POURQUOI DEMONTRER ?

Un exemple allemand sur les aires et les volumes pour entrer dans le processus de preuve et d'explications

Richard CABASSUT
Irem de Strasbourg [1]

Il est intéressant d'observer les différences dans le rôle joué par la démonstration d'un pays à l'autre. En France la tradition, qui pourrait changer avec les nouveaux programmes de la réforme des lycées, nous incite à ne produire que des démonstrations complètes, dont tous les éléments sont totalement acceptables. Des théorèmes de cours sont soit démontrés rigoureusement en classe, avec parfois le risque que peu d'élèves suivent la démonstration complète, soit admis. On se cantonne souvent à des démonstrations *locales* lors de la résolution d'exercices ou de problèmes, avec une absence de perspective *globale* dans la démarche de construction des objets mathématiques. En Allemagne, il semblerait que la démonstration totalement achevée soit abandonnée lorsque certains éléments de la démonstration ne peuvent pas être conduits avec une totale rigueur formelle. On ne renonce pas pour autant au processus de preuve : on remplace les traitements démonstratifs délicats par des traitements plus intuitifs, qui peuvent être inachevés du point de vue de la rigueur formelle. On essaie par contre, en maintenant ces démonstrations inachevées, de donner une perspective globale à la construction des objets, en utilisant parfois ces démonstrations inachevées comme une préparation à une future introduction plus rigoureuse de nouveaux objets.

Pour illustrer notre propos, nous allons évoquer quelques exemples concernant des démonstrations sur les calculs d'aires et de volumes dans l'enseignement secondaire en

1 Ces réflexions ont pu être menées grâce aux contacts et aux discussions entreprises avec nos collègues allemands et français dans le cadre du groupe franco-allemand de l'I.R.E.M. de Strasbourg. Nous tenons donc à exprimer notre reconnaissance à l' I.R.E.M. de Strasbourg et à son groupe franco-allemand.

Allemagne. Mais tout d'abord nous rappellerons quelques fonctions de la démonstration.

1) Pourquoi démontrer ?

Démontrer pour valider :

Une des premier rôles de la démonstration en mathématiques est d'établir la vérité d'une proposition par l'application de raisonnements utilisant la logique mathématique traditionnelle (avec son principe de non contradiction et ses valeurs exclusives de vérité : vrai ou faux) et les théorèmes et axiomes de la théorie dans laquelle on travaille.

Une des qualités que doit avoir une démonstration pour valider est la **rigueur** : rigueur dans les pas de raisonnements déductifs employés et rigueur dans les conditions d'applications des théorèmes, axiomes et définitions de la théorie. Une démonstration qui manque de rigueur reste une démonstration, mais avec des défauts qui peuvent éventuellement la rendre inexacte.

Observons qu'en situation d'enseignement les axiomes et les théorèmes de la théorie ne sont pas toujours connus clairement. Comment est défini l'espace et ses objets dans l'enseignement secondaire ? Quels sont les théorèmes de la géométrie de l'espace supposés connus des élèves ? Les réponses à ces deux questions ne sont pas claires dans l'enseignement secondaire français.

Remarquons ensuite qu'en cours de mathématiques la démonstration n'est pas le seul mode de validation d'un énoncé. **L'argument d'autorité** est bien souvent utilisé comme mode de validation. En France la plupart des théorèmes de cours sont admis. L'autorité du professeur donne à un énoncé le statut de théorème et le déclare vrai. S'il vient à l'idée d'un élève de vouloir mettre en cause ce contrat didactique il peut se voir répliquer : « ce n'est pas au programme » ou « vous verrez plus tard ». L'argument d'autorité peut intervenir de manière plus subtile. Ainsi dans les exemples suivants [2], pour démontrer les formules de volumes de solide, il est utilisé le principe de Cavalieri, qui est admis. C'est l'autorité du livre qui invoque le théorème de Cavalieri, jusque là inconnu des élèves, et qui l'admet.

Démontrer pour valider un énoncé signifie donc démontrer pour rendre vrai cet énoncé.

Mais la démonstration n'a pas pour seule rôle de valider, témoin les nouvelles démonstrations de théorèmes déjà démontrés. Le rôle de ces nouvelles démonstrations n'est pas de démontrer la vérité d'un résultat puisque celui-ci est déjà avéré vrai.

Démontrer pour expliquer:

On peut démontrer un résultat en expliquant comment le résultat a été trouvé. Soit on peut ajouter des éléments heuristiques dans la démonstration qui expliquent le cheminement du processus de découverte de la preuve. Peu de mathématiciens indique leur cheminement. Certains travaux scolaires, comme les narrations de recherche, incitent à expliquer le cheminement de la découverte. Ces pratiques sont peu répandues car souvent on distingue la phase de découverte de

2 paragraphe 2 du présent article, à propos du tétraèdre et du cylindre.

la démonstration et la phase de rédaction de la démonstration. Ce dernier exercice peut ne plus laisser de trace du comment la découverte s'est réalisée. On peut regretter que les indications heuristiques ne soient pas plus répandues, tant dans l'enseignement que dans la recherche ; cela développerait les qualités heuristiques, tant des élèves que des chercheurs.

On peut expliquer également l'origine du résultat énoncé.

Par exemple dans la démonstration des formules des racines d'un trinôme du second degré sur le corps des complexes, on peut démontrer ces formules en développant la forme factorisée. Cette démonstration n'indique pas comment on a obtenu ces formules. Elle valide sans expliquer. Par contre, si l'on utilise la mise sous forme canonique, qui permet de reconnaître l'identité remarquable différence de carrés, la factorisation explique clairement l'origine des formules. Cette démonstration éclaire les formules. Remarquons que ces deux démonstrations valident les formules et qu'en ce sens elles sont toutes deux « convaincantes ». Mais seule la seconde démonstration « éclaire ».[3]

Cependant nous verrons plus loin des exemples allemands de certaines démonstrations qui expliquent mais qui sont incomplètes quant à la rigueur formelle de l'explication, notamment parce que les élèves n'ont pas encore accès à ce niveau de formalisme. On peut considérer que ces démonstrations qui expliquent ne valident pas complètement.

3 Evelyne Barbin utilise cette terminologie pour distinguer deux grands types de démonstrations : les démonstrations pour convaincre et les démonstrations pour éclairer, dans : Barbin, La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques, in Bulletin vert de l'APMEPn° 366, 1988, pp 598 à 501

Dans la pratique scolaire, et notamment pour les démonstrations longues et complexes, l'explication ne concerne que certaines parties limitées de la démonstration, souvent les parties novatrices, le reste étant bien souvent validé sans explication[4].

Démontrer pour expliquer signifie donc démonter en donnant du sens à l'énoncé que l'on veut démontrer.

Démontrer pour apprendre :

La démonstration peut être utilisée comme moyen d'exposition d'une méthode. Barbin[3] explique comment les démonstrations qui exposaient des méthodes, qui pourraient être réutilisées pour produire de nouvelles démonstrations, ont été préférées par Descartes, Pascal, Arnauld ou Nicole aux démonstrations qui se contentaient de valider seulement .

Dans les exemples allemands que nous évoquerons plus loin, nous évoquerons une fonction « propédeutique » de la démonstration : préparer à l'apprentissage de nouveaux objets mathématiques. La démonstration, et notamment pour ce qui concerne les théorèmes de cours, peut être un lieu d'apprentissage, ou de préparation d'apprentissage, de méthodes.

Démontrer pour accéder à la culture mathématique :

Cette fonction culturelle de la démonstration mathématique intègre les deux fonctions précédentes. Localement, on propose des démonstrations validantes, pour exprimer un mode

4 voir l'article de Antibi, Graphique, démonstration et rigueur : quelques réflexions, in bulletin vert de l'APMEP n°411, 1997.

de validation caractéristique de la pensée mathématique : cette pratique est assez répandue dans l'enseignement mathématique français, à l'occasion de la résolution d'exercices ou de problèmes. On peut regretter parfois le poids important de la production de démonstrations, alors que l'étude de textes de démonstrations déjà produites (et notamment de démonstrations de théorèmes de cours, bien souvent absentes dans l'enseignement secondaire français) est tout aussi importante pour la formation culturelle à la pensée mathématique (car à trop admettre on finit pas ne plus motiver à la démonstration, sauf « pour faire plaisir » au professeur).

On peut aborder une perspective plus globale, qui montre comment se construisent progressivement les objets mathématiques. La démonstration est alors l'outil de cette construction progressive et méthodique, qui est devenu plus délicate avec l'abandon de la méthode axiomatique dans l'enseignement. Dans l'exemple allemand suivant, nous allons montrer comment, à propos des aires et des volumes, on peut s'essayer à une construction progressive et méthodique des objets mathématiques. Dans ces deux dimensions, locale et globale, l'élève risque d'être placé bien souvent en position passive, de consommateur de démonstrations déjà produites. C'est tout l'art de l'enseignement que de le rendre actif, par le débat scientifique, par la problématisation des étapes (introduction de contre-exemples, de cas limites,… comme ceux des démonstrations suivantes à propos de la méthode de Cavalieri)…

Démonstration pour communiquer :

Beaucoup des démonstrations suivantes peuvent être réalisées avec une prise de note réduite, soit en s'appuyant sur le texte du livre à commenter, soit par la pratique d'un débat oral. Là encore on peut être frappé par le fort poids de l'écrit en France, sans doute expliqué par une tradition de psychologie constructiviste, où l'élève doit produire lui-même sa démonstration et par la tradition du « concours », où le poids de l'écrit est déterminant. La pratique de démonstration où la production d'écrit est minorée et où la forme dialoguée est mise en valeur permet de travailler plus facilement, grâce au débat en direct, les précisions de niveau de rigueur et de niveau de problématique. Dans cet exercice oral, les fonctions sociales de la communication sont davantage développées : travailler en groupe, écouter, convaincre… Le travail, sur un texte écrit que l'on n' a pas produit, est également un entraînement à la compréhension écrite et à la pratique des textes mathématiques dont les qualités abstraites et formelles sont spécifiques.

2) Un exemple allemand : aires et volumes des solides sans calcul intégral

Dans le programme:

En étudiant les programmes du Gymnasium [5] en Bade-Wurtemberg on observe que dès la **classe 5** (10-11 ans) sont mentionnés les premiers solides, parallélépipède rectangle, cube, sphère, cylindre et pyramide, pour lesquels on découvre les propriétés. Parmi ces propriétés, celles relatives aux longueurs, aux aires et aux volumes ne sont évoquées expli-

5 On pourra consulter dans le numéro 91 de l'Ouvert l'article « Mathématiques dans un lycée allemand » qui rappelle sommairement quelques caractéristiques de l'enseignement mathématiques en Allemagne.

citement que pour le rectangle et le parallélépipède rectangle. En classe 6, on prend connaissance de p à propos du cercle et de l'arc de cercle. Il faut attendre la classe 10 pour évoquer explicitement les volumes et aires de surfaces de solides.

En **classe 10** (15-16 ans) le programme précise :

> « calcul sur le cercle, présentation et calculs sur les solides :
> Les élèves comprendront le problème des déterminations de la circonférence et de l'aire du cercle ainsi que du volume de solides déterminés. Ils reçoivent un point de vue sur comment une considération propédeutique des limites permet le calcul. Ils acquièrent les formules de surfaces, en partie également de manière autonome, et les appliquent sans faute. Avec la représentation des figures et des solides les élèves exercent et approfondissent leur capacité de représentation spatiale. »

Avec une présentation en deux colonnes, le programme énonce dans la colonne de gauche : « Volume du prisme, du cylindre à base circulaire, de la pyramide, du cône et de la sphère ».

Les trois commentaires suivants sont inscrits successivement en regard du texte précédent dans la colonne de droite : « Pour l'introduction des formules, des études illustrées de la plausibilité au travers de dessins suffisent», « Adapté à des acquisitions autonomes à partir d'extraits du livre de classe », « Bonaventura Cavalieri (1598-1647). »

Dans le livre de classe [6] **:**

Dans le plan : cercle et disque :

On démontre que le rapport entre l'aire d'un disque est le carré d'un rayon est constant. [7]

Pour cela on considère deux cercles semblables dans le rapport de leurs rayons. On inscrit dans chacun des cercles un polygone régulier à n côtés. Ces deux polygones réguliers sont également semblables dans le rapport des rayons, leurs surfaces sont alors semblables et le rapport de leurs aires est égal au rapport des carrés des rayons des cercles correspondants. « Comme l'aire du polygone à n côté diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque correspondant pour n suffisamment grand, on doit avoir de la même façon également pour les aires de disques » que le rapport des aires des disques est égal au rapport des carrés des rayons des cercles correspondants.

Plusieurs méthodes sont proposées pour déterminer une valeur approchée de p (méthode d'Archimède,...) [8]

On démontre ensuite la formule de l'aire du disque [9]. On décompose le disque en 2^n secteurs de même angle que l'on recompose de manière à former un figure approchant un parallélogramme, comme suggéré par la figure de la page suivante.

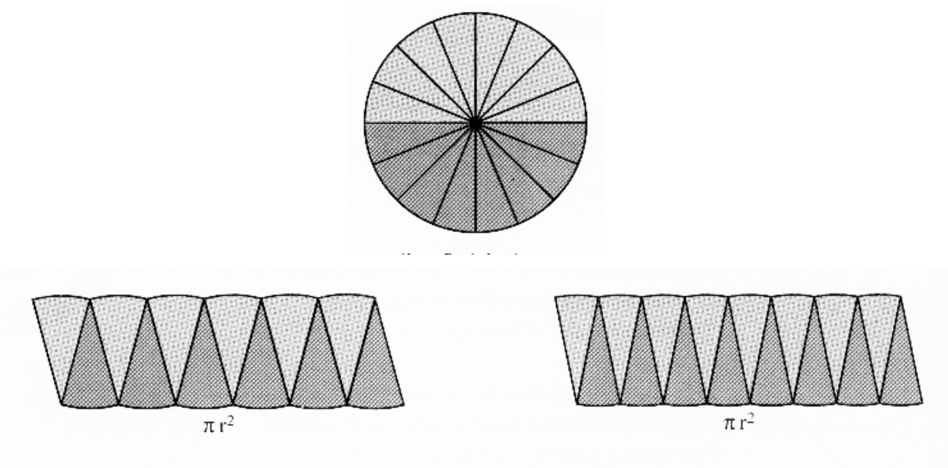
« On choisit un nombre de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le sou-

6 Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium, Ausgabe Baden-Würtemberg, Klasse 10, Lambacher Schweizer, Ernst Klett Verlag.

7 page 74

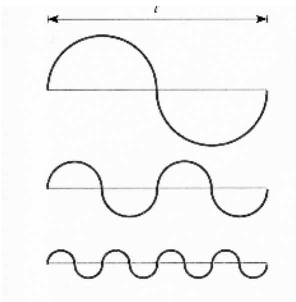
8 pages 75, 83, 84

9 pages 78 et 79



haite de l'aire d'un rectangle de longueur une demi-circonférence et de largeur un rayon » Comme l'aire du rectangle recomposé est l'aire du disque, et comme on a précédemment démontré que l'aire du disque vaut p fois le carré du rayon, on en déduit que la circonférence du cercle vaut p fois le diamètre.

On signale cependant par la figure cidessous



extraite du manuel qu'une ligne ondulée peut approcher de plus en plus un segment de droite sans pour autant que la longueur de la ligne ondulée approche la longueur du segment

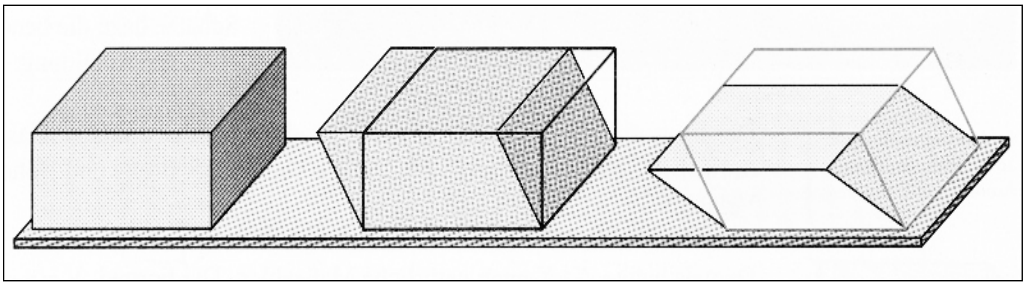
Dans l'espace : volume de solides.

On veut montrer que pour un prisme d'aire de base G et de hauteur h le volume $V = G \times h$.

Parallélépipède rectangle :

Les formules de l'aire du rectangle ou du volume du parallélépipède rectangle sont vues en classe 5 (10-11ans) à partir de quadrillage ou de pavage, en admettant la généralisation.

Pour le parallélépipède rectangle, la formule de classe 5 donne le volume V en fonction de l'aire de la base G et de la hauteur h correspondante : $V = G \times h$.



En classe 10, pour la formule du parallélépipède non rectangle, un dessin (figure ci-dessus) illustre la technique de l'équidécomposabilité [10] sur un exemple qui ramène en deux étapes à un pavé droit de même volume. La formule précédente se généralise donc au parallélépipède non rectangle.

Prisme :

Pour un prisme droit (figure ci-dessous) ayant pour base un triangle rectangle, on interprète ce prisme comme une moitié d'un parallélépipède rectangle.

On admet la généralisation à un prisme non droit à base triangulaire.

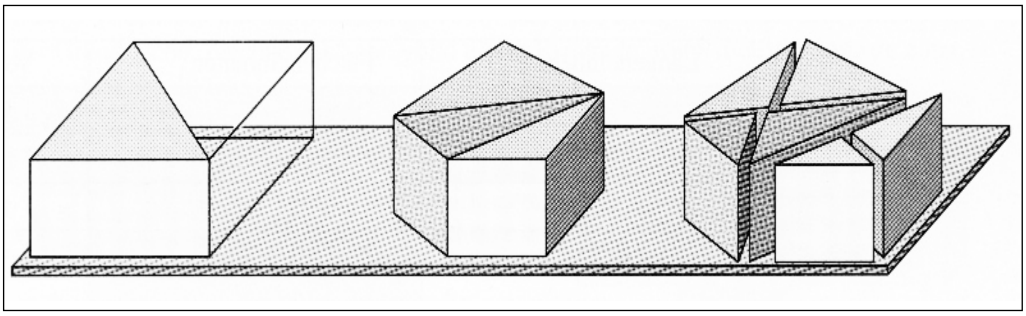
Pour un prisme droit à base polygonale on décompose sa base polygone en triangles.

Chaque triangle peut être décomposé en deux triangles rectangles, comme suggéré par la figure. Un prisme droit à base polygonale et de hauteur h se décompose donc en prismes droits à base triangle rectangle et de même hauteur h.

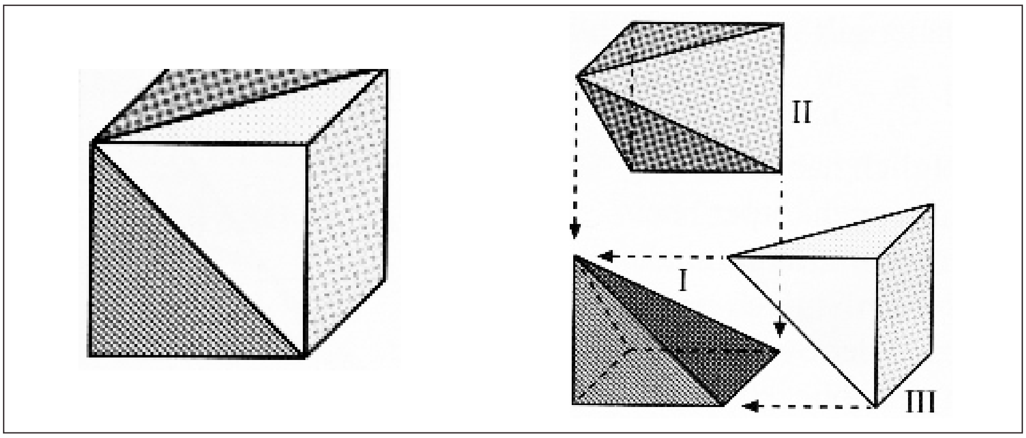
« Ces bases (triangle rectangle) ont pour aires $G_1, G_2, \ldots, G_n$ alors le volume du prisme originel est :

$$V = G_1 \times h + G_2 \times h + \ldots + G_n \times h$$
$$= (G_1 + G_2 + \ldots + G_n) \times h = G \times h$$

et ceci est valable également pour les prismes inclinés. »



10 Deux polyèdres sont équidécomposables lorsqu'ils sont décomposables en un même nombre fini de polyèdres isométriques. Ils ont alors le même volume. Dans le plan, deux polygones sont équidécomposables lorsqu'ils sont décomposables en un même nombre fini de polygones isométriques. Ils ont alors la même aire



Pyramide [11] :

Un cas particulier:

Un cas des plus simples est celui de la pyramide incluse dans un cube. La figure ci-dessus montre que le cube se décompose en trois pyramides. Ces pyramides sont isométriques : elles ont la même aire de base G et la même hauteur h si le cube est d'aire de base G et de hauteur h.

Chaque pyramide a le volume $V = \frac{1}{3} G \times h$.

cas général :

Dans la suite on essaie, avec d'autres pyramides, de procéder de manière analogue.

Pour déterminer le volume d'une pyramide de base polygonale, on décompose la base en triangles et on est ramené ainsi au calcul du volume d'une pyramide à base triangulaire ou tétraèdre.

Tétraèdre :

On détermine le volume d'un tétraèdre I de hauteur h et d'aire de base G (cf. figure, en haut de la page suivante). Par translation de la base le long d'un côté on génère un prisme, que l'on décompose en trois tétraèdres I, II et III comme suggéré par le schéma.

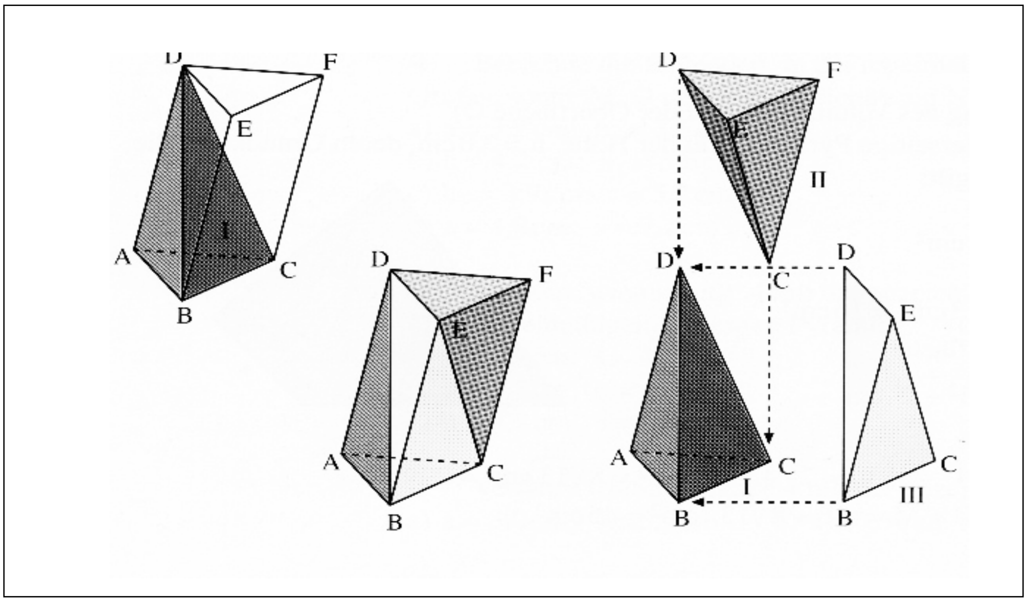
Ces tétraèdres ont même aire de base et même hauteur d'après le raisonnement suivant :

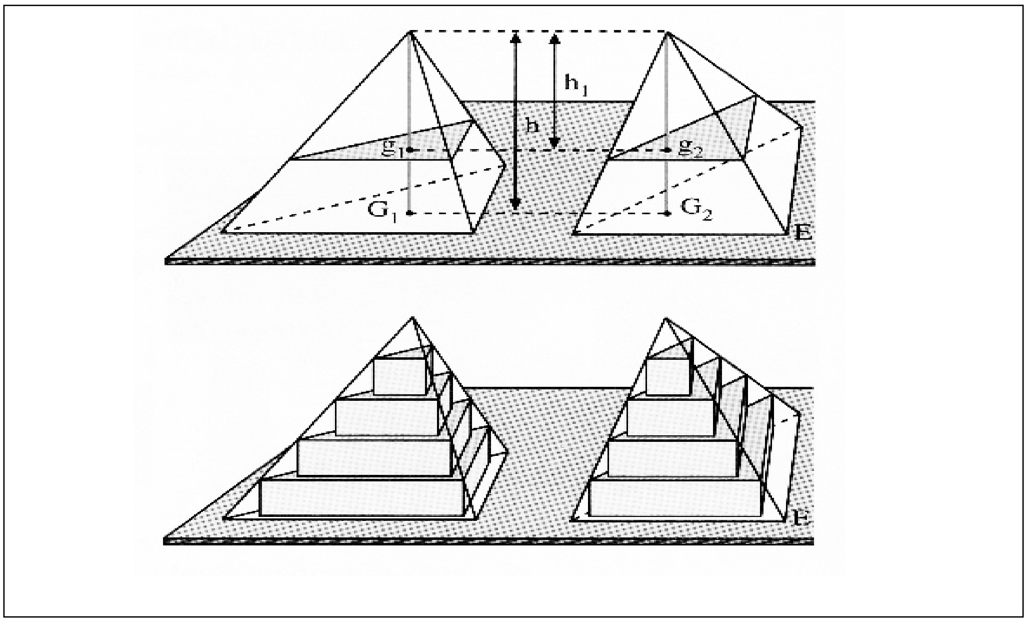
— I et II ont leurs bases ABC et DEF isométriques et leurs hauteurs issues respectivement de D et C de même longueur.

— II et III ont leurs bases respectives CEF et BCE isométriques et leurs hauteurs issues de D de même longueur.

Des tétraèdres de même aire de base et même hauteur ont-ils même volume ? Dans la figure ci-contre, on coupe les deux tétraèdres d'aires de base G_1 et G_2 égales par un plan parallèle au plan E contenant leurs bases et

11 page 105 à 107


D
F
E
I
A
C
B
D
F
E
A
C
B
D
F
E
II
D
C
D
E
A
C
I
B
C
III
B


h1
h
g1
g2
G1
G2
E
E

on obtient des surfaces d'aires respectives g_1 et g_2, intersections du plan E et des tétraèdres. Les surfaces d'intersection sont semblables aux surfaces de base des tétraèdres respectifs. Ainsi :

$$\frac{g_1}{G_1} = \frac{{h_1}^2}{h^2} \quad \text{et} \quad \frac{g_2}{G_2} = \frac{{h_1}^2}{h^2} \; .$$

On en déduit : $g_1 = g_2$. Puis on considère le « solides en escalier » dont les marches ont même hauteur et par conséquent même volume (puisque même aire de base). Ceci est valable pour tout nombre de marches.

« On augmente le nombre de marches et on diminue la hauteur des marches de telle manière que le volume du « solide en escalier » diffère, aussi peu que souhaité, du volume du tétraèdre. Ainsi le volume des deux tétraèdres ne peut pas être différent. »

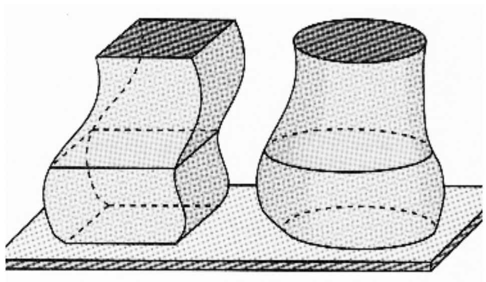
On vient de démontrer que les volumes des deux tétraèdres de même aire de base et de même hauteur sont égaux. En conséquence les tétraèdres I, II et III ont même volume, égal au tiers du volume du prisme.

Théorème : Une pyramide d'aire de base G et de hauteur h a pour volume V avec :

$$V = \frac{1}{3} G \times h$$

On a démontré la propriété suivante : si deux tétraèdres ont la même hauteur, des bases dans le même plan et des sections, par des plans parallèles à leurs bases, de même aire, alors ces tétraèdres ont même volume. Cette propriété se généralise [12] :

Théorème de Cavalieri [13] : Si deux solides, lesquels ont leurs bases situées dans un plan E, ont les surfaces d'intersection de deux solides, avec tout plan parallèle à E, d'aires égales, alors les solides ont même volume.



Avec le théorème de Cavalieri on peut parfois pour des solides de formes différentes prouver qu'ils ont même volume.

Cylindre [14] **:**

On inscrit dans un cylindre droit un prisme droit ayant pour base un polygone régulier à n côtés comme suggéré par la figure.

« Par augmentation du nombre n de côtés du polygone, le volume $V_n = G_n \times h$ du prisme s'approche aussi précisément que souhaité du volume du cylindre. En effet l'aire G_n du

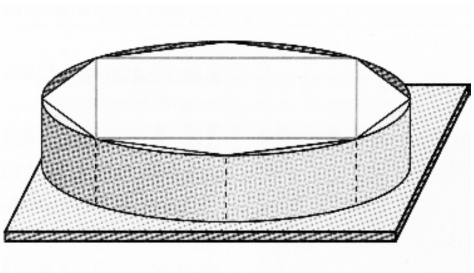
12 p107: «Allgemeiner gilt ». Nous reproduisons ici fidèlement la démarche du livre; après avoir « démontré » la formule de Cavalieri dans le cas du tétraèdre, le livre énonce la généralisation. Aucune démonstration du théorème de Cavalieri n'est proposé en classe 10. Nous verrons dans le paragraphe sur le calcul intégral qu'une démonstration de ce théorème est évoquée comme application d'un théorème de calcul intégral.

13 page 107 : « Satz von Cavalieri : Wen zwei Körper, deren Grundflächen in der Ebene E liegen, bei jedem Schnitt mit einer zu E parallelen Ebene Schnittflächen mit gleichem Inhalt besitzen, so haben die Körper den gleichen Rauminhalt.

14 page 110

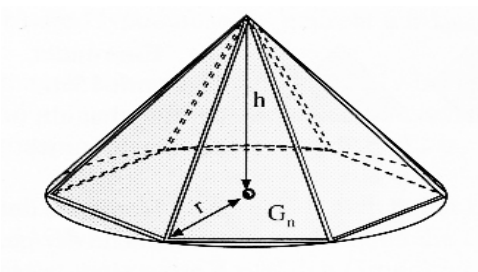
polygone s'approche aussi près que souhaité de l'aire $G = \pi r^2$. »

(Cette approximation du cercle par un polygone régulier inscrit a été étudiée dans une précédente leçon[15]). Ainsi le volume du cylindre droit vaut : $V = \pi r^2 h$.



Pour un cylindre incliné, *le théorème de Cavalieri* permet de montrer l'égalité avec le volume d'un cylindre droit de même hauteur et même aire de base.

Cône :



La méthode est analogue à celle du cylindre. Dans un cône, on considère la pyramide de même sommet que le cône mais dont la base est un polygone régulier d'aire G_n inscrit dans la base d'aire G du cône (comme pour la base du cylindre).

En augmentant n, l'aire de base G_n de la pyramide approche aussi près que souhaité l'aire $G = \pi r^2$ de la base du cône. Or les deux solides ont même hauteur et le volume de la pyramide vaut $V = \frac{1}{3} G_n h$, il s'ensuit que le volume du cône vaut : $V = \frac{1}{3} G h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Sphère :

Pour déterminer le volume V d'une sphère de rayon r, on utilise le théorème de Cavalieri. On considère une demi-sphère comme suggéré par la figure de la page suivante. La demi-sphère, de hauteur h, est coupée par un plan en un cercle de rayon r_1 et d'aire A.

Alors $r_1^2 = r^2 - h^2$ et on obtient :

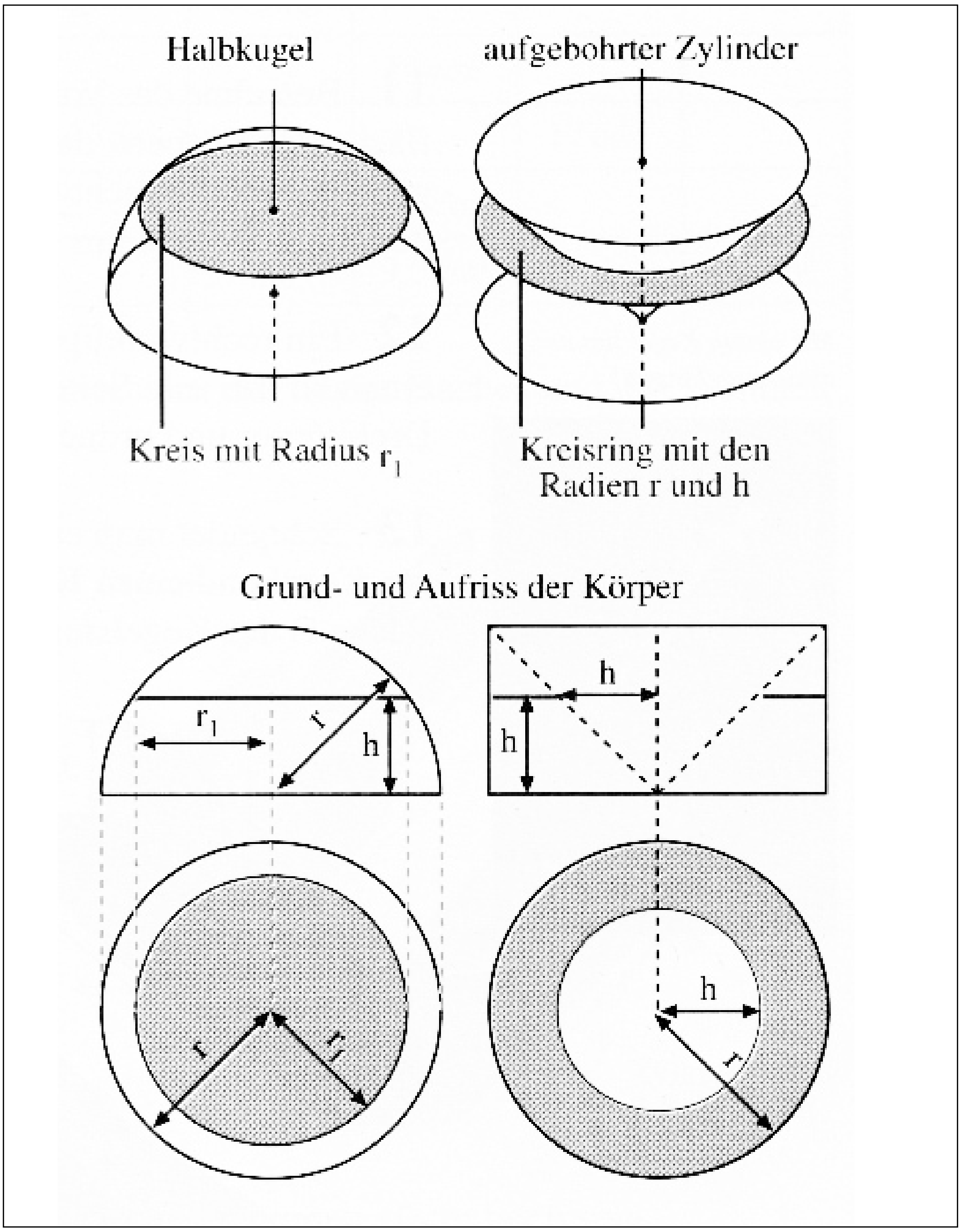
$$A = \pi r_1^2 = \pi r^2 - \pi h^2.$$

A est également l'aire d'un anneau circulaire de cercle extérieur de rayon r et de cercle intérieur h. Aussi cherche-t-on un solide de hauteur h et de surface de section un tel anneau circulaire. Ce solide s'obtient quand on enlève d'un cylindre de rayon r et de hauteur r un cône de même rayon et de même hauteur.

Si on coupe la demi-sphère et ce solide par un plan parallèle à leurs bases (situées sur un même plan), à une hauteur h, les surfaces de sections ont même aire.

D'après le *théorème de Cavalieri*, la demi-sphère et le solide précédent ont même volume :

15 on rend compte de cette démonstration dans le numéro 91 de l'Ouvert, page 18, dans l'article « Mathématiques dans un lycée allemand »


Halbkugel
aufgebohrter Zylinder
Kreis mit Radius r1
Kreisring mit den
Radien r und h
Grund- und Aufriss der Körper
r1
r
h
h
h
r
r1
h
r

$$\frac{1}{2}V = \pi r^2 \times r - \frac{1}{3}\pi r^2 \times r = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Le volume d'une sphère de rayon r vaut donc : $\frac{2}{3}\pi r^3$.

3) Un exemple allemand : aires et volumes des solides avec le calcul intégral :

Dans le programme

Le calcul intégral est introduit dans le Bade-Wurtemberg dans un programme qui couvre les deux dernières années de scolarité avant le baccalauréat, à savoir les classes 12 et 13. On distingue deux programmes : un programme de mathématique de base (Grundkurs) et un programme de mathématiques approfondies (Leistungskurs).

Mathématiques de base :

« Chapitre : *Introduction au calcul intégral*. Le concept de contenu motivé intuitivement du 1er cycle du secondaire va être précisé. Les élèves s'aperçoivent que la relation entre le calcul intégral et le calcul différentiel permet dans bien des cas le calcul simple d'intégrales. Ils peuvent maintenant calculer également l'aire d'une surface délimitée par des courbes » ... « Calcul d'aires et de volumes de solides ayant un axe de révolution. La rotation autour de l'axe (Ox) est suffisante. Interdisciplinarité avec la Physique, cours de base, chapitre 1 : énergie des champs électriques) »

« Chapitre : *Approfondissement du calcul différentiel et intégral dans le cas de fonctions particulières* ». Pour les fonctions rationnelles et exponentielle : calculs d'aires et de volumes.

Mathématiques approfondies :

On retrouve les mêmes formulations précédentes du programme de mathématiques de base. S'y ajoute « le cas échéant le calcul de valeurs approchées à l'aide d'un calculateur »

Dans le livre de classe :

Nous proposons des extraits du livre de mathématiques approfondies [16], plus complet que le livre de mathématiques de base [17].

Interprétation comme limite d'une aire délimitée par une fonction bord [18] :

On expose, en s'appuyant sur une analogie avec la méthode de quadrillage (pour l'encadrement des aires), la méthode des rectangles qui définit une suite (U_n) de sommes d'aires de rectangle inférieures et une suite (O_n) de sommes d'aires de rectangle supérieures à l'aire déterminée par la fonction bord f, aire qui s'obtient comme limite commune de ces deux suites.

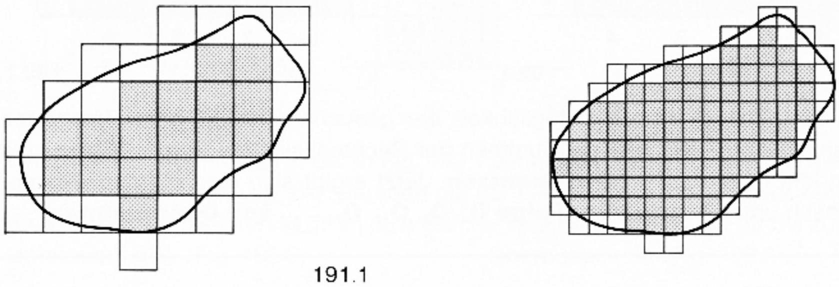
Cet exposé, plus détaillé dans le livre de mathématiques approfondies, s'appuie essentiellement sur les figures qui illustrent des cas particuliers (voir page suivante).

Des études plus rigoureuses des suites majorant et minorant sont effectuées sur des exemples en utilisant le calcul des limites.

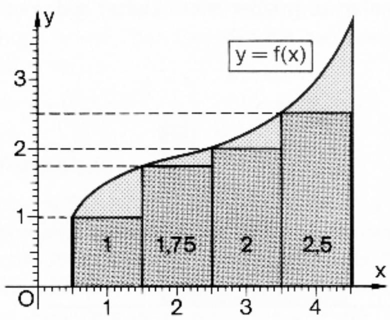
16 Lambacher Schweizer, Analysis, Leistungskurs, Klett Verlag, 1990

17 Lambacher Schweizer, Analysis, Grundkurs,, Klett Verlag, 1990

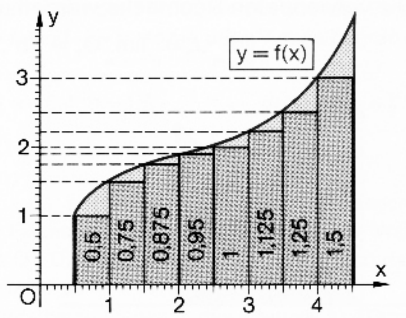
18 pages191 et 192



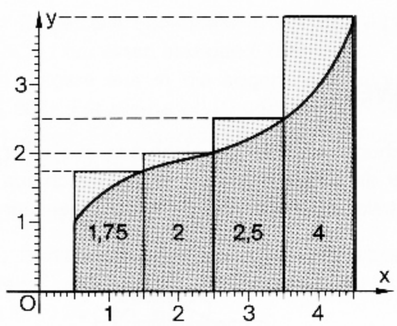
191.1



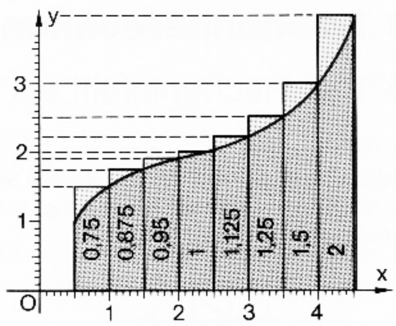
191.3



191.4



192.1



192.2

Fonction aire déterminée par la fonction bord f [19] :

« De manière générale soit une fonction f définie sur l'intervalle [a ; b] telle que $f(x) \geq 0$ sur [a ; b]. La surface délimitée par la courbe de f et l'axe (Ox) sur l'intervalle [a ; x] a une aire A(x). Alors la fonction $x \longmapsto A(x)$ est appelée **fonction aire déterminée par la fonction bord f** sur [a ; b]. »

Si $c \in [a ; b]$, on note $A_c(x)$ l'aire de la surface précédente limitée à l'intervalle [c ; b].

Théorème : Si A_a est la fonction aire de la fonction bord f continue sur [a ; b] , alors la fonction A_a est différentiable et on a :

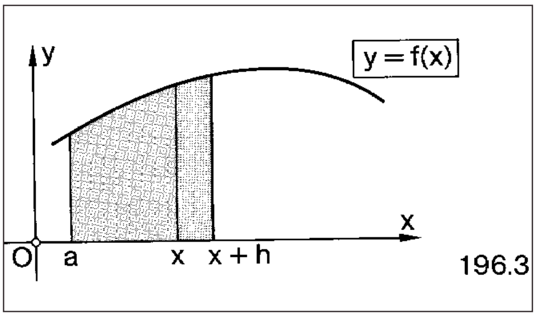
$$A_a'(x) = f(x).$$

On observe la validité de ce théorème sur deux exemples où f est une fonction affine. Puis :

« on étudie maintenant, si cela est généralisable. On suppose que la fonction bord f est continue sur [a ; b]. Alors le taux différentiel de A_a en x est $\dfrac{A_a(x+h) - A_a(x)}{h}$.

Dans ce cas $A_a(x+h) - A_a(x)$ pour $h > 0$ s'interprète comme l'aire de la surface de la figure comprise coloré en rouge [20] et de largeur h. Si M est le maximum et m le minimum de la fonction f sur [x ; x+h], alors on a : $m \times h \leq A_a(x+h) - A_a(x) \leq M \times h$ ou encore $m \leq \dfrac{A_a(x+h) - A_a(x)}{h} \leq M$.

Cet encadrement est encore valable pour $h < 0$.



196.3

(Justification ?) Pour h tend vers 0, comme f est continue, aussi bien m que M tendent également vers f(x). Ainsi la conjecture $A'(x) = f(x)$ est vérifiée. »

Puis le livre définit une intégrale et établit le théorème affirmant que deux primitives sur un intervalle d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Calcul d'aires [21] :

Puis est énoncé le *théorème fondamental de l'aire* :

Si F est une primitive sur [a ; b] de la fonction continue f avec $f(x) \geq 0$, alors l'aire $A_a(b)$ de la surface délimitée par la courbe de f et l'axe (Ox) sur l'intervalle [a ;b] vaut : $A_a(b) = F(b) - F(a)$.

ce théorème est justifié par le raisonnement suivant :

« Comme pour tous les x de [a ; b] la fonction A_a est différentiable (et donc également continue) et comme $\lim_{x \to a} A_a(x) = 0$,

19 page 195

20 ce qui correspond sur notre illustration (fig. 196.3) à la portion de surface de bord f au-dessus de [x ;x+h]

21 page 202

alors A_a est la primitive de f qui s'annule en a. Si on a trouvé une primitive F, alors $A_a(x) = F(x) + c$, alors $F(a) + c = 0$ et $c = -F(a)$. Ainsi $A_a(x) = F(x) - F(a)$.»

Intégrales :

Dans la suite du cours [22] est donnée une définition plus formelle et plus générale des suites (U_n) et (O_n) à partir d'une subdivision $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ quelconque en n sous-intervalles d'un intervalle [a ; b] pour une fonction continue f :

$$U_n = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + ... + m_n(x_n - x_{n-1})$$
$$O_n = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + ... + M_n(x_n - x_{n-1})$$

où m_i et M_i désignent le minimum et le maximum de f sur $[x_i ; x_{i+1}]$.»

La convergence des suites vers une limite commune, indépendante de la subdivision choisie, est admise. cette limite commune est définie comme l'intégrale de a à b de f.

On démontre alors l'inégalité de la moyenne. On définit ensuite la fonction $I_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ dont on montre la dérivabilité sur l'intervalle J lorsque f est continue et a est un élément de J avec $I_a'(x) = f(x)$ sur J.

« $$\frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} = \frac{1}{h}[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt] =$$

$$= \frac{1}{h}[\int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \ .$$

Comme f est continue, entre x et x + h , f admet un minimum m et un maximum M. d'après l'inégalité de la moyenne :

- si $h > 0$: $m \times h \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le M \times h$,
- si $h < 0$: $m \times (-h) \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le M \times (-h)$

soit dans les deux cas :

$$m \le \frac{1}{h} \times \int_x^{x+h} f(t)dt \le M.$$

Quand h tend vers 0, comme f est continue, alors m aussi bien que M convergent vers f(x).

Donc I_a est différentiable et $I_a'(x) = f(x)$ »
Ce théorème montre que « pour la fonction donnée f, la fonction intégrale I_a est une primitive de f. Si F est une primitive connue de f, alors $I_a(x) = F(x) + c$. Comme $I_a(a) = 0$, $c = -F(a)$.

En particulier $I_a(b) = F(b) - F(a)$.»

On a donc démontré le *théorème fondamental du calcul intégral et différentiel* [23] *:*

« Si f est continue sur un intervalle J et si F est une primitive de f, alors pour tout a et tout b de J, on a : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. »

Application au calcul de volumes [24] :

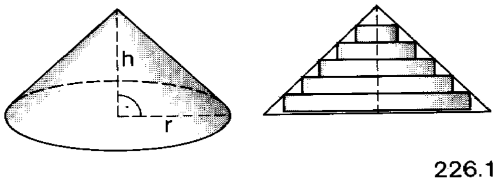
On commence en exercice à décomposer le volume d'un cône par une suite somme de volumes de tranches cylindriques comme suggéré par la figure 226 reproduite ci-contre) et à calculer la limite de cette suite.

---

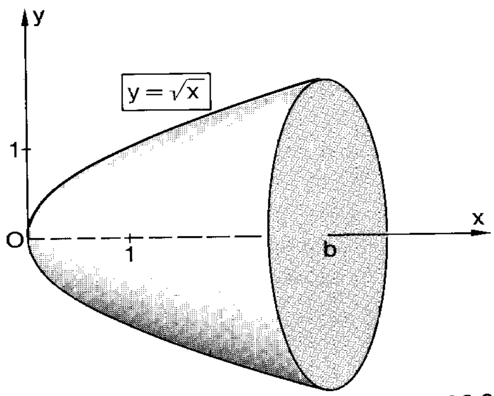
22 page 209

23 page 18

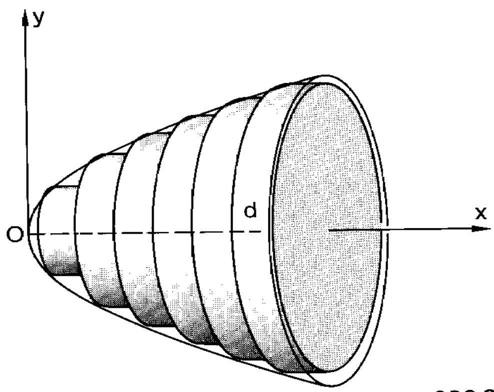
24 pages 226 à 227



226.1



226.2



226.3

On considère le volume V du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction f sur [a,b] représentée dans (Oxy) autour de l'axe (Ox). On s'appuie sur la figure 226.2 représentant le cas particulier $f(x)=\sqrt{x}$:

« Dans ce solide on inscrit ou on circonscrit n tranches cylindriques de même épaisseur (figure 226.3) ; on obtient une somme inférieure U ou O supérieure à V. Une section orthogonale à l'axe (Ox) produit une surface de section d'aire q(x) telle que :

$U = q(0)d + q(d)d + q(2d)d + \ \dots \ + q((n-1)d)d$
et
$U = q(d)d + q(2d)d + q(3d)d + \dots + q(nd)d$.
Le volume V recherché se trouve être la limite des suites de sommes inférieures U et sommes supérieures O quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire l'intégrale de la fonction section $x \longmapsto q(x)$.»

Par rotation $q(x) = \pi\,(f(x))^2$. On obtient ainsi le *théorème* :

Si f est une fonction continue sur [a ; b], alors le solide déterminé par la rotation de la courbe de f sur [a ; b] autour de l'axe (Ox) admet pour volume $V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$.

On généralise le théorème précédent :

Théorème : Si pour solide les aires de sections orthogonales à l'axe (Ox) forment une fonction continue q sur [a ; b], le volume de ce solide est : $V = \int_a^b q(x)\,dx$.

Remarque : Ce théorème confirme **le principe de Cavalieri** [25] : des solides ont même volume lorsque les sections à même distance d'un plan déterminé ont même aire .

4) Analyse des précédents exemples :

Dans les précédents exemples, différentes méthodes sont présentées : en classe 10 équidécomposabilité pour le parallélépipède, la pyramide, et le tétraèdre ; méthode des indivisibles pour le tétraèdre ; principe de Cavalieri pour le tétraèdre et la sphère ; en classe 13 méthode des rectangles.

Certaines de ces méthodes, notamment en classe 10, ne sont pas reprises en exercices. Elles peuvent cependant être réinvesties dans d'autres démonstration du cours. Elles ne sont pas exigibles. Leur but est d'éclairer sur la démarche de la démonstration.

Le programme de classe 10 indique clairement qu'on met en place une propédeutique à l'enseignement des limites. La **rigueur formelle** n'est pas encore mise en place et les justifications ne sont pas explicitées :

« Comme l'aire du polygone à n côté diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque correspondant pour n suffisamment grand, on doit avoir de la même façon également pour les aires de disques que le rapport des aires des disques est égal au rapport des carrés des rayons des cercles

25 p.227 le livre indique que le théorème précédent (théorème n°3 dans le livre) permet d'établir une démonstration du principe de Cavalieri : « Satz 3 bestätigt das Prinzip von Cavalieri ; danach haben Körper denselben Rauminhalt, wenn sie in gleichem Abstand von einer gedachten Ebene stets gleichgrosse Schnittflächen besitzen »

correspondants » ou bien *« On choisit un nombre de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur une demi-circonférence et de largeur un rayon ».*

Cependant la démarche des limites est présentée. Parfois on signale les problématiques sous-jacentes, comme dans le cas où on illustre qu'une ligne ondulée peut approcher de plus en plus un segment de droite sans pour autant que la longueur de la ligne ondulée approche la longueur du segment.

On retrouve cette démarche avec la méthode des indivisibles, utilisée en classe 10 pour la pyramide. Elle prépare à la méthode des rectangles du calcul intégral vue en classe 13. La méthode des rectangles est présentée au cours de démonstrations et est réutilisée au cours d'exercices.

De même le principe de Cavalieri vu en classe 10 pour le tétraèdre et la sphère est démontré rigoureusement en classe 13 avec le calcul intégral.

En classe 13, les démonstrations sur les aires et les volumes sont plus formelles, et plus abstraites, en utilisant notamment les concepts du calcul différentiel (limite, continuité, suite). Elle continue l'apprentissage au formalisme et à l'abstraction.

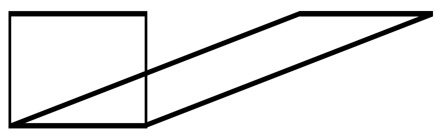
**Démonstration
et formation à la rigueur :**

La rigueur d'une démonstration ne réside pas seulement dans l'explicitation complète de toutes les étapes de la démonstration. Elle consiste dans la précision du niveau d'explicitation ou de problématique d'un pas de démonstration. Parfois on préfère un niveau bas pour ne pas « semer le trouble » chez l'élève pour qu'il puisse se concentrer sur les grandes idées de la démonstration ; le niveau zéro de l'explicitation étant la démonstration admise, l'élève se concentre sur le seul énoncé du théorème. A trop utiliser cette technique, qui au départ veut défendre la rigueur en ne démontrant pas ce qu'on ne peut pas rigoureusement démontrer, on risque d'induire des attitudes ne percevant pas la nécessité de démontrer pour valider.

Il convient donc de préciser le niveau d'explicitation de rigueur en précisant clairement ce qui est admis, ce à quoi on se limite, ce dont on admet la généralisation, ...

Il faut également préciser le niveau de problématique d'une technique de démonstration.

Par exemple dans la démonstration sur le volume du parallélépipède utilisant la méthode d'équidécomposabilité, on ne signale pas à l'élève que l'équidécomposabilité n'est pas aussi simple que le dessin le laisse paraître.



Le dessin ci-dessus montre un parallélogramme dont une base et une hauteur ont même longueur que celles du rectangle ; mais ce rectangle et ce parallélogramme ne sont pas équidécomposables en une seule étape comme suggéré par ce dessin extrait du manuel.

De même [26] à propos des indivisibles, on peut évoquer les paradoxes étudiés par Torricelli. Torricelli propose un exemple de découpage de la sphère en surfaces indivisibles conduisant à des paradoxes [27]. De même à propos des volumes de solides de révolutions on peut évoquer des partitions de solides en surfaces qui conduisent à de fausses intégrales [28]. Il paraît souhaitable d'indiquer que les techniques sont plus complexes qu'il n'y paraît pour inciter les élèves à la vigilance, notamment en leur livrant quelques paradoxes quand ils sont en état de les recevoir. Enfin dans l'exemple précédent de la démonstration du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, l'affirmation que le maximum et le minimum sur une subdivision [x, x+h] converge vers f(x) lorsque h tend vers 0 ne paraît pas aussi simple à démontrer que suggéré.

Autres formes de validation :

D'autres formes de validations [29] ne respectent pas les critères de la démonstration mathématique :

— les validations utilisant l'argument d'autorité : on a vu précédemment qu'en cours de mathématiques cet argument peut être utilisé par le professeur ou par le livre ;

— les validations utilisant l'argument de plausibilité : on valide dans un contexte particulier (contexte de la figure, vérifier les premiers cas, ...) et on généralise par plausibilité ; ce type d'argument est fréquemment utilisé dans l'introduction à l'enseignement des limites ;

— les validations préformelles utilisant une argumentation pragmatique : les arguments dépendent de la situation (par exemple la figure) et de l'observation (par exemple la technique d'équidécomposabilité sur la figure).

Un certains nombres de démonstrations précédentes relèvent de ces validations et ne constituent pas des démonstrations mathématiques formelles et déductives.

C'est pourquoi il est important de préciser aux élèves quel est le statut de la validation utilisée et d'indiquer clairement la frontière entre une validation non mathématique et une validation mathématique, et pour cette dernière les niveaux de rigueur ou de problématique exigés .

5) Comment expliquer ces différences de pratiques de la démonstration d'un pays à l'autre ?

Rappelons d'abord la prudence qui doit conduire une observation comparée entre pays : les mathématiques, et leur enseignement, ne sont pas indépendantes de la culture (culturfree) mais au contrai-

26 TORRICELI, « Campo di Tartuffi » XVIIème, traduit par DE GANDT F., dans « Les indivisibles et Torricelli », séminaire d'épistémologie et d'histoire des sciences de l'Université de Nice.

27 SCHNEIDER Maggy, « Un obstacle épistémologique soulevé par des « découpages infinis » des surfaces et des solides, dans Recherches en didactique des mathématiques, vol.11, n°23, pp 248-249

28 SCHNEIDER Maggy, « Un obstacle épistémologique soulevé par des « découpages infinis » des surfaces et des solides, dans Recherches en didactique des mathématiques, vol.11, n°23, p.272

29 Begründen und Argumentieren- Formen, Darstellung und Allgmeingultigkeit, in Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Tietze, Klika, Wolpers,, pp 158-159.

re le produit des cultures et des histoires.

Observons déjà que l'enseignement français intègre pratiquement tous les élèves dans un collège unique, et encore une forte proportion en seconde indifférenciée, avec un programme unique de mathématiques, mais avec par contre des classes et des pratiques très hétérogènes. Ceci peut expliquer l'absence de perspective globale dans la construction des objets mathématiques de la sixième à la terminale, car les parcours vont se diversifier après la troisième et la seconde. On a donc l'obligation de délivrer le bagage minimum pour ceux qui quitteront la filière générale. On se concentre alors sur des activités plus locales (résolutions d'exercices, d'activités) qui permettent de mieux s'adapter à l'hétérogénéité de la classe. Par contre en Bade-Wurtemberg l'orientation se fait dès la fin du primaire. Les élèves de Hauptschule n'auront pas d'enseignement de la démonstration, ceux de Realschule auront un enseignement de la démonstration basé sur des preuves pragmatiques ; seuls les élèves de Gymnasium auront accès à des preuves formelles. De plus cet accès aux démonstrations formelles se fera sur un parcours homogène, de la classe 5 à la classe 13 [30], ce qui permet d'assurer une perspective globale à la construction des objets mathématiques.

On a cependant des pratiques culturelles de l'enseignement de la démonstration différentes. L'importance en France du poids de l'écrit [31] dans l'enseignement de la démonstration, avec l'importance du cahier de cours et de la rédaction notamment en phase d'évaluation, avec la présence de certains rites culturels (rappeler l'énoncé du théorème, avec son contexte, ses hypothèses et ses conclusions) peut surprendre certains observateurs étrangers. Osons quelques hypothèses qui demanderaient bien entendu à être confirmées. On observe l'importance culturelle des mathématiques en France tirant sa légitimité des mathématiques savantes, avec de grandes institutions centralisées (grandes écoles avec leurs classes préparatoires, académie des sciences,…) et de grands mathématiciens (Bourbaki, …).

Une école didactique analyse d'ailleurs l'enseignement des mathématiques comme une transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné [32]. Dans ce contexte, le poids de l'écrit dans la démonstration, qui est essentiellement pratiquée par l'écrit dans la sphère savante, et le souci de la rigueur dans la démonstration, rigueur indispensable à l'élaboration des mathématiques savantes, seront importants. Les travaux de didactiques, la formation des enseignants, les manuels scolaires, les pratiques professionnelles seront sous l'emprise de cette tradition. En Allemagne, et notamment en Bade-Wurtemberg, le poids des mathématiques savantes sur l'enseignement secondaire est peut être moins fort. Le projet social et culturel dans cet enseignement y est peut-être plus affirmé.

Le fait que les enseignants de mathématiques soient tous bivalents [33] les amènent sans doute à une plus grande ouverture sur la pratique de la démonstration, perçue d'abord

30 Nous n'évoquerons pas ici les situations de certains Länder commençant la scolarité secondaire en classe 6, ou terminant la scolarité secondaire en classe 12, ou proposant la Gesamtschule qui n'est pas sans rappeler notre collège unique.

31 poids de l'écrit renforcé par la tradition du « concours de recrutement », spécificité très française.

32 Yves Chevallard, La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné, La pensée sauvage, 1985.

33 Avec des bivalences mathématiques et une autre discipline, comme par exemple : physique, biologie, chimie, informatique, religion, …

comme pratique culturelle de la pensée mathématiques. Le poids de l'écrit et de la rigueur (pratiques de démonstrations incomplètes) seront minorées par rapport à des pratiques plus culturelles (indiquer une perspective globale) ou plus éclairantes (démonstrations pour expliquer, démonstration propédeutique).

Cependant en France, à l'occasion de la réforme des lycées, on assiste à un changement des conceptions dans les programmes.

Rappelons un passage [34] intéressant concernant la démonstration en série scientifique dans les nouveaux programmes issus de la réforme des lycées :

> « Le niveau de rigueur exigible pour une démonstration dépend de l'expérience de l'élève dans le domaine où cette démonstration se situe : ainsi pour la géométrie, pratiquée depuis l'école primaire, on peut prétendre exiger dès la classe de seconde un niveau de démonstration tout à fait académique ; en analyse par contre, la plupart des objets manipulés ne sont pas définis formellement à ce niveau d'études, et les élèves ne peuvent pas aboutir à des démonstrations parfaitement achevées [35] : la nature et le niveau d'étude des rédactions exigibles ne peuvent pas être les mêmes. Il conviendra donc, à ce niveau d'étude, en particulier en analyse, d'accepter des preuves conçues et exposées à l'aide de schémas [36] (même si les élèves ne peuvent pas à ce stade les traduire en un texte linéaire). »

Il reste à accompagner ces changements de conceptions par une formation des enseignants permettant un changement des pratiques [37].

Il semblerait qu'en Allemagne les démonstrations de résultats de cours soient plus répandues qu'en France. Ces démonstrations remplissent des fonctions qui sont plutôt assumées par des exercices et des activités en France. Mais en démontrant beaucoup de résultats de cours n'est-ce pas aussi un choix culturel : insister sur la démonstration comme démarche spécifique de la pensée mathématique appliquée à une construction élémentaire des objets mathématiques, en déconnectant cette démarche de tout contexte local lié à la résolution d'un problème donné isolé, à une situation d'évaluation ou à l'apprentissage d'une technique de démonstration. Les pratiques allemandes et les nouveaux programmes français marquent-ils l'évolution de l'enseignement secondaire des mathématiques : d'un lieu de transposition didactique du savoir savant mathématique en un lieu de pratique d'un savoir social et culturel ? Les tenants de la rigueur sont-ils en train de perdre leur âme ?

---

34 programme de série scientifique S, paragraphe «généralités à propos d'une formation scientifique en première et terminale S », bulletin officiel de l'éducation nationale hors série n° 7 du 31 août 2000 .

35 au sens « bourbakiste » du terme (remarque : ce commentaire faisant référence à Bourbaki pour expliquer ce qu'est une démonstration achevée était mentionné dans une version de travail des projets de programmes ; elle a disparu dans la version officielle)

36 dans une version de travail du programme on avait utilisé le mot « graphique » à la place de « schéma ».

37 en mobilisant éventuellement la noosphère, si chère à Chevallard dans sa théorie de la transposition didactique.

Bibliographie :

ANTIBI André, *Graphique, démonstration et rigueur : quelques réflexions*, in bulletin vert de l'APMEP n°411, 1997.

CABASSUT Richard, *Mathématiques dans un lycée allemand*, journal « L'ouvert », numéro 91, juin 1998, IREM de Strasbourg.

BARBIN Evelyne, *Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles au XVIIème siècle,* in Fragments d'histoire des mathématiques II, brochure APMEP n°65, édition APMEP, 1987.

BARBIN Evelyne, *La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques,* in Bulletin vert de l'APMEP n° 366, 1988, pp 598 à 501

DE GANDT François, *Naissance et métamorphose d'une théorie mathématique : la géométrie des indivisibles en Italie,* in Fragments d'histoire des mathématiques II, brochure APMEP n°65, édition APMEP, 1987.

FRIEDELMEYER Jean-Pierre, *Les aires :outil heuuristique-outil démonstratif,* Revue REPERES numéro 31, avril 1998

DAUBELCOUR Jean-Pierre, *Calcul d'aires et calcul intégral en TS : un essai pédagogique,* Revue REPERES numéro 31, avril 1998