# EQUATIONS ET CALCUL LITTERAL EN QUATRIEME

Jean-Paul GUICHARD
Irem de Poitiers

Comme dans le précédent programme de 4ème, le texte des nouveaux programmes spécifie bien que la compétence exigible à acquérir en 4ème n'est pas la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue, mais la mise en équation et la résolution d'un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue. Ceci est tout à fait en cohérence avec les objectifs fondamentaux de la partie « Travaux numériques » du programme.

Mais essayer de tenir ensemble tous ces objectifs : résolution de problèmes, équations, initiation au calcul littéral, sans privilégier des exercices de technique pure, n'est pas chose facile. La preuve en est dans les manuels, où l'on assiste la plupart du temps à des apprentissages morcelés, faisant l'objet de chapitres souvent distincts. L'approche que nous proposons, et que nous pratiquons dans nos classes, est de partir de problèmes et de mettre en œuvre pour leur résolution la démarche algébrique de mise en équation. La résolution des équations nécessitant la connaissance d'un certain nombre de règles du calcul littéral, nous introduisons la plupart de ces règles à cette occasion. Les équations apparaissent alors pour ce qu'elles sont : un moyen performant de résoudre les problèmes, et le calcul littéral pour ce qu'il est : le moyen de mettre en œuvre cette méthode.

Le problème qui se pose à nous, enseignants, est alors :
— de bien identifier les règles et conventions couramment utilisées lors de la mise en équation et lors de la résolution des équations,
— de trouver un corpus de problèmes où, pour la mise en équation et après celle-ci, vont intervenir ces différentes conventions et règles,

— de classer ces problèmes en fonction des conventions et règles à mettre en œuvre,
— d'organiser une progression des problèmes à résoudre dans laquelle conventions et règles soient introduites de façon progressive.

Il est à noter que pour organiser cette progression il faut aussi tenir compte d'une autre variable importante qui est la difficulté, pour les élèves, de la mise en équation. Des recherches sont en cours sur ce sujet à l'Irem de Lorraine.

Cette analyse et sa mise en œuvre visent la maîtrise conjointe de la mise en équation, de la résolution d'équations et d'un certain nombre de règles du calcul littéral. Et ceci dans le cadre de la résolution de problèmes, dont le programme rappelle qu'ils doivent être issus de domaines variés : géométrie, gestion de données, autres disciplines, vie courante. On trouvera ce même souci d'ouvrir aux élèves de collège l'accès au calcul littéral, dans un contexte de résolution de problèmes qui lui donnent du sens, au travers de deux articles parus récemment dans la revue Repères-Irem ([4], [5])

## 1. Règles de calcul et conventions

Nous nous proposons de commencer par une analyse des tâches auxquelles sont confrontés les élèves lors de l'écriture et de la résolution des équations. Ce travail préliminaire nous semble important pour l'enseignant afin de prendre conscience de la complexité de tâches qui lui paraissent simples : nombre de règles mises en jeu, statut différent de ces règles, part importante d'implicite. Ce sont les éléments de cette analyse qui ont, en grande partie, déterminé nos choix dans l'approche que nous présentons. Nous vous proposons de la faire à partir de deux exemples, en mettant en évidence les principales règles de calcul littéral qui seraient à maîtriser par les élèves et qui, de ce fait, font la plupart du temps l'objet d'un chapitre à part, ou du moins d'un apprentissage séparé et en soi, contrairement à la proposition que nous faisons. Nous ne parlerons donc pas ici des règles de transformation des équations, mais simplement des règles du calcul littéral.

***Exemple 1*** *Trouver le nombre tel que son double augmenté de 5 soit égal à son triple diminué de 7.*

Soit $x$ le nombre cherché.

$$(2 \times x) + 5 = (3 \times x) - 7 \qquad (1)$$
$$2x + 5 = 3x - 7 \qquad (2)$$
$$12 = x \quad \text{ou} \quad -x = -12 \qquad (3)$$
$$x = 12 \qquad (4)$$

1) Le passage de (1) à (2) met en œuvre la règle $\mathbf{a \times b = ab}$ , convention d'écriture de la multiplication en calcul littéral due à Descartes, convention qui permet de ne pas utiliser de parenthèses, et qui porte en elle, sans qu'il soit besoin de le dire, la priorité de « x » sur « + ». C'est ce qui fait l'intérêt de cette notation, qui va induire le bon ordre de traitement de l'équation : addition, puis division. Alors qu'en calcul numérique les conventions de suppression de parenthèses et de priorité, héritées du calcul littéral, n'ont pas d'intérêt, et sont introduites avant l'utilisation du calcul littéral qui leur donnerait du sens !

D'autre part il faut remarquer tout l'intérêt qu'il y a à commencer par une mise en équation qui permet de poser, dans un contexte qui a du sens, les problèmes d'écriture et de transformation d'expressions algébriques, ainsi que d'utilisation des parenthèses. Par exemple pour certains élèves c'est l'écriture $x \times 2$ qui traduit le double d'un nombre, et non $2x$. Il semble important dans un premier temps de ne pas brûler les étapes, et de laisser utiliser par les élèves le signe « $\times$ » et les parenthèses. Cela permet de mettre en œuvre et d'élargir une des compétences exigibles du programme : « écrire en utilisant correctement des parenthèses des programmes de calcul portant sur des sommes ou des produits de nombres relatifs ». Le passage de $(2 \times x)$ à $2x$ permet de poursuivre l'apprentissage commencé en 5ème, mais surtout il permet de rappeler que dans la notation $2x$ les parenthèses sont implicitement présentes.

2) Le passage de (2) à (3) met en œuvre la règle $\mathbf{a}x + \mathbf{b}x = (\mathbf{a} + \mathbf{b})x$. On peut noter la distance qu'il y a entre cette formulation de la distributivité et celle vue en 5ème :

$$\mathbf{k(a + b) = ka+kb}.$$

Est-ce évident pour l'élève qu'il s'agit de la même règle ? Ce passage utilise aussi les propriétés de l'addition des nombres relatifs (**associativité, commutativité, élément neutre**), la transformation de la soustraction en addition ($\mathbf{a - b = a + (- b)}$), des propriétés de la multiplication ($\mathbf{1}x = x$ , $-\mathbf{1}x = -x$).

Cela pose le problème du degré d'intégration de toutes ces règles par les élèves, et des étapes qu'il faudrait éventuellement rajouter en début d'apprentissage. Car la plupart de ces règles que nous utilisons de façon automatique, sans explicitation, ne sont en général pas maîtrisées par les élèves ni sous forme implicite, ni sous forme explicite. Les procédures, souvent erronées, utilisées par les élèves, ne sont référencées à aucune règle : elles relèvent la plupart du temps de « théorèmes élèves ».

Revenons à la notation ambiguë « $-1x$ ». En toute rigueur, il faudrait écrire $(-1)x$ et utiliser la règle $(-a)b = -(ab)$ pour obtenir $-x$. Or cette règle n'est jamais établie, ni explicitée. Elle est souvent considérée comme la généralisation, au calcul littéral, de la règle des signes vue pour le produit de deux relatifs. Mais alors $-a$ est considéré comme un nombre négatif, ce qui renforce la conception fausse et usuelle que se font les élèves de $-a$, et contre laquelle il faut ensuite lutter. Par contre l'ambiguïté de la notation $-ab$ permet de considérer $-ab$ tantôt comme l'opposé de $ab$, tantôt comme le produit de $-a$ par $b$, sans se poser le problème. C'est un intérêt de cette notation qu'il faut exploiter.

3) Le passage de (3) à (4) met en œuvre la règle $\mathbf{-(-a) = a}$. Il est à remarquer que cette règle n'a été validée que pour le calcul numérique. On retrouve le problème précédent du statut de $-a$. Au niveau de l'élève, on est plus souvent sur le registre d'une « règle élève » : « on enlève les – de chaque côté » qui porte sur la transformation de (3) en (4), qui relève de la conservation de l'égalité par passage aux opposés, règle rarement institutionnalisée.

Quelle serait la « règle-élève » si l'équation (3) était $-x = 12$ ? On voit aussi le type d'erreurs que peut entraîner une telle règle avec laquelle $-2x + 5 = -3x$ se transforme facilement en $2x + 5 = 3x$ …

***Exemple 2*** *Je pense à un nombre. Je lui retranche 5. Si je multiplie le résultat par 3, je trouve la même chose que si j'enlève ce résultat de 3. A quel nombre ai-je pensé ?*

Soit $x$ le nombre cherché.

$$(x - 5) \times 3 = 3 - (x - 5) \qquad (1)$$

$3x - 15 = 3 - x + 5$ (2)
$3x - 15 = 8 - x$ (3)
$4x = 23$ (4)
$x = 5{,}75$

1) La mise en équation peut donner $3(x - 5)$ au lieu de $(x - 5) \times 3$, notation qui utilise la convention **a × b = ab** dans le cas où b est un nombre, la règle étant qu'alors on commute a et b.

2) Le passage de (1) à (2) met en œuvre deux règles : **k(a + b) = ka + kb** et le calcul de **–(a + b)** Si l'on explicite les calculs qui permettraient, à chaque étape, d'identifier les règles, on obtient :

a) $(x - 5) \times 3 = 3 \times (x - 5) = 3 \times (x + (-5)) =$
$= 3 \times x + 3 \times (-5) = 3x + (-15) = 3x - 15.$

b) $3 - (x - 5) = 3 + [-(x + (-5))] =$
$= 3 + [(-x) + (-(-5))] = 3 + (-x) + 5 =$
$= 8 + (-x) = 8 - x$ .

Pour a) en ce qui concerne l'utilisation de la distributivité, il faut se rappeler que dans le programme de 5ème les formules sont :

k(a + b) = ka + kb et k(a – b) = ka – kb ,

avec k , a , b décimaux positifs. En 4ème, il s'agit du développement de (a + b)(c + d) avec a , b , c , d lettres ou nombres relatifs. Comment va se gérer le passage des deux formules de 5ème avec k , a , b décimaux positifs, à la seule première de ces deux formules avec k , a , b lettres ou nombres relatifs ?

Il y a là une réelle difficulté que le programme n'oublie pas de signaler : « Les activités de développement poursuivent celles de 5ème en utilisant l'identité k(a + b) = ka + kb. L'introduction progressive des lettres et des nombres relatifs s'intégrant aux expressions algébriques représente une difficulté importante qui doit être prise en compte ».

Pour b), ce type de calcul fait explicitement partie des calculs à savoir faire. Mais nulle part n'est mentionné l'apprentissage d'une règle pour faire ce type de calcul. En 5ème l'apprentissage d'une telle règle n'existe pas, et n'a, de fait, pas lieu d'être dans la mesure où il ne s'agit que de calcul numérique. La seule règle mentionnée est « soustraire un nombre c'est ajouter son opposé ». L'utilisation de cette dernière règle rend incontournable l'apprentissage d'une autre règle non mentionnée dans les programmes : « L'opposé d'une somme est la somme des opposés ». Règle que l'on peut facilement démontrer.

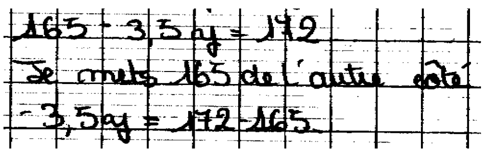
Les analyses qui précèdent nous amènent à mettre l'accent sur deux points importants :

1) Le passage du numérique au littéral ne peut pas toujours se faire sur le mode de l'évidence et de la généralisation. Il y a des précautions à prendre. Mais le thème de la résolution des problèmes par les équations nous semble très propice à son apprentissage car on peut y trouver toutes les règles du calcul littéral dans un contexte qui a du sens et où ces règles, constituant l'outil essentiel de la résolution, sont incontournables.

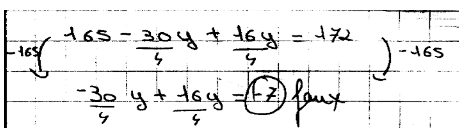
2) Pourquoi y a-t-il une telle différence de traitement des apprentissages entre calcul en algèbre et démonstration en géométrie ? Pourquoi en géométrie exige-t-on que chaque étape du raisonnement soit reliée à un énoncé, la plupart du temps complètement explicité en début d'apprentissage, alors qu'en algèbre cette exigence est complètement absente : les analyses précédentes montrent la difficulté qu'il y a à associer à chaque étape de la résolution

d'une équation, ou d'un calcul, une règle bien identifiée. Cette réflexion d'élève le confirme ; « Madame, mais moi quand je me trompe c'est sur les signes. Des fois j'oublie. Y a pas une règle pour pas oublier ? ».

On constate que pour l'élève, les règles se résument le plus souvent à distribuer, enlever les parenthèses, simplifier, sans en connaître les modalités précises d'utilisation. Faut-il alors faire expliciter toutes les règles par les élèves ? Le peut-on ? Quand faudrait-il le faire ? Sous quelle forme ? Comment faire rédiger un calcul ? Toutes ces questions préoccupent les enseignants, mais peu de choses ont été écrites à ce sujet. Pour ma part, j'insiste sur le fait que la présentation des calculs (disposition matérielle, enchaînement, mots de coordination, phrases, indications iconiques) doit permettre au lecteur de percevoir les règles utilisées. Comme en géométrie pour les théorèmes, je privilégie l'instanciation des règles. Nous ne les explicitons que lors des corrections, de façon orale ou écrite. Par contre elles sont toutes explicitées dans le cours de l'élève en associant langage usuel et langage symbolique, et elles sont codées pour servir de référent (Voir la fiche de cours, chapitre 2, à la fin du paragraphe suivant). La présentation de la résolution d'une équation du premier degré sous forme de lignes, les unes au dessous des autres, marquant les étapes des transformations successives de l'équation, facilite ces explicitations.




Entre chaque ligne peut figurer un commentaire plus ou moins détaillé : « je simplifie de chaque côté », « j'ajoute 15 et $x$ de chaque côté » ou sous forme iconique (voir par exemple les extraits ci-dessus et ci-dessous).




Ma pratique me renforce dans l'idée que l'explicitation des grandes étapes de la résolution de l'équation favorise sa réussite, et qu'une bonne présentation matérielle des calculs permet de faire sentir à l'élève qu'il s'agit d'un calcul « réglé », dont on peut à tout moment expliciter les règles.

**2. Mise en équation**

Nous savons que le travail de mise en équation est quelque chose de difficile pour les élèves. Pour que cette première phase de la résolution du problème ne constitue pas un obstacle infranchissable, nous faisons un choix dans les formulations possibles des problèmes à partir d'une catégorisation des difficultés, et pour chacune d'elle d'une liste de variables sur lesquelles l'enseignant peut agir en fonction des objectifs prioritaires visés.

**1) L'identification de l'inconnue.**

La plupart du temps la question posée indique l'inconnue : mais celle-ci peut être déjà désignée par une lettre, ou alors ce travail est à la charge de l'élève.

Dans certains cas il y a plusieurs choix possibles, donc de fait plusieurs inconnues, et il faut en privilégier une. Ainsi ce sont, de fait, des problèmes qui relèvent des systèmes d'équations, et donc du programme de l'année suivante. De plus ces problèmes, pour être traité avec une seule équation à une seule inconnue, obligent à faire mentalement des transformations algébriques qui, l'année suivante, se feront à la main, par écrit : expression d'une inconnue en fonction d'un autre, substitution dans une équation. Or ce genre de problèmes figure dans **tous** les manuels de 4ème. Il est dans certains le seul ou le premier exemple donné comme modèle de mise en équation, et constitue parfois plus de la moitié des exercices proposés !

***Exemples :***

** Activité 1 Mettre un problème en équation (Bordas 4ème 1998)*

« En 1994, l'Union des banques a publié le nombre de jours de vacances payés d'un ingénieur dans plusieurs villes du monde. A Paris un ingénieur avait 19 jours de vacances de plus qu'à Seoul (Corée du Sud) mais 5 jours de moins qu'à Madrid (Espagne). A Séoul, il avait 5 fois moins de jours de vacances qu'à Madrid. Combien de jours de vacances un ingénieur avait-il en 1994 dans chacune de ces trois villes ? »

Est-ce bien raisonnable pour une première approche de la mise en équation !

** Découvrir. Activité 11 Le plaisir de l'algèbre! (Hachette 4ème 1998)*

« Anne-Fleur a dans son porte-monnaie 78 F en pièces de 2 F et de 5 F. Elle a en tout 24 pièces. Combien Anne-Fleur possède-t-elle de pièces de 2 F et de 5 F dans son porte-monnaie ? »

C'est un exercice type des manuels de 3ème et des annales de brevet à propos… des systèmes !

** Savoir faire 2 Mettre un problème en équation (Belin 4ème 1998)*

« Jean achète un tarte et cinq croissants. Le tout coûte 91,8 F. La tarte coûte douze fois plus qu'un croissant. Calculer le prix d'un croissant, le prix de la tarte. »

Là aussi on recherche d'emblée deux inconnues…

Point de tâtonnements numériques, d'essais et erreurs dans ces activités, mais un guidage pour exprimer des inconnues non désignées en fonction d'une inconnue privilégiée et désignée, à la manière de Diophante. On augmente ainsi de façon considérable la difficulté de la mise en équation, dès le début de son apprentissage, alors que l'on retrouvera ces exercices en 3ème dans le chapitre « Systèmes de deux équations à deux inconnues », avec une mise en équations très facile ! Pour devenir un champion en 4ème il faut être capable de résoudre de tels problèmes extraits des annales du brevet, mais en utilisant une seule inconnue (Cf. exercice 69 page 136 Hatier-Triangle 4ème 1998)...

Quant à nous, nous suivons les conseils de Descartes à Elisabeth (Cf. [7]) de ne point utiliser une seule inconnue quand il y en a naturellement plusieurs. Aussi :
— nous laissons les problèmes à plusieurs inconnues pour la classe de 3ème.
— la question posée dans chaque problème ne demande donc, en quatrième, que la recherche d'une inconnue.
— nous privilégions, au début, des textes de problèmes dans lesquels l'inconnue est natu-

rellement désignée ou indiquée. C'est le cas en géométrie, ou dans les problème de recherche de nombres que nous donnons pour commencer. On pourra s'en rendre compte en considérant les premiers exercices de chaque paragraphe du corpus de problèmes donné en annexe.

**2) L'identification de l'égalité**

Nous distinguons deux niveaux de difficulté.

a) L'égalité est présente dans le texte. Présence formelle (Cf. annexe n° 1, 6, 12, 35) ou présence textuelle. Dans ce deuxième cas elle est plus ou moins identifiable suivant les mots utilisés : « est égal à, est, mesure, est aussi avantageux, même résultat… » et suivant les formulations (Cf. n° 2, 3, 4, 7, 10, 13, 14, 15…).

b) L'égalité n'est pas écrite dans le texte. Elle est alors à trouver :

— à partir d'une grandeur de l'énoncé qui reste invariante (Cf. n° 8).

— à partir d'une propriété d'une figure (Cf. n° 5, 11…).

— à partir d'une formule reliant des grandeurs de l'énoncé : somme des angles d'un triangle (Cf. n°17), théorème de Thalès, théorème de Pythagore, vitesse, prix… Un exercice comme 17 arrête souvent les élèves, même s'ils connaissent bien le théorème à utiliser.

En début d'apprentissage nous privilégions des exercices dont l'énoncé est de type a), puis quand la démarche mise en équation-résolution-contrôle fonctionne correctement sur des textes « simples », nous approfondissons la première phase de mise en équation en choisissant des énoncés du type b).

**3) La traduction algébrique du texte**

La modélisation du problème via le calcul littéral est l'un des objectifs assigné par le programme à l'apprentissage du calcul littéral. Mais la difficulté de la traduction algébrique dépend de plusieurs paramètres.

a) La présentation des données : schéma ou texte.

b) La nature du contenu : familier ou non ; souvent lié à d'autres paramètres : nature des unités, nature des nombres utilisés. On sait que les problèmes de vitesses, de mélanges, d'âges sont toujours source de difficultés : nous les évitons dans un premier temps, pour les retrouver, une fois la démarche acquise, à travers les divers thèmes de l'année.

*Exemple d'une fiche de travail élaborée avec les élèves.*

**COMMENT METTRE EN EQUATION ?**

**1.** Lire le texte pour **bien repérer ce que l'on cherche** : l' inconnue.
La nommer et *la définir correctement* (pas en abrégé) :
$x =$ ou $y =$ ou…

**2.** Relire le texte attentivement pour le **transformer** *en une équation*.

*Traduire le texte *en utilisant l'inconnue.*

*Faire éventuellement des schémas, dessins.

*Bien imaginer la situation, la vivre.

*Bien repérer les phrases du texte.

*Repérer des choses égales.

*Ecrire une égalité, *utiliser l'inconnue* pour écrire les deux choses égales.

*Chercher des formules (égalités) qui peuvent relier les inconnues et les données.

c) Le type de formulations : sens des mots, complexité des phrases, nature des tournures... S'il y a là un lieu pour le renforcement de l'apprentissage de la langue française, dans des emplois parfois spécifiques, ce peut être aussi l'occasion d'échanges avec les professeurs de français pour connaître les structures linguistiques réellement disponibles à cet âge et à ce niveau. Pour ce qui est des mathématiques, c'est l'occasion de mieux s'approprier le sens des mots somme, différence, produit, quotient, soustraire, retrancher...

d) La plus ou moins grande complexité des expressions algébriques à écrire, liées à l'usage d'un plus ou moins grand nombre de parenthèses.

Remarquons, comme l'indique la fiche donnée en exemple, qu'il n'y a pas d'ordre chronologique entre les tâches des deux paragraphes précédents : recherche de l'égalité et traduction algébrique du texte.

Dans cette phase de mise en équation vont pouvoir être travaillées un certain nombre de conventions et de règles du calcul littéral, en particulier à partir des différentes formulations algébriques proposées par les élèves pour une même mise en équation. La conscience de toutes ces difficultés nous permet de choisir au départ des énoncés qui permettent à l'élève de se concentrer sur la démarche « mise en équation-résolution-contrôle », et de ne pas être bloqué dès la première phase. Elle permet ainsi d'organiser de façon progressive l'apprentissage de la première phase.

### 3. Point de départ

Les équations vues dans les classes antérieures sont du type « opérations à trou » : $a + x = b$ ; $a - x = b$ ; $a \times x = b$ ; $a : x = b$ . Le programme précise d'ailleurs que dans ces cas la désignation de l'inconnue par une lettre n'est pas forcément nécessaire. La résolution de telles équations ne nécessite nullement l'utilisation d'une méthode que nous qualifierons d'algébrique, c'est-à-dire qui utilise la règle fondamentale de transformation des égalités qui a donné son nom à l'algèbre : ajout d'un même nombre dans chaque membre de l'égalité. Il s'agit plutôt de rester au plus près du sens des opérations, méthode que nous qualifierons d'arithmétique. Par contre il manque deux équations de base : $x - a = b$ et $x : a = b$ . La non commutativité de la soustraction et de la division fait que leur résolution, bien que plus simple, diffère de celle de : $a - x = b$ et $a : x = b$.

En 4ème il s'agit bien de former les élèves à la démarche algébrique : mise en équation, puis résolution de l'équation par la méthode algébrique, et donc, dans un premier temps, de sensibiliser les élèves à l'intérêt de cette démarche. Cela nécessite de trouver un problème dont la résolution ne puisse faire l'économie d'une mise en équation, et pour laquelle la méthode algébrique apparaisse comme une clé.

Nous avons retenu deux critères :

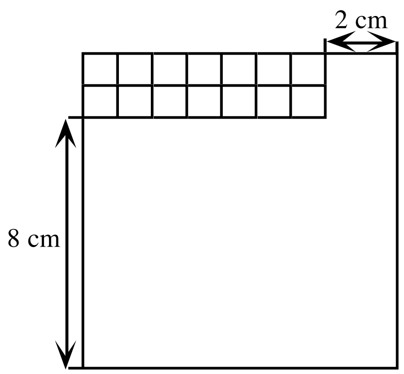
— que la mise en équation du problème conduise directement à une équation de la forme $ax + b = cx + d$. (Cf. [6], page 9)

— que la solution de l'équation soit solution du problème, mais soit un nombre difficile, voire impossible, à trouver par tâtonnements : nombre décimal ou fractionnaire, les coefficients $a$ , $b$ , $c$ , $d$ étant par contre eux des entiers simples.

Notre choix personnel, donné à titre d'exemple, est l'équation $7x + 2 = 2x + 8$ , proposée aux élèves sous l'une des trois versions suivantes. La solution décimale permet une vérification facile.

***Version 1 : La boîte à pêche.***

Mon oncle, qui est pêcheur et bricoleur, veut se fabriquer une boite à pêche, pour son petit matériel, ayant les caractéristiques suivantes : 14 cases carrées, pour les hameçons, disposées en deux rangées comme sur le dessin ci-dessous, dans une boîte qui soit carrée. Mais il ne sait pas quelle taille il faut donner aux 14 cases.

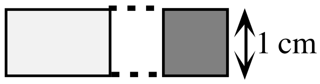



Peux-tu l'aider à construire sa boite ?

Nous renvoyons le lecteur à l'article « Enseigner par les activités » paru dans le numéro 8 de la Revue Repères-Irem (juillet 1992, p.10 & 11) où figure une analyse de cette activité.

***Version 2 : A la manière de Diophante.***
Existe-t-il un nombre dont le septuple augmenté de 2 soit égal au double augmenté de 8 ?

***Version 3 : Assemblages.***




On possède un stock de rectangles identiques et de carrés identiques qui ont été découpés dans une baguette de bois de 1 cm de largeur.

Je constate que si je mets bout à bout 2 rectangles et 8 carrés, cela fait la même longueur que si je mets bout à bout 7 rectangles et 2 carrés.

Quelle est la longueur d'un rectangle ?

***Recherche de la solution.***

La version 1 incite fortement à choisir 1 cm, qui ne convient pas. La version 3 incite à réaliser les deux assemblages, l'un sous l'autre, en utilisant les carreaux du cahier et en prenant 2 carreaux pour longueur du rectangle. Quelle que soit la formulation, l'essai de plusieurs valeurs, a priori entières, est quasi général. Après échec cela conduit soit à passer à des valeurs décimales et donc à trouver la solution après des tentatives infructueuses, soit, dans les versions 1 ou 3, à se ramener géométriquement à l'équation $5x = 6$ , et alors à mettre en œuvre la méthode algébrique de résolution d'une équation, même si cette dernière n'est pas écrite comme telle.

Ce type d'activité de recherche s'inscrit dans la continuité des programmes de 5ème à propos de l'initiation à la résolution d'équation. La solution géométrique permet d'exposer et de faire comprendre la méthode algébrique de résolution des équations du premier degré à une inconnue. De plus elle sert de situation de référence comme c'est souvent le cas pour la situation de la balance.

Quant à la désignation d'une inconnue et à la mise en équation, elles apparaissent plus ou moins selon les connaissances antérieures des élèves, selon le type de dévolution de l'activité et des interventions du professeur.

Dans tous les cas cela permet de faire un bilan en adéquation avec les objectifs visés :

— utilité des équations

— mise en équation

— mise en place de la méthode algébrique de résolution d'une équation du premier degré à une inconnue

— interprétation du résultat.

On trouvera sur la page ci-contre l'exemple d'un bilan fait avec les élèves.

*Remarques sur ce bilan :*

1) *Le paragraphe 4 est complété au fur et à mesure du déroulement du thème comme le décrit la suite de l'article.*

2) *La règle* ***R2*** *(« On peut multiplier chaque membre d'une égalité par un même nombre ») n'y figure pas car on n'en a point ici l'usage. L'équation* $ex = f$ *est résolue de façon « naturelle » (arithmétique) en faisant appel à la définition de la division, donc aux connaissances de l'école primaire. Ce ne sera que plus tard, lors de la résolution d'équations avec des écritures fractionnaires que l'on sera amené à l'introduire.*

**4. Une organisation**

Pour les exercices illustrant la mise en œuvre de la méthode, on se reportera au corpus donné en annexe.

***A Variations autour de l'équation de référence*** $ax + b = cx + d$

Dans un premier temps nous travaillons sur des problèmes dont la mise en équation donne directement l'équation sous la forme canonique $ax + b = cx + d$ , réservant le travail de simplification pour ramener l'équation à cette forme canonique pour les étapes suivantes. Cela permet de se concentrer sur la démarche et sur la résolution de l'équation canonique. Cela permet aussi d'utiliser un nombre restreint de règles : propriétés de l'addition, notation simplifiée de la multiplication et addition algébrique des mônomes (factorisation). Ce qui n'est pas trivial (Cf. § 1) et permet de se familiariser avec le calcul littéral. Dans les 11 premiers exercices figurant en annexe et illustrant nos choix :

— nous avons veillé à ce que dans l'équation a et c ne soient pas nuls, afin d'éviter des retours à des méthodes arithmétiques de résolution.

— nous avons choisi pour l'équation des coefficients a , b , c , d entiers, mais avec les divers cas de signes, et avec de temps à autre la valeur 1. La plupart des solutions sont des entiers positifs, mais il y a des exceptions pour amener l'élève à réfléchir sur la validité de la valeur trouvée pour le problème, et l'amener à toujours revenir au problème posé. Si l'on veut accentuer ce type de travail, il suffit, bien souvent, d'augmenter d'une unité l'un des coefficients.

— nous avons choisi des problèmes dans des domaines divers, comme nous y incite le pro-

Chapitre 2

## EQUATIONS

**1. Utilité.**
C'est un moyen très efficace pour résoudre les problèmes.

**2. Méthode.** (Les 5 étapes)

1) On désigne le nombre qu'on cherche par une lettre : $x$ , $y$ , …

C'est l'***inconnue*** du problème.

2) On cherche une égalité dans laquelle se trouve l'inconnue.

C'est l'***équation*** du problème.

3) On transforme l'équation en équations de plus en plus simples jusqu'à pouvoir trouver la (ou les) valeur(s) de l'inconnue.

C'est ***résoudre*** l'équation. Les valeurs trouvées pour l'inconnue s'appellent les ***solutions*** de l'équation.

4) On vérifie que la solution est bonne pour le problème.

5) On donne la réponse au problème.

**3. Résolution d'une équation contenant une seule inconnue.**

* On simplifie au maximum chaque ***membre*** (côté) de l'équation, en utilisant des règles de calcul connues (Voir § 4).

On obtient alors une équation de la forme : $\mathrm{a}x + \mathrm{b} = \mathrm{c}x + \mathrm{d}$.

* A l'aide de la règle suivante (principe de la balance) :

**R1.** On peut ajouter (ou retrancher) une même quantité à chaque membre de l'équation. On transforme l'équation $\mathrm{a}x + \mathrm{b} = \mathrm{c}x + \mathrm{d}$ en une équation plus simple que l'on sait résoudre : $\mathrm{e}x = \mathrm{f}$.

***Stratégie*** : on ***isole*** l'inconnue dans un seul membre. Pour cela on utilise (plusieurs fois si c'est nécessaire) la règle R1 pour mettre toutes les quantités qui contiennent l'inconnue dans un même membre, et toutes les quantités connues dans l'autre membre.

**4. Règles de calcul pour simplifier.**

S1 Notation simplifiée de la multiplication : $\mathrm{a} \times x = \mathrm{a}x$.

S2 Factorisation : $\mathrm{a}x + \mathrm{b}x = (\mathrm{a} + \mathrm{b})x$.

S3 Dans une addition on peut changer l'ordre des nombres (termes).

S4 Transformer une soustraction en addition : $\mathrm{a} - \mathrm{b} = \mathrm{a} + (-\mathrm{b})$.

S5 Dans une multiplication on peut changer l'ordre des nombres (facteurs).

S6 Opposée d'une somme : $-(\mathrm{a} + \mathrm{b}) = (-\mathrm{a}) + (-\mathrm{b}) = -\mathrm{a} - \mathrm{b}$ .

S7 Distributivité : $\mathrm{A}(\mathrm{a} + \mathrm{b}) = \mathrm{Aa} + \mathrm{Ab}$ .

S'1 $1 \times x = 1x = x$ ; $0 \times x = 0x = 0$ .

gramme. L'exercice 5 par exemple permet de revenir sur les caractérisations du parallélogramme, du losange et du carré.

— pour les sept premiers problèmes la mise en équation tient compte de l'analyse faite au § 2. L'étude des quatre autres se fait, en général, plus tard dans la progression.

### *B Ajouter des binômes*

Dans un deuxième temps, il s'agit de se familiariser avec la première phase de la résolution d'une équation qui consiste à se ramener à une forme canonique, ici à celle étudiée auparavant. Le travail à faire est alors de simplifier des expressions algébriques. L'intérêt de le faire dans ce cadre est que c'est un travail orienté vers un but, et donc qui a du sens : il va permettre de résoudre l'équation et donc le problème. Il a une utilité. C'est pourquoi, comme le préconise le programme, nous nous refusons à privilégier des exercices de technique pure, quitte à réduire la phase de mise en équation à sa plus simple expression. Les techniques n'ont pas à être dissociées des problèmes pour lesquelles elles ont été créées.

Nous menons ce travail de simplification par étapes, ce qui permet d'apprendre les règles du calcul littéral au fur et à mesure : ajouter des binômes, utiliser la simple distributivité, soustraire des binômes, utiliser l'associativité de la multiplication. Choisissant de traiter la résolution des problèmes à l'aide des équations tôt dans l'année afin de pouvoir réinvestir cette grande avancée des mathématiques le plus souvent possible, la double distributivité et les techniques propres aux écritures fractionnaires sont vues plus tard, et ne sont donc pas abordées dans cet article.

L'expérience nous a montré que l'addition de binômes du type $ax + b$, et même de monômes du type $ax$, comporte bien des difficultés :

— présence de parenthèses dont la suppression utilise implicitement l'associativité de l'addition.

— absence du coefficient a, non identifié comme la présence implicite de 1 : si $1x + 9x$ ne pose pas de problèmes, il n'en est pas de même de $x + 9x$ ou de $x - 9x$ ! (Dans les anciens traités d'Algèbre la présence du coefficient 1 était de rigueur, et on ne trouvait jamais d'inconnues sans coefficient.)

— difficulté à ajouter des monômes dont les coefficients ne sont pas entiers. Par exemple $x - 10 \times x$, ou $x - 0{,}2x$. C'est ce qui justifie la présence des exercices 14 à 17.

D'autre part les pyramides (Cf.[2]) permettent de faire du bon travail sur l'addition des binômes, car en faisant des choix judicieux on peut obtenir tous les cas de figures, et le support amène à gérer mentalement une partie des calculs.

D'autre part, comme cela est esquissé à l'exercice 19, on peut, en variant les consignes obtenir une très grande variété d'équations du premier degré à une inconnue, où divers cas d'impossibilité apparaissent naturellement.

Par exemple on peut reprendre le n° 19 b) avec pour bases ( 1 ; $x$ ; 4 ; 3 ) et ( 5 ; $x$ ; 3 ; 1 ). On peut aussi, pour une pyramide à 4 étages comme celles des n°° 19 et 20, chercher si l'on peut trouver pour la base 4 entiers consécutifs qui donnent 22 au sommet…

On peut remarquer que nous avons réintégré à cette étape des équations du type $ax + b = d$, et que les deux premiers exercices, 12 et 13, font travailler le retour au problème.

***C Utiliser la simple distributivité***

Si les deux premières étapes montrent l'inutilité de parenthèses dans les situations étudiées, grâce à la convention cartésienne d'écriture du produit et à l'associativité de l'addition, les deux suivantes rappellent leur rôle et leur importance.

Pour la distributivité les problèmes choisis permettent de se ramener rapidement à l'équation canonique.

Les exercices 21 à 24 sont l'occasion de revoir les notion d'aires.

Les exercices 25 à 28 tirés des Arithmétiques de Diophante sont l'occasion de s'approprier le vocabulaire relatif aux nombres et à leurs opérations qui est loin d'être acquis même par de bons élèves. La mise en équation est difficile pour les élèves. C'est l'occasion d'apprendre des techniques : faire des schémas, donner une valeur à l'inconnue, mettre en œuvre avec cette valeur les opérations indiquées, puis remplacer cette valeur par $x$…

Les exercices 29 et 30 sont l'occasion de travailler la mise en équation (Cf. § 3).

***D Soustraire un binôme***

Cette étape vise à travailler la règle de simplification qui est la source du plus grand nombre d'erreurs chez les élèves. L'intérêt de la travailler « en situation » est que toute erreur est sanctionnée par la vérification. Il y lieu de bien attirer l'attention des élèves sur les différents niveaux de vérification. Si, lorsque je vérifie que la solution que j'ai trouvée à l'équation est solution du problème, je trouve que ce n'est pas le cas, alors il peut y avoir plusieurs possibilités :

— mon équation est juste, mais j'ai fait une erreur en la résolvant. Je peux le savoir, en vérifiant si le nombre trouvé est solution de l'équation. Il faut alors retrouver la ou les règles de calcul fausses.

— mon équation est juste, et sa solution est juste. C'est que le problème n'a pas de solution (Cf.n° 31, n° 13 b).

— mon équation est fausse. Il faut retravailler la mise en équation.

Donc vérifier l'équation, ou vérifier le problème, ce n'est pas la même chose.

*Remarque :* l'exercice 35 peut se traiter sans faire appel aux fractions en transformant T/4 en 0,25T.

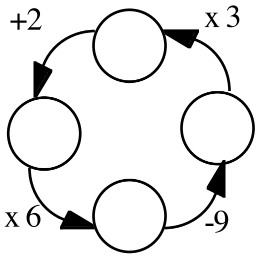
***E Utiliser l'associativité***

L'expérience là aussi montre que les élèves ont tendance à mettre des parenthèses, et à traiter le problème comme s'il s'agissait de la distributivité ! On voit l'ampleur du travail qu'il y aurait à faire sur l'utilisation et le rôle des parenthèses. Et comme le préconise le programme il s'agirait dans un premier temps d'utiliser des parenthèses pour coder un calcul. Si c'est une expression numérique toutes les parenthèses devraient être mises : elles indiquent comment le calcul doit être fait. Il n'y a plus alors qu'à l'exécuter.

Simplifier, enlever des parenthèses n'a aucun intérêt : il faut, au contraire, calculer à l'intérieur des parenthèses. Si c'est une expression littérale, par exemple une formule d'aire ou de volume, il faudrait les mettre, et justifier les cas où on les omet (associativité). Par contre c'est lorsque l'on fait du calcul littéral que l'on est amené à enlever des parenthèses par nécessité, pour se ramener à des formes visées (formes canoniques).

Pour faire travailler l'usage des parenthèses, voici un excellent exercice, tiré d'un manuel Hachette, que nous donnons à nos élèves à la fin du thème sur les relatifs, qui vient plus tard dans notre progression annuelle.

*Trouve les nombres qui manquent :*




Grâce à un choix judicieux des quatre nombres donnés, la solution est un rationnel négatif : aucun espoir de la trouver par tâtonnements, d'où l'utilité des équations. Quatre places possibles pour $x$ : quatre équations différentes qui permettent de trouver les quatre nombres, puis du calcul sur les quotients pour vérifier. Ou bien une équation et du calcul sur les quotients pour trouver les quatre nombres, puis une, deux, ou trois équations pour vérifier.

**Pour conclure**

Il est clair que le type de problèmes proposés, dans le strict respect du programme, n'amène, dans ce contexte, à ne pratiquer les règles du calcul littéral qu'avec une indéterminée, ce que firent les mathématiciens depuis Diophante jusqu'au 16ème siècle. Par contre dans l'optique d'une familiarisation avec un calcul « tout » littéral, qui a été la cause du développement scientifique moderne et dont le créateur fut Viète, deux voies peuvent être explorées :

— l'établissement de formules,

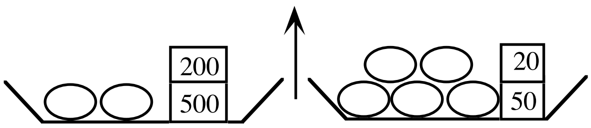
— la résolution de problèmes généraux.

Même si la deuxième voie peut s'inscrire dans l'étude du thème que nous présentons via la formulation de généralisations de certains des problèmes posés, il nous semble préférable de distiller de tels problèmes au fil des divers chapitres tout au long de l'année. En revanche la mise en place de la méthode algébrique de résolution de problèmes, via les équations, ne peut se faire, à notre avis, au détour d'un chapitre. D'autre part elle est fondamentale. C'est pourquoi nous consacrons à ce thème un chapitre, mis en œuvre assez tôt dans l'année, pour que la méthode puisse être réinvestie le plus souvent possible par la suite.

# ANNEXE

**Un corpus de problèmes pour mettre en œuvre la progression.**

***A Variations autour de l'équation de référence ax + b = cx + d***

**1.** 

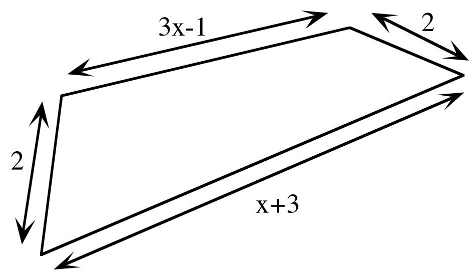

Tous les pamplemousses ont la même masse. Calcule la masse d'un pamplemousse.

**2.** Trouve le nombre tel que son double augmenté de 5 soit égal à son triple diminué de 7 .

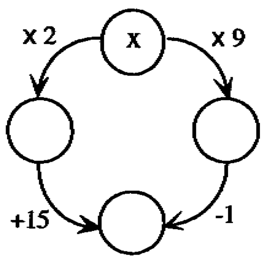
**3.** Existe-t-il un nombre tel que son quintuple diminué de 8 soit égal à son triple augmenté de 10 ?

**4.** J'ajoute 21 au double d'un nombre, je trouve le même résultat que si je retranche le triple de ce nombre de 13. Quel est ce nombre ?

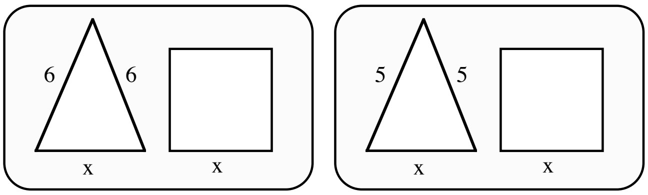
**5.** Trouve la valeur de *x* pour que le quadrilatère ci-contre soit un parallélogramme.




**6.** Ecris une égalité exprimant que les deux itinéraires donnent le même nombre, puis trouve x.



**7.** Dans chacun des cas suivants, peut-on trouver $x$ pour que le périmètre du triangle soit égal à celui du carré ?




**8.** Avec l'argent qu'il possède Pierre veut acheter des livres qui valent tous le même prix. S'il en achète 6, il lui reste 28 F. S'il en achète 7, il lui manque 1 F.
Quel est le prix d'un livre ?

**9.** Emilie veut acheter plusieurs livres d'une même collection qui valent tous le même prix. Emilie : « Avec l'argent dont je dispose, si j'achète 4 livres il me reste 30 F, mais si j'en achète 6 il me manque 60 F ».

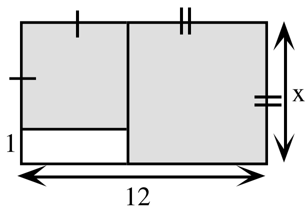
1) Est-il possible que le prix d'un livre soit 10 F ? 60 F ?
2) Trouve le prix d'un livre à l'aide d'une équation.
3) De quelle somme d'argent dispose Emilie ?

**10.** Une compagnie de transport propose deux formules :

— Formule A : billet ordinaire pour un trajet 8 F.
— Formule B : la carte demi-tarif coûte 60 F par mois, le billet coûte 4 F par trajet.

Pour combien de trajets par mois est-il aussi avantageux de choisir l'une ou l'autre formule ?

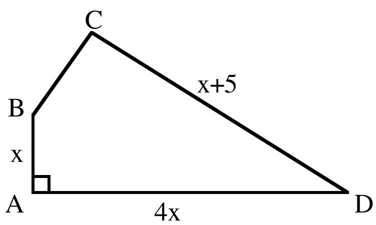
**11** Comme l'indique la figure, je voudrais construire un rectangle de 12 cm de long qui contienne 2 carrés et que le petit rectangle restant ait 1 cm de large.
Quelle valeur donner à $x$ ?




***B Ajouter des binômes***

**12.** Comme l'indique la figure, on voudrait construire un quadrilatère ABCD, de telle façon que :

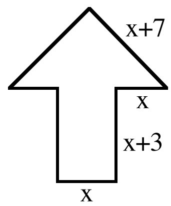
1) $\widehat{A} = 90°$.
2) BC = 2 cm.
3) CD mesure 5 cm de plus que AB.
4) AD soit 4 fois plus grand que AB.



On veut de plus que la somme des longueurs opposées soit la même, c'est-à-dire on veut que AB + CD = BC + AD. Existe-t-il une valeur de $x$ possible pour la longueur de AB ? Si oui, construis une figure exacte.

**13.** a) En tenant compte du fait que la flèche a un axe de symétrie, trouve $x$ pour que le périmètre de la flèche mesure 62 cm, puis construis la flèche.

b) Si sur la figure on échange le 7 et le 3, qu'est-ce que cela change ? Justifie ta réponse.

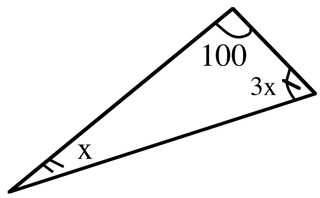



**14.** En additionnant un nombre entier, son double et son triple, je trouve 1998. Quel est ce nombre ?

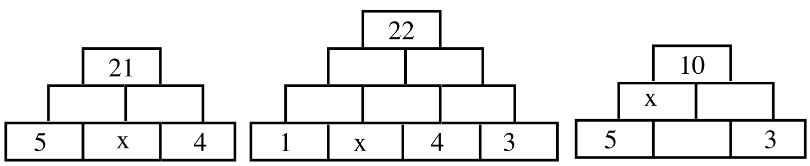
**15.** Un père a 9 fois l'âge de son fils. La somme de leurs âges est de 30 ans. Quel est l'âge du fils ?

**16.** Ma mère a acheté un pull en solde. Elle sait que la remise était de 20% et qu'elle a payé 256 F. Elle se demande quel était le prix du pull avant les soldes. Peux-tu le lui trouver ?

**17.** Calcule la mesure (en degrés) de chacun des angles aigus du triangle en tenant compte des indications fournies.

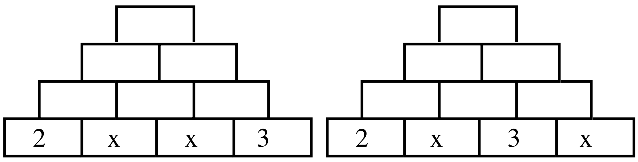



**18.** Complète les pyramides à l'aide de $x$.
Trouve une égalité que doit vérifier $x$.
Calcule $x$ et vérifie.




(On rappelle que le contenu d'une brique est la somme des deux briques qui se trouvent sous elle).

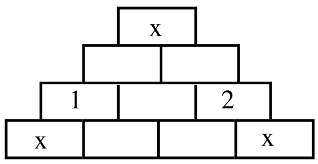
**19.**




a) Dans chaque cas, peut-on trouver une valeur de $x$ pour que le sommet de la pyramide soit égal à la somme des nombres de la première ligne ?

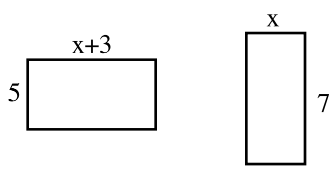
b) Peut-on trouver $x$ pour que les deux pyramides aient le même nombre au sommet ?

**20.** Complète la pyramide ci-contre.

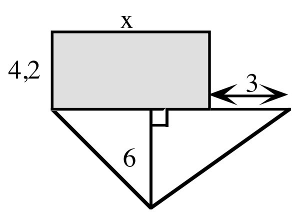



***C Utiliser la simple distributivité***

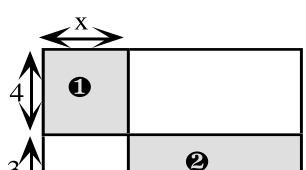
**21.** Trouve $x$ pour que la différence des deux aires soit de 50 cm$^2$



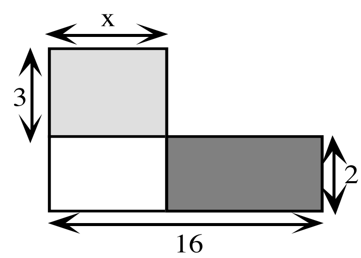

**22.** Que vaut la longueur $x$ pour que l'aire du rectangle hachuré soit égale à l'aire du triangle ?




**23.** Quelle valeur faut-il donner à $x$ pour que l'aire du rectangle **1** soit égale à celle du rectangle **2** ?



**24.** Les deux rectangles hachurés ont la même aire.Trouve leurs dimensions. Quelle est cette aire ?




**25.** Quel nombre faut-il ajouter à 100 et à 20, pour que le plus grand nombre soit le triple du plus petit ? (Diophante)

**26.** Je veux retrancher 100 et 10 à un même nombre, et que le plus grand reste soit le quadruple du plus petit. Quel nombre faut-il choisir ? (Diophante)

**27.** Même problème avec 100 et 20. (Diophante)

**28.** On veut ajouter à 20, et retrancher à 100, un même nombre de façon que le premier nombre obtenu soit le quaduple du second. Quel nombre faut-il choisir ? (Diophante).

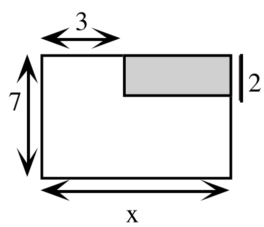
**29.** Une grand mère a 81 ans et sa petite fille a 9 ans. Dans combien de temps l'âge de la grand mère sera-t-il le quadruple de l'âge de la petite fille ?

**30.** Pierre dit « Il y a 10 ans, j'avais la moitié de l'âge que j'aurai dans 10 ans ».
Quel est l'âge de Pierre ?

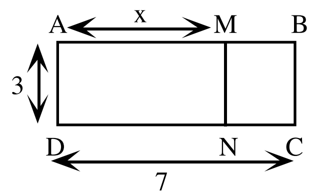
***D Soustraire un binôme***

**31.** Le triple d'un nombre entier $t$ augmenté du nombre qui précède $t$ est égal à 27 diminué du nombre qui suit $t$. Quel est ce nombre ?

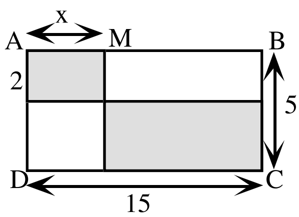
**32.** Existe-t-il une valeur de $x$ telle que la différence des aires des deux rectangles soit égale à 40 cm$^2$ ?



**33.** Trouver $x$ pour que la différence entre l'aire du rectangle AMND et celle du rectangle MBCN soit égale à 5 cm$^2$.




**34.** 1. Où faut-il placer M sur [AB] pour que les deux rectangles hachurés aient même périmètre ?
2. Même question pour la même aire.
3. Même question pour que la différence des aires fasse 2.

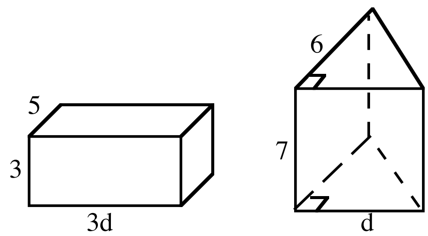



**35.** D'après Lorentz, il existe une relation idéale entre la taille T (en cm) et la masse M (en kg) d'un individu. Cette formule pour un homme est : $M = T - 100 - (\frac{T}{4} - 37{,}5)$.

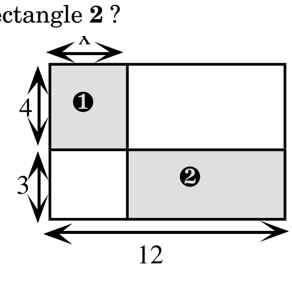
Quelle devrait être la taille d'un homme de 70 kg ?

***E Utiliser l'associativité***

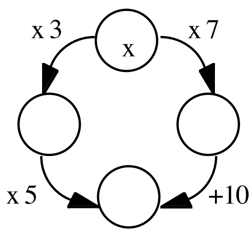
**36.** Les mesures sont en cm.
Existe-t-il une valeur de d pour laquelle le volume du prisme mesure 30 cm$^3$ de moins que le volume du pavé ?




**36.** Quelle valeur faut-il donner à $x$ pour que l'aire du rectangle **1** soit le triple de celle du rectangle **2** ?




**37.** Ecris une égalité exprimant que les deux itinéraires donnent le même nombre, puis trouve $x$.



**Bibliographie**

[1] IREM de Poitiers, Le calcul littéral au collège. Janvier 1999.

[2] IREM de Grenoble, Petit x Supplément : «Pyramides et caillou…x». 1992-1993.

[3] CLAIRAUT, Elemens d'Algèbre. Paris. 4° édition. 1768.

[4] ROUGER-MOINIER F., Quelques problèmes pour donner du sens à des règles de calcul littéral en troisième, Repères-IREM n° 42, janvier 2001.

[5] DUPERRET J-C., FENICE J-C., L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu du collège, Repères-IREM n° 34, janvier 1999.

[6] IREM de Montpellier, L'algèbre au lycée et au collège, 2000;

[7] DESCARTES, lettres à Elisabeth, novembre 1643 (Cf. IREM de Poitiers, Le logiciel de calcul formel au collège et au lycée, 1997)