DU RAISONNEMENT A LA DEMONSTRATION

Rudolf BKOUCHE
Irem de Lille

la raison n'a pas le pouvoir
de se soustraire à ses conclusions [1]

Alain de Libera

Introduction

On réduit trop souvent la démonstration à une question de légitimation, de reconnaissance du vrai, pourrait-on dire. On comprend alors la difficulté que l'on rencontre lorsqu'un élève affirme que c'est évident et ne comprend pas l'intérêt d'une démonstration. Mais la démonstration n'a pas pour seul objectif de dire le vrai, elle permet aussi de le comprendre et de répondre à la question : pourquoi est-ce comme cela et pas autrement ? C'est en cela que la démonstration conduit à la notion de *nécessaire* et qu'elle contribue à la *construction de l'intelligibilité du monde*.

La question de la place de la démonstration dans l'enseignement des mathématiques, et plus généralement dans l'enseignement scientifique, est alors moins de codifier *a priori* les règles de la démonstration que de comprendre pourquoi de telles règles sont nécessaires. Il faut alors partir du raisonnement informel ; c'est aux limites du raisonnement informel que l'on comprend en quoi il peut être insuffisant et comment on peut construire les codifications nécessaires. Si la démonstration ne se réduit pas au raisonnement en ce sens qu'elle le réorganise, l'étape du raisonnement informel, de l'explication approximative, apparaît comme une étape obligée pour comprendre les enjeux de la démonstration ; il ne s'agit pas seulement d'une question d'apprentissage, la mise en forme d'une démonstration canonique passe souvent par un raisonnement informel préliminaire.

Nous nous intéresserons dans ce texte essentiellement à la géométrie ; d'une part celle-

1 Averroès, Discours décisif, traduction inédite de Marc Geoffroy, introduction d'Alain de Libera, Garnier-Flammarion, Paris 1996, p. 63-64

ci a joué dans le développement des sciences le rôle de modèle d'une théorie déductive, d'autre part la géométrie, en tant qu'elle est au point de rencontre des sciences mathématiques et des sciences physiques, reste un lieu essentiel de la construction de l'intelligibilité du monde.

Nous énoncerons d'abord quelques principes qui guident cet article.

1 — la démonstration participe de l'activité mathématique.

2 — la démonstration a un double aspect : d'une part *«dire le vrai»*, en cela la démonstration apparaît comme un mode de légitimation de la connaissance, d'autre part *«dire les raisons du vrai»*, ce qui conduit à considérer la connaissance démontrée comme nécessaire au sens que non seulement elle est vraie mais qu'elle ne peut pas ne pas être vraie.

3 — c'est à travers la méthode démonstrative que se construisent ce que l'on appelle depuis les Grecs les *idéalités mathématiques* ; autrement dit les objets mathématiques, en tant qu'ils sont des objets idéaux, se construisent *via* l'activité de démonstration.

4 — la démonstration est un discours. Nous expliciterons ce dernier point dans la suite de cet article.

Quelques exemples de démonstrations

1 — *la perpendicularité*

— Clairaut

Nous rappellerons d'abord la définition de la perpendicularité que donne Clairaut dans ses *Eléments de Géométrie* :

« Une ligne [2] qui tombe sur une autre, sans pencher sur elle d'aucun côté, est perpendiculaire à cette ligne. » [3]

Cette définition est classique ; on la trouve par exemple dans les *Nouveaux Elémens de Géométrie* d'Arnauld [4]. On peut y voir un renvoi à la relation verticale-horizontale ainsi qu'à cette figure fondamentale que constitue le rectangle. Clairaut la justifie en considérant la distance d'un point à une ligne.

Cette définition informelle de la perpendicularité permet pourtant à Clairaut de construire la perpendiculaire d'un point à une droite ; nous rappelons ici le principe de la démonstration de Clairaut :

Soit C un point d'une droite, A et B deux points de la droite situés de chaque côté du point C et à égale distance de ce point. Il suffit de trouver un point D à égale distance des points A et B, auquel cas la ligne CD tombant sur la ligne AB ne penchera ni d'un côté ni de l'autre ; pour cela on trace deux cercles de même rayon de centres respectifs A et B ; soit D un point d'intersection de ces deux cercles, il est équidistant des points A et B ce qui prouve que la droite CD est perpendiculaire à la droite AB.

Cette construction pose problème : le choix d'un autre rayon pour les cercles aurait-il donné la même perpendiculaire ? ce qui pose la question de l'unicité de la perpendiculaire menée du point C à la droite AB.

Clairaut continue en considérant le cas où le point C n'est pas situé sur la droite ; dans

2 Par le terme ligne il faut entendre ici la ligne droite.

3 Alexis-Claude Clairaut, Eléments de Géométrie (1741), «Les Maîtres de la Pensée Scientifique», Gauthier-Villars, Paris 1920, p. 2

4 Antoine Arnauld, Nouveaux Elémens de Géométrie, Paris 1667, p. 86

ce cas on trace un cercle de centre C qui rcoupe la droite en deux points A et B, les cercles de centre respectifs A et B et passant par le point C se coupent en un second point D, la doite CD est la perpendiculaire cherchée.

Ici encore Clairaut ne pose pas la question de l'équidistance d'un point quelconque de la droite CD aux deux points A et B.

La question est ici moins celle d'une démonstration rigoureuse que celle d'un raisonnement qui permet, la notion de perpendiculaire étant intuitivement donnée, de construire cette perpendiculaire ; ce qui importe ici c'est l'efficacité du raisonnement, au sens d'une efficacité pratique, la question de fonder ce raisonnement venant en second.

Il nous faut rappeler ici quelques principes de l'ouvrage de Clairaut, ouvrage destiné, comme il l'explique dans la préface[5], aux commençants. La question est moins de fonder en rigueur le raisonnement géométrique que d'amener le lecteur à comprendre comment le raisonnement permet de découvrir de nouvelles vérités et de résoudre des problèmes. Le temps viendra évidemment où il faudra légitimer les raisonnements mais ce travail ne pourra venir qu'après une première confrontation à la géométrie.

Clairaut dans son ouvrage affinera ses raisonnements au fur et à mesure qu'il avance et la dernière partie est consacrée au calcul d'aires et de volumes par la méthode des indivisibles ; ici le raisonnement se fait plus sophistiqué même s'il s'appuie encore sur l'intuition.

— Euclide

En donnant une définition purement descriptive de la perpendicularité, Clairaut se plaçait hors du point de vue euclidien, lequel s'appuie essentiellement sur les grandeurs.

Ainsi Euclide définit l'angle comme *«l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes* (lignes droites dans le cas qui nous intéresse) *qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite»*[6], l'angle droit étant défini de la façon suivante :

« Et quand une droite, ayant été élevée sur une autre droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est ***droit****»*[7]

La question se pose alors de savoir si deux angles droits sont égaux. Euclide y répond en énonçant cette égalité comme postulat[8]. On peut se demander les raisons qui ont conduit Euclide à ce choix : la propriété est-elle suffisamment évidente pour que l'on se passe d'une démonstration dont nous verrons qu'elle est aisée dans le cadre des *Eléments*, ou bien est-elle, comme le postulat des parallèles, la marque d'un échec d'Euclide à le démontrer, échec qui pourrait être liée aux difficultés posées par la notion d'angle ? L'égalité des angles droits sera démontrée par Proclus dans ses *Commentaires sur le Premier Livre des Eléments d'Euclide*[9] et plus tard par Legendre dans ses *Eléments de Géométrie*[10] (cf. ci-dessous).

5 La préface de l'ouvrage de Clairaut est un modèle de réflexion didactique sur l'enseignement et nous ne pouvons, dans le cadre de cet article, que renvoyer à sa lecture.

6 Euclide, Les Eléments, introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, volume 1, p. 158

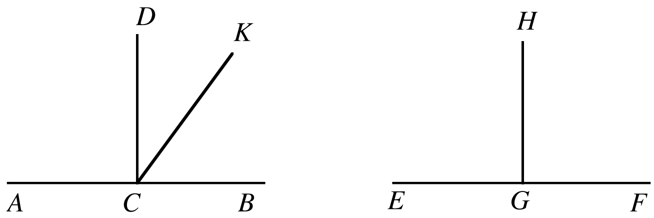
7 ibid, p. 160

8 c'est le postulat 4, ibid, p. 164

9 Proclus, Les Commentaires sur le Premier Livre des Eléments d'Euclide, traduit du Grec en Français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges 1948, p. 165-166

10 A.M. Legendre, Eléments de Géométrie, douzième édition, Firmin Didot, Paris 1823, p. 6-7

« Soient la droite CD perpendiculaire à la droite AB, et la droite GH perpendiculaire à la droite EF, on peut supposer que les segments CA, CB, GE, GF sont égaux.



« Plaçons la droite EF sur la droite AB de sorte que le point E coïncide avec le point A et le point F avec le point B, auquel cas le point G milieu de EF coïncide avec le point C milieu de AB, alors la droite GH viendra coïncider avec la droite CD. En effet, si la droite GH ne coïncide pas avec la droite CD, mais vient sur la droite CK, située par exemple dans le quadrant BCD, alors, puisque les angles EGH et FGH sont égaux, les angles ACK et BCK seront égaux; mais les angles ACD et BCD sont égaux, l'angle ACK est plus grand que l'angle ACD, l'angle BCK est plus petit que l'angle BCD, par conséquent l'angle ACK est plus grand que l'angle BCK ce qui est impossible. Donc GH vient coïncider avec CD ce qui prouve la proposition. » [11]

— Legendre

Le premier théorème de l'ouvrage de Legendre affirme l'égalité des angles doits. Nous citons ci-dessus la démonstration telle que l'écrit Legendre dans ses *Eléments de Géométrie*.

Nous voyons ainsi intervenir, d'abord le principe de l'égalité par superposition [12], lequel reste le principe fondamental de la géométrie euclidienne, ensuite les propriétés de comparaison des angles. Notons que la comparaison des angles reste ici intuitive, liée à la notion d'écart intervenant dans la définition des angles énoncée par Legendre :

« Lorsque deux lignes droites AB et AC se rencontrent, la quantité plus ou moins grande dont elles sont écartées l'une de l'autre s'appelle angle ; le point de rencontre ou d'intersection A est le sommet de l'angle ; Les lignes AB et AC en sont les côtés. »

« Lorsque la ligne droite AB rencontre une autre droite CD, de telle sorte que les angles adjacents BAC, BAD soient égaux entre eux, chacun de ces angles s'appelle un angle droit ; et la ligne AB est dite perpendiculaire sur CD. » [13]

On remarque ici le rôle de la figure autant dans la définition legendrienne de l'objet

11 A.M. Legendre, o.c. p. 6-7

12 Dans l'édition citée de Bernard Vitrac, ce principe (notion commune 7) s'énonce ainsi: «Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles» (p. 178). Nous reviendrons sur ce principe dans la suite.

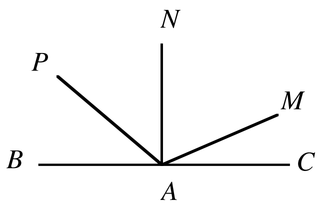
13 A.M. Legendre, o.c. p. 2

angle que dans la démonstration de l'égalité des angles droits. C'est alors le raisonnement lui-même qui précise la notion d'écart entre deux droites se rencontrant en un point et par conséquent la notion d'angle ; en ce sens si l'objet est antérieur au raisonnement (il est ce sur quoi on raisonne), ce dernier implique une redéfinition de l'objet.

Dans les éditions posthumes de l'ouvrage de Legendre par Blanchet, celui-ci donne une autre démonstration de l'égalité des angles droits qui s'appuie explicitement sur le mouvement [14].

Blanchet énonce et démontre la proposition suivante :

« Par un point pris sur une droite, on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on n'en peut élever qu'une.

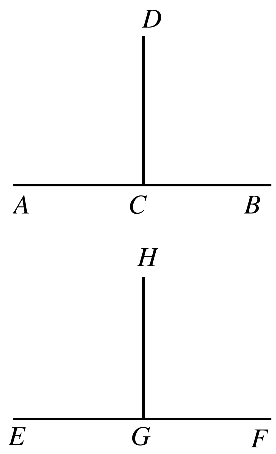


En effet, supposons qu'une droite AM d'abord couchée sur AC, tourne autour du point A, elle formera deux angles adjacents MAC, MAB, dont l'un MAC, d'abord très petit ira toujours en croissant, et dont l'autre MAB, d'abord plus grand que MAC, ira constamment en décroissant jusqu'à zéro.

L'angle MAC, d'abord plus petit que MAB, deviendra plus grand que cet angle ; par conséquent il y aura une position AN de la droite mobile où ces deux angles seront égaux, et il est évident qu'il n'y enaura qu'une seule. »

Blanchet poursuit en énonçant et démontrant le corollaire :

« Tous les angles droits sont égaux.



Soient DC perpendiculaire sur AB, et HG perpendiculaire sur EF, je dis que l'angle DCB est égal à l'angle HGF. En effet, si l'on porte la droite EF sur AB, de manière que le point G tombe en C, GH prendra la direction CD ; autrement on pourrait, par un point pris sur une droite, élever deux perpendiculaires sur cette droite. »

Une telle démonstration pose problème dans la mesure où elle s'appuie sur une notion non encore explicitée : la continuité du mouvement [15]. On peut penser que Legendre n'aurait jamais accepté une telle démonstration en contradiction avec la tradition euclidienne de l'élimination du mouvement. Il nous faut ici noter que les éditions posthumes sont très différentes de l'ouvrage de Legendre même si leur auteur prétend continuer l'œuvre de Legendre ; en particulier Blanchet, en usant du mouvement

14 A. Blanchet, Eléments de Géométrie par A.M. Legendre avec additions et modifications, deuxième édition suivie de la quinzième édition, Firmin Didot, Paris 1848, p. 8-9

15 Pour une critique de cette démonstration que l'auteur attribue à Legendre lui-même, nous renvoyons à l'ouvrage de Ferdinand Gonseth, Les Fondements des Mathématiques, Blanchard, Paris 1926/1974, p. 3-4

semble donner plus de place à l'aspect expérimental de la géométrie et on peut rapprocher cette démonstration de celles de l'ouvrage cité de Clairaut.

— Hilbert

En regard de la démonstration de Legendre, nous pouvons citer la démonstration hilbertienne, formellement analogue, le principe de l'égalité par superposition étant remplacé par les axiomes de congruences [16]. La figure y devient, en principe, inutile, tout au plus un *support* du raisonnement géométrique pour reprendre une expression aujourd'hui à la mode ; en fait la problématique hilbertienne nous semble plus subtile si l'on considère que, d'une part Hilbert propose un développement purement langagier de la géométrie [17], d'autre part Hilbert construit son discours au plus près de la connaissance intuitive comme il l'explique au début de son ouvrage :

« On peut classer les axiomes de la géométrie en cinq groupes ; chacun de ces groupes exprime quelques faits fondamentaux, liés les uns aux autres et qui nous sont donnés par l'intuition.» [18]

Le formalisme hilbertien apparaît ainsi comme une méthode permettant la mise en place d'un raisonnement épuré de toutes considérations extérieures au discours qui le constitue, un discours qui n'a, en principe, d'autre référence que le langage sur lequel il se construit. Cependant l'abondance des figures dans l'ouvrage de Hilbert nous rappelle que le discours, s'il se veut auto-référent, renvoie à une situation qui lui est antérieure ; la figure n'y est pas un simple support, elle représente une situation originelle que nous pouvons considérer comme la *raison d'être* du discours, lors même que le discours se veut indépendant, pour des raisons de méthode, de ses origines [19].

— algèbre linéaire

L'algèbre linéaire a permis une reconstruction de la géométrie élémentaire telle que l'on a souvent considéré cette dernière comme un simple chapitre de l'algèbre linéaire. Si un tel point de vue qui s'appuie sur une conception structurale des mathématiques telle qu'elle a été développée par Bourbaki ne saurait épuiser la géométrie, il a l'avantage de la simplicité et de l'efficacité.

Dans le cadre de l'algèbre linéaire la géométrie plane n'est plus que l'étude d'un espace affine de dimension 2 sur le corps des réels muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive (produit scalaire). Dans ces conditions deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont dits orthogonaux si leur produit scalaire $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ est nul. Deux droites sont dites perpendiculaires si les vecteurs directeurs de chacune de ces droites sont orthogonaux [20].

On appelle *isométrie* toute transformation affine conservant le produit scalaire, l'égalité des angles droits résulte du fait que deux couples de vecteurs de norme unité orthogonaux étant donnés, il existe une isométrie

16 David Hilbert, Les fondements de la géométrie (1899), édition critique avec introduction et compléments, préparée par Paul Rossier, Dunod, Paris 1971, p. 31.

17 au sens que la construction hilbertienne se définit comme discours autonome, indépendant de toutes significations extérieures (pour reprendre les termes de Gonseth).

18 David Hilbert, o.c. p. 11

19 Rudolf Bkouche, «La démonstration : du réalisme au formalisme» (à paraître)

20 Rappelons que l'on appelle vecteur directeur d'une droite un vecteur de norme unité porté par cette droite. Une droite porte deux vecteurs directeurs opposés.

qui envoie le premier couple dans le second. Ainsi l'égalité des angles droits s'inscrit dans la définition même du plan euclidien.

Notons que l'algèbre linéaire se développe dans un cadre purement formel et que les propriétés qu'elle énonce sont indépendantes de toute signification extérieure au discours ; en ce sens la conception «algèbre linéaire» de la géométrie élémentaire s'inscrit dans le programme hilbertien, ce qui à la fois en fait la force et en marque les limites.

Nous reviendrons sur ce dernier point à propos de la notion d'égalité.

2 — *l'égalité*

Nous citons ici trois démonstrations du premier cas d'égalité des triangles, la démonstration euclidienne, la démonstration hilbertienne, la démonstration utilisant l'algèbre linéaire. La question se pose alors du lien entre ces trois démonstrations, autant dans leur ressemblance que dans leur différence.

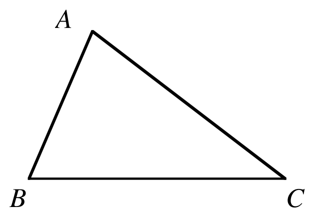
la démonstration euclidienne

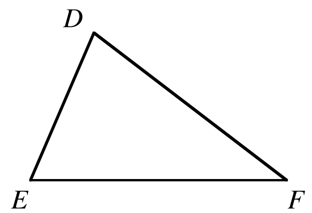
Nous rappellerons d'abord l'énoncé tel qu'il est donné dans les *Eléments* d'Euclide (Livre I, proposition 4)

« Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent. »[21]

Voici la démonstration :

« Soient deux triangles ABC, DEF ayant les deux côtés AB, AC égaux aux deux côtés DE, DF, chacun à chacun, d'une part AB à DE, d'autre part AC à DF, ainsi que l'angle BAC égal à l'angle EDF.





Je dis que la base BC aussi est égale à la base EF, et le triangle ABC sera égal au triangle DEF, et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent, d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE.

En effet, le triangle ABC étant appliqué sur le triangle DEF, d'une part le point A étant posé sur le point D, d'autre part la droite AB sur DE, le point B aussi s'ajustera sur le point E parce que AB est égale à DE. Alors AB étant ajustée sur DE, la droite AC s'ajustera sur DF parce que l'angle sous BAC est égal à celui sous EDF. De sorte que le point C aussi s'ajustera sur le point F parce que, de plus, AC

21 Euclide, Les Eléments, introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, volume I, p. 200. Notons que dans l'énoncé Euclide ne précise pas qu'il s'agit de l'angle défini par deux côtés donnés, cependant la démonstration précise les données.

est égale à DF. Mais B a aussi été ajusté sur E. De sorte que la base BC s'ajustera sur la base EF et lui sera égale. De sorte que tout le triangle ABC s'ajustera aussi sur tout le triangle DEF et lui sera égal, et les angles restants s'ajusteront sur les angles restants et leur seront égaux, d'une part celui sous ABC à celui sous DEF, d'autre part celui sous ACB à celui sous DFE. » [22]

Premier point : le raisonnement ci-dessus s'appuie essentiellement sur le principe de l'égalité par superposition (cf. note 12). Ce principe énoncé parmi les axiomes (notions communes) exprime, après les axiomes généraux sur les grandeurs, une condition d'égalité des grandeurs géométriques, condition qui fait appel au mouvement (la mise en coïncidence). On peut alors considérer ce principe comme exprimant notre expérience des corps solides, un corps solide étant défini comme un corps non déformable par un mouvement sans que l'on puisse définir une antériorité logique des notions de mouvement et de corps solide ; autrement dit, les notions de corps solides et de mouvement sont concomitantes et l'on peut considérer qu'elles participent de l'expérience première de l'homme confronté au monde [23] ; c'est en ce sens que l'on peut parler d'un empirisme euclidien.

Second point : la démonstration du premier cas d'égalité des triangles peut être définie comme décrivant une suite d'opérations sur les deux triangles en question. Le discours démonstratif s'appuie explicitement sur les objets (les triangles) représentés par une figure, elle-même *matériellement* représentée par un dessin [24] ; c'est en ce sens que l'on peut parler d'une *lecture raisonnée du dessin*. C'est alors l'activité de raisonnement qui permet de dépasser le dessin pour en faire d'abord la figure, c'est-à-dire le dessin questionné, ensuite l'objet idéal (*l'idéalité mathématique*), notion sur laquelle nous reviendrons à la fin de cet article.

Ainsi le raisonnement se définit par rapport à l'objet en même temps que l'objet se construit avec le raisonnement. On peut alors dire que la construction de l'objet, en tant qu'objet géométrique, et le raisonnement sont concomitants ; nous renvoyons ici à la dialectique gonséthienne [25] dont on peut dire qu'elle se constitue dans cette concomitance ; s'il y a une doctrine préalable (pour reprendre les termes de Ferdinand Gonseth) qui fonde les règles du discours démonstratif, cette doctrine ne devient préalable que *a posteriori*, autrement dit c'est la pratique de la démonstration qui permet de la fonder [26].

Nous avons dit le rôle joué par les opérations, opérations mentales il est vrai, mais on peut remarquer qu'une vérification expérimentale de la proposition énoncée consisterait à effectuer les opérations annoncées et à constater la vérité *de fait* de ces propositions.

22 ibid, p. 201-202

23 Nous ne nous intéressons pas ici aux conditions de cette expérience première ; pour préciser notre point de vue nous renvoyons aux trois aspects de la connaissance géométrique développés par Gonseth, l'intuitif, l'expérimental et le théorique, aspects sur lesquels nous reviendrons. Nous renvoyons par ailleurs à un article antérieur, «Quelques remarques sur la démonstration (Autour de la philosophie de Gonseth)» in La Démonstration mathématique dans l'Histoire (Colloque Inter-IREM Epistémologie, Besançon 1989), Editions IREM Besançon-Lyon 1990.

24 Sur la définition de la figure et sa relation au dessin, nous renvoyons à notre article «De la démonstration en géométrie» in Le Dessin géométrique, de la main à l'ordinateur, Colloque Inter-IREM Géométrie, (Le Quesnoy 1994), IREM de Lille 1996

25 Pour une étude de la dialectique gonsethienne nous renvoyons à l'artice de Hourya Sinaceur, «La dialectique de l'espace», in Espace et horizon de réalité (philosophie mathématique de Ferdinand Gonseth), sous la direction de Marco Panza et Jean-Claude Pont, Masson, Paris 1992

26 Ferdinand Gonseth, La géométrie et le problème de l'espace, Editions du Griffon, Neuchatel, 1945-1955, volume I : «La doctrine préalable»

Le passage aux opérations mentales constitue ainsi une étape importante dans la transformation du *fait* en *droit*.

Notons enfin le rôle secondaire joué par la logique, laquelle se présente essentiellement comme réglant un enchaînement ordonné d'opérations ; si la logique joue un rôle de structuration du raisonnement, c'est, pour reprendre l'expression imagée de Gonseth, celui d'un *« agent de la circulation »* [27].

Enfin nous signalerons le rôle de ce premier cas d'égalité des triangles dans la construction de la rationalité géométrique, c'est-à-dire d'une connaissance discursive des situations géométriques : s'appuyant sur le principe de l'égalité par superposition, le premier cas d'égalité des triangles permet de s'en passer et par conséquent d'éliminer toute référence au mouvement dans la suite du discours géométrique [28].

la démonstration hilbertienne

A côté de la démonstration euclidienne que l'on retrouve telle quelle dans la plupart des traités classiques de géométrie élémentaire, nous rappellerons la démonstration hilbertienne correspondante, ce qui nous conduira à préciser en quoi les deux démonstrations se ressemblent et en quoi elles diffèrent. Nous reviendrons plus loin sur les raisons qui ont conduit Hilbert à se détacher des conceptions euclidiennes.

Hilbert explique que la géométrie est l'étude de trois systèmes de choses qu'il introduit ainsi :

« *Nous pensons trois sortes de choses ; nous nommons les choses du premier système des* ***points*** *; nous les désignons par des lettres majuscules* A, B, C, … ; *nous nommons* ***droites*** *les choses du deuxième système et nous les désignons par des minuscules a, b, c, …* ; *nous appelons* ***plans*** *les choses du troisième système et nous les désignons par des caractères grecs* a, b, g,… » [29]

Hilbert ne donne aucune définition de ces choses, seulement une façon de les nommer et de les noter ; points, droites et plans ne sont que des mots et ne renvoient à aucune signification antérieure à leur usage [30].

Hilbert poursuit :

« Entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que " être sur ", " entre ", " congruent " ; la description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les axiomes de la géométrie. »

Ici encore les termes " être sur ", " entre ", " congruent " n'ont d'autre signification que de participer à l'énoncé des axiomes.

Les axiomes expriment les relations entre les termes primitifs, relations à partir desquelles pourra s'élaborer le raisonnement déductif. Hilbert énonce vingt-trois axiomes répartis en

27 Ferdinand Gonseth, La géométrie et le problème de l'espace, o.c. volume II : «Les trois aspects de la géométrie», p. 62

28 Cette élimination du mouvement est un élément essentiel du discours de la connaissance rationnelle que l'on peut considérer comme la réponse aux paradoxes de Zénon. Le mouvement ne deviendra objet de connaissance rationnelle que lorsque le temps aura été géométrisé au XVIIème siècle, se distinguant ainsi de la notion de devenir. Le temps de la science classique est un temps statifié.

29 David Hilbert, Les Fondements de la Géométrie (1899) (édition critique préparée par Paul Rossier), Dunod, Paris 1971, p. 11

30 On connaît la boutade attribuée à Hilbert qui propose de remplacer les termes points, droites, plans par tables, chaises et verres de bières ; la construction n'aurait changé en rien du point de vue de la structure du discours.

cinq groupes correspondants aux différents types de relations : appartenance, ordre, congruence, parallélisme, continuité, mais ici encore, ces termes ne renvoient à aucune signification antérieure à leur usage et ne sont que des constituants du discours géométrique. Cependant ces axiomes se situent au plus près de la connaissance intuitive comme nous l'explique Hilbert au débit de son ouvrage (cf. ci-dessus).

Une fois les axiomes énoncés, la géométrie se développe selon des règles logiques explicites qui régissent l'usage des termes et des énoncés, une démonstration ne s'appuyant que sur les axiomes, les propositions antérieurement démontrées et les règles logiques ; ainsi tout recours à l'intuition ou à la signification des règles et des énoncés est éliminé.

Dans un tel cadre, le mouvement n'a plus sa place, même implicite. Pour définir l'égalité, Hilbert introduit la notion de congruence pour les segments et pour les angles, on définit ainsi deux relations d'équivalence respectivement sur les segments et sur les angles. Pour démonter le premier cas d'égalité des triangles, Hilbert doit énoncer un axiome qui remplace le principe de l'égalité par superposition, qu'il énonce sous la forme suivante (axiome III,5) :

« Si dans deux triangles ABC et A'B'C', les congruences suivantes sont satisfaites :

$$AB \equiv A'B' \ ; \quad AC \equiv A'C' \ ; \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

la congruence suivante $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ *l'est aussi »* [31]

Cet axiome remplace le recours au prinicpe de l'égalité par superposition, évitant ainsi tout recours explicite au mouvement. Notons qu'un simple changement de désignation implique la congruence :

$$\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

L'axiome III,5 énoncé, Hilbert peut alors énoncer et démontrer le premier cas d'égalité des triangles (qu'il appelle premier cas de congruence).

Hilbert démontre d'abord l'unicité du report d'un segment donné sur une demi-droite d'origine donnée ; l'existence d'un tel report est énoncée par l'axiome III,1 qui définit la congruence entre segments, l'unicité résulte de l'axiome III,5 compte tenu de l'unicité du report des angles assurée par l'axiome III,4 [32].

Notons d'abord que deux triangles *ABC* et *A'B'C'* sont dits *congruents* si les côtés correspondants et les angles correspondants sont congruents. On peut alors énoncer le théorème suivant (théorème 12) :

« Si entre deux triangles ABC et A'B'C', sont satisfaites les congruences

$$AB \equiv A'B' \ ; \quad AC \equiv A'C' \ ; \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

ces deux triangles sont congruents. » [33]

L'axiome III,5 implique les congruences :

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \ ; \quad \angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

Reste à démontrer la congruence : $BC \equiv B'C'$. Sur la demi-droite d'origine *B'* et portant le segment *B'C'*, il existe un point *D'*

31 David Hilbert, o.c. p. 22

32 On pourra comparer avec la proposition 2 du livre I des Eléments qui énonce une construction explicite (algorithmique) du report, Euclide, o.c. p. 197.

33 David Hilbert, o.c. p. 25

et un seul tel que $BC \equiv B'D'$; l'axiome III,5 appliqué aux deux triangles ABC et $A'B'D'$ implique la congruence

$$\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$$

Ainsi l'angle $B'A'D'$, congruent à l'angle BAC est congruent à l'angle $B'A'C'$ ce qui contredit l'unicité du report des angles. Il s'ensuit que les points C' et D' coïncident et que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont congruents.

Une comparaison entre les énoncés hilbertien et euclidien nous montre une proximité sémantique si l'on considère que les termes hilbertiens, même s'ils sont en principe sans signification antérieure au discours, renvoient à la connaissance intuitive. Ainsi la construction formelle n'est pas arbitraire et renvoie à des significations qui lui sont antérieures ; en ce sens on peut parler chez Hilbert d'une conception dualiste de la connaissance. Ce qu'il précisera dans la préface de *Anschauliche Geometrie* (traduction anglaise : *Geometry and Imagination*) :

« In mathematics, as in any scientific research, we find two tendencies present. On the one hand, the tendency toward ***abstraction*** *seeks to crystallise the* ***logical*** *relations inherent in the maze of material that is being studied, and to correlate the material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendency toward* ***intuitive understanding*** *fosters a more immediate grasp of the objects one studies, a live* ***rapport*** *with them, so to speak, which stresses the concrete meaning of their relations. »* [34]

34 David Hilbert, S. Cohn-Vossen, Geometry and Imagination, translated by P. Nemenyi, Chelsea, New York 1952, p. iii

La distinction entre les démonstrations euclidienne et hilbertienne se situe dans la constitution du discours démonstratif. Si le discours euclidien s'appuie sur les objets en tant que tels, ce qui implique qu'il suppose d'une part leur existence, d'autre part une connaissance intuitive de ces objets (que ces objets participent des Idées platoniciennes ou relèvent de la connaissance empirique importe peu ici), le discours hilbertien recherche, pour des raisons de légitimation sur lesquelles nous reviendrons ci-dessous, une autonomie par rapport à toute signification extérieure ; les objets ne sont que des mots (les termes primitifs de la théorie) reliés par des assertions (les axiomes) énoncées *a priori*.

Si, dans le cadre de la géométrie euclidienne, la figure, en tant qu'elle représente les objets sur lesquels porte le raisonnement euclidien (sans que nous nous prononcions ici sur la nature de ces objets), joue un rôle essentiel, elle n'a plus de place dans le raisonnement hilbertien qui porte uniquement sur les mots et les règles d'usage de ces mots, c'est-à-dire la syntaxe. Il faut cependant noter les nombreuses figures qui accompagnent l'exposé hilbertien et qui nous rappellent que ce discours, s'il se veut indépendant de toutes significations extérieures, se constitue en référence à ces significations. Si celles-ci n'interviennent pas en tant que telles dans le discours, celui-ci doit, en dernière instance, énoncer les propriétés attendues, la différence avec Euclide portant essentiellement sur la méthode ; c'est en ce sens que l'on peut parler du formalisme comme méthode, c'est l'autonomie du discours (ou plutôt la constitution d'un discours autonome) qui permet d'assurer la rigueur des démonstrations, celles-ci étant débarrassées de tout recours à l'intuition.

la démonstration « algèbre linéaire »

Toute autre est la troisième démonstration de ce premier cas d'égalité dans sa version « algèbre linéaire ». Ici, non seulement le langage se veut indépendant de toute signification extérieure, mais la relation avec la géométrie élémentaire est occultée par le formalisme.

Nous nous plaçons ici dans le cadre de l'algèbre linéaire dont *on* sait que, du point de vue structural, la géométrie élémentaire n'est qu'un chapitre [35].

Plaçons-nous dans le plan affine euclidien sur le corps des réels, on sait définir la longueur d'un segment AB, c'est la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{AB}$; quant à l'angle de deux vecteurs il est défini par la relation :

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}$$

On appelle triangle un triplet de points non alignés. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Soient deux triangles ABC et A'B'C' tels que les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ *et* $\overrightarrow{A'C'}$ *aient respectivement mêmes normes que les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *et que les angles* $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ *et* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ *soient égaux ou opposés, alors il existe une isométrie et une seule f telle que*

$$f(A) = A' \;;\; f(B) = B' \;;\; f(C) = C'$$

En effet, on sait qu'il existe une transformation affine f et une seule telle que

$$f(A) = A' \;;\; f(B)= B' \;;\; f(C)= C'$$

et les hypothèses impliquent que cette transformation est une isométrie.

Dans cette démonstration la figure n'intervient pas, la situation géométrique est définie dans le seul cadre de l'algèbre linéaire et les seules propriétés utilisées sont les propriétés générales des espaces affines et des formes quadratiques, propriétés supposées antérieurement explicitées. Il n'y a ici, en principe, aucun recours à quelqu'intuition géométrique, ne serait-ce que comme simple référence à la façon hilbertienne citée ci-dessus.

3 — *parallélogrammes et relation d'équipollence*

Quelle différence entre un plan et une sphère ? Empiriquement la réponse est évidente et la question semble de peu d'intérêt. Nous allons voir cependant que l'on peut, sous réserve d'appeler *droite sphérique* un arc de grand cercle et *segment* joignant deux point X et Y de la sphère le petit arc de grand cercle joignant les points X et Y [36], tenir le même discours, au début de l'étude géométrique du plan et de la sphère. Se pose ainsi la question de ce qui les distingue et nous verrons ci-dessous comment le discours démonstratif permet d'y répondre.

Notons d'abord que les trois cas d'égalité des triangles sont valables sur la sphère autant que sur le plan et que leurs démons-

35 Nous renvoyons ici à l'ouvrage de Jean Dieudonné, Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire, Hermann, Paris 1964

36 Cette dénomination est liée au fait que le petit arc sphérique réalise le plus court chemin sphérique joignant ses deux extrémités.

trations sont analogues [37]. On peut alors montrer, en utilisant les cas d'égalité des triangles, la proposition suivante :

Proposition : *Soit ABCD un quadrilatère, les assertions suivantes sont équivalentes :*
a) Les segments AC et BD ont même milieu
b) ABCD est un quadrilatère convexe et AB = CD et AC = BD

Nous dirons qu'un quadrilatère *ABCD* est un *pseudo-parallélogramme* s'il satisfait les deux conditions a) et b) de la proposition précédente.

Nous dirons que deux segments de droite orientés [38] *PQ* et *RS* sont *équipollents* si *PQSR* est un pseudo-parallélogramme ; on peut alors noter que la relation d'équipollence est une relation d'équivalence dans le plan alors *qu'elle ne l'est pas sur la sphère*.

La démonstration de cette propriété s'appuie sur le postulat des parallèles et l'on voit ainsi le rôle joué par ce postulat dans la construction de la géométrie euclidienne, non seulement pour démontrer une *vérité* : la transitivité de la relation d'équipollence, que pour en expliciter les raisons et ainsi assurer la discrimination discursive d'objets connus empiriquement comme distincts. Notons que l'on peut étendre ces remarques à la géométrie de Lobatchevski ; les cas d'égalité, dont la démonstration reste la même que dans le cas euclidien, permettent d'énoncer la proposition ci-dessus et, par conséquent, de définir les pseudo-parallélogrammes et la relation d'équipollence.

37 Jacques Hadamard, Leçons de Géométrie Elémentaire, volume II, Géométrie dans l'espace, huitième édition refondue et augmentée, Armand Colin, Paris 1949, p. 67-71

38 Rappelons que deux points X et Y étant donnés sur la sphère, le segment de droite XY est le petit arc de grand cercle

Nous reviendrons ci-dessous sur le rôle du discours dans l'activité déductive et la façon dont le discours démonstratif s'est transformé en fonction des problèmes rencontrés par les mathématiciens [39].

La démonstration : les invariants historiques

Les exemples de démonstrations rappelés ci-dessus nous montrent non seulement la grande diversité des démonstrations mais aussi comment les principes de légitimation d'icelles ont varié avec le temps. Ceci nous amène à poser deux questions : d'abord celle des raisons qui ont conduit à reconsidérer les principes de légitimation, non seulement dans le temps (l'évolution de la notion de rigueur), mais encore dans la réflexion didactique comme le montre l'ouvrage de Clairaut ; ensuite celles des permanences : qu'y a-t-il de commun à ces divers modes de démonstration qui font que l'on reconnaît que ces divers modes participent de la même notion ?

La première question nous renvoie à ce que l'on peut appeler l'évolution de la notion de rigueur. Les modes de démonstration deviendraient de plus en plus rigoureux et c'est ainsi que l'on parle des lacunes des démonstrations euclidiennes lesquelles auraient été corrigées par Hilbert. Cette conception *progressiste* de l'histoire des mathématiques occulte les raisons des transformations des modes de légitimation du raisonnement en renvoyant à une rigueur idéale dont on approcherait pas à pas ; ainsi, à chaque époque de l'histoire, les canons de l'époque effaceraient les canons

39 Rudolf Bkouche, «La démonstration : du réalisme au formalisme», o.c.

anciens. C'est ignorer les aspects problématiques de la démonstration, les raisons qui font que les canons se transforment.

Sur le plan de l'enseignement, point que nous aborderons à la fin de cet article, c'est considérer que ne doivent être enseignés que les canons contemporains, les modes antérieurs pouvant tout au plus être tantôt considérés comme des curiosités, plus ou moins intéressantes à connaître, tantôt comme un artefact pédagogique à la fois utile et encombrant, utile lorsqu'il permet, comme on dit aujourd'hui, de *donner du sens*, encombrant dans la mesure où il risque d'être un obstacle à l'enseignement de la modernité. C'est cela qui conduit Brousseau à dire que le professeur doit choisir *« entre enseigner un savoir formel et dénué de sens ou enseigner un savoir plus ou moins faux qu'il faudra rectifier »*[40]. Situation paradoxale qui conduit à choisir entre le vrai et le signifiant. Il est clair qu'une telle position rend impossible l'enseignement des mathématiques.

Notre point de vue au contraire se propose de prendre en compte dans l'enseignement les transformations de la démonstration moins d'un point de vue historique que d'un point de vue problématique, les aspects historiques pouvant être utiles pour étayer les aspects problématiques. C'est donc autant pour des raisons épistémologiques que pour des raisons didactiques que nous mettons en avant l'étude des permanences *via* ce que nous appellerons, suivant la terminologie de Paul Veyne, les *invariants historiques* de la démonstration[41].

Avant d'aborder l'étude de ces permanences, nous voudrions mettre l'accent sur une question qui nous semble essentielle, celle de l'évidence.

Lorsque Descartes écrit le premier précepte de la Méthode :

« Le premier estoit de ne recevoir jamais aucune chose pour vraye que je la connusse évidemment comme telle : c'est-à-dire d'éviter la Précipitation et la Prévention ; et de ne comprendre rien de plus en mes jugemens, que ce qui se présenteroit si clairement et si distinctement a mon esprit que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute. »[42]

il énonce moins un critère de vérité qu'un critère de certitude. La certitude n'est pas preuve de vérité, elle reste cependant un point d'ancrage important autant dans l'acquisition que dans la construction de la connaissance[43] et la question se pose de mettre à nu la relation entre certitude et vérité. Il est vrai que le précepte cartésien concerne l'évidence rationnelle que Descartes oppose à l'évidence sensorielle, la première étant considérée comme preuve de vérité alors que la seconde risque de n'être qu'illusion ; mais cette opposition est seconde, elle suppose la distinction

40 Guy Brousseau, «Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques», in Didactique des mathématiques, sous la direction de Jean Brun, Delachaux & Niestlé, Lausanne 1996, p. 88

41 La notion d'invariant historique est développée par Paul Veyne dans sa leçon inaugurale au Collège de France (cf. Paul Veyne, L'inventaire des différences, Seuil, Paris 1976). Pour une étude plus complète des invariants historiques liés à la démonstration nous renvoyons à notre article «Perpsective historique et longue durée», à paraître in Actes du colloque Inter-IREM «Histoire des Mathématiques», Rennes mai 2000.

42 René Descartes, Discours de la Méthode (1637), «Corpus des Œuvres de Philosophie en Langue Française», Fayard, Paris 1986

43 Nous distinguons ici l'acquisition des connaissances qui est le premier objectif de l'enseignement de la construction des connaissances, laquelle s'appuie sur les connaissances déjà acquises. On ne saurait construire du savoir ex nihilo, l'autonomie de l'élève passe par l'appropriation d'un savoir qui a priori n'est pas le sien et l'enseignement a justement pour but qu'il devienne sien ; c'est parce qu'il a acquis du savoir que l'élève peut construire du savoir. Quelle serait l'autonomie d'une personne qui n'aurait pas acquis sa langue maternelle, à laquelle on aurait laissé la liberté de construire sa propre langue ?

entre l'évidence sensorielle et l'évidence rationnelle déjà prise en compte. Nous reviendrons sur cette question dans la dernière partie de ce texte à propos de l'enseignement.

Dans un recueil de textes récemment publié[44], Marcel Conche critique la mise en doute par Descartes de l'évidence sensorielle. Nous reprendrons cette critique en remarquant que la connaissance scientifique se construit dans un double mouvement, celui de la prise en compte de l'évidence et celui de la mise en question de l'évidence. Le doute cartésien, loin d'être un mouvement premier de l'esprit, est d'abord le doute de celui qui a pris conscience que l'évidence peut être fausse, autrement dit qui a dépassé le stade de la connaissance naïve du monde. Or cette connaissance naïve est essentielle ; en faire l'économie constitue un obstacle à la compréhension de toutes connaissances ultérieures, en particulier les connaissances enseignées, lesquelles risquent de se réduire alors à un discours in-signifiant[45].

Dans le cas qui nous intéresse ici, celui de la démonstration, on pourrait considérer que le raisonnement informel joue le rôle de connaissance naïve, encore que l'acte même de raisonner, aussi primaire soit la forme du raisonnement, suppose un dépassement de la connaissance naïve ; autant dire qu'il n'existe pas de raisonnement informel à l'état pur, que le raisonnement informel est déjà structuré. Nous pouvons cependant remarquer le rôle que joue l'évidence dans le raisonnement informel par rapport aux modes de raisonnement plus sophistiqués et nous renvoyons ici aux démonstrations de Clairaut dans ses *Eléments de Géométrie*.

Il nous faut cependant préciser, pour éviter tout malentendu, que la place de l'évidence, qu'elle soit de l'ordre du sensoriel ou de l'ordre du rationnel, ne se situe pas dans le seul raisonnement informel, qu'elle joue un rôle premier dans la construction des premières sophistications qui conduisent à la construction de la rationalité et que ces sophistications ont pour objectif à la fois d'augmenter le champ de l'évidence et de la corriger si besoin est. En ce sens l'évidence à une histoire, autant sur le plan collectif comme le montre l'histoire des sciences que sur le plan individuel. C'est cette historicité que souligne Enriques dans un ouvrage publié au début du XXème siècle, *Problema della Scienzia* :

> *« L'évidence est sans rapport avec* ***un développement psychologique*** *s'effectuant selon des lois déterminées mais repose seulement sur un* ***fondement historique****. »*[46]

En ce sens l'évidence ne relève pas du seul sujet[47], elle nous apprend sur le monde parce qu'elle est donnée par le monde, parce qu'elle est manifestation de la présence du monde pour reprendre un langage proche de celui de Marcel Conche[48]. Cette conception de l'évidence comme manifestation de la présence du monde n'implique pas la vérité de la connaissance évi-

44 Marcel Conche, Présence de la nature, «Perspectives critiques», PUF, Paris 2001

45 Ce fut le cas de la réforme dite des mathématiques modernes et c'est en cela qu'elles ont constitué à la fois une erreur épistémologique et une catastrophe pédagogique.

46 Federigo Enriques, Les concepts fondamentaux de la Science, (traduction française Louis Rougier), Flammarion, Paris, 1913, p.

47 C'est ce caractère objectif de l'évidence qui nous conduit à distinguer la connaissance évidente et la connaissance intuitive, laquelle implique essentiellement le sujet connaissant. Nous ne pouvons développer dans le cadre de cet article la relation entre connaissance évidente et connaissance intuitive et nous espérons développer ce point dans un article ultérieur.

48 Marcel Conche, o.c.

dente. C'est alors le rôle du raisonnement que de permettre d'une part d'appréhender les limites de l'évidence et d'autre part de construire de nouvelles évidences, de déplacer l'évidence pourrait-on dire. La recherche de la vérité peut alors se définir comme construction ou reconstruction de l'évidence, et nous renvoyons à Legendre qui écrit au début de ses *Eléments de Géométrie* :

« ***Axiome*** *est une propriété évidente par elle-même.*
Théorème *est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé* ***démonstration****.* »[49]

Ainsi la démonstration n'a d'autre objectif, pour celui qui propose de revenir à la rigueur euclidienne, que de produire de l'évidence. Plus tard, Littré donnera dans son *Dictionnaire* la définition suivante de la démonstration :

« *Démonstration : raisonnement qui prouve avec évidence* ».

Autrement dit, la démonstration est ainsi un raisonnement qui s'appuie sur l'évidence pour produire de nouvelles évidences.

La démonstration apparaît ainsi comme un instrument de connaissance prolongeant nos connaissances premières, celles que Arnauld appelle, au début de ses *Nouveaux Eléments de Géométrie*, les connaissances naturelles :

« *Toutes les sciences supposent des connaissances naturelles, et elles ne consistent proprement qu'à étendre plus loin ce que nous connaissons naturellement.* »[50]

Si l'on considère que ces connaissances premières sont d'abord les connaissances sensorielles, on peut alors dire que le raisonnement se situe aux limites de la connaissance sensible dont il est un prolongement comme les instruments mécaniques prolongent nos capacités d'action sur le monde[51]. Même si la démonstration a pris aujourd'hui une autre signification que celle du prolongement de nos connaissances premières, il nous semble important, autant sur le plan épistémologique que sur le plan didactique, de prendre en compte cet aspect qui nous semble un passage obligé pour comprendre le rôle du raisonnement et celui de la démonstration dans la construction de la connaissance et de l'intelligibilité du monde. Il ne s'agit pas ici de revenir sur les aspects historiques de la démonstration, mais d'en expliciter, autant que faire se peut, les aspects problématiques.

La question est d'autant plus importante que la connaissance rationnelle est devenue, dans notre tradition héritée des Grecs, le mode de connaissance privilégié et le plus propre à nous assurer la certitude. En ce sens l'évidence construite par le raisonnement a une valeur de vérité plus forte que l'évidence perçue par les sens. Ainsi la certitude des vérités géométriques en tant que vérités démontrées : qui oserait dire que, ayant dessiné un triangle dont les médianes ne concourent pas, il a mis en défaut une vérité géométrique ? il saurait que son dessin est mal fait.

Notons que cette question ne relève pas de la seule connaissance géométrique ou plus généralement mathématique ; la rationali-

49 Adrien-Marie Legendre, Eléments de Géométrie, o.c. p. 4

50 Arnauld Antoine [Arn1], Nouveaux Elémens de Géométrie , Paris 1667, livre I .

51 J.D. Bernal, The Extension of Man, Paladin, Frogmore 1973

sation de la physique espérée par Aristote et qui a pris forme au XVIIème siècle a conduit à considérer que la connaissance des phénomènes physiques ne prenait toute sa force que lorsqu'elle s'insérait dans le discours organisé de la connaissance rationnelle [52].

Nous pouvons ainsi parler de *l'idéal déductif* dont voudrait se réclamer toute connaissance qui se veut scientifique, idéal qui se traduit aujourd'hui par une mathématisation croissante de la connaissance, idéal d'autant plus fort qu'il s'appuie sur le succès des sciences de la nature. C'est ainsi qu'on peut lire sous la plume d'Alfred Grosser, professeur de sciences politiques :

« Il s'agit d'accomplir une démarche inductive dans l'espoir de conquérir la possibilité d'une démarche déductive. » [53]

Alfred Grosser retrouve ici le projet des philosophes grecs de construire une théorie rationnelle de la conduite des affaires de la cité, identifiant ainsi deux modes de rationalité, la rationalité de la connaissance du monde sinon du monde et la rationalité politique [54]. Ce n'est pas le lieu ici d'expliciter ce qui rapproche et ce qui distingue ces deux modes de rationalité et nous renvoyons à un article antérieur [55].

L'idéal déductif, lequel est la marque de notre héritage grec, nous renvoie aux invariants historiques de la démonstration dont nous avons parlé ci-dessus. Nous ne pouvons développer ici l'étude de ces invariants et nous nous contenterons d'en donner les principaux points, renvoyant pour une première approche à un article antérieur [56].

Nous distinguerons ici deux invariants que l'on retrouve à travers les diverses formes de la démonstration et qui sont la marque de l'idéal déductif explicité par Aristote dans les *Seconds Analytiques* [57], invariants que l'on peut ainsi caractériser :

— la démonstration permet une connaissance *a priori* en ce sens que s'appuyant sur un discours convenablement réglé, elle n'a pas besoin, en principe, du recours explicite à l'expérience. Ainsi on sait, sans qu'il soit besoin de dessiner un triangle, que ses médianes sont concourantes.

— mais la connaissance *a priori* n'est possible que si elle est *nécessaire*, c'est-à-dire si le discours démonstratif ne nous laisse pas le choix des conclusions, ce que Wittgenstein appelle l'inexorabilité des mathématiques [58]. En ce sens une vérité démontrée non seulement est vrai mais elle ne peut pas ne pas être vraie : il est impossible que les médianes d'un triangle ne soient pas concourantes. En ce sens la nécessité nous fait connaître les raisons du vrai, c'est cela qui lui donne son caractère explicatif [59].

52 On peut remarquer que si la connaissance physique peut être remise en question par l'expérience, les mathématiques construites autour de cette connaissance gardent toute leur valeur de vérité mathématique.

53 Alfred Grosser, L'explication politique, Editions Complexes, Bruxelles 1984, p. 17

54 Sur la naissance concomitante de ces deux formes de rationalité et sur ce qui les rapproche nous renvoyons à l'ouvrage de Jean-Pierre Vernant, Les origines de la pensée grecque, PUF, Paris, 1981

55 Rudolf Bkouche, «Les déraisons de la raison», Quadratures, n°17, juillet-août-septembre 1997

56 Rudolf Bkouche, «De la démonstration en géométrie» in Le Dessin géométrique, de la main à l'ordinateur, Colloque Inter-IREM Géométrie, (Le Quesnoy 1994), IREM de Lille 1996

57 Aristote, Les Seconds Analytiques (traduction et notes par Tricot), Vrin, Paris 1979

58 Ludwig Wittgenstein, Remarques sur les fondements des mathématiques (1937-1944), éditées par G.E.M. Anscombe, Rush Rhees et G.H. von Wright, édition revue et augmentée, traduit de l'allemand par Marie-Anne Lescourret, «Bibiothèque de philosophie», NRF/Gallimard, Paris1983, p. 33

59 Nous reviendrons sur ces deux points, la caractère a priori et le caractère nécessaire de la connaissance démontrée dans notre article à paraître dans les Actes du Colloque Inter-IREM Epistémologie de Rennes (juin 2000).

Ce sont ces deux caractères, connaissance *a priori* et connaissance nécessaire, qui permettent d'appréhender ce que l'on appelle les *idéalités mathématiques*. En ce sens la démonstration est une part indispensable de l'enseignement des mathématiques.

La construction des objets mathématiques

Que sont les objets mathématiques : sont-ils antérieurs au raisonnement ou sont-ils construits *via* le raisonnement ?

On ne peut échapper ici à l'ambiguïté. En effet tout raisonnement porte sur des situations qui lui sont antérieures : si le raisonnement est une méthode de connaissance, c'est qu'il y quelque chose à connaître. On peut alors considérer que le raisonnement permet de structurer ce que l'on veut connaître et de lui donner ainsi un statut d'objet de connaissance rationnelle, ce que l'on peut appeler un *objet abstrait*, abstrait au sens qu'il a été construit par un processus d'abstraction. Nous reprendrons ici la définition de D'Alembert qui écrit :

« L'abstraction en effet n'est autre chose que l'opération par laquelle nous considérons dans un objet une propriété particulière, sans faire attention aux autres. » [60].

Ainsi le processus d'abstraction se définit *via* un questionnement que nous nous posons à propos de la situation que nous étudions et le raisonnement à la fois porte sur des objets qui lui sont antérieurs et redéfinit ces objets comme objets abstraits.

60 D'Alembert, Essai sur les Eléments de Philosophie (1759), Fayard, Paris 1986, p. 29

Pour préciser ce point, nous reviendrons sur la démonstration de la proposition 4 du livre I des *Eléments* citée ci-dessus, laquelle précise la notion empirique d'égalité par superposition. On pourrait considérer cette démonstration comme la description d'une expérience, par exemple avec du papier calque ou du carton, mais ce qui importe ici, et c'est là qu'intervient la démonstration, c'est qu'il n'est point besoin de faire l'expérience pour la décrire. C'est en cela que l'on peut considérer cette démonstration comme une expérience de pensée, expérience de pensée au sens que l'on est obligé de se donner des règles explicites pour contrôler le discours qui décrit l'expérience [61]. Ici la pensée s'explicite *via* le langage et c'est en ce sens que nous pouvons dire que la démonstration se constitue comme discours.

Mais il y a plus qu'une simple expérience de pensée ; en précisant les conditions de l'égalité de deux triangles, la proposition I, 4 met l'accent sur les éléments des triangles (côtés, angles) qui permettent d'énoncer des critères d'égalité, c'est cela qui permet de construire le concept de corps solide dégagé de ses origines empiriques. Ainsi se précise la relation entre la chose connue par l'expérience et l'objet en tant que reconstruction rationnelle de la chose permettant de l'insérer dans le discours démonstratif. Ainsi le discours démonstratif à la fois porte sur une chose qui lui est antérieure en même temps qu'il reconstruit cette chose comme objet, qu'il substitue l'objet à la chose pourrait-on dire.

Le principe de l'égalité par superposition, issu de la connaissance empirique des corps

61 On peut comparer l'expérience de pensée à la représentation perspectiviste lorsque l'on se propose de dessiner un paysage imaginaire qui donnera l'illusion, à celui qui le regarde, d'être la représentation d'un paysage réel. En ce sens on peut considérer l'expérience de pensée comme l'une des premières formes du raisonnement.

solides, devient principe rationnel, la superposition peut alors être redéfinie indépendamment du mouvement qui la produit *via* ces critères de superposition que sont les cas d'égalité des triangles.

Il est vrai que toute démonstration n'est pas de ce type ; à côté des démonstrations constitutives d'objets, d'autres demonstrations supposent les objets déjà constitués. Reste que, pour qui s'initie aux mathématiques, toute démonstration, y compris parmi les plus sophistiquées auxquelles est confronté l'apprenti, est une façon de réfléchir aux objets sur lesquels il travaille et aux règles qui conduisent le discours démonstratif. Cela reste vrai pour le praticien des mathématiques lorsqu'il rencontre une situation nouvelle l'obligeant à repenser les objets qu'il étudie et les méthodes qu'il utilise. On est ainsi renvoyé à l'aspect problématique de la démonstration ; celle-ci ne peut se réduire à un ensemble de règles du discours, l'usage de la démonstration conduit à repenser les raisons des règles qui la fondent.

C'est cet aspect problématique qui permet de comprendre comment les règles de légitimation de la démonstration se sont transformées au cours de l'histoire, depuis le réalisme euclidien, réalisme en ce sens que les objets de la géométrie grecque sont proches, même s'ils s'en distinguent, de leur signification empirique, jusqu'au formalisme hilbertien dans lequel les objets sont définis *via* le discours.

Il suffit de penser à la notion de droite pour voir combien diffèrent la ligne droite euclidienne, *« celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle »* [62] et la ligne droite hilbertienne, terme primitif du discours géométrique dont la signification n'apparaît que *via* les règles d'usage du terme énoncées par les axiomes.

La définition euclidienne nous renvoie à quelque chose dont la définition est loin d'être claire, définition de chose au sens des philosophes de Port-Royal [63], définition qui n'apprend rien à qui ignore l'objet dont il s'agit mais qui suppose que le lecteur a une connaissance intuitive de cet objet. C'est pourquoi Antoine Arnauld ne définit pas la droite dans ses *Nouveaux Elémens de Géométrie*, se contentant d'annoncer :

« Nous n'avons pas défini la ligne droite, parce que l'idée en est très claire d'elle-même, et que tous les hommes conçoivent la même chose par ce mot. » [64]

mais il ajoute :

« Mais il est bon de remarquer ce que nous concevons naturellement être enfermé dans cette idée, ce que l'on pourra prendre si l'on veut comme définition. »

C'est en ce sens qu'il faut comprendre les représentations de la droite données dans certains traités classiques renvoyant aux rayons lumineux ou aux fils tendus. On rencontre ici l'aspect «science physique» de la géométrie ; la géométrie renvoie à des objets empiriques en même temps que ces objets se structurent *via* le discours démonstratif. Le discours euclidien s'appuie ainsi sur des objets premiers, objets pré-existant au discours ; c'est en ce sens que l'on peut présenter les mathématiques grecques comme *une mathématique des objets*.

62 Euclide, Les Eléments, o.c. p. 154

63 Arnauld et Nicole, La Logique ou l'Art de Penser, introduction de Louis Marin, «Champs», Flammarion, Paris 1970, p. 120-124. Les auteurs y expliquent la distinction entre une définition de chose et une définition de nom, celle qui définit un terme par une suite d'autres mots déjà définis.

64 Antoine Arnauld, Nouveaux Elémens de Géométrie, Paris 1667, p. 82

La définition hilbertienne est tout autre. Les objets sont des termes *a priori* sans signification, celle-ci se construit à travers les assertions primitives (axiomes) qui relient les termes primitifs ; on peut alors dire que c'est le discours qui crée les objets et l'on peut parler d'*une mathématique des relations*. Mais si en principe le discours se veut indépendant de toutes références extérieures au discours, ce discours ne prend sens que parce qu'il renvoie à des significations extérieures. Le formalisme à la Hilbert peut alors se définir comme une méthode permettant de construire un discours auto-référent aux fins d'étudier des objets antérieurs à ce discours. Il faut alors comprendre ce formalisme dans son contexte historique, celui des difficultés posées par l'apparition dans le paysage mathématique des géométries non euclidiennes d'une part, de la théorie des ensembles d'autre part. Ici encore c'est l'aspect problématique renvoyant aux raisons qui ont conduit aux méthodes formalistes qui permet de comprendre pourquoi objets et méthodes sont amenés à se transformer au cours de l'histoire. Mais cette transformation ne rend pas caduques les mathématiques antérieures, au contraire c'est le point de vue euclidien qui permet de comprendre l'apport des méthodes formalistes. Sans cette perspective, on est incapable de comprendre en quoi ces deux sommes de la connaissance géométrique du vingtième siècle, les *Leçons de Géométrie Elémentaire* de Jacques Hadamard [65] et la *Géométrie* de Marcel Berger [66] se ressemblent et en quoi elles diffèrent. Il suffit de poser la question du lien entre la droite représentée par un trait sur du papier, ou par un rayon lumineux, ou encore par un fil tendu, et la droite définie comme espace affine de dimension 1 sur le corps des réels pour comprendre combien la connaissance des mathématiques ne saurait se réduire à un seul point de vue et combien serait mutilée une connaissance qui ne s'appuierait que sur la modernité ; une telle connaissance ne permettrait même pas de comprendre la modernité.

Enfin nous reviendrons sur le rôle du discours dans la définition des objets à propos des pseudo-parallélogramme. Ce qui distingue deux objets mathématiques, c'est moins la connaissance empirique que nous pouvons avoir de ces objets que les différences des discours que l'on peut tenir sur eux. En contrepoint, des objets sur lesquels on peut tenir le même discours sont les mêmes ; c'est le sens de la *«seule et même énonciation»* [67] qui a permis à Desargues de considérer d'abord que les points à l'infini définis comme intersections de droites parallèles et les points à distance finie participe d'un même concept, ensuite que les coniques constituent une seule et même courbe [68].

On voit ainsi le rôle du discours dans l'activité mathématique : le discours est constitutif de la pensée mathématique même si celle-ci ne saurait s'y réduire ; c'est ce rôle que souligne Ferdinand Gonseth lorsqu'il écrit :

« le discours n'est pas simplement surajouté à des significations extérieures qui sans lui resteraient ce qu'elles sont. Sa participa-

65 Jacques Hadamard, Leçons de Géométrie élémentaire, (2 tomes), Armand Colin, Paris 1949, réédition Jacques Gabay, Paris 1989. Notons que la première édition est publiée en 1898 et qu'elle fait partie d'une Collection dirigée par Gaston Darboux à l'usage des élèves des classes de mathématiques élémentaires.

66 Marcel Berger, Géométrie (5 volumes), CEDIC-Nathan, Paris 1977, réédition en 2 volumes, Nathan, Paris 1990

67 «Lettre de Desargues à Mersenne», in René Taton, L'oeuvre mathématique de Desargues, Vrin, Paris 1981, p. 83

68 Girard Desargues, Girard Desargues, Brouillon Project d'une Atteinte aux Evénemens des Rencontres du Cône avec un Plan (1639), in René Taton, L'oeuvre mathématique de Desargues, o.c.

tion à ce qu'il énonce est une participation active organiquement opérante » [69]

Cela nous renvoie à la question suivante que nous nous contenterons de poser : qu'est-ce qui, dans l'activité mathématique, ne se réduit pas au discours ? la question est d'autant plus difficile que toute tentative de réponse s'exprime par un discours [70] ; reste cependant que le discours n'est jamais arbitraire, il est guidé par la connaissance, aussi embryonnaire soit-elle, que nous avons des choses sur lesquelles portent le discours. C'est seulement au bout du discours que nous pouvons dire dans quelle mesure le discours exprime les choses dont nous voulons parler, s'il est *idoine*, pour user du langage de Gonseth.

Questions d'enseignement

Si la démonstration est au cœur de l'activité mathématique, même si celle-ci ne se réduit pas à la seule démonstration, la démonstration doit tenir un rôle important dans l'enseignement des mathématiques. En ce sens on ne peut penser un enseignement des mathématiques qui considèrerait la démonstration comme une activité périphérique, un point secondaire de l'enseignement. Si, comme nous l'avons expliqué ci-dessus, la démonstration joue non seulement un rôle de légitimation des propriétés énoncées, mais aussi un rôle d'explication de ces propriétés, elle a un rôle essentiel dans la compréhension des mathématiques et on ne saurait la négliger dans un enseignement consistant des mathématiques. Se pose alors la question des formes de démonstration ; la question porte alors moins sur l'apprentissage des canons actuels que sur l'usage, à chaque étape de l'enseignement, des formes les plus adéquates, autant sur le plan technique que sur le plan conceptuel, permettant aux élèves de comprendre les mathématiques qui leur sont enseignées.

Si nous avons insisté sur le rôle du raisonnement informel, c'est que ce mode de raisonnement, d'une part permet d'obtenir des résultats, telle la construction de la perpendiculaire dans l'ouvrage cité de Clairaut, d'autre part permet de prendre conscience des raisons qui fondent la certitude, sinon la vérité, d'une assertion. C'est ce raisonnement que fera un élève (et pas seulement un élève) à qui l'on pose la question : pourquoi c'est évident ? la question est moins celle de la vérité de ce qu'il trouve évident que celle de la construction de l'argumentation ; le rôle du professeur est de remettre les choses en place en amenant l'élève à structurer son raisonnement et si nécessaire de lui montrer les limites d'un raisonnement qui se veut une justification de l'évidence. Cela permet aussi de prendre conscience des limites de ce type de raisonnement et par conséquent de comprendre les raisons des sophistications nécessaires à toute activité scientifique, sophistications dont nous avons dit ailleurs qu'elles ont pour objectif essentiel de construire du simple [71].

Mais ces sophistications, aussi importantes soient-elles, pour être comprises par les élèves, ne peuvent apparaître dans l'enseignement qu'au moment où elles sont signifiantes, c'est-à-dire lorsque les raisons de ces sophistications peuvent être explicitées. Cela nous renvoie à la question de la problémati-

69 Ferdinand Gonseth, Le référentiel, univers obligé de médiatisation, o.c. p. 15

70 sur cette question nous renvoyons à l'analyse de Umberto Eco sur les relations entre métaphysique et langage in Kant et l'ornithorynque, traduit de l'italien par Julien Gayrard, Grasset, Paris 1999, chapitre 1.

71 Rudolf Bkouche, «Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques», for the learning of mathematics, vol. 17, n°1, february 1997

sation dont nous avons parlé dans un article antérieur [72].

On peut alors considérer le raisonnement informel comme une propédeutique qui conduit vers la démonstration ; s'appuyant sur l'évidence sensorielle, au sens que nous avons dit plus haut, il se situe au carrefour de la connaissance empirique et de ce qui deviendra la connaissance rationnelle ; en fait les aspects empiriques et les aspects logiques du raisonnement s'entremêlent comme le montre par exemple la construction de la perpendiculaire dans l'ouvrage cité de Clairaut, et la logique y apparaît comme un simple agent de la circulation, pour reprendre une image gonséthienne (cf. ci-dessus).

Mais il faut prendre en compte que ces raisonnements informels ne sont pas seulement un passage nécessaire pour qui veut s'initier à la démonstration, ils deviennent de véritables démonstrations lorsqu'ils prennent la forme d'expérience de pensée comme c'est le cas de la démonstration euclidienne du premier cas d'égalité des triangles (cf. cidessus) ou des démonstrations de Cauchy [73] ou de Jordan [74] de la formule d'Euler pour les polyèdres, démonstrations que nous ne pouvons donner ici. C'est d'ailleurs souvent la mise en forme de ces raisonnements informels, y compris par les praticiens des mathématiques, qui conduit à la démonstration canonique, encore qu'il ne soit pas toujours facile pour un débutant de comprendre pourquoi le raisonnement informel ne suffit pas ; d'autant que le canonique n'est pas donné une fois pour toutes, qu'il se transforme comme le montre l'histoire des mathématiques. Mais cette historicité n'est pas arbitraire, elle se situe dans le cadre des problématiques mises en œuvre ; le rôle des canons a essentiellement pour objectif de répondre aux difficultés auxquels le sujet connaissant est confronté et de légitimer la certitude. Cet aspect problématique de la démonstration doit être présent dans l'enseignement si l'on veut éviter que la démonstration n'apparaisse pour l'élève que comme un ensemble de règles à respecter, règles du professeur ou règles de l'institution scolaire, bien plus que nécessité d'ordre scientifique.

Nous terminerons cet article par quelques remarques sur les propriétés admises sans démonstration. Il est clair que certaines propriétés ne peuvent être démontrées, souvent pour des raisons techniques qui se situent au-delà des connaissances des élèves. La question est alors de rendre de telles propriétés signifiantes et compréhensibles pour ceux qui les reçoivent et seront amenés à les utiliser ; on ne peut demander à un élève d'utiliser une propriété dont le sens lui reste étranger, ainsi ces litanies de propriétés d'incidence énoncées sans démonstration que l'on trouve dans certains manuels d'enseignement, manuels que l'on n'ose à peine appeler «ouvrages de mathématiques», propriétés qui sont loin d'être évidentes.

On peut par contre admettre une propriété dont le sens est apparent ou dont le sens devient apparent après une explication convenable.

Je citerai l'exemple classique du théorème de D'Alembert. Après avoir vu qu'une équation de degré 1 (resp. 2, 3, 4) admet 1 (resp. 2, 3, 4) solutions, l'idée que la propriété se généralise pour un degré quelconque peut sembler

72 Rudolf Bkouche, «Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science», Repères-IREM n°39, avril 2000

73 Cauchy, «Recherches sur les polyèdres», Journal de l'Ecole Polytechnique, 16, 1813, p. 68-86

74 Camille Jordan, «Recherche sur les polyèdres», Journal für Mathematik, Bd. LXVI, 1866, p. 22-91

naturelle[75]. Autrement dit l'énoncé de D'Alembert est signifiant et ce qu'il exprime est facilement compréhensible. La démonstration viendra plus tard lorsque les élèves auront les moyens techniques et conceptuels de la comprendre.

On pourrait citer aussi certaines propriétés d'analyse «géométriquement évidentes» mais dont la démonstration demande la construction préalable des réels, ainsi le théorème de la valeur intermédiaire à partir d'une représentation graphique ou le théorème fondamental de l'analyse qui montre comment, *via* la notion intuitive d'aire, la primitivation est l'opération inverse de la dérivation[76].

On pourrait citer aussi le théorème de Thalès qui, dans le cadre d'un enseignement de collège ou de lycée, ne peut être démontré en toute rigueur que pour les rapports rationnels et dont les élèves peuvent comprendre qu'il reste vrai pour tout rapport[77].

Parmi les difficultés auxquelles sont confrontés certains étudiants[78], nous citerons la difficulté de compréhension de la distinction entre une propriété admise sans démonstration et un axiome, que ce soit au sens d'une propriété évidente par elle-même ou au sens hilbertien d'une assertion primitive. C'est un point important de l'enseignement des mathématiques que de marquer cette distinction.

Il est vrai que certaines propriétés évidentes n'ont pas besoin d'être démontrées et qu'une démonstration prématurée risque *«d'obscurcir la vérité»* et *«de dégoûter les Lecteurs»* pour reprendre les termes de la préface de Clairaut[79]. Dans ce cas la question est moins celle d'une démonstration prématurée que celle d'amener les élèves à comprendre, au moment adéquat, que la démonstration de telles propriétés devient nécessaire dans le cadre d'une organisation générale qui montre les liens logiques entre les diverses propriétés, c'est-à-dire dans le cadre de ce que l'on appelle une axiomatique ; la question reste de ce moment adéquat qui ne peut se définir que dans le cadre général de la progression de l'enseignement des mathématiques. Cela permettrait aux élèves de comprendre pourquoi, selon les choix, certaines assertions peuvent être choisies comme axiomes dans une axiomatique alors qu'elles sont à démontrer dans une autre axiomatique. Il devient alors intéressant de comparer par exemple diverses axiomatiques de la géométrie élémentaire pour comprendre le rôle organisateur de l'axiomatique, cela devrait permettre aussi de comprendre la

75 Rappelons que ce fut la démarche de Girard dans son Invention nouvelle en l'Algèbre, Amsterdam 1629. Il fallut attendre Gauss, plus d'un siècle et demi plus tard, pour avoir la première démonstration du théorème, cf. Jean-Pierre Friedelmeyer, Klaus Volkert, «Quelle réalité pour les imaginaires» in Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques, «Commission Inter-IREM Epistémologie», Ellipses, Paris 1993

76 cf par exemple Chenevier, Cours d'Algèbre, classe de Mathématiques, Hachette, Paris 1930. Jean-Pierre Daubelcour montre dans Eléments d'Analyse en Terminale Scentifique (IREM de Lille, juin 1998) et comment on peut construire, à partir de la notion d'aire, un cours rigoureux d'analyse en terminale S.

77 On peut cependant expliquer, à un niveau élémentaire comment on peut étendre aux rapports incommensurables les relations de proportionnalité géométrique (arcs et angles, théorème de Thalès) comme le montre l'ouvrage de Neveu et Bellanger, Cours de Géométrie, Première Partie : Géométrie Plane, Masson, Paris 1907, ouvrage destiné aux élèves des Ecoles Primaires Supérieures. Leur approche est reprise dans Rudolf Bkouche, «Autour du théorème de Thalès», Actes du Colloque Inter-IREM Géométrie (Limoges 1992), IREM de Limoges 1994

78 Cette remarque est issue de l'expérience d'enseignement de l'auteur de cet article.

79 Clairaut, o.c. préface, p. xiii. Nous renvoyons le lecteur à la lecture de cette préface, non seulement pour son intérêt didactique, mais aussi parce qu'elle montre comment se situe le lien entre une géométrie issue de la connaissance empirique et la géométrie rationnelle.

spécificité de chaque axiomatique et d'éviter de les mélanger. Mais cela demande d'abord d'avoir compris les raisons qui font sortir du cadre euclidien ou legendrien des axiomes considérés comme propriétés évidentes par elles-mêmes, ensuite de penser la relative autonomie du langage.

Cette distinction entre les axiomes en tant que propriétés évidentes par elles-mêmes et les propriétes suffisamment évidentes pour n'avoir pas besoin de démonstration est loin d'être aisée [80] ; mais c'est peut-être un point sur lequel il faut sans cesse revenir dès que les élèves ont acquis une certaine maturité, par exemple dans les classes de lycées (et pas seulement dans les classes scientifiques !).

A titre d'exercice, on pourrait, lorsque l'énoncé explicite de l'axiome des parallèles sera réintroduit dans l'enseignement [81], demander aux élèves qui acceptent de se prêter à ce genre d'exercice, d'essayer de le démontrer ; c'est une façon à la fois de réfléchir à ce qu'est une démonstration et de comprendre la signification de la notion d'axiome, justement à partir de l'exemple d'un énoncé loin d'être évident par lui-même ; les tentatives de démonstration qui ont jalonné l'histoire des mathématiques jusqu'à la découverte des géométries non-euclidiennes l'ont bien montré et l'étude, dans une classe de terminale, de certaines de ces «démonstrations» peut s'avérer utile [82]. C'est alors une question intéressante et loin d'être facile que de chercher «ce qui ne va pas» dans la démonstration. On peut ajouter, pour conclure, qu'un tel travail conduit à l'étude d'énoncés équivalents au postulat des parallèles [83], une façon de comprendre comment les axiomes interviennent dans les démonstrations, répondant à la question : qu'est-ce qui permet de montrer la vérité d'une assertion ? prenant en charge ainsi les deux aspects de la démonstration explicités ci-dessus : dire le vrai et expliquer les raions du vrai.

80 Nous avons vu ci-dessus l'exemple de l'égalité des angles droits.

81 Rudolf Bkouche, «Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles», Bulletin de l'APMEP n°430, septembre-octobre 2000

82 On peut trouver de telles démonstrations dans la note II de la douzième édition des Eléments de Géométrie de Legendre déjà cité ainsi que dans son mémoire «Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle», Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France, tome 12, 1833, p. 367-408. Pour une étude systématique et hisqtorique de ces démonstrations nous renvoyons à l'ouvrage de Roberto Bonola, Non-euclidean geometry (1912), translated by H. S. Carslaw, Dover Publications, New York 1955, et à celui de Jean-Claude Pont, L'Aventure des Parallèles, Peter Lang, Berne 1986.

83 pour une liste de tels énoncés je renvoie à l'édition anglaise des Eléments d'Euclide : The Thirteen Books of the Elements, trabslated with introduction and commentaries by Sir Thomas L. Heath, Dover Publicatiions, New York 1956, vol 1, p. 220. Une traduction française est donnée dans Mathématiques au fil des âges, IREM, groupe Epistémologie et Histoire, Gauthier-Villars, Paris 1987, p. 276-277.