LA RUBRIQUE « POINT DE VUE » :

Un lieu de débat pour les enseignants de Mathématiques

La rubrique « POINT DE VUE » *est destinée à être un lieu de débat et un outil de réflexion pour les enseignants de mathématiques sur tous les sujets qui concernent leur profession.*

Elle accueille dans ce numéro une réaction d'Isabelle Voltaire sur les changements de programmes de mathématiques.

Cette rubrique est ouverte à tous et destinée à recevoir des articles courts, d'environ trois pages…

Nous attendons vos propositions.

Le Comité de Rédaction

Point de vue

MATHEMATIQUE, ECONOMIE DE PENSEE ?

Isabelle VOLTAIRE

En notre époque où les programmes de mathématiques changent peu ou prou chaque année, certains interrogent cette frénésie, nombreuses sont les critiques contre ces programmes, contre leur modification perpétuelle (sont-ils donc si mauvais qu'il faille toujours les remettre sur le métier ?), les parents s'inquiètent, et les jeunes collègues se demandent “ comment c'était avant. ”

C'est pour répondre à une sollicitation d'un collègue de l'APMEP, et à ces interrogations, que j'ai entrepris cet article.

J'ai recueilli à l'INRP les programmes et les horaires de 1902, 1925 et 1945, du CP à la terminale, et des divers ordres d'enseignement, primaire, secondaire court et secondaire long [1], pour avoir une vue complète de la mathématique que l'on enseignait à tous les enfants de France, quelle que soit la classe sociale des familles. Ces textes officiels sont téléchargeables aux adresses

http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes\IVoltaire/prg1902.htm

http:// membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes\IVoltaire/prg1925.htm

http:// membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes\IVoltaire/prg1945.htm.

Ils présentent assez peu de différences entre eux et sont l'expression des mathématiques classiques qui ont formé une grande part des mathématiciens en exercice, y compris bien sûr l'école de Bourbaki, puisqu'ils sont restés en vigueur jusqu'en 1970 environ.

Le grand changement est intervenu dans les années 70 avec la réforme dite des mathématiques modernes introduite par la commission Lichnerowicz. On verra qu'elle

1 J'emploie cette expression pour éviter d'entrer dans les détails des expressions ‘enseignement primaire’ et ‘enseignement secondaire’, dont la signification a varié entre le début du XXe siècle et sa deuxième moitié.

n'est pas spécifiquement française, elle a été préparée par des colloques internationaux, et elle est loin d'avoir des causes uniquement internes aux mathématiques.

La remise en cause, d'abord graduelle et partielle, qui leur fit suite commence avec la réforme Haby en 1975 ; en mathématiques elle fut très nette. Depuis, on a vu disparaître peu à peu tout l'enseignement des structures, mais ce n'est pas pour un retour à la mathématique classique et euclidienne, car les motifs qui guident l'élaboration des programmes sont autres.

Nous avons l'intention de faire une comparaison la plus précise possible, basée sur les textes officiels et des extraits de manuels scolaires de diverses époques, reflets des pratiques et des attentes sociales envers les mathématiques.

Programmes classiques "euclidiens ", jusqu'aux années 60.

Je nomme ces programmes ainsi parce que le cours de géométrie de l'enseignement secondaire suit assez fidèlement les Eléments d'Euclide, dont l'influence a été énorme, puisqu'elle a duré plus de deux millénaires.

On peut les décrire sommairement comme faisant à l'école primaire :
— une place importante et approfondie au calcul et au raisonnement arithmétique et à des techniques de calcul mental ;
— au CM2 une large place aux pourcentages et à la règle de trois (proportionnalité).

Dans l'enseignement secondaire —avec un raffinement oublié —l'accent est mis sur la géométrie euclidienne " traditionnelle ", considérée comme la véritable preuve de la capacité inventive des élèves en mathématiques [2], le lieu par excellence où se déploie le raisonnement déductif et son expression rhétorique, alors que l'algèbre (qui n'était pourtant pas négligée si l'on compare à ce qui est demandé aujourd'hui) était de moindre prestige.

I. L'arithmétique à l'école primaire.

Voyons d'abord par exemple le programme du CE1 de 1902 :

Calcul et géométrie intuitive (3 h.)
Calcul
Révision du cours précédent.
Numération des nombres entiers.
Rappeler les principales unités du système métrique et leurs multiples.
Calcul mental : Insister beaucoup sur le calcul mental. Étude continuée de la table d'addition et de la table de multiplication. Étude des expressions : demi, moitié, tiers, quart. Continuation des exercices de mesure intuitive.
Calcul écrit : Les quatre opérations, toujours sur des nombres peu élevés, trois chiffres au plus au multiplicateur et deux au diviseur.
Petits problèmes simples, résolus le plus souvent en classe au tableau, quelquefois sur copie.
Géométrie intuitive
Simples exercices pour faire reconnaître et désigner les figures régulières les plus élémentaires : carré, rectangle, triangle, cercle.
Différentes sortes d'angles.

2 Voir le texte de René Thom 'L'enseignement de mathématiques modernes, une erreur pédagogique et philosophique ?', à l'adresse http://membres.lycos.fr/sauvezles-maths/Textes\lVoltaire/thom70.htm

On notera, en se rappelant qu'il s'agit de l'enseignement à des enfants de CE1, les enfants du peuple de l'école de Jules Ferry, “ Les quatre opérations, toujours sur des nombres peu élevés, trois chiffres au plus au multiplicateur et deux au diviseur ”, et on comparera avec les programmes actuels réservant au cycle 3 (CE2 et CM) l'étude des nombres de plus de trois chiffres. On peut raisonnablement supposer sur ce court exemple que si les instructions accompagnant le programme de 1902 [3] avaient été d'une ambition exagérée par rapport aux possibilités des enfants, on en eût changé assez vite. Au contraire, on peut constater la grande stabilité de cet enseignement de base, sans que rien ne permette de douter de sa qualité, puisqu'il a produit non seulement la brillante école mathématique qui a illustré notre pays en ce vingtième siècle, mais aussi les techniciens et ingénieurs nécessaires à l'essor technique et industriel.

Pour se représenter une pratique d'enseignement, il ne suffit pas d'étudier les programmes. Citons un exercice tiré du ‘Livre de calcul pour la neuvième' (CE2, donc huit-neuf ans), de Jacques Bertin, édité probablement dans les années 1920 par Montligeon ; page 45 :

> “ D'un fût de 125 litres, un garagiste retire de quoi remplir 13 bidons d'essence de 5 litres. Combien de litres reste-t-il dans le fût ? ”

Cet énoncé présente une caractéristique que nous retrouverons souvent, dans tous les textes anciens : l'opération intermédiaire nécessaire pour répondre à l'unique question posée n'est pas indiquée, le maître (et par lui, tout le système scolaire) incite ainsi les élèves à la réflexion et à l'autonomie dans la résolution du problème. La liberté dans la méthode préparait la liberté de pensée (ou de penser).

Au CM2 une partie du temps d'enseignement était consacrée à la “ règle de trois ”, expression particulière de la proportionnalité. Voici un exemple d'explication (Croisille, Arithmétique, 1924) :

> “ Deux grandeurs sont directement proportionnelles lorsque l'une devenant 2, 3, 4… fois plus grande ou plus petite, l'autre devient aussi 2, 3, 4… fois plus grande ou plus petite.
> *La règle de trois simple et directe.*
> Problème : Sur un champ de 12 ares, planté d'asperges, un cultivateur emploie 15 kg de nitrate de soude. Quel poids de nitrate emploiera-t-il sur un autre champ de 38 ares ?
> Sur 12 a. le cultivateur épand 15 kg de nitrate,
> sur 1 a. il épand 12 fois moins, soit 15 kg : 12, ou $\frac{15 \text{ kg}}{12}$,
> sur 38 a. il épand 38 fois plus que sur 1 a., soit $\frac{15 \text{ kg}}{12} \times 38 = \frac{15 \text{ kg} \times 38}{12} = \mathbf{47{,}5\ kg}$.
> Nous avons effectué d'abord la multiplication, puis la division.
> Ce problème, qui s'applique à des grandeurs proportionnelles et qui consiste, trois nombres étant donnés, à en chercher un quatrième, est une **règle de trois**.
> Cette règle est dite simple parce qu'elle ne contient que deux espèces de grandeurs ; on la dit aussi directe parce que ces grandeurs sont directement proportionnelles.
> On n'effectue les opérations qu'après avoir simplifié les expressions. ”

On sait que cette notion a toujours pré-

3 Instructions qui sont restées pratiquement stables jusqu'en 70.

senté des difficultés pour bon nombre d'élèves, les travaux de recherche en didactique faits par Vergnaud et Rogalski [4] notamment pour tenter de les surmonter ont précisé le pourcentage de population qui y échoue toujours (plus de la moitié), et ont prouvé que toutes les autres méthodes d'enseignement de la proportionnalité ne réussissent pas mieux, voire font pire. On peut noter aussi la recommandation de simplifier avant de calculer, ce qui suppose une bonne maîtrise des fractions : en effet, elles étaient présentées dans un chapitre précédent de ce livre.

Suivent les grandeurs inversement proportionnelles, et la règle de trois composée : ce qu'en termes modernes on appellerait la bilinéarité, et dont nos élèves de Seconde actuels réussissent les problèmes à environ 20 à 30%.

II. Dans le second degré une place importante à la géométrie

Ces programmes accordent une place importante à la géométrie, dans sa conception fixiste dont on peut trouver la base philosophique chez Parménide : l'étude détaillée des propriétés des figures en soi.

Si l'on considère les relations de certaines figures, par exemple les triangles égaux ou semblables, on ne s'intéresse pas à la transformation qui amènerait l'une des figures vers l'autre, car la transformation est assimilée au mouvement, rejeté comme incompréhensible par cette école philosophique [5] (voir pour la même raison les paradoxes de Zénon d'Élée, élève de Parménide).

Les premières propriétés vues en cinquième étaient les cas d'égalité des triangles, pris de fait comme axiomes, qui servaient à démontrer toutes les propriétés, métriques et affines, le plan du cours suivant à peu près fidèlement les Éléments d'Euclide. Parmi les propriétés métriques, plus riches et privilégiées à partir de la Quatrième, celles des angles et du cercle étaient des éléments importants (angles inscrits, arc capable, trigonométrie, puissance d'un point par rapport à un cercle, axe radical, polaires, inversion, puis coniques). Ces sujets ont pratiquement disparu aujourd'hui..sauf dans les logiciels de DAO dont on peut se demander qui saura ultérieurement les maintenir, voire les utiliser.

Voici pour montrer le type de questions posées à partir de ces notions un problème du livre de quatrième de Lebossé Hémery (1947), page 211 n° 414 :

" On donne un cercle de centre O, de rayon R. D'un point A on mène les deux tangentes AB et AC à ce cercle.
1°) Montrer que le centre du cercle inscrit au triangle ABC est sur le cercle de centre O.
2°) Montrer que le centre du cercle circonscrit au même triangle est au milieu de OA ; évaluer par rapport à R sa distance aux tangentes AB et AC.
3°) Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC est le symétrique de O par rapport à la corde BC. "

Et un problème donné en mathéma-

4 On peut consulter par exemple de Gérard Vergnaud L'enfant, la mathématique et la réalité, édité chez Peter Lang, et de Janine Rogalski, dans la revue Recherche en didactique des mathématiques n°3.3, L'acquisition de notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales.

5 On pourra pour une réflexion approfondie sur les rapports entre mouvement et transformations géométriques se reporter à l'article de Rudolf Bkouche, 'Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles', paru dans le Bulletin de l'APM n° 430.

tiques élémentaires (Géométrie de Brachet et Dumarqué, 1953, page 64 n° 16 :

> “ Soit un triangle ABC ; les bissectrices de l’angle A et la tangente en A au cercle ABC coupent la droite BC en D, D’, E. Démontrer que
> 1° E est le milieu de DD’.
> 2° les trois points tels que E sont alignés. ”

Les objets géométriques sont simples, familiers depuis la classe de Quatrième. La seule indication pour l’élève est le chapitre dans lequel figure cet exercice : Les relations métriques ; on entendait par là la division harmonique (quatre points alignés A, B C, D tels que $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$), le théorème d’Al Kashi, la somme et la différence des carrés des distances à deux points fixes, les théorèmes de Leibniz, de Ménélaüs, de Stewart, de Céva (qui sont toujours étudiés par nos voisins belges).

La résolution de tels exercices —non exceptionnels, je les ai pris au hasard dans ces livres —demandait donc aux élèves de bien savoir leur cours afin d’avoir une chance d’y trouver des ressources, de travailler leur mémoire pour organiser leurs connaissances, et était une exigeante éducation à la discipline du travail intellectuel, pour ne pas céder au découragement ; éducation à l’autonomie, à la liberté, nous ne saurions trop y insister.

On objectera peut-être que c’était difficile, que seuls les enfants de classes sociales aisées y étaient soumis, que cet enseignement était élitiste, grand reproche des sociologues progressistes. Voire. Pour comparer, qu’enseignait-on dans les écoles populaires recevant des élèves d’âge comparable (trois ans après le certificat d’études), les écoles primaires supérieures ?

On se reportera par exemple aux programmes d’enseignement court de 1945, rédigés comme ceux des lycées sous l’influence de Durry, Langevin et Wallon [6], pour constater qu’ils sont très peu différents de ceux du lycée (n’oublions pas que la différence importante était la présence des langues anciennes, non l’enseignement des sciences), et là aussi l’information la plus convaincante est donnée par les manuels scolaires.

J’ai à ma disposition quelques manuels d’algèbre d’école primaire supérieure. Voici donc d’abord L’algèbre à l’usage des écoles primaires supérieures, de Borel et Royer, chez Colin, 1921, dans le chapitre des équations du premier degré, pages 156-158, la première équation à résoudre est :

$$2x + 5 = 5x - 4$$

vers la fin

$$\frac{\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}}{\frac{x}{a-b}-\frac{x}{a+b}} = 1$$

et la dernière

$$\sqrt{5+x}-\sqrt{\frac{25}{5+x}} = \sqrt{10+x}$$

Pour un autre exemple, extrait du Livre d’Algèbre destiné à l’enseignement primaire supérieur, de Carlo Bourlet et Z. Desbrosses, 1920, voir encadré page suivante. Dans ce chapitre, voici un exercice, comme toujours extrêmement concis :

6 Le plan Langevin-Wallon peut être téléchargé à l’adresse http://perso.wanadoo.fr/claude.rochet/ecole/docs/langevin.pdf

“Chapitre Progressions, logarithmes, intérêts, p. 312 et suivantes.

360. - *Placements annuels*. - Une personne place, tous les ans, au commencement de chaque année, une même somme a, à intérêts composés, quel est le capital constitué à la fin de la n-ième année ?

La somme a, placée au commencement de la première année, reste placée pendant n années. Elle a donc acquis, à la fin de la n-ième année, la valeur

$$a\,(1+r)^n,$$

r étant le taux.

Le second versement a ne reste placé que n –1 années ; il devient donc à la fin de la n-ième année,

$$a\,(1+r)^{n-1}.$$

et ainsi de suite. Le dernier versement a ne reste placé qu’un an et acquiert la valeur

$$a\,(1+r)\,.$$

Le capital constitué à la fin de la n-ième année est donc :

$$C = a\,(1+r) + a\,(1+r)^2 + \dots + a\,(1+r)^{n-1} + a\,(1+r)^n.$$

Le second membre de cette égalité est la somme des termes d’une progression géométrique dont le premier terme est a (1 + r) et la raison (1 + r). On a donc (n° 309) :

$$C = \frac{a(1+r)^{n+1} - a(1+r)}{1+r-1}$$

ou

$$C = a(1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r} \qquad (1)$$

Telle est la formule qui donne C. On en conclut

$$\log C = \log a + \log(1+r) + \log[(1+r)^n - 1] - \log r \qquad (2)$$

Pour calculer $\log[(1+r)^n - 1]$, il faut d’abord, par un calcul préliminaire, calculer $(1+r)^n$.

361. –Problème VI. - Un ouvrier dépose à la caisse d’épargne, chaque année, au commencement de l’année, 200 francs, pendant 15 ans. Quelle somme touchera-t-il à la fin de la quinzième année ? Le taux de l’intérêt est 2,5%.

On a ici : a = 200, n = 15, r = 0,025. Pour appliquer la formule (2), calculons d’abord $(1+r)^{15}$. ”

(suit le calcul détaillé par logarithmes)

“ 616. - Un industriel a emprunté le 1er juillet 1900 une somme de 27 650 fr. dont il s’est acquitté en 2 paiements égaux de 17 000 francs chacun, le 1er juillet 1903 et le 1er juillet 1906. On demande quel était le taux de l’intérêt. ”

Le lecteur pourra comparer avec le programme actuel de terminale ES sur les suites géométriques. On ne semble donc pas à cette époque avoir considéré que les enfants de paysans et de petits commerçants pouvaient se contenter de peu, on exigeait d'eux comme des autres du travail, et ils étaient comme tous les enfants de la république supposés a priori capables d'imagination et d'autonomie.

Dans un ordre d'idées voisin, pour rester aux élèves de familles relativement modestes et pour revenir à la géométrie, on peut consulter le programme de la Seconde technique industrielle, qui n'avait rien à envier à celui de la seconde C ; dans les années 60 on accédait à l'enseignement technique industriel à partir de la Quatrième. Et voici ce qui était demandé dans le livre de Géométrie de seconde TI de Lebossé Hémery de 1961, page 146 n° 298 (le premier exercice du chapitre Parallélisme) :

> “ On donne trois droites D1, D2, D3 n'appartenant pas à un même plan.
> 1° On suppose que deux d'entre elles ne sont pas parallèles. Montrer qu'il existe une infinité de droites rencontrant les trois droites données.
> 2° On suppose que D1, D2, D3 sont parallèles entre elles. Montrer qu'il n'existe aucune droite rencontrant les trois droites données. ”

Ainsi qu'on peut le constater par cet exemple, l'enseignement technique demandait et cultivait les mêmes qualités intellectuelles (et morales) que l'enseignement classique : la réflexion, une bonne organisation de la pensée, l'imagination et l'astuce. Il n'avait pas besoin de “ conquérir des lettres de noblesse ”[7] naturelles dès l'origine, et qui ont, au contraire, été dilapidées ultérieurement, au détriment des élèves fréquentant ces classes.

La période 70-75 : réforme des mathématiques modernes

Pourquoi a-t-on changé, et profondément, des programmes qui, on l'a vu, avaient d'un certain point de vue fait leurs preuves ?

La recherche mathématique avait bien avancé, et certains dans l'enseignement supérieur se souciaient du fossé grandissant entre les programmes du secondaire et ceux du supérieur, de la charge d'enseignement à ce niveau qui s'accroissait.

La caractéristique principale de cette réforme est l'importance primordiale des ensembles et des structures : relations, algèbre, et diminution corrélative de la géométrie, qui n'a presque plus subsisté que sous la forme de la géométrie vectorielle, à l'intérieur de l'algèbre linéaire. Le calcul numérique a lui aussi régressé, et à sa suite le calcul algébrique dans son sens ancien, le travail sur les expressions algébriques. Par contre dans le second cycle l'analyse avait des ambitions plus approfondies.

I. Petit historique.

Cette réforme très importante puisqu'elle a bouleversé les contenus, l'ordre et jusqu'aux présupposés métaphysiques d'une partie des mathématiques, a provoqué des remous, des enthousiasmes, des craintes et réactions vives, dont le reflet dans le grand public est apparemment amorti maintenant, mais a duré comme abcès de fixation dans l'imagination populaire bien plus que son étendue réelle.

7 Cf article de Monique Vuaillat dans le Monde du 7-11-2000, http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes\IVoltaire/Vuaillat.htm

Elle était pour certains porteuse d'espoir [8], et par ses nombreux effets a fait couler beaucoup d'encre (et d'électrons), on ne peut manquer de citer les prises de position les plus célèbres : parmi les promoteurs de la réforme, Jean Dieudonné, Gustave Choquet et André Lichnerowicz, et parmi les critiques, René Thom, Rudolf Bkouche, Daniel Lehmann [9].

Mais revenons avant : pourquoi a-t-on changé ?

Certes une raison en est le progrès de la recherche mathématique et l'écart grandissant entre les programmes du secondaire et ceux du supérieur, on en trouve l'écho dans les articles cités par la note ci-dessus.

Mais des influences externes aux mathématiques et à l'école ont joué. Les forces économiques se sont intéressées à la question dès avant 1960 : l'OECE, devenue ensuite OCDE, a suscité, soutenu, financé des séminaires et colloques pour promouvoir une réforme des mathématiques. Pourquoi cette sollicitude, et celle des grandes firmes (BP, par exemple) ? Quelques auteurs se sont intéressés à la question : Bernard Charlot en France, dans Le virage des mathématiques modernes, publié dans le bulletin vert de l'APM n° 352 de février 1986 [10] ; et Barry Cooper en Grande-Bretagne [11], dans son ouvrage (non traduit) intitulé Renegotiating secondary school mathematics (The Falmer Press, 1985) [12].

Leurs analyses se recoupent, pour insister sur l'importance de la préoccupation des milieux économiques ; Bernard Charlot :

> “ Le véritable coup d'envoi de la réforme est donné en 1958-1959 par une organisation internationale à caractère économique: l'Organisation européenne de coopération économique (O.E.C. E.), qui prendra en 1963 son nom actuel d'Organisation de Coopération et de Développement Economiques (O.C.D.E.). Pourquoi l'impulsion décisive vient-elle d'un organisme économique? D'une part, l'U.R.S.S. a lancé en octobre 1957 son premier Spoutnik et le monde occidental, dominé par les U.S.A., s'inquiète de son retard technologique. D'autre part, l'expansion industrielle prend le relais de la reconstruction d'après-guerre et la modernisation industrielle est à l'ordre du jour. La réforme des maths modernes va ainsi s'inscrire très clairement dans une politique de formation au service de la modernisation économique.
> Dès 1958, l'O.E.C.E. crée un Bureau du Personnel Scientifique et Technique, dont l'un des objectifs est de “ rendre plus efficace l'enseignement des sciences et des mathématiques ”. En novembre 1959, l'O.E.C.E. organise un séminaire de dix jours, le Colloque de Royaumont, animé par Marshall H. Stone, de l'Université de Chicago. L'objectif de ce colloque est de promouvoir une réforme du contenu et des méthodes de l'enseignement des mathématiques à l'école secondaire (12-19 ans). ”

8 Exemple interne, la prise de position de l'APMEP dans la Charte de Chambéry, publiée dans le bulletin vert n° 260 et téléchargeable à l'adresse http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes\IVoltaire/chambery.htm

9 On pourra lire – ou relire – leurs articles aux adresses
http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes\IVoltaire/thom70.htm
http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes\IVoltaire/dieudonn.htm
http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes\IVoltaire/lehmann.htm

10 , téléchargeable à l'adresse :
http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes\IVoltaire/charlot84.htm

11 Son site est à l'adresse http://www.dur.ac.uk/~ded0bc/

12 dont un extrait peut être lu à l'adresse :
http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes\IVoltaire/cooper.htm

Et de B. Cooper :

> " Dans la première partie du chapitre, j'examinerai comment les algébristes modernes en sont venus à avoir une influence majeure dans ces débats, spécialement en captant l'opportunité représentée par le nouvel organisme de l'OECE, le Bureau du personnel scientifique et technique, pour produire des rapports sur les mathématiques scolaires. Bien que l'important soit les séminaires et publications de l'OECE, j'étudierai aussi les réponses de membres de l'ATAM et de l'Association mathématique à ces développements jusqu'en avril 1961, particulièrement la diffusion du message du séminaire de l'OECE par les activistes de l'ATAM.
> [.].Les trois sections du colloque étaient dirigées par le professeur J. Dieudonné, du groupe français Bourbaki d'algébristes modernes, le professeur H. Fehr de Columbia, membre du comité directeur du SMSG, et monsieur P. Théron, du ministère français de l'Education. "

L'OCDE prenait directement position sur ces questions de contenu et de pédagogie, dans un rapport de 1961, cité par B. Cooper :

> " Puisqu'il n'y a pas de retour, ni d'espoir d'allonger les années consacrées à l'étude des mathématiques, on se trouve coincé dans le cours de cette étude. La seule solution est que l'école secondaire prenne en charge une partie du fardeau actuellement porté par l'université, pour autant que ce soit compatible avec les possibilités intellectuelles des élèves du secondaire.
> [.]. Apprendre les mathématiques aujourd'hui demande des approches plus efficaces et plus générales. [.].Même les profanes doivent arriver à comprendre ; aujourd'hui, la connaissance des mathématiques est la base de la compréhension des sciences. "

Clairement, au colloque de Royaumont, la grande majorité des participants tenaient pour garanti que l'on parlait de mathématiques universitaires, mais plus tard, ce furent ces mathématiques modernes que les enfants des écoles auraient à apprendre. On a donc suivi le slogan devenu célèbre lancé par Dieudonné : " A bas Euclide ! "

Rétrospectivement, nous pensons que les grands maîtres de la réforme ont très sincèrement espéré que l'enseignement abstrait des structures permettrait de faire une grande économie de pensée, ainsi que le dit élégamment André Lichnerowicz [13] :

> " La mathématique joue là un rôle privilégié pour l'intelligence de ce que nous nommons le réel, réel physique comme réel social. Notre mathématique sécrète, par nature, l'économie de pensée et, par là, permet seule de classer, de dominer, de synthétiser parfois, en quelques brèves formules, un savoir qui, sans elle, finirait par ressembler à quelque fâcheux dictionnaire encyclopédique infiniment lourd.
> [.]. La mathématique apparaît donc comme l'une des principales clés pour l'intelligence du monde où nous vivons. Or l'une de nos graves difficultés est la suivante : cette clé reste, pour trop d'hommes, mystérieuse. Si pour être un mathématicien créateur, certains dons, une vocation affirmée, sont nécessaires, au contraire comprendre des mathématiques faites et, dans une certaine mesure, les maîtriser est en principe à la por-

13 Bulletin de l'A.P.M.E.P. de l'automne 1970, Les mathématiques et leur enseignement ; consultable à l'adresse XXX

tée de tous, mais nécessite, hélas, beaucoup de travail, une immense patience, une certaine forme de rigueur morale aussi. ”

Il y a certes une ressemblance entre le discours de l'OCDE et celui du mathématicien. Mais le travail, la patience et la rigueur morale, il est clair que ce ne sont pas les préoccupations de l'organisme de direction politique et économique, pour qui efficacité signifie d'abord productivité accrue des travailleurs, et investissement si possible au moindre coût. Mais il s'est trouvé que le bailleur de fonds pour les colloques et publications, c'était l'OCDE [14].

II. Structures, constantes, nouveautés et abandons.

Quel a été le résultat concret dans les programmes et les manuels scolaires, de l'importance primordiale accordée aux ensembles et structures ? Quel genre d'exercices illustraient ces notions ?

Par exemple dans le livre de Quatrième de Queysanne et Revuz (1971), page 25 n° 21 :

“ L'ensemble des sommets d'un cube C est E = {a, b, c, d, a', b', c', d'}. Les arêtes sont
ab, bc, cd, da, a'b', b'c', c'd', d'a', aa', bb', cc', dd'
Construisez le graphe cartésien de la relation de E vers E : “ appartient à une même arête de C que.. ”. Cette relation est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ? ”

Ou, page 160 n° 6 :

“ Les suites décimales illimitées écrites ci-dessous représentent-elles des décimaux ? dans l'affirmative, écrivez l'autre suite qui représente le même décimal, et précisez si c'est un entier.

$127{,}429\ 99\underline{9}$; $3199{,}999\ 99\underline{9}$; $2205{,}090\ 90\underline{9}$; $0{,}100\ 10\underline{0}$; $21{,}170\ 00\underline{0}$; $317{,}999\ 99\underline{9}$;

la suite 0,909 900 999 000..obtenue en écrivant 1 chiffre 9, 1 chiffre 0, 2 chiffres 9, 2 chiffres 0, etc. ”

Les élèves manifestaient quelque difficulté avec ce type d'exercice (le n° 6) qui touche à la structure des réels, pour la plupart c'est au mieux avec une soumission polie qu'ils en écrivaient quelques résultats, ce à quoi on pouvait s'attendre : l'axiome des intervalles fermés emboîtés n'est pas tout à fait immédiat, il heurte l'intuition et la pratique ordinaire du calcul ; on sait que les étudiants de Deug ont toujours la même incompréhension, comme l'atteste par exemple l'article de Michèle Artigue dans les Notices de l'AMS n° 1377, de décembre 1999 [15].

Le calcul algébrique, page 221 n° 15 du Queysanne et Revuz :

On donne les polynomes
$A(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$; $B(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2$; $C(x) = x^4 - 3x^3 + x^2$.
Calculer $2A + B - 3C$.

Il est très classique ; en effet, on trouve par exemple dans le Lebossé Hémery de

14 …qui continue à s'intéresser à l'enseignement, à preuve un rapport récent sur les écoles innovantes, et un sur l'analyse des politiques d'éducation. Le meilleur site à consulter, outre celui de l'OCDE, pour son excellente documentation, est celui de l'APED : http://users.skynet.be/aped/

15 adresse: http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes\lVoltaire/Artigue.htm

Quatrième 1947, page 48, des exercices, 205 à 207, semblables (avec deux variables).

Page suivante du Queysanne et Revuz, n° 34, toujours classique :

Résoudre les équations :
$(2x + 3)^2 - 25 = 0$; $(4x + 5)^3 - x^2 = 0$;
$(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 0$

Et en géométrie, page 310 n° 14 (alors que les élèves connaissent les propriétés affines du parallélogramme, l'axiome de Thalès mais non le centre de gravité) :

Etant donnés trois points non alignés A, B, C, J le milieu de (A,C), K le milieu de (A,B), S intersection de (BJ) et (CK), M le symétrique de S par rapport à K et N le symétrique de S par rapport à J.
Démontrer que les bipoints (B,M) et (C,N) sont équipollents.
Quelle est la position de S par rapport au couple (B,N) ?
Montrer que la droite (SA) passe par le milieu de (B,C)[16].

A l'autre extrémité de l'enseignement secondaire, en TC, qu'est devenue la géométrie ? Prenons l'Aleph de 1975, page 180, n° 4.38 :

“ Soit φ une isométrie négative de l'espace vectoriel euclidien E ; i étant un vecteur unitaire de transformé i' par φ, soit σ une symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel, telle que $\sigma(i) = i'$. On pose $\psi = \sigma \circ \varphi$.
Démontrer que ψ est une rotation vectorielle.
Démontrer que φ peut s'écrire comme application composée de trois symétries orthogonales par rapport à un plan vectoriel. En déduire que l'application composée de deux isométries négatives est une rotation vectorielle. ”

Notons que cet exercice était traité comme question de cours dans le Cagnac et Thiberge de 1963 (ancien programme, donc), page 326. Seul le lexique a changé. Loin de moi l'idée de le reprocher aux auteurs d'Aleph. Mais alors, la modernité ?

L'exercice ci-dessus se résout de façon formelle très rapidement, l'utilisation des propriétés de la composition des applications montre son efficacité et sa souplesse, qualités précieuses. On peut observer que cet exercice peut être résolu presque hors de tout contexte géométrique —au sens de la géométrie intuition sensible si le lecteur me pardonne cette expression. Il suffit de savoir que σ est une application involutive, et que les êtres mathématiques appelés isométries sont affectés d'un signe ou d'une parité, ayant la même règle de composition que la parité dans l'addition des nombres entiers. Cette merveilleuse généralité et simplicité, c'est précisément ce qui en fait la beauté fascinante, que nous décrivent avec enthousiasme Lichnerowicz et Dieudonné.

Est-on paradoxalement revenu aux très lointains ancêtres, à Platon et Parménide, la mathématique est-elle une infinie méditation sur le pair et l'impair ?

Cependant, que se passe-t-il dans la tête des élèves ? Dans les livres on trouve assez peu de figures, et l'on a vu que l'esprit du temps n'y portait pas, puisque l'objet d'étude était les relations, et non les

16 Osé-je émettre l'opinion que voilà un agréable classicisme ?

figures intuitives et sensibles à mettre en relation, les élèves n'ont donc pas eu le temps, l'occasion de les travailler longuement, de voir émerger peu à peu par des rapprochements les structures, l'abstraction généralisatrice. Les problèmes se ressemblent un peu tous, ils sont figés, et ne présentent pas de " degré de liberté " d'organisation. Il s'est passé ce que l'on constate et déplore lourdement maintenant : une approche superficielle, désincarnée, on ne " voit " plus les figures ni ce qui les relie, de même que l'insuffisance de pratique du calcul numérique et algébrique n'a pas permis de les apprivoiser, de s'y polir et de s'y élever [17]. De cette cécité se plaignent les étudiants, les professeurs, cela fait même des sujets de thèse [18], car par contrecoup l'algèbre linéaire est incomprise, de ne pas pouvoir s'appuyer sur des images mentales qui auraient dû être acquises par un long et patient travail préalable.

Et n'oublions pas non plus que toute une classe de problèmes à applications pratiques non négligeables est tombée fossile. René Thom avait prévu dès 1970 ces dérives et disparitions :

> " En effet, pour juger pleinement des possibilités d'un élève, il faut le mettre dans une situation non réceptive, mais active, il faut faire appel à son initiative, à son esprit d'entreprise individuel. Or ceci n'est guère concevable dans le cadre d'une théorie " utile ", dont tous les éléments, fixés par leur utilité technique ultérieure, sont enseignés dogmatiquement, et où la vertu scolaire par excellence est l'assimilation, la mémorisation rapide et correcte des données. De ce point de vue, seules les théories qui présentent un aspect ludique [19] ont vertu pédagogique, et, de tous les jeux, la géométrie euclidienne, qui se réfère constamment à un donné intuitif sous-jacent, est le moins gratuit, le plus riche en signification. Ainsi la tendance actuelle, qui est de remplacer la géométrie par l'algèbre, est pédagogiquement néfaste, et devrait être renversée. Il y a à cela une raison simple : alors qu'il y a des problèmes de géométrie, il n'y a pas de problèmes d'algèbre. Un problème d'algèbre ne peut guère être qu'un simple exercice requérant l'application aveugle de règles de calcul, d'un schéma formel préétabli. "

L'enseignement dogmatique de schémas formels préétablis : c'est précisément ce qui s'est produit beaucoup trop, par effet de mode, par pression administrative et psychologique sur les récalcitrants, qui craignaient de passer pour des ignorants ou des ringards ; ceci a choqué même des partisans de la réforme, par exemple Daniel Lehmann. Des critiques ironiques décrivaient avec quelque préoccupation ce qui se passait dans certaines écoles primaires ; par exemple, cité par Gildas Machelot dans L'Education du 17-10-74 : R. Moret : Mathématiques au cours préparatoire, CRDP de Reims :

> " Dans une revue pédagogique américaine, H.E. Vaughan rapporte entre autres l'histoire suivante : " Une des maîtresses

17 Platon, La République, livre VII, 525-528.

18 Thèse soutenue par Ghislaine Chartier à Grenoble en octobre 2000 : «Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire».

19 Que l'on me permette ici une sorte de jeu de mot sur l'idée de ludique et donc de " jeu " : le jeu, c'est aussi en mécanique la différence de mesures de deux pièces voisines, qui permet leur mouvement réciproque, qui permet que le système ne soit pas grippé. J'espère ne pas trahir par cette remarque la pensée de René Thom.

commença sa leçon en disant : Les enfants, ouvrez vos bureaux et prenez vos éléments. " Chaque enfant sortit quelques jetons colorés. Puis " Sortez vos ensembles ! ". Chaque enfant sortit des ficelles, elles aussi colorées. " Maintenant posez vos éléments verts dans votre ensemble jaune. "
Cette maîtresse était très moderne en utilisant le mot ensemble en classe. Naturellement, elle le faisait de façon incorrecte. Un ensemble n'est pas une boucle de fil et n'a pas de couleur.
Les instituteurs qui auront la curiosité de se plonger dans l'ouvrage du CRDP de Reims (dont est tiré l'exemple précédent) ne commettront plus les erreurs de cette enseignante, erreurs dont les écoles américaines n'ont malheureusement pas le privilège. "

Ce qui signifie que chez nous en France on a fait de même, et très certainement les instituteurs ont agi ainsi sur ordre de leur inspection et de leurs formateurs ..Cantor avait beau dire : " L'essence des mathématiques, c'est la liberté " (cité par B. Charlot, dans le même numéro de L'Education), il semble que dans la réalité des pratiques d'enseignement et des rapports entre les enseignants et leur hiérarchie à cette époque, il s'est passé le contraire : l'imposition d'une mode, un dogmatisme lourd, la négation de cette liberté dont nous avons montré qu'elle était avant au cœur du travail mathématique scolaire dès le jeune âge à l'école primaire, dans les programmes traditionnels (qui donc, étaient non seulement euclidiens, mais cantoriens ?).

Etait-il possible d'offrir aux élèves la liberté de recherche, en encadrant moins les questions et en restant dans l'esprit de ces programmes, pour en montrer la fécondité ? Nous en avons trouvé quelques exemples dans les manuels scolaires examinés, mais peu, plutôt dans les chapitres où de fait on retrouve les programmes anciens présentés avec le nouveau vocabulaire (isométries de l'espace euclidien, par exemple) ; citons, rapporté par le Queysanne et Revuz de TC (1976) un exercice du bac E de l'année précédente :

" L'espace affine euclidien E de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé (O, i, j, k). Soit D la droite de E dont un vecteur directeur est i et qui passe par le point H de coordonnées (0, 0, 2).
On désigne par r la rotation d'axe D dans laquelle le point O a pour image le point A de coordonnées $(0, -2, 2)$ et par t la translation de vecteur $(i + j + k)$.
Quelle est la nature géometrique de la transformation $t \circ r$? Préciser ses éléments caractéristiques. "

Et encore, là le chemin est tout de même bien balisé.

Les problèmes d'analyse sont détaillés, découpés menu, guidés, les auteurs ayant confusément conscience de la difficulté de certaines des notions abordées pensent-ils sans doute que les élèves ont besoin de cette aide et que sinon ils ne sauraient rien faire ? Est-ce à dire qu'ils n'auraient pas confiance en l'efficacité des notions et méthodes modernes enseignées ? Comment dès lors convaincre les élèves de la beauté et de l'efficacité de ces notions, et du bénéfice intellectuel de leur étude, s'il faut toujours étayer le moindre problème par force béquilles ?

Il faut sans doute avoir acquis déjà une bonne aisance et de la culture mathématique pour pouvoir essayer librement diverses méthodes de démonstration et en préférer une, mais cela demande du temps, du travail, même pour de très bons élèves, et c'est là que nous butons sur une contradiction : la mathématique moderne a été “ promise au monde ” pour faire des économies de pensée, disaient Lichnerowicz et bien d'autres, et cela plaisait fort à l'OCDE dont le but était de faire des économies de temps d'apprentissage, qui se mesurent en crédits d'enseignement.

Conclusion

Cette habitude de confection des sujets, de plus en plus détaillés et découpés menu, s'est très fortement accentuée depuis, avec d'autres motifs (ou les mêmes) : il s'agit de guider les élèves au maximum pour améliorer artificiellement le taux de réussite aux examens. Ce grâce à quoi ils font de moins en moins de mathématiques : désormais ils ne peuvent plus mettre en jeu – avec la polysémie que je souhaite maintenir à ce mot - des connaissances, et le mal s'aggrave. On ne peut rompre ce cercle vicieux que par la remise en liberté des énoncés, ce que propose d'ailleurs Daniel Reisz dans un numéro spécial du bulletin de l'APMEP, le supplément au n° 414. Et dès le jeune âge, bien avant le bac.

L'économie de pensée dont parlaient les promoteurs de la réforme est certaine au niveau de l'enseignement supérieur, mais à une condition : l'acquisition préalable d'une bonne culture mathématique au niveau du secondaire. Il semble que cette condition ne soit plus remplie à l'heure actuelle, on en déduit aisément que l'économie de pensée devient aléatoire au niveau de l'enseignement supérieur ; et que moins que jamais elle ne saurait être opératoire au niveau de l'enseignement secondaire, contrairement aux espoirs que ses promoteurs fondaient en elle à ce niveau.

De plus, il ne faut pas confondre l'économie de pensée avec l'économie de temps d'apprentissage et l'économie de crédits d'enseignement subséquente. Si malentendu il y a, ces vingt-cinq dernières années ne l'ont pas levé, au contraire : la confusion a été entretenue et même aggravée. Est-ce une négligence regrettable de la part des mathématiciens ? N'oublions pas que certains d'entre eux ont réagi, les textes cités en font foi, et l'expérience leur a donné raison. Ils n'ont pas été suivis. Pire, les réformes ultérieures, le retour apparent aux mathématiques classiques depuis Haby, puis la multitude de réductions et de tentatives diverses d'adaptation, poursuivent en fait les mêmes buts : ne pas affronter la difficulté, et habituer les élèves à ne pas penser par eux-mêmes et à obéir (la pensée qui s'économise ?), en leur dictant tous les détails intermédiaires.

Enfin, on peut se demander à quelles conditions (et dans quels délais) ce processus pourrait être réversible.

A partir du moment où l'on a posé que la pensée peut s'économiser, d'autres devaient venir immanquablement vous assurer que l'on peut faire l'économie de la pensée, et dans le même mouvement, ils ont installé sur le marché des produits promettant de pallier le manque ainsi créé [20]. Ce qui est économisé ici en deniers publics va

20 Cf. l'article de Gérard de Sélys, http://www.monde-diplomatique.fr/md/1998/06/DE_SELYS/10584.html (L'Ecole, marché du XXIème siècle)

devoir être dépensé ailleurs, à titre individuel et privé. Il ne s'agit même plus simplement de réduction des coûts, mais bien désormais de détournement pour générer des profits non publics, qui seront acquis de façon presque sûre sur des consommateurs formés à la soumission, sans armes théoriques. Le passage insidieux de «l'économie de pensée» dans la pensée économique que prouve l'histoire du dernier quart de siècle est une tendance lourde, et difficile à infléchir. Il est sans doute plus difficile encore de prendre la décision de retrousser les manches pour retrouver un vrai travail de réflexion. Une décision à prendre en charge par le peuple, une décision proprement politique.

Bibliographie

Aleph, la collection des manuels scolaires de TC, 1972
Michèle Artigue, Notices de l'AMS n° 1377
Rudolf Bkouche, Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles, Bulletin de l'APM n° 430
Borel et Royer, Algèbre pour les écoles primaires supérieures, 1921
Bourlet et Desbrosses, Algèbre pour l'enseignement primaire supérieur, 1920
Cagnac et Thiberge, Géométrie, Mathématiques élémentaires, 1963
Charte de Chambéry, Bulletin de l'APMEP, 1972
Bernard Charlot, Le virage des mathématiques modernes, 1984
Barry Cooper, Renegotiating secondary school mathematics, The Falmer Press, 1985
Croisille, Arithmétique et géométrie, cours moyen, 1924
Jean Dieudonné, Devons-nous enseigner les « mathématiques modernes « ? Bulletin de l'APMEP n° 292, février 1974
Lebossé et Hémery, Arithmétique, algèbre et géométrie, Quatrième et Troisième, 1947 ; et Géométrie de Seconde TI, 1961
Daniel Lehmann, Mathématique et dogmatisme, L'école et la nation, Numéro 209, mai 1972
André Lichnerowicz, Les mathématiques et leur enseignement, bulletin de l'A.P.M.E.P. automne 1970
Les programmes officiels de 1902, 1925 et 1945, Bulletin Officiel de l'Education Nationale, bibliothèque de l'INRP.
Queysanne et Revuz, Mathématiques, 4e et 3e, 1971
Daniel Reisz, Brouillons pour des sujets de bac du 3e millénaire, Bulletin de l'APMEP n°414.
René Thom, Les mathématiques modernes, une erreur pédagogique et philosophique, L'Age de la science, juillet 1970.
Gérard Vergnaud, L'enfant, la mathématique et la réalité, chez Peter Lang
Monique Vuaillat, Qui sont les visionnaires de l'éducation ? Le Monde, 7 novembre 2000.