$\sqrt{2} + \sqrt{3}$, ON NE PEUT PAS LE FAIRE

Marc PICOT
Irem de Lille

Pourquoi 2,3 x 3,4 est-il égal à 6,12 chez des élèves de 4ème ?

Pourquoi $\frac{4}{7}-\frac{1}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{3}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{9}{21}\times\frac{35}{21}=\frac{315}{21}$ (brevet Rennes 2000) ?

Pourquoi $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$?

Pourquoi ces élèves ne vérifient-ils pas la cohérence de leurs résultats ?

Les décimaux, les fractions, les radicaux ont un statut des plus obscurs pour trop d'élèves. Les règles de calcul sont mal connues. Pourtant, les élèves devraient être habitués aux techniques de calcul. Citons les programmes de l'école élémentaire : « Elaboration progressive de différents procédés de calcul... » en cycle 2, « ordre de grandeur pour longueur, masse … » en cycle 3. Au Collège, les lois du calcul sont rabâchées.

Il semble que les élèves de troisième en difficulté avec les nombres démissionnent complètement devant les calculs. Le but de cet article est de proposer une idée pour aider les élèves à se réconcilier avec les nombres. Les élèves ont *vu* les nombres et ils ont fait des *opérations* sur et avec ces nombres. Mon hypothèse de travail est que *voir* et *opérer* doivent être menés de front, et non pas l'un (*voir*) après l'autre (*opérer*).

Les nombres et les opérations avec un exemple : les nombres relatifs

En sixième, on découvre les nombres relatifs sur une droite graduée (thermomètre, altitude, ascenseur,...). L'année suivante, on fait des additions et des soustractions. Et enfin, un an après, on fait des multiplications.

Cette procédure est tout à fait incohérente, et de plus, elle est frustrante pour les élèves.

Incohérente : Les nombres repérés en sixième et les relatifs de cinquième ne sont pas de même nature. Pour aider les élèves à comprendre les nombres, on a l'habitude de recourir aux grandeurs. Or, les relatifs repérés font penser aux températures, grandeur intensive, tandis que les relatifs qu'on somme relèvent des « quantités de température », grandeur extensive. La difficulté est de taille (demandez donc aux physiciens) !

Frustrante : A quoi servent les nombres ? A faire des opérations, au sens le plus large possible : je verse 2 litres, puis 3 litres. En fin d'opération, j'ai versé 5 litres. Ou bien : j'ai 100F, je dépense 57F ; puis-je encore acheter un livre à 49F ? Les élèves sont très sensibles à ce fait. De plus, les jeunes élèves ont une qualité, dont le développement ne figure malheureusement pas dans les objectifs du Collège : la curiosité. Et un bon moyen de faire perdre la curiosité, c'est de l'inhiber. On pourrait penser que la somme des relatifs est repoussée à plus tard à cause de sa grande difficulté. C'est vrai que, si la somme de deux relatifs consiste à appliquer strictement la loi telle qu'on la trouve encore dans des manuels (signe et somme des valeurs absolues [1]), il vaut mieux laisser mûrir les élèves ! Or, les élèves de sixième ou de cinquième savent faire des opérations (au moins l'addition) avec les relatifs. Avant de développer ce savoir-faire des élèves, rappelons succinctement ce qu'on entend par opération.

Opérations

Loi interne. Application de E x E dans E [2]

Etant donné un ensemble E, à chaque couple (a,b) de E x E, on fait correspondre un et un seul élément c de E. Cette application possède ou ne possède pas certaines propriétés. Souvent, on utilise un signe (+ , − , x , *) et on note : $a * b = c$. On dit que E est muni de la loi de composition interne * . Eventuellement, cette loi peut être associative, commutative, peut posséder un élément neutre, et chaque élément peut être inversible. Parfois, on définit d'autres lois internes sur E avec de nouvelles propriétés, la distributivité, par exemple. Je laisse au lecteur le soin de développer ces notions, qui ont disparu des programmes. Elles ont disparu explicitement des programmes des petites classes, et à juste titre, mais pas implicitement. Les priorités de calcul, l'organisation d'une succession de calculs ne sont que des utilisations à bon escient de ces propriétés.

Loi externe. Action d'un ensemble sur un autre [2] :

Considérons une loi externe, action d'un ensemble T (souvent, T est un groupe) sur un ensemble E. A chaque couple (t,a) de T x E, on fait correspondre un et un seul b de E. On dit que T opère sur E. Si tout se passe bien, T opère simplement transitivement.

Exemple : Etant donné un couple de points (A,B) de ExE, il existe un et un seul élément t de T tel que B = t(A).

1 Vu sous cet angle, je ne comprends pas ce qu'on gagne à remplacer cette expression par distance à 0 en interdisant son emploi.

2 Dictionnaire des Mathématiques , Bouvier-George-Le Lionnais.

En troisième, on pourrait le donner sous la forme : Etant donné un vecteur $\vec{u} = \vec{AB}$, on fait correspondre, à chaque point M du plan, le point N tel que $\vec{MN} = \vec{AB}$.

Plus subtil : Sur la droite munie d'un repère (O,U), étant donné le nombre relatif *t,* on fait correspondre, à chaque point repéré par le relatif *e*, le point repéré par le nombre $e + t$. La subtilité vient du fait que les nombres qui repèrent les points et les nombres qui définissent les translations sont indiscernables à vue.

Exemple : on donne un point A d'abscisse (–4). On augmente son abscisse de (–5) et on obtient un point B d'abscisse (–4) + (–5) = (–9). En gros, les relatifs *e* sont les relatifs de la classe de sixième et les relatifs *t* ceux de la classe de cinquième. Ces derniers peuvent être obtenus par «différence» de deux nombres repérés.

La place des grandeurs

Habituellement, pour aider les élèves à comprendre certains calculs, pour redonner du sens, on fait appel aux grandeurs. Cette démarche est tout à fait naturelle : personne ne contestera que la notion de nombre se construit à partir des grandeurs. Mais, si on utilise l'exemple des températures pour illustrer le calcul (–4) + (–5) = (–9), il y a une confusion. On dira, par exemple : « hier, il faisait –4 , et la température a baissé de 5 degrés. Maintenant, il fait –9 degrés [3]». (–4) et (–9) sont des températures repérées, assimilables à des points, et (–5) est une quantité, un *écart* de température (assimilable à une translation). Le calcul proposé ne distingue pas la loi interne et la loi externe.

3 Faut-il écrire -4 ou (-4) ? -9 ou (-9) ?

La même confusion sera faite avec la multiplication dans la démarche suivante : essayons d'inventer le produit de deux relatifs. On propose d'abord deux positifs (+5) x (+7) et, intuitivement, on décide que c'est pareil que 5 x 7 ; puis, on propose un positif par un négatif (+5) x (–7). On admet naturellement que (+5) x (–7) = 5 x (x7). On voit apparaître là une confusion entre les deux types d'opérations.

L'utilisation des grandeurs montre que pour définir le produit de deux relatifs, il faut définir une nouvelle opération, ce que les élèves savent accepter [4]. Est-il opportun et nécessaire de distinguer loi externe et loi interne ?

Les élèves seront bien évidemment dépassés si on entre dans cette subtilité en détail, mais je crois (ce n'est qu'un acte de foi), qu'il faut mettre le doigt dessus avec eux. On leur montrera qu'on a de la chance : (–7) + (–5) peut être considéré indifféremment comme « je suis au point (–7) et je me déplace de (–5) » ou « je me déplace de (–7) puis de (–5) ». On montrera que cette difficulté se rencontrera en d'autres occasions, par exemple avec les pourcentages.

Le lecteur est familier avec la situation suivante : un article augmente de 10% , puis diminue de 10% . La plupart des gens assimilent cette situation à +10% – 10%. Maintenant, envisagez cette situation : j'achète un article, avec un taux de TVA à 20% . Le vendeur me consent une réduction de 15% sur le prix HT. Je préfère qu'il me fasse une réduction sur le prix TTC (elle sera plus forte). Ai-je raison ? La réponse n'est jamais immédiate. Appliquer un pourcentage d'augmentation n'est pas une « simple » addition.

4 Je renvoie le lecteur à l'article de Jacky Sip dans « Quel enseignement pour demain » , IREM de Lille 1989 .

Autre exemple : j'ai enseigné (autrefois) la structure d'espace vectoriel au lycée. Comment justifier l'importance d'une propriété du genre : $(\lambda + \mu)V = \lambda V + \mu V$? La seule justification, c'est qu'on fait, volontairement, la confusion entre deux opérations distinctes. Le premier +, c'est la somme de deux scalaires, le second + , c'est la somme vectorielle.

Le long apprentissage des nombres

Les débuts du nombre

On s'accordera sans problème sur le fait que la notion de grandeur précède celle de mesure, donc celle de nombre. L'enfant découvre la notion de nombre à partir des « quantités ». La notion de quantité est innée, du moins pour les petites quantités (1,2, 3 voire 4 objets), d'où une reconnaissance facile des petits nombres sans comptage. Au-delà, le comptage intervient. Les enfants de l'école maternelle manipulent des collections, avec des mises en correspondance des objets. Ainsi s'installent les débuts du comptage. Mais le comptage, primordial, n'est pas suffisant. L'enfant ne comprendra les nombres que s'ils *opèrent,* c'est à dire que s'il fait des *opérations* avec et sur les nombres.

Avant de faire opérer les nombres, l'enfant fait opérer les grandeurs. Il manipule des grandeurs (discrètes) : 3 pots de farine, 4 œufs,… Avant d'associer le nombre 3 à toutes les situations, les manipulations diverses sont nécessaires : *ajouter* un pot, *enlever* un œuf qui est en trop. Puis, il saura que, si à côté d'une boîte de 6 œufs, on *a posé* 2 œufs, il *reste* 4 œufs dans la boîte. Il met ainsi en place une opération : « si j'ajoute 2 avec 4, je trouve 6 » ou bien « si j'enlève 2 de 6 , je trouve 4 ». On lui demandera aussi de comparer les nombres. On pourrait penser que la comptine induit facilement une compréhension de l'ordre sur les nombres. Paradoxalement, l'enfant aura plus de difficulté pour comparer 4 et 6 que pour calculer 4 + 2. Il réagit mieux quand il se passe quelque chose, une *opération*. Ses *manipulations* sur les objets sont les prémices des *opérations* sur les nombres. Ce sont ces opérations qui vont donner du sens à la notion de nombre. Mais avant de faire opérer les nombres, il faut faire opérer ce dont ils sont issus : les grandeurs.

D'autres nombres

J'ai envie de réécrire ce qui précède en remplaçant les pots de farine et les œufs par des grandeurs « décimales », « fractionnaires », « radicales ». Les manipulations sur les grandeurs vont amener de nouveaux objets ; ces objets vont opérer sur et/ou entre eux. Ce sont ces opérations qui vont leur faire prendre consistance, leur donner leur statut de nombres. Il restera à les *voir* !

Dans notre enseignement, on commence toujours par les voir, ou plutôt par les faire voir. Voici trois petites histoires : (le professeur P s'adresse à ses élèves E_i , $1 \le i \le 30$)

P : « En titre, vous écrivez : « Les nombres relatifs » ; je prends un thermomètre. Je vois les températures au-dessus de 0, celles qui sont positives, et les températures en dessous de 0, celles qui sont négatives. Tous ces nombres positifs et négatifs s'appellent des nombres relatifs. Tout le monde a compris ?

Tout le monde : oui. »

Ou bien :

P : « Tu vois, tu prends un segment et tu le coupes en 10. Chaque petit bout s'appelle un dixième.

E — A quoi ça sert ?
P —Eh ! Bien, une baguette coûte plus que 3F et moins que 4F, par exemple 3,75F.
E_1 — Des dixièmes de francs, ça existe ?
E_2 —Et un dixième plus un centième, ça fait combien ? [5]
P —Tu verras plus tard. »

Ou bien :

P — « Tu traces un carré de 1dm de côté et tu me dis combien mesure sa diagonale.
E_1 — J'ai trouvé : ça fait 14,1 cm.
E_2 — Moi j'ai trouvé 14,2cm
P — J'ai demandé en dm !
E_3 — Oui ! Mais ça va mieux avec des cm.
P — Admettons. De toute façon, vous avez faux. Je vais vous le démontrer. … $1{,}41^2 = 1{,}9881$ et $1{,}42^2 = 2{,}0164$. Ca ne fait pas 2 !
E_4 — Alors, ça fait combien ?
P — $\sqrt{2}$
E_5 — Vous n'avez toujours pas dit combien ça fait. Moi, ma machine dit que ça fait 1,414213562.
P — C'est une valeur approchée, ce n'est pas la valeur exacte.
Tous — La valeur exacte, c'est quoi alors ? »

On peut raconter les mêmes histoires avec les vecteurs, les fonctions,…

La droite graduée

L'enfant découvre les nombres, ou plutôt *les nombres entiers*. Il les découvre à partir des objets qui l'entourent. On montrera à l'école primaire que les nombres entiers ne sont pas suffisants. Puis on complétera au Collège la famille des nombres.

5 Histoire presque vraie. Très souvent, les élèves de 5ème demandent, lorsqu'on a fait l'addition et la soustraction des relatifs, si on peut aussi les multiplier : «On verra l'année prochaine.» !

Stanislas Dhaene, dans « La Bosse des Maths [6] », avance l'hypothèse que l'espace et les nombres sont associés dans notre cerveau sur une ligne numérique. Sur cette ligne, le cerveau dispose les nombres, avec une orientation culturelle correspondant à celle de la lecture. Des nombres proches sont représentés par des points proches, mais il se crée une opacification quand les nombres grandissent. On distingue facilement 80 de 100, mais plus difficilement 66 de 67. J'ai le sentiment que cette opacification perdure au Collège.

Pour faire lever le brouillard, je propose qu'on réconcilie ce qu'on voit sur la droite numérique avec les opérations sur les nombres.

Les nombres qui repèrent et les opérations

L'exemple des décimaux

En cycle 3 et en sixième, le nombre décimal se présente sous deux formes. Il est soit le quotient d'un entier par une puissance de 10, soit la somme d'un entier et de fractions décimales. Le décimal 2,34 est égal soit à $\frac{234}{100}$, soit à $2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100}$. Je mets de côté pour l'instant la difficulté qui consiste à égaler ces deux formes pour en faire un même nombre. Considérons la seconde forme. Qu'un nombre se présente sous forme de somme est un obstacle pour les élèves de Collège. Ce qui est exceptionnel avec les décimaux, c'est qu'il existe une écriture symbolique pour noter cette somme, avec l'apparition d'un nouveau symbole : la virgule. On n'insiste pas assez sur ce symbolisme. C'est lui qui est probable-

6 « La Bosse des Maths » Stanislas Dhaene ; éditons Odile Jacob.

ment la source de toutes les misères de nos élèves. Il demande une nécessaire et incontournable abstraction. Cette abstraction, on peut la visualiser avec la droite graduée ; le drame, c'est de limiter cette première approche au repérage. On peut visualiser les nombres sur la droite graduée, mais il faut en plus faire des opérations. Tant pis si on triche un peu en ne distinguant pas opération interne et opération externe ; on utilise d'abord les nombres entiers pour repérer des *points*, puis on fait *opérer* des nouveaux nombres (*les fractions de dénominateur 10, ou 100*,…). On obtient des nouveaux points, repérés par des nouveaux nombres, *les décimaux*, qui peuvent opérer sur les points.

Exemple : Sur papier millimètré (cf. encadré ci-dessous), je place les points 0, 1, 2 , 3 (unité de longueur le dm). Je partage chaque segment unité en 10 ; chaque petit morceau s'appelle un dixième, noté $\frac{1}{10}$. Je vois donc les points $2+\frac{1}{10}$, $2+\frac{2}{10}$, … Je peux découper le segment $[2+\frac{3}{10} \,;\, 2+\frac{4}{10}]$ en 10. Il est clair que le segment [2 ; 3] est coupé en 100.

Je trouve ainsi les points $2+\frac{3}{10}+\frac{1}{100}$, $2+\frac{3}{10}+\frac{2}{100}$, $2+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}$, …

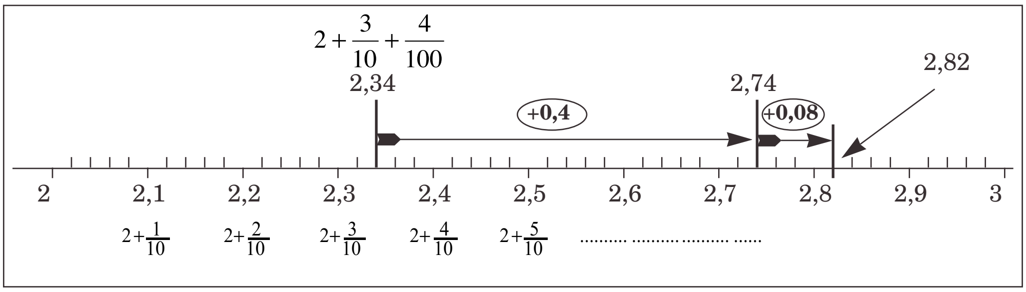
Considérons maintenant le point repéré par $2+\frac{3}{10}+\frac{4}{100}$. On *voit* comment il a été obtenu et on a décidé, conventionnellement [7], de le noter 2,34. Puis, je fais voir le résultat d'une addition. Je crée le point qui repère 2,34 + 0,48.

Ce point représente bien un nombre, qu'on appellera la somme : 2,34 + 0,48.

En dessinant 2,34 + 0,48, je crée l'illusion que les deux nombres 2,34 et 0,48 opèrent entre eux ; or, le dessin montre que c'est 0,48 qui opère sur le point repéré par 2,34.

Sur ce dessin, je peux faire voir 2,34 + 0,48 en faisant $(2+\frac{3}{10}+\frac{4}{100})+(\frac{4}{10})+(\frac{8}{100})$.

Il est clair qu'on ne peut pas théoriser cette distinction des deux modes opératoires, mais il est important de la faire sentir aux élèves.



7 Il me semble fondamental d'insister sur le côté conventionnel de cette notation. Les Anglais ou la machine utilisent un point. L'histoire trouve ici toute sa place : les décimaux ont existé avant la notation avec virgule. C'est la numération de position qui amorça leur percée et c'est quand Simon Stevin trouva une idée, une notation symbolique, pour se libérer des fractions que le développement des décimaux fut fulgurant.

Le résultat de l'opération vu comme un nombre

A la lecture de ce qui précède, on ne peut pas faire l'économie des *opérations*[8] pour définir un décimal. Le décimal est une somme de… décimaux ! Non seulement on ne peut pas en faire l'économie, mais en plus, on peut faire voir aux élèves cette somme ; cette somme étant repérée par un point, l'élève la voit en tant que nombre, et non plus en tant qu'opération. De même pour $\frac{234}{100}$: on reconnaît d'abord une division. Il est très difficile de voir cette fraction comme un nombre. Pour l'élève, l'opération n'est pas effectuée.

Peut-être qu'il devient opportun de développer pour l'élève un des sens du signe = : les égalités $\frac{234}{100} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} = 2{,}34$ devraient induire que les deux premières expressions sont des nombres, comme l'est, pour tous les élèves, 2,34.

L'exemple des relatifs

La démarche précédente peut être adaptée pour l'apprentissage des relatifs.
Ce que dit le programme :

> *« Les travaux proposeront des exemples variés de situations nécessitant l'introduction de «nouveaux nombres» . Dans certains de ces exemples, faisant intervenir des températures, des durées … on pourra être conduit à opérer sur ces nombres, mais les règles d'addition des relatifs ne sont pas aux programmes.»*

Que peut-on proposer d'autre aux élèves que des durées et des températures pour *varier les situations*, d'autant plus que ces situations ne font pas opérer ces nombres ? D'autre part, est-il bien nécessaire d'introduire les relatifs pour se repérer sur la droite ? Peut-on s'en passer ? Exemple des dates : on remplace avantageusement 0 par av.J.C. et l'affaire est réglée. Pour les températures, on profitera de l'occasion pour montrer que l'histoire de cette notion a évacué les négatifs. Quant au repérage dans le plan : un simple changement d'origine fait l'affaire pour tous les exercices proposés.

Revenons aux opérations sur les relatifs, et à cette question qui me tourmente : pourquoi repousser à plus tard l'addition ? Pourtant, on peut jouer très facilement à additionner. Il est par exemple très simple d'utiliser un modèle du type « tortue logo ». Ce modèle a l'avantage de pouvoir être utilisé en vrai, corporellement : sur le sol, une ligne (droite si vous y tenez) est tracée, un point de départ est marqué (O éventuellement ; je préfère D comme départ : vous verrez que j'utilise des translations). L'élève se déplace sur cette ligne, orientée par « en avant » et « en arrière ». Il effectue des déplacements, à partir de D, l'unité étant le pied ou le pas :

AV7, AV8, RE12, RE5, AV2 .

Tous les élèves qui ont fait réellement, corporellement, cette expérience savent additionner des relatifs. Ensuite, on modélise : on accepte la notation symbolique + qui remplace « puis ». Ainsi, on obtient : (+7) puis (+8) puis (–12) puis (–5) puis (+2), qu'on décide d'écrire : (+7) + (+8) + (–12) + (–5) + (+2).

L'addition des relatifs n'est pas une opération de décimaux ordinaires avec des + et des – devant ces nombres. C'est une autre opération. Ce qui est extraordinaire, c'est que cette opération restreinte aux positifs, se comporte exactement comme l'addition habituelle (celle du CM2). C'est pour cela qu'on identifiera **N** et $\mathbf{Z}^+$.

8 Sans préciser de quels genres d' opérations il s'agit.

Cette expérience de déplacements codés par des relatifs à partir d'un point D peut naturellement être faite à partir d'un point repéré par un nombre. On devrait en profiter pour mettre au point la notion d'écart, de variation : (situation finale) – (situation initiale), sur le modèle des écart de températures (hier il faisait n degrés, maintenant il fait p degrés. La variation de température est (p – n) degrés) ou des durées (il est né l'année n, il est mort l'année p. L'âge est (p – n)).

Mais attention : p et n ne sont que les abscisses de deux points A et B dans un certain repère, et (p – n) n'est que la mesure algébrique du segment AB orienté de A vers B. Cette *soustraction* (p – n), qui ressemble bigrement à une soustraction de deux relatifs, c'est le vecteur de la translation qui opère sur les points de la droite. Cette notion n'est bien sûr pas au programme du Collège ; pourtant, on demandera bien aux élèves de 3ème de calculer les cordonnées d'un vecteur dans un repère donné en utilisant $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$.

L'exemple des fractions

On peut recommencer avec les fractions ce qui a été fait avec les fractions décimales[9]. Les élèves de sixième peuvent utiliser les parallèles équidistantes pour placer sur la droite graduée des points repérés par des fractions.

On verra non seulement qu'une fraction est encadrée par deux entiers, mais aussi qu'elle est égale à la somme d'un entier et d'une fraction plus petite que 1 (il suffit de suivre l'exemple proposé pour les fractions décimales). On utilisera ensuite des encadrements de plus en plus fins pour encadrer un quotient par des décimaux et des fractions. L'utilisation des approximations se fait non seulement par le calcul, mais aussi elle se voit sur le dessin.

Exemple : placer sur la droite les nombres 2 ; 2,34 ; 2, 3457 ; $\frac{7}{3}$. Sur le dessin, on voit que $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ ou bien que $\frac{7}{3} = 2 + \frac{3}{10}$ + qq chose.

En quatrième, on invente facilement les fractions négatives sur le dessin en utilisant la symétrie par rapport à O. On justifiera la méthode des parallèles employées en sixième.

La droite graduée complétée

Dans les classes de sixième et de cinquième, on fait découvrir aux élèves l'insuffisance des nombres qu'ils connaissaient. Les élèves sont habitués à placer sur la droite graduée ces nombres. Ils admettent naturellement que : Etant donné une droite, on peut choisir une origine et une unité ; alors, à chaque nombre qu'on connaît, on peut faire correspondre un point de la droite.

Par curiosité, on pourra poser la question de la réciproque : A chaque point de la droite, peut-on faire correspondre un nombre ?

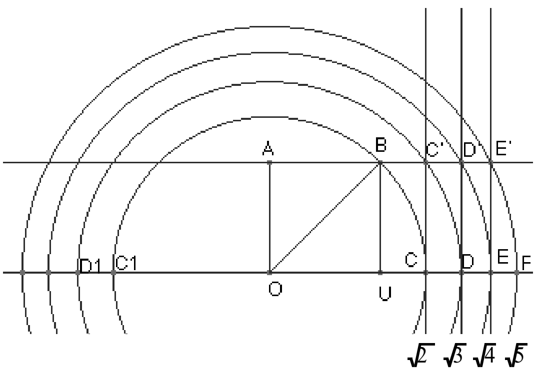
L'exemple de la diagonale du carré de côté 1 devrait convaincre tout un chacun que les nombres décimaux ne répondent pas à la question avec une précision absolue. On invente ainsi des nouveaux nombres, qui nécessitent l'invention d'un nouveau symbole : $\sqrt{\ }$.

9 Je ne néglige pas le fait qu'il peut sembler plus intéressant de commencer par les fractions en général, puis de considérer les fractions décimales comme un cas particulier, ce que proposent les futurs programmes de l'école primaire. Cette distinction ne change rien à la notion de droite graduée.

On montre aux élèves, avec le limaçon de Pythagore par exemple, les nombres tels $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \sqrt{5},\ ...$ La calculatrice en donne des valeurs approchées. Mais il faudra attendre un an pour faire des opérations avec ces nombres ! Or, dès qu'on connaît le théorème de Pythagore, on peut facilement montrer, *faire voir,* quelques calculs simples.

Premier problème

On donne une droite graduée, munie d'un repère (O,U), OU = 1/2 dm. Construire les points d'abscisses $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \sqrt{5},\ ...$



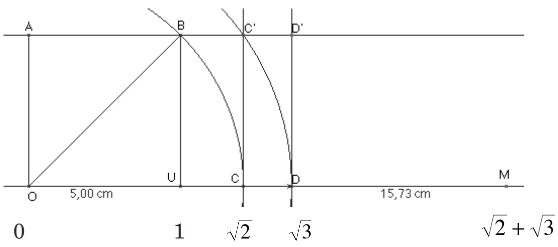
On construit le carré OUBA. Le cercle de rayon OB coupe la droite (OU) en C et C_1. Le point C a pour abscisse $\sqrt{2}$ et le point C_1, $-\sqrt{2}$
La perpendiculaire en C à (OU) coupe la droite (AB) en C'. Le cercle de rayon OC' coupe (OU) en D et D_1 . Le point D a pour abscisse $\sqrt{3}$ et D_1 , $-\sqrt{3}$. Et ainsi de suite.

Dans le *Deuxième problème*, on se propose de construire des points dont les abscisses sont repérées par des « *opérations* ». Il s 'agit de mettre en évidence que des expressions du type ci-dessous sont des nombres :

On donne une droite graduée munie d'un repère (O,U). Construire les points suivants :

M	N	P	Q	S	T
$\sqrt{2} + \sqrt{3}$	$1 - \sqrt{3}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{6}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$-\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Pour construire M, on replace les points C et D, d'abscisses $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. Avec le compas, on reporte à partir de C la longueur CM = OD = $\sqrt{3}$.

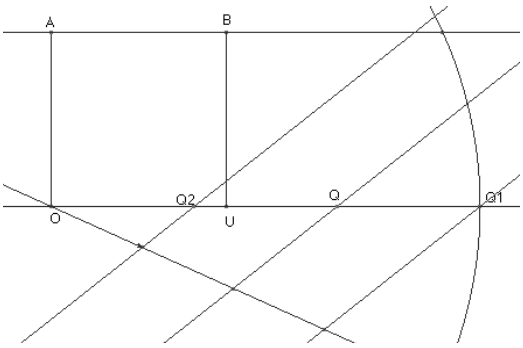


Pour construire N, on peut soit construire d'abord $-\sqrt{3}$, puis ajouter 1 soit, à partir du point U, tracer le cercle de centre U et de rayon $\sqrt{3}$. On obtient ainsi les deux points d'abscisses $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

Pour construire P, soit on construit le point P_1, d'abscisse $1+\sqrt{5}$, et on établit que P est le milieu de $[OP_1]$, soit on rappelle que $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Pour construire S, on construit d'abord S_1 (voir N), puis S, milieu de OS_1 (voir P).

Pour construire Q, on construit Q_1, d'abscisse $\sqrt{6}$, puis Thalès permet de construire Q.



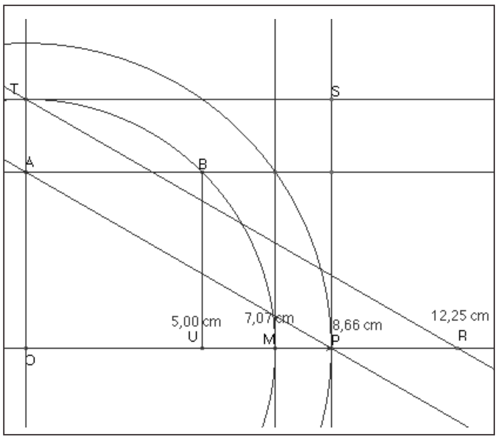
Pour construire T, on construit T_1, d'abscisse $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. T est le symétrique de T_1 par rapport à l'origine O.

Evidemment, ces constructions seront l'occasion de mettre en évidence les ordres de grandeurs, les valeurs approchées (graphiquement et à la machine). Le dessin donne S et T voisins ou confondus : c'est le calcul exact qui tranchera en faveur de S = T.

Troisième problème

On donne une droite munie d'un repère (O ; U), OU = 1 dm. OUBA est le carré unité. Construire le point P d'abscisse $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$.

On construit M et P d'abscisses $x_M = \sqrt{2}$ et $x_P = \sqrt{3}$. On construit (cf. figure en haut à droite) le point T sur (OA) tel que $OT = x_M$, puis on trace la parallèle à (AM) qui passe par T. Elle coupe (OU) en R. Le théorème de Thalès appliqué au triangle OTR donne : $OR = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$



Le mesurage permet de travailler les valeurs approchées. En particulier, avec Cabri et la fonction « mesure de distance », en faisant varier le point U, on expérimente que OR = (OP x OM) / OU. On peut construire le point S d'abscisse $\sqrt{6}$ et constater que S est soit confondu avec R, soit très voisin. La démonstration « algébrique [10] » nous convaincra de l'égalité.

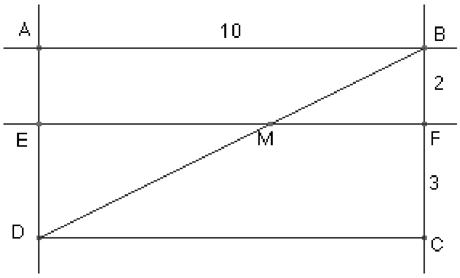
Quatrième problème

Il reste maintenant à apprendre à manier les formules à bon escient. On trouvera dans Repères n° 8 une activité proposée par l'Irem de Poitiers. Pour vous éviter des recherches, je la récapitule [11] dans l'encadré de la page suivante.

10 On trouvera en annexe une démonstration géométrique de cette coïncidence, démonstration que m'ont proposée D. Bénard et JP Guichard. J'en profite pour les remercier de leur aide précieuse, ainsi que les collègues du groupe Collège de l'IREM de Lille, qui m'ont obligé à écrire cet article.

11 « Enseigner par les activités » Irem de Poitiers , in Repères Irem n°8 Juillet 1992. Avec l'aimable autorisation de Madeleine Marot

ABCD est un rectangle, AB = 10 et BC= 5. E ∈ [AD] , F ∈ [BC], BF = 2. [AB] // [EF] ; [BD] et [EF] se coupent en M.



Calculer DM en utilisant plusieurs méthodes. On trouvera ainsi que :

$$DM = \sqrt{125} - \sqrt{20} = \sqrt{45} = \frac{3}{5}\sqrt{125}$$

$$= \sqrt{125} - \frac{2}{5}\sqrt{125} = 3\sqrt{5}.$$

Conclusion

Deux réflexions d'élèves : « Si je comprends bien, $\frac{1}{7}$ c'est un nombre que je peux approcher aussi près que je veux, mais je ne l'atteindrai jamais » (une élève de sixième).

« $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ on ne peut pas le faire. » (une élève doublante de troisième).

La première élève regardait les points repérés par des fractions sur une droite graduée. Elle sait déjà qu'un nombre, on ne saura jamais ce que c'est [12].

La seconde, redoublante, avait bien compris que $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}$ était autorisé et que, en revanche, $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{2+3}$ était formellement interdit. La plupart des élèves de la classe en étaient parfaitement convaincus !

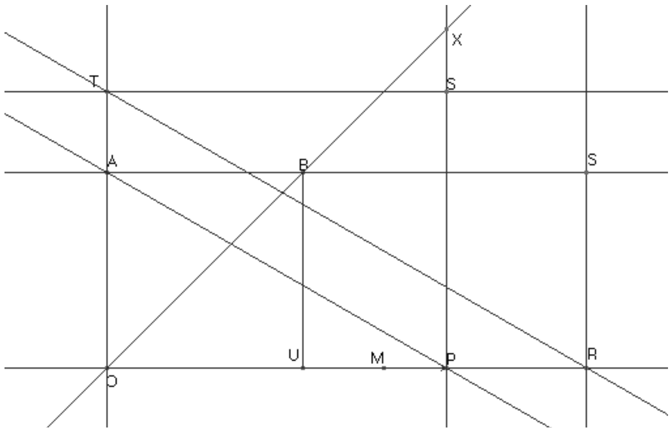
Pourtant, les erreurs signalées en introduction étaient légion. Le travail fait sur les points de la droite graduée et sur les opérations est loin d'avoir levé toutes les ambiguïtés chez les élèves, mais il me restera toujours le visage illuminé de Claire et de ses copains :

« $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, on peut le faire, et, en plus, on le voit, *ce nombre* ! »

12 Hussler, dans Philosophie de l'arithmétique dit qu'il est impossible de proposer une définition de ce que nous appelons « nombre » : c'est un concept primitif et indéfinissable. Houzel termine son article « Qu'est-ce qu'un nombre » dans La Recherche, août 1999, par : « On sait bien que les fondements ultimes des mathématiques sont inaccessibles. Si bien qu'en dernier ressort, on ne sait pas ce qu'est un nombre. »

ANNEXE

Démonstration géométrique de $\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \sqrt{6}$



On donne le carré OABU de côté 1. On a construit les points M et P d'abscisses $\sqrt{2}$ = OB = OM = OT et $\sqrt{3}$ = OP. On a construit le point R d'abscisse $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ = OR.

Rappelons que la construction donne OT.OP = OA.OR

Montrons que $\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \sqrt{6}$:

La droite (OB) coupe (PQ) en X. Dans le triangle OXP, on a (UB) // (PX). Le théorème de Thalès donne $\dfrac{OX}{OB}=\dfrac{OP}{OU}$ soit OX.OU = OB.OP = OT.OP = OA.OR. Comme OA = OU, on obtient OX = OR. Or, le triangle OPX étant rectangle en P, le théorème de Pythagore donne $OX^2 = OP^2 + PX^2$. De plus, OPX est isocèle (il a un angle droit et un angle de 45°).
Donc OP = PX = $\sqrt{3}$

On a donc $OX^2 = OR^2 = 3 + 3 = 6$, soit OR = $\sqrt{6}$. Donc, on a bien $\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \sqrt{6}$.

Compléments : On lira avec profit deux articles qui apportent des compléments à cet article :

« Des aires sans mesure à la mesure des aires « par F. Chamontin- B. Caziers - M. Picot de l'Irem de Lille in Repères Irem 44 de juillet 2001.

«Nombres et calculs au Collège : instituer une cohérence» par D. Bénard de l'Irem du Mans in Repères Irem 47 d'avril 2002.