «L'enseignement des mathématiques : des Repères entre savoirs, Programmes et Pratiques».- TOPIQUES Éditions 1996




Avec les triangles OEF et OAB puis les triangles OFR et OBK on a :

$$\frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OB} \quad \text{et} \quad \frac{OF}{OB} = \frac{OR}{OK} .$$

Comme OR = EF et OK = AB, on obtient :

$$\frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OB} = \frac{EF}{AB} .$$

Sous cette forme, le théorème de Thalès est lié à l'homothétie, il en exprime la linéarité. Et il permet d'introduire naturellement la multiplication d'un vecteur par un scalaire.

## 5. La mesure des aires

### 5. 1 Pour mesurer les longueurs

Il faut choisir une *longueur unité u* et la mesure de la longueur AB est :

$$mes_u(\mathrm{AB}) = \frac{AB}{u} .$$

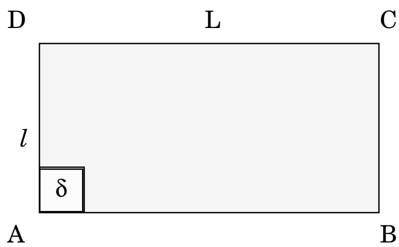
Si sur la droite (AB) on choisit E tel que AE = $u$ :

— à tout point $P \in [AE)$ correspond le réel positif $\frac{AP}{AE}$

— à tout réel positif r correspond l'unique point $M \in [AE)$ tel que : AM = r . AE

et on obtient la «Droite Réelle» ou plutôt la «demi-droite des réels positifs».

#### 5. 1. 1 Pour mesurer les aires




On prend une *unité d'aire* qui est l'aire du carré δ de côté $u$.

La mesure de l'aire du rectangle ABCD sera :

$$mes_\delta(\mathrm{ABCD}) = \frac{\mathrm{Aire(ABCD)}}{\delta}$$

On va montrer en utilisant les résultats antérieurs — § 3. 3. 4, § 3. 2. 2 et § 4. 2 — qu'il s'exprime comme un rapport de longueurs, donc que l'on obtient un réel.

**Remarque** *Il est important de noter qu'une unité pour une grandeur* ***n'est jamais un nombre mais une grandeur*** *de même nature :*

— le cm est une longueur,

— le cm $^2$ est l'aire d'un carré d'un cm de côté,

— le degré est un angle, le radian aussi !

### 5. 2 Mesure de l'aire d'un rectangle en fonction des mesures de sa longueur et de sa largeur

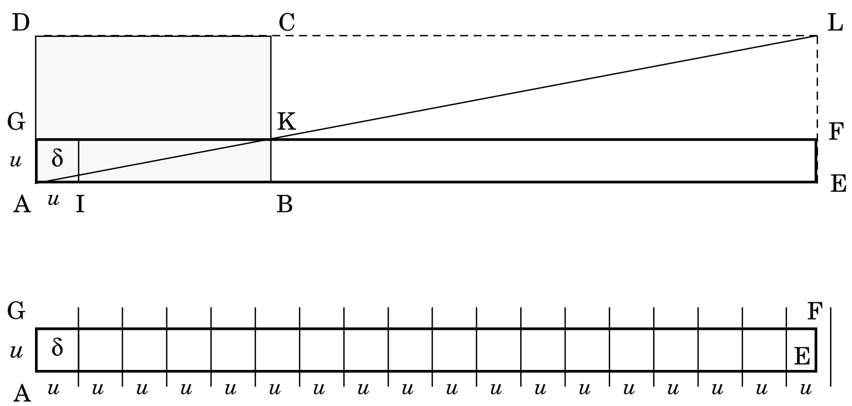
*Pour mesurer l'aire du rectangle* ABCD

1 — On commence par montrer qu'il existe un rectangle AEFG de largeur l'unité $u$ qui a même aire (figure 1 ci-dessous). Ceci résulte de la construction du § 3. 2. 2 ;

2 — Pour mesurer AEFG on compte combien de carrés d'aires δ on peut enfermer dans AEFG et on encadre. Puis on recommence en ayant coupé les carrés en 10,… en 10 $^n$, et on constate que (figure 2) :

$$\frac{\mathrm{Aire(AEFG)}}{\delta} = \frac{\mathrm{AE}}{u} = \mathrm{S}$$

On aurait pu aussi appliquer la proportionnalité des aires et des bases dans les triangles GAE et GAI.



**3 — Le Théorème de Thalès appliqué au triangle AEL coupé par la parallèle BK conduit à :**

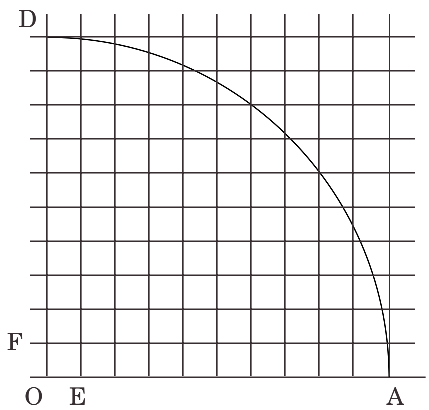
$$\frac{AE}{AB} = \frac{EL}{BK} \text{ d'où } \frac{S}{L} = \frac{l}{1} \text{ et } S = l \times L$$

4 — Pour tout polygone on peut trouver un rectangle qui a même aire d'après le § 3. 3. 4, donc on peut mesurer l'aire de tout polygone.

Tout ceci peut paraître un exercice de style, mais notre but était de réfléchir à la nature des choses, et on a entrevu ce qu'est une aire, qu'est-ce que la mesurer.

Un exercice pour évaluer l'aire d'un quart de cercle peut aussi être intéressant pour approcher ces notions : il a été fait comme recherche en classe de seconde par «maths en jeans» :

**Exercice 1** Soit OAD un quart de cercle de rayon 10 cm. On se propose de réaliser un algorithme permettant d'évaluer la mesure de l'aire du quart de disque en $cm^2$. Et d'en déduire un encadrement de $\pi$ .




Soit O,E,F le repère orthonormé tel que OE = OF = 1 cm . On choisit $OE_n = 10^{-n}$. OE et $OF_n = 10^{-n}$. OF. On effectue un quadrillage $Q_n$ dans lequel les points ont des coordonnées entières dans le repère $OE_nF_n$.

On compte le nombre $p_n$ de carreaux du quadrillage $Q_n$ intérieurs au quart de disque, et $q_n$ le nombre de carreaux du quadrillage qui rencontrent le quart de disque OAD.

En remarquant que $p_n$ est le cardinal de l'ensemble des points qui appartiennent au quadrillage et dont les coordonnées dans le repère (O,E,F) vérifient :

$$x > 0 , y > 0 \text{ et } x^2 + y^2 < 100 ,$$

on peut élaborer l'algorithme qui permet de calculer $p_n$ .On fait un travail analogue avec $q_n$ et on obtient un encadrement de $\pi$.

## En guise de conclusion

Plus j'avançais dans la rédaction de cet article, plus j'étais impressionnée par la similarité des algorithmes de l'évaluation des longueurs et ceux de l'arithmétique : on aura reconnu l'algorithme des divisions successives qui permet la recherche de la partie aliquote commune à deux segments et le P.G.C.D. de deux nombres entiers ; l'algorithme de la recherche du rapport de deux longueurs est le même que celui de la division décimale (ou à virgule) de deux nombres entiers. Si on désire que nos enfants passent derrière la boite noire de la calculette, réfléchissent au sens des nombres et à la signification du calcul approché, il me semble que la mesure des grandeurs pourrait être un chemin passionnant à leur offrir. (*)

* Je remercie infiniment mes relecteurs, en particulier Dominique Benard, Evelyne Barbin et Henri Lombardi, dont les critiques éclairées ont abondemment nourri ma réflexion pour arriver à la rédaction finale de cet article.

# ANNEXE : Des grandeurs (*)

## A. 1 Notion de grandeur.

On appelle *grandeur* ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. Ainsi les longueurs, les aires, les angles, les volumes, les masses, les temps, etc.

Un *type de grandeur* peut être défini comme un ensemble de grandeurs de même nature muni d'un ordre total et nous noterons $a < b$ la relation d'ordre strict. Autrement dit nous avons les propriétés suivantes:

1 — deux grandeurs a et b étant données, alors soit $a < b$, soit $b < a$, soit $a = b$.

2 — les inégalités $a < b$ et $b < c$ impliquent $a < c$.

A une relation d'ordre strict, on associe la relation d'ordre large $a \leq b$ qui signifie : [ $a < b$ ou $a = b$ ].

Un type de grandeur $\mathcal{G}$ étant donné, on peut définir une notion de mesure au sens faible (repérage), un exemple étant donné par la mesure des températures.

Considérons deux grandeurs de type $\mathcal{G}$ , a et b telles que $a < b$. On leur associe respectivement les nombres $\alpha$ et $\beta$ tels que $\alpha < \beta$. Un *repérage* de $\mathcal{G}$ est défini en associant à une division de l'intervalle [a,b] une division de l'intervalle numérique $[\alpha,\beta]$ .

De façon précise, supposons par exemple $\alpha = 0$ et $\beta = 10$ et divisons l'intervalle [a,b] en dix parties, ce qui permet de définir la suite croissante d'états :

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_9 < a_{10} = b \ ;$$

puis divisons chaque intervalle $[a_i ,a_{i+1}]$ en dix parties et ainsi de suite ; on définit ainsi une graduation de $\mathcal{G}$ qui associe à tout nombre décimal r compris entre 0 et 1 une grandeur que nous noterons $a_r$ .

Une grandeur x étant donnée, ou bien elle appartient à la graduation et sa mesure est le nombre correspondant, ou bien elle n'appartient pas à la graduation, auquel cas sa mesure est définie par la borne supérieure de l'ensemble des nombres qui mesurent les états inférieurs à x.

On a ainsi défini une application de l'intervalle [a,b] dans l'intervalle numérique [0,10] : *application repérage* ; cette application est évidemment injective, en général elle n'est pas surjective, nous dirons que le type de grandeur $\mathcal{G}$ est continue s'il existe un repérage surjectif.

Notons que la graduation est définie *de façon arbitraire* ; si l'on prend l'exemple de la température repérée en degré centigrades, une fois la correspondance donnée qui associe le nombre 0 à la température de congélation de l'eau et le nombre 100 à la température d'ébullition, la graduation est conventionnelle qui divise la longueur d'un thermomètre en 100 parties égales.

La thermodynamique nous apprend que si l'on prolonge le repérage, il y a une température minimale correspondant à –273 (le zéro absolu) mais la «différence» de température entre –273 et –272 n'est en rien égale à la «différence» de température entre 0 et 1 ; en fait le zéro absolu est inaccessible et abaisser la température de 1° au voisinage du zéro absolu exige une dépense d'énergie beaucoup plus grande que l'abaissement de 1° au voisinage de 0.

* Inspiré d'un texte de Rudolf Bkouche.

Il y a par contre des types de grandeur pour lesquelles la construction d'une graduation est définie par des propriétés internes, ce sont les grandeurs *additives* telles par exemple les longueurs.

### A. 2 Grandeurs additives

Nous dirons qu'un type de grandeur $\mathcal{G}$ est additif si on peut définir la somme de deux grandeurs ; on note a + b la somme de grandeurs a et b et on appelle addition l'opération qui associe à deux grandeurs leur somme.

L'addition possède les propriétés suivantes :

1 — si a et a' sont égales et si b et b' sont égales, alors les sommes a + b et a' + b' sont égales.

2 — l'addition est commutative et associative.

3 — l'addition est compatible avec l'ordre : trois grandeurs étant données a , b , c , l'inégalité b < c implique alors l'inégalité a + b < a + c .

4 — il existe une grandeur nulle 0 , c'est-à-dire telle que pour toute grandeur a : a + 0 = a.

5 — soient a et b deux grandeurs, si a < b , il existe une grandeur c telle que a + c = b, on note c = b – a .

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

— deux grandeurs nulles sont égales et la grandeur nulle est plus petite que toute grandeur non nulle.

— soient a et b deux grandeurs, si b n'est pas la grandeur nulle, alors a < a + b.

— soient a, b, c trois grandeurs telles que a + b = a + c, alors b = c .

— soient a et b deux grandeurs telles que a < b, il existe une grandeur et *une seule* c telle que a + c = b .

Un type de grandeur additif étant donné, on sait définir, par additions successives, les multiples m.a d'une grandeur (m entier naturel). On peut alors montrer, en utilisant la relation d'ordre que l'égalité m.a = m.b implique l'égalité a = b.

On montre aisément les relations suivantes (si m et n désignent des nombres entiers positifs, a et b des grandeurs) :

— (m + n).a = m.a + n.a

— m.(n.a) = (mn).a

— m.(a + b) = m.a + m.b

— l'inégalité m < n implique l'inégalité m.a < n.a et réciproquement.

— l'inégalité a < b implique l'inégalité m.a < m.b et réciproquement.

Nous dirons qu'un type de grandeur $\mathcal{G}$ est *archimédien* s'il satisfait la propriété suivante (axiome d'Archimède) :

**Axiome d'Archimède** Pour tout couple de grandeurs a et b du type $\mathcal{G}$ il existe un multiple de a qui surpasse b et un multiple de b qui surpasse a.

Dans la suite les types de grandeurs considérés sont additifs et archimédiens.

### A. 3 Rapports commensurables

Nous dirons que deux grandeurs d'un type donné sont commensurables s'il existe un multiple de la première égal à un multiple de la seconde.

Soient a et b deux grandeurs commensurables et soient quatre entiers naturels m, n, p, q tels que l'on ait les égalités m.a = n.b et p.a = q.b ; on vérifie aisément la relation $mq = np$ d'où $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$.

On appelle *rapport de b à a* et on note $\frac{b}{a}$ le nombre rationnel $r = \frac{m}{n}$.

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

1 — si a et b sont commensurables et b et c sont commensurables alors a et c sont commensurables et on a la relation :

$$\frac{c}{a} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} .$$

2 — si a et b sont commensurables, alors

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 .$$

Soient a et b deux grandeurs commensurables et $r = \frac{b}{a}$ , on notera b = r. a . On vérifie aisément les égalités (sous réserve que les termes soient définis) :

3 — $(r + s) . a = r . a + s . a$

4 — $r . (s . a) = r . s . (a)$

5 — $r . (a + b) = r . a + s . b$

6 — l'inégalité $r < s$ implique l'inégalité $r . a < s . a$ et réciproquement.

7 — l'inégalité $a < b$ implique l'inégalité $r . a < r . b$ et réciproquement.

### A. 4 Rapports incommensurables

Nous dirons que deux grandeurs d'un type donné sont incommensurables lorsqu'elles ne sont pas commensurables.

Nous nous proposons de définir les notions de rapports et de proportions dans le cas où les grandeurs ne sont pas commensurables.

Soient a et b deux grandeurs. Soit $r = \frac{m}{n}$ un nombre rationnel, on montre aisément que l'inégalité $ma < nb$ ne dépend que de r.

**Proposition** : L'ensemble S(a,b) des nombres rationnels $r = \frac{m}{n}$ tels que $ma < nb$ est une section positive commençante de $Q^{*+}$.

En effet :

— S(a,b) n'est pas vide, d'après l'axiome d'Archimède,

— Pour tout r de S(a,b) et s un nombre rationnel positif tel que $s < r$ alors $s \in S(a,b)$.

Lorsque a et b sont commensurables, la section positive commençante S(a,b) définit le rapport $\frac{b}{a}$ défini ci-dessus. De façon générale, on appelle *rapport de b à a* et on note $\frac{b}{a}$ le nombre réel défini par la section commençante S(a,b). On vérifie que :

1 — si a, b et c sont des grandeurs de type $\mathcal{G}$ :

$$\left[ \frac{b}{a} = \frac{c}{a} \right] \Longleftrightarrow ( b = c ) ,$$

2 — si a , b et c sont des grandeurs de type $\mathcal{G}$ on a : $\frac{c}{a} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a}$.

3 — si a et b sont des grandeurs de type $\mathcal{G}$ , alors : $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ .

Soient a et b deux grandeurs de type $\mathcal{G}$ et $\rho = \frac{b}{a}$, on notera $b = \rho \cdot a$ .

Soient a et b deux grandeurs de type $\mathcal{G}$ , ρ et σ étant des nombres réels, on vérifie les égalités (sous réserve que les termes soient définis) :

4 — $(\rho + \sigma) \cdot a = \rho \cdot a + \sigma \cdot a$

5 — $\rho \cdot (\sigma \cdot a) = \rho\sigma \cdot (a)$

6 — $\rho \cdot (a + b) = \rho \cdot a + \rho \cdot b$

7 — l'inégalité $\rho < \sigma$ implique l'inégalité :

$$\rho \cdot a < \sigma \cdot a$$

et réciproquement.

8 — l'inégalité $a < b$ implique l'inégalité :

$$\rho \cdot a < \rho \cdot b$$

et réciproquement.

### 6.5 Mesure des grandeurs

Soit $\mathcal{G}$ un type de grandeur et $u$ une grandeur que l'on choisit comme unité. A toute grandeur du type $\mathcal{G}$ on associe le nombre réel $\frac{a}{u}$ que l'on note aussi $mes_u(a)$.

On définit ainsi une application $mes_u$ qui associe à toute grandeur du type $\mathcal{G}$ un nombre réel.

Soient a et b deux grandeurs, alors :

$$mes_u(a + b) = mes_u(a) + mes_u(b) .$$

Soient a une grandeur et $r$ un nombre réel tel que $r \cdot a$ soit défini, on montre la relation :

$$mes_u(r \cdot a) = r \cdot mes_u(a) .$$

L'application $mes_u$ conserve l'ordre.

Soient $u$ et $v$ deux grandeurs, pour toute grandeur a, on a la relation :

$$mes_v(a) = mes_v(u).mes_u(a) .$$