

---

## DU COMPAS AUX INTEGRAPHES : LES INSTRUMENTS DU CALCUL GRAPHIQUE

---

Dominique TOURNES  
Irem de La Réunion  
et Equipe REHSEIS

### Introduction

Avant 1970, c'est-à-dire avant l'apparition et la rapide diffusion des calculatrices de poche et des ordinateurs personnels, le calcul numérique à l'aide des tables de logarithmes était extrêmement coûteux, en temps comme en énergie. Les professionnels qui devaient effectuer des calculs importants (physiciens, ingénieurs, techniciens, etc.) préféraient donc, sous réserve de ne pas avoir besoin d'une grande précision, recourir à des méthodes graphiques, plus faciles à mettre en œuvre. C'est ainsi que s'est développé, essentiellement pendant le XIX<sup>ème</sup> siècle et la première moitié du XX<sup>ème</sup>, un véritable « calcul graphique ». Ce calcul a progressivement pris de l'ampleur, jusqu'à constituer une sous-discipline autonome au sein du calcul numérique, avec ses techniques, ses instruments, ses spécialistes, ses manuels et son enseignement [Tou2000].

Jusqu'à présent, le calcul graphique a relativement peu intéressé les historiens des sciences. Pour se faire une idée précise des diverses facettes de cette discipline et de l'importance sociale qu'elle a pu avoir, il est encore nécessaire de consulter directement des ouvrages d'époque [Oca1893, Oca1908, Mem1909, Run1912, Wil1928]. Ces lectures m'ont conduit à formuler la définition suivante : le calcul graphique est l'ensemble des procédés exploitant des tracés réalisés sur un support plan, à l'aide de n'importe quel type d'appareil, et visant à éviter, en totalité ou en partie, le recours au calcul numérique pour la résolution d'un problème. Dans ce qui suit, je souhaite brosser à grands traits l'histoire de ce calcul, en prenant pour fil directeur la description des instruments utilisés et en illustrant mon propos par la résolution graphique de quelques problèmes simples.

## 1 Les instruments du calcul par le trait

La première composante du calcul graphique, la plus ancienne, est le « calcul par le trait ». C'est le calcul géométrique proprement dit, dont les bases ont été clairement exposées par Descartes, au début de sa *Géométrie* [Des1637]. Une unité de longueur ayant été choisie, les données numériques sont représentées sur la feuille de dessin par des segments de droite. On réalise ensuite des constructions géométriques, à l'aide d'instruments variés, qui aboutissent à de nouveaux segments de droite représentant les valeurs inconnues cherchées.

Dès l'Antiquité, des classifications avaient été faites en fonction des instruments utilisés — ou, ce qui revient au même, en fonction des courbes employées — pour la résolution d'un problème. Pappus distinguait les problèmes « plans », où l'on n'emploie que des droites et des cercles (autrement dit, que l'on construit avec la règle et le compas), les problèmes « solides », qui font intervenir en plus les sections coniques, et les problèmes « linéaires », où entrent en jeu d'autres types de courbes. Descartes, quant à lui, introduit essentiellement une distinction entre les courbes algébriques et les autres : ces dernières, qualifiées de courbes « mécaniques », sont rejetées en dehors de la géométrie.

En ce qui nous concerne, l'apport essentiel de Descartes est d'avoir mis en évidence que le choix d'une unité de longueur, tout en établissant une correspondance entre nombres et segments de droite, permet de surmonter les anciens obstacles liés à la non-homogénéité des grandeurs géométriques. Dès les pre-

mières pages de sa *Géométrie*, Descartes explique comment réaliser à la règle et au compas les opérations usuelles sur les nombres : addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racine carrée. Il suggère également que les autres opérations algébriques pourront être traitées en faisant intervenir des courbes de degré supérieur, soit construites par points à la règle et au compas, soit tracées d'un trait continu par l'intermédiaire d'instruments adéquats. La philosophie de la *Géométrie* est que, par le choix d'un repère, on peut ramener tout problème de géométrie à la résolution d'un système d'équations algébriques, et qu'inversement, la géométrie permet de construire, c'est-à-dire de calculer graphiquement, les solutions de toute équation algébrique issue de n'importe quel type de problème, qu'il soit géométrique ou non.

C'est au début du XIX<sup>ème</sup> siècle que ces idées vont pleinement porter leurs fruits dans le domaine des sciences de l'ingénieur. Jean-Victor Poncelet (1788-1867), à l'École d'application du génie et de l'artillerie à Metz, puis Barthélémy-Édouard Cousinéry (1790-1851), à l'École des ponts et chaussées à Paris, introduisent des méthodes graphiques dans leur enseignement. Cousinéry écrit à cette occasion le premier traité complet de calcul graphique, intitulé justement *Le Calcul par le trait* [Cou1839]. Le mouvement va se poursuivre principalement en Allemagne, avec la création par Carl Culmann (1821-1881) d'une nouvelle discipline, la « statique graphique », dont le but est l'application du calcul graphique à l'analyse des conditions de stabilité et de résistance des constructions (poutres, ponts, toitures, voûtes, murs de soutènement, etc.). Le calcul graphique, étroitement associé à la géométrie descriptive en plein essor, se révèle un outil remarquablement efficace

entre les mains des ingénieurs [Sch1989, Mau1998]. Pour en prendre pleinement conscience, il suffit de savoir que les structures de la Tour Eiffel ont été calculées par les méthodes de la statique graphique.

A la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, le calcul par le trait est loin de se limiter à la résolution des équations algébriques : il aborde également les problèmes transcendants, qu'il s'agisse de quadratures, d'équations différentielles ordinaires ou même d'équations aux dérivées partielles. Ne pouvant aborder ici ces dernières questions, je vais me contenter de donner un aperçu des instruments du calcul par le trait et de quelques techniques graphiques de résolution des équations algébriques.

**1.1 Règles, compas et autres instruments de dessin**

Les instruments de base du calcul par le trait sont évidemment la règle et le compas. Parmi les compas, il n'y a pas seulement les compas de dessin, mais aussi les compas à pointes sèches, exclusivement destinés à prendre et à reporter des mesures. Quelle précision peut-on en attendre ? Les calculateurs utilisaient des verniers graphiques (voir fig. 1) permettant d'atteindre la centième partie de l'unité choisie : si, par exemple,

comme sur la figure, l'unité principale de graduation est le centimètre, on obtient des ouvertures de compas au dixième de millimètre près. On conçoit donc facilement qu'en réalisant des constructions soignées sur de grandes feuilles de papier, à une échelle adaptée, on puisse atteindre une précision suffisante pour les calculs courants du domaine scientifique et technique.

De nombreux instruments ont été imaginés et fabriqués pour seconder la règle et le compas, et offrir des raccourcis pour les constructions les plus fréquentes. Les principaux sont visibles sur la figure 2 : à côté d'un compas à dessin et de ses accessoires, d'un compas à pointes sèches et de plusieurs verniers graphiques adaptés à diverses unités, on observe une équerre, une règle à parallèles, un rapporteur, un compas de proportion (instrument de calcul basé sur les propriétés des côtés des triangles) et un compas à trois branches (pour transférer trois points en même temps d'un dessin à un autre).

Aux instruments précédents, on peut ajouter encore les compas à balustre (pour tracer les cercles de petit rayon), les compas à verge (pour les cercles de grand rayon), les compas d'espacement (compas à plusieurs pointes pour diviser une ligne en parties égales), les compas de réduction et pantographes (pour

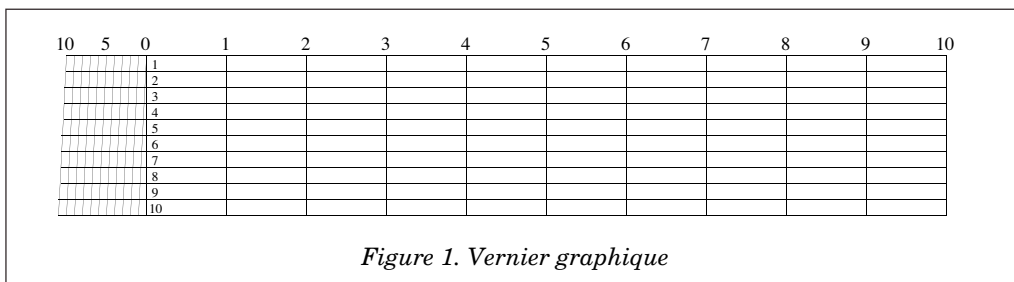


Figure 1. Vernier graphique

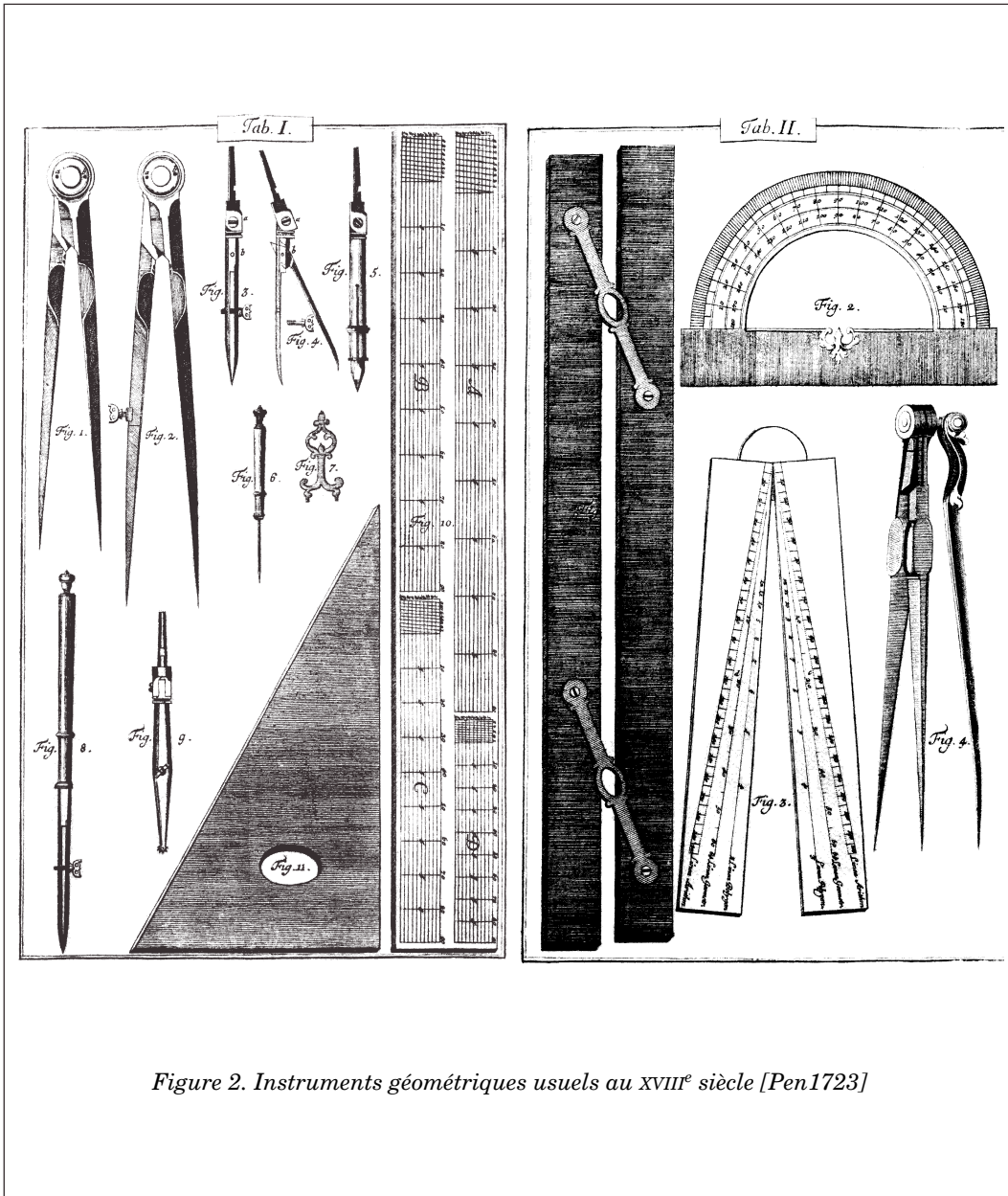


Figure 2. Instruments géométriques usuels au XVIII<sup>e</sup> siècle [Pen1723]

réduire ou agrandir un dessin), etc. En s'éloignant enfin des droites et des cercles, il y a eu aussi de nombreux instruments et gabarits pour tracer d'autres courbes : coniques, spirales, etc.

Bien entendu, tous ces instruments n'étaient pas réservés exclusivement au calcul graphique, mais trouvaient un usage dans tous les domaines de la géométrie pratique. Jusqu'à une époque récente, ils ont fait l'objet d'une industrie et d'un commerce florissants [Ham1988].

### 1.2 La construction des équations

À la suite de Descartes, de nombreux mathématiciens se sont intéressés à la « construction des équations », c'est-à-dire à la détermination géométrique des racines d'une équation algébrique par l'intersection de courbes choisies parmi les plus simples possibles. Ces recherches, qui avaient souvent un caractère assez spéculatif, semblent tomber en désuétude chez les théoriciens vers 1750, à un moment où l'algèbre et l'analyse s'éloignent de la géométrie et où le concept de courbe cède du terrain devant celui de fonction [Boy1945, Bos1984]. Par contre, parmi les savants qui s'occupent d'applications, qu'il s'agisse d'ingénieurs civils ou militaires, on continue à faire des recherches sur la résolution graphique des équations.

Je vais présenter succinctement deux méthodes, l'une du XVIII<sup>ème</sup> siècle, l'autre du XIX<sup>ème</sup>, qui donneront une idée des techniques alors en usage.

#### 1.2.1 Méthode de Segner

En 1761, Johann Andreas von Segner (1704-1777) publie une construction gra-

phique de l'équation polynomiale la plus générale [Seg1761]. Cette construction a été popularisée par Lagrange dans ses cours à l'École normale de l'an III [Dho1992].

Pour fixer les idées, expliquons-la dans le cas d'une équation du troisième degré  $f(x) = 0$ , avec  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  : Après avoir choisi une unité, on place sur l'axe des ordonnées les points D, C, B, A tels que  $\overline{OD} = d$ ,  $\overline{DC} = c$ ,  $\overline{CB} = b$ ,  $\overline{BA} = a$ , et sur l'axe des abscisses les points I, M tels que  $\overline{OI} = 1$ ,  $\overline{OM} = x$ . Toutes les données étant ainsi en place, on construit successivement les points N, N', P, P', Q comme sur la figure 3 :

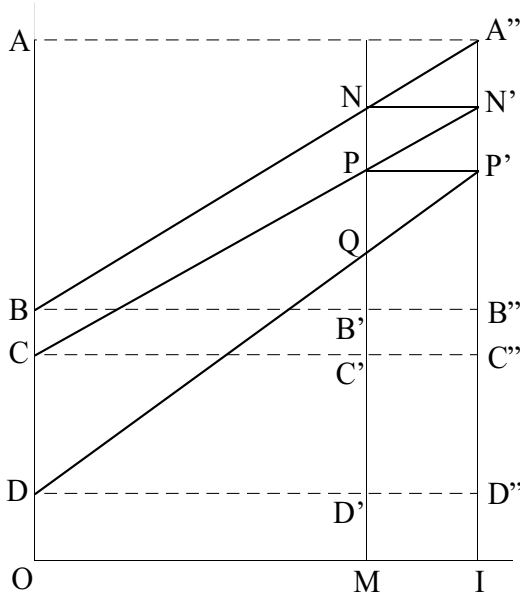


Figure 3. Méthode de Segner pour l'équation du troisième degré

On a alors  $\overline{MQ} = f(x)$  d'après les égalités suivantes :

- $\overline{B'N} = \overline{B''A''} \cdot x = ax$  ;
- $\overline{C'N} = \overline{C'B'} + \overline{B'N} = ax + b$  ;
- $\overline{C'P} = \overline{C''N''} \cdot x = \overline{C'N} \cdot x = (ax + b)x$  ;
- $\overline{D'P} = \overline{D'C'} + \overline{C'P} = (ax + b)x + c$  ;
- $\overline{D'Q} = \overline{D''P''} \cdot x = \overline{D'P} \cdot x = ((ax + b)x + c)x$  ;
- $\overline{MQ} = \overline{MD'} + \overline{D'Q} = ((ax + b)x + c)x + d$  .

La construction de Segner apparaît ainsi comme un équivalent graphique de l'algorithme de Horner utilisé pour le calcul numérique de  $f(x)$ . Dans un cas, il s'agit de minimiser le nombre de multiplications à effectuer, dans l'autre le nombre de parallèles à construire. Pour approcher au mieux les racines de l'équation  $f(x) = 0$ , on peut procéder par tâtonnements, en essayant successivement

plusieurs valeurs de  $x$  tout comme on le fait, par exemple, dans l'algorithme numérique de dichotomie.

La méthode peut servir aussi à construire par points le graphe de  $f$ . En 1771, John Rowning (1699-1771) conçoit un appareil mécanique (fig. 4) pour réaliser ce même tracé d'un mouvement continu [Row1771]. Le mécanisme est décrit dans l'*Encyclopédie méthodique* de Diderot et d'Alembert sous le nom de « constructeur universel d'équations » [Ale1784-89]. Un exemplaire moderne de cet appareil a été fabriqué et présenté au Palais de la Découverte, à Paris, à l'occasion de l'exposition « Au delà du compas : la géométrie des courbes », qui a eu lieu du 29 février au 12 novembre 2000 [Con2000].

De nos jours, un logiciel de géométrie dynamique tel que *Cabri-Géomètre* permet de tracer automatiquement le lieu du point terminal Q lorsque le point M décrit l'axe des abs-

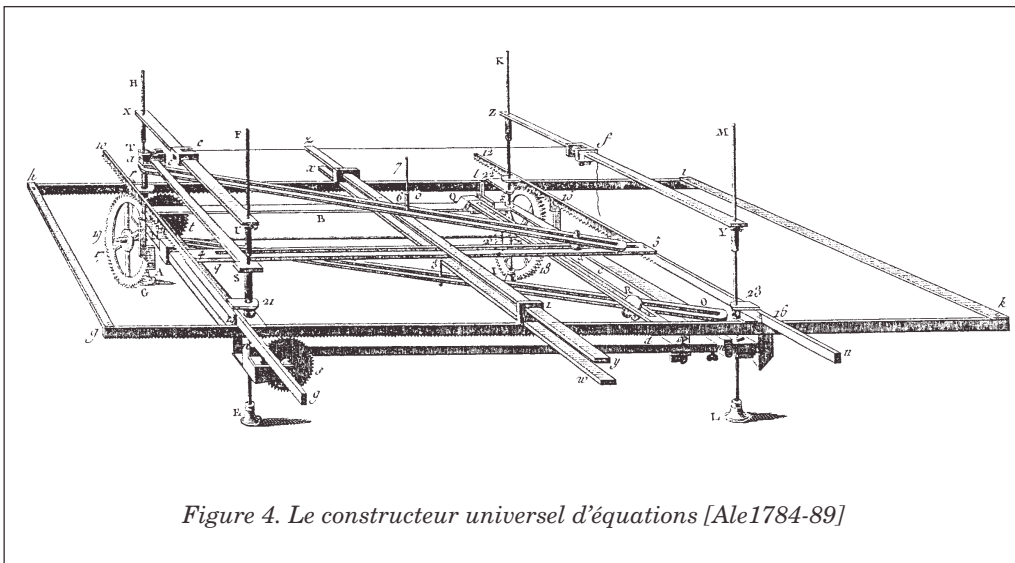


Figure 4. Le constructeur universel d'équations [Ale1784-89]

cisses. Plus généralement, en s'inspirant de cela, les amateurs de géométrie dynamique pourront tracer les graphes des fonctions rationnelles, ainsi que les courbes paramétrées par des polynômes ou des fractions rationnelles.

1.2.2 Méthode de l'orthogone de Lill

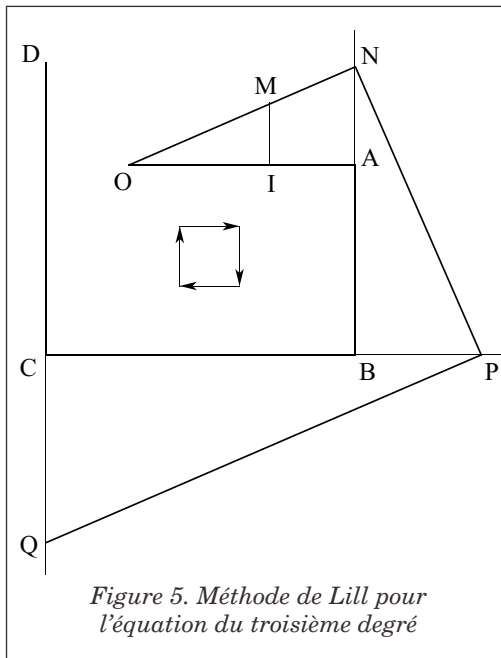
Un capitaine du génie de l'armée autrichienne, E. Lill, publie en 1867 une autre construction de l'équation polynomiale la plus générale, très différente de celle de Segner mais tout aussi simple à réaliser en pratique [Lil1867a, Lil1867b]. Continuons à nous placer, pour faciliter l'exposé, dans le cas du troisième degré.

A partir d'une origine O, on construit une ligne polygonale OABCD à côtés consécutifs perpendiculaires — d'où le nom d'« orthogone » — et telle que  $\overline{OA} = a$ ,  $\overline{AB} = b$ ,  $\overline{BC} = c$ ,  $\overline{CD} = d$  pour les orientations des côtés successifs indiquées sur la figure 5. On place ensuite les points I et M tels que  $\overline{OI} = 1$  et  $\overline{MI} = x$  (pour la première et la deuxième des orientations précédentes).

On construit enfin un second orthogone ONPQ comme sur la figure 5. Il résulte de la construction que les triangles OMI, ONA, NPB et PQC sont directement semblables.

On obtient finalement  $\overline{QD} = f(x)$ , ainsi que le justifient les égalités suivantes :

- $\overline{NA} = \overline{OA} \cdot x = ax$  ;
- $\overline{NB} = \overline{NA} + \overline{AB} = ax + b$  ;
- $\overline{PB} = \overline{NB} \cdot x = (ax + b)x$  ;
- $\overline{PC} = \overline{PB} + \overline{BC} = (ax + b)x + c$  ;



- $\overline{QC} = \overline{PC} \cdot x = ((ax + b)x + c)x$  ;
- $\overline{QD} = \overline{QC} + \overline{CD} = ((ax + b)x + c)x + d$  .

On reconnaît encore l'algorithme de Horner, mais, cette fois, il a été traduit graphiquement par des constructions de perpendiculaires plutôt que de parallèles. Comme pour la méthode de Segner, la résolution de l'équation  $f(x) = 0$  se fait par tâtonnements (on essaye diverses valeurs de x jusqu'à ce que le point Q coïncide avec le point D). Lill, quant à lui, utilisait un transparent finement quadrillé qu'il faisait tourner sur le schéma de l'équation, ce qui lui permettait de suivre à l'œil les côtés successifs d'un orthogone sans avoir à le tracer effectivement [Lil1867b].

Rappelons enfin que, pour le second degré, la condition de coïncidence des points terminaux des deux orthogones (dans ce cas, P et C) conduit à une construction exacte du point intermédiaire N (comme intersection de la droite (AB) et du cercle de diamètre [OC]) et, par suite, à une construction exacte des racines de l'équation. On trouve cette construction, avec diverses variantes, dans de nombreux manuels scolaires de 1ère.

## 2 Abaques et nomogrammes

En calcul numérique, on utilise fréquemment des tables numériques. Le but de ces tables, qui rassemblent les résultats de nombreux calculs faits une fois pour toutes, est d'éviter à l'utilisateur la répétition d'opérations fastidieuses. L'analogie existe dans le calcul graphique : c'est vers la fin du XVIIIème siècle que sont apparues les premières tables graphiques permettant de lire directement sur une feuille de papier ou tout autre support, avec un minimum de manipulation, le résultat d'un calcul.

Une table graphique se présente comme un réseau de lignes ou de points cotés, avec des échelles convenablement graduées, mobiles ou non, et donnant par simple lecture la valeur cherchée en fonction de celle des paramètres. Les tables graphiques ont été appelées d'abord « abaqués » puis « nomogrammes », et la discipline qui s'occupe de leur étude et de leur emploi a reçu le nom de « nomographie » [Eve1982, Eve1986, Ver1997]. Utilisés d'abord par quelques pionniers, les abaqués se sont répandus rapidement, vers la fin du XIXème siècle, dans de nombreux corps de métier, au point de devenir, en quelques décennies, les principaux instruments du calcul graphique.

La règle à calcul, instrument d'origine anglaise datant du XVIIème siècle [Caj1909, Jos1998], équivalent graphique des tables de logarithmes, apparaît *a posteriori* comme un nomogramme à échelles mobiles. De même, certains instruments astronomiques fort anciens, comme les cadrans solaires, les cadrans lunaires ou les astrolabes, pourraient, d'une certaine façon, être rattachés à l'histoire de la nomographie. Laissant de côté ces objets quelque peu particuliers, je vais me limiter ici aux abaqués au sens le plus classique du terme.

### 2.1 Les premières tables graphiques

Les premières tables graphiques sont issues des efforts de la Révolution française pour imposer un nouveau système de poids et mesures. Afin de faciliter le passage de l'ancien système au nouveau, l'article 19 de la loi du 18 germinal an III prescrivait la construction d'échelles métriques permettant de réaliser les conversions sans calcul. Un manufacturier de Rouen, Louis-Ézéchiél Pouchet (1748-1809), rédigea à cette occasion un ouvrage qui connut trois éditions [Pou1794, Pou1795a, Pou1797]. Au fil des variantes successives du texte, on voit se constituer progressivement une « arithmétique linéaire » (c'est le titre d'une annexe à la deuxième édition, annexe qui fera l'objet d'une publication séparée [Pou1795b] et qui deviendra un chapitre à part entière dans la troisième édition).

Dans la version ultime de cette arithmétique linéaire, on assiste à la naissance du concept de table graphique, réseau de lignes sur lequel on peut lire directement, sans aucune manipulation, le résultat d'une opération. Par exemple, pour la multiplication  $z = xy$ , le graphique est constitué de deux faisceaux de lignes droites cotées, horizontales et ver-

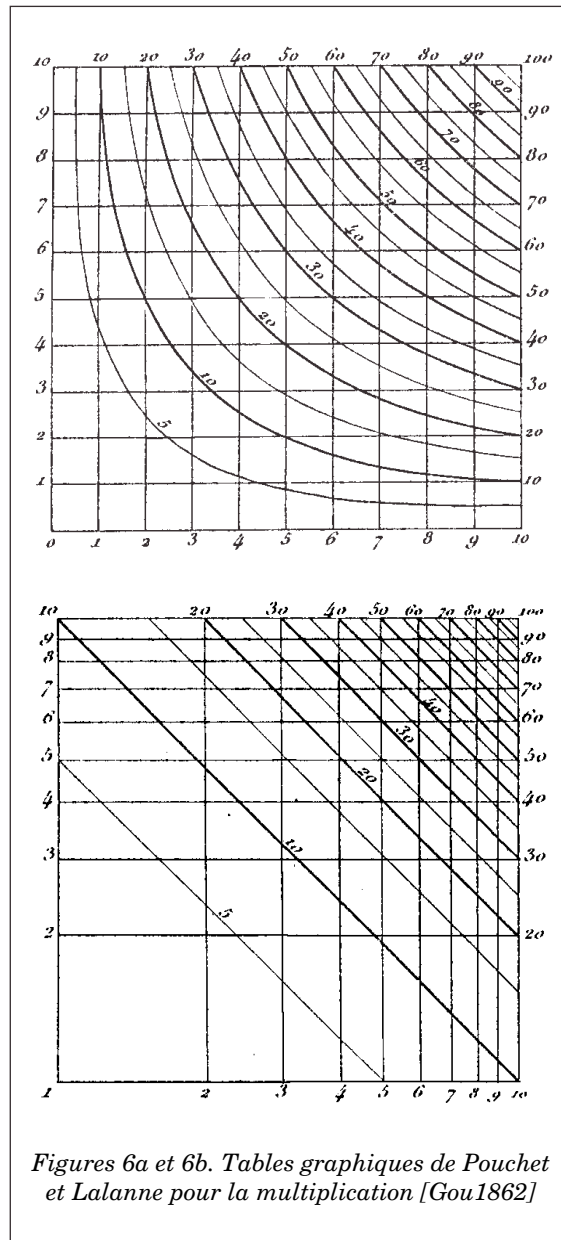


ticales, à travers lesquels passe un faisceau d'hyperboles, cotées elles aussi (voir fig. 6a). Si l'on veut effectuer la multiplication, disons de 5 par 2, on prend le point d'intersection de la verticale  $x = 5$  et de l'horizontale  $y = 2$ , et on suit de l'œil l'hyperbole sur laquelle se trouve ce point pour aller lire sa cote  $z = 10$ . Pour des valeurs de  $x, y$  ou  $z$  qui n'apparaissent pas directement sur le graphique, on interpole à vue. Enfin, la même table sert, de manière évidente, à effectuer les divisions. Ce mode de représentation, qui rappelle celui d'une surface topographique par ses courbes de niveau, s'applique plus généralement à toute relation  $f(x, y, z)$  entre trois variables.

2.2 Abaques à droites concourantes

Un ingénieur des Ponts et Chaussées, Léon-Louis Lalanne (1811-1892), devait faire franchir un pas décisif à la théorie des abaques en 1843 [Lal1843a, Lal1843b]. Lalanne a l'idée d'utiliser des échelles non régulières : en remplaçant les variables primitives par des fonctions auxiliaires de celles-ci, convenablement choisies, il réussit à ramener également à des lignes droites les courbes du troisième faisceau.

Illustrons cette idée dans le cas simple de la multiplication : après avoir constaté que la relation  $z = xy$  s'écrit aussi  $lnz = lnx + lny$ , il suffit de graduer les axes des abscisses et des ordonnées avec les nouvelles variables  $x' = lnx$  et  $y' = lny$  pour que le faisceau d'hyperboles de Pouchet devienne un faisceau de droites d'équations  $x' + y' - lnz = 0$  (voir fig. 6b). Par analogie avec un phénomène d'optique, Lalanne qualifie cette transformation d'« ana-



morphose géométrique ». En outre, c'est lui qui utilise pour la première fois le mot « abaque » dans ce contexte. Auparavant, un abaque était une table à calculer en forme de damier, sur laquelle on disposait et déplaçait des jetons. Lalanne considère que les nouvelles tables graphiques (fig. 6a ou 6b), dans la mesure où on y lit le résultat cherché à l'intersection d'une horizontale et d'une verticale, sont également des sortes de damiers servant à compter, d'où l'extension de sens conférée au mot « abaque ».

Grâce à l'anamorphose de Lalanne, une relation entre trois nombres se ramène au concours de trois droites. D'un point de vue pratique, les abaques à droites concurrentes sont beaucoup plus faciles à construire que les tables graphiques antérieures, pour la simple raison qu'il suffit de deux points pour tracer une droite alors qu'il en faut beaucoup pour construire avec soin une courbe quelconque. En raison de leur facilité de construction et de leur faible coût de reproduction comparé à celui des tables numériques, les abaques de Lalanne ont connu un grand succès dans le secteur des travaux publics. Dès 1843, l'administration française adressa à tous les ingénieurs concernés des tables graphiques pour le calcul des superficies de déblai et de remblai relatives au profil des routes et des voies ferrées. Par ailleurs, en affinant l'abaque de la multiplication dont nous venons de parler, Lalanne mit au point une table graphique universelle destinée à effectuer tous les calculs usuels, y compris trigonométriques. Il proposa que le maniement de cet outil peu coûteux soit enseigné dans toutes les écoles afin de contrecarrer la règle à calcul des Anglais, dont l'usage commençait alors à se répandre en France, mais il n'obtint manifestement pas gain de cause.

Pour illustrer la pratique des abaques à points alignés, regardons comment on s'en sert pour traiter les problèmes du troisième degré. Considérons l'équation générale du troisième degré, mise sous la forme réduite  $z^3 + xz + y = 0$ . Pour chaque valeur fixée de  $z$ , on obtient, par rapport aux variables  $x$  et  $y$ , l'équation d'une droite que l'on trace sur l'abaque (fig. 7). Inversement, les coefficients  $x$  et  $y$  étant donnés, les solutions de l'équation sont fournies, sur l'abaque, par les cotes des droites qui passent par le point de coordonnées  $(x, y)$  (sur la fig. 7, les cotes doivent être lues avec le signe plus pour les droites de pente négative et avec le signe moins pour celles de pente positive, car la droite d'équation  $z^3 + xz + y = 0$ , de cote  $z$ , a pour pente  $-z$ ).

On obtient sans difficulté que l'enveloppe de la famille de droites tracées sur l'abaque est la cubique d'équation cartésienne  $4x^3 + 27y^2 = 0$ . Le nombre de solutions réelles de l'équation du troisième degré correspond alors au nombre de tangentes à la courbe enveloppe passant par le point de coordonnées  $(x, y)$ . Par des considérations de convexité, on voit qu'il y a trois solutions distinctes pour un point intérieur à la cubique (i. e. tel que  $4x^3 + 27y^2 < 0$ ), deux solutions dont une double pour un point sur la cubique — autre que le sommet  $(0, 0)$ , qui correspond à une solution triple — et une seule solution pour un point extérieur.

Par exemple, pour l'équation :

$$z^3 - 0,7z - 0,1 = 0,$$

on lit assez aisément sur le graphique les valeurs  $z_1 = 0,9$ ,  $z_2 = -0,75$  et  $z_3 = -0,15$ . Sachant que les valeurs exactes des racines sont :  $z_1 = 0,900577\dots$ ,  $z_2 = -0,753142\dots$  et  $z_3 = -0,147435\dots$ , on peut se faire une idée de la précision de l'abaque.

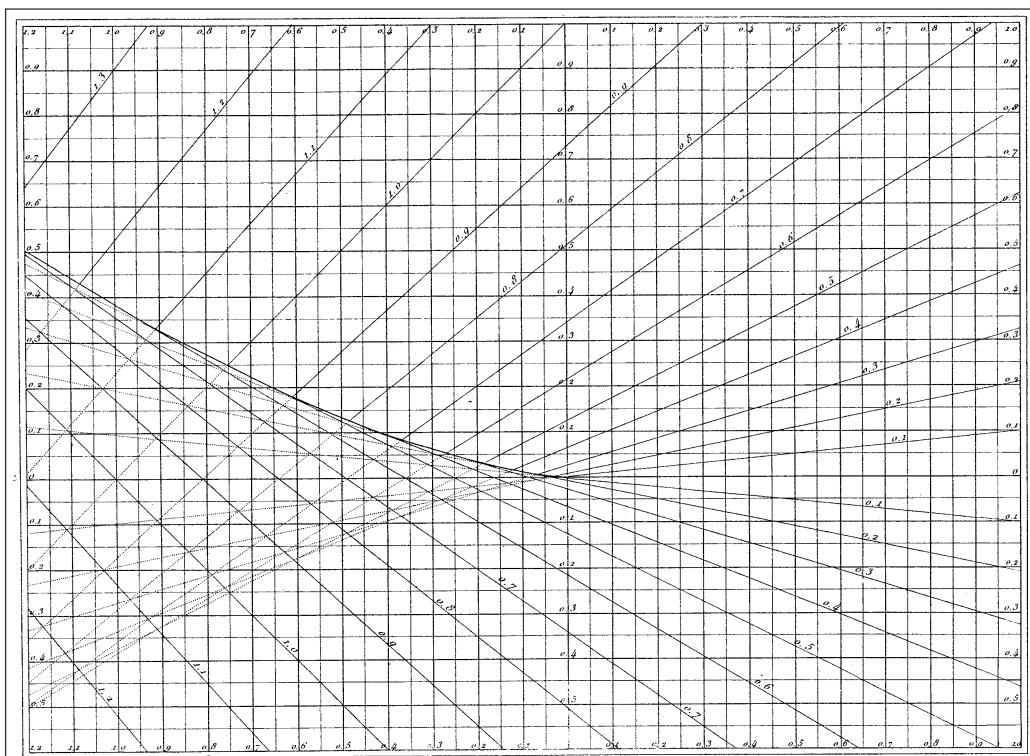


Figure 7. Abaque à droites concourantes pour l'équation du troisième degré [Gou1862]

### 2.3 Nomogrammes à points alignés

La théorie des abaques progresse à nouveau de manière significative à partir de 1884, lorsque Maurice d'Ocagne (1862-1938) entreprend de lui appliquer les acquis de la géométrie projective [Oca1884, Oca1885]. Maurice d'Ocagne, ingénieur et professeur à l'École des ponts et chaussées, professeur de géométrie à l'École polytechnique à partir de 1912, élu à l'Académie des sciences en 1922,

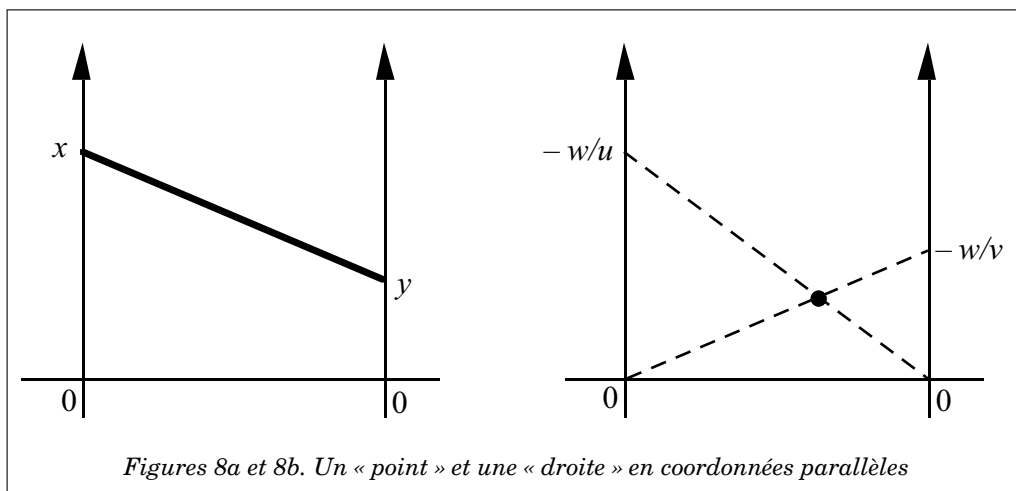
est un personnage central de l'histoire du calcul graphique. Il s'est attaché à organiser en une discipline autonome la construction des abaques et l'étude des principes mathématiques sous-jacents. Ayant donné à la nouvelle discipline le nom de « nomographie », il l'a popularisée auprès des utilisateurs du calcul graphique en écrivant une série d'ouvrages de référence [Oca1891, Oca1893, Oca1899, Oca1908]. Deux concurrents d'Ocagne, Charles Lallemant et Rodolphe Soreau, qui ont contri-

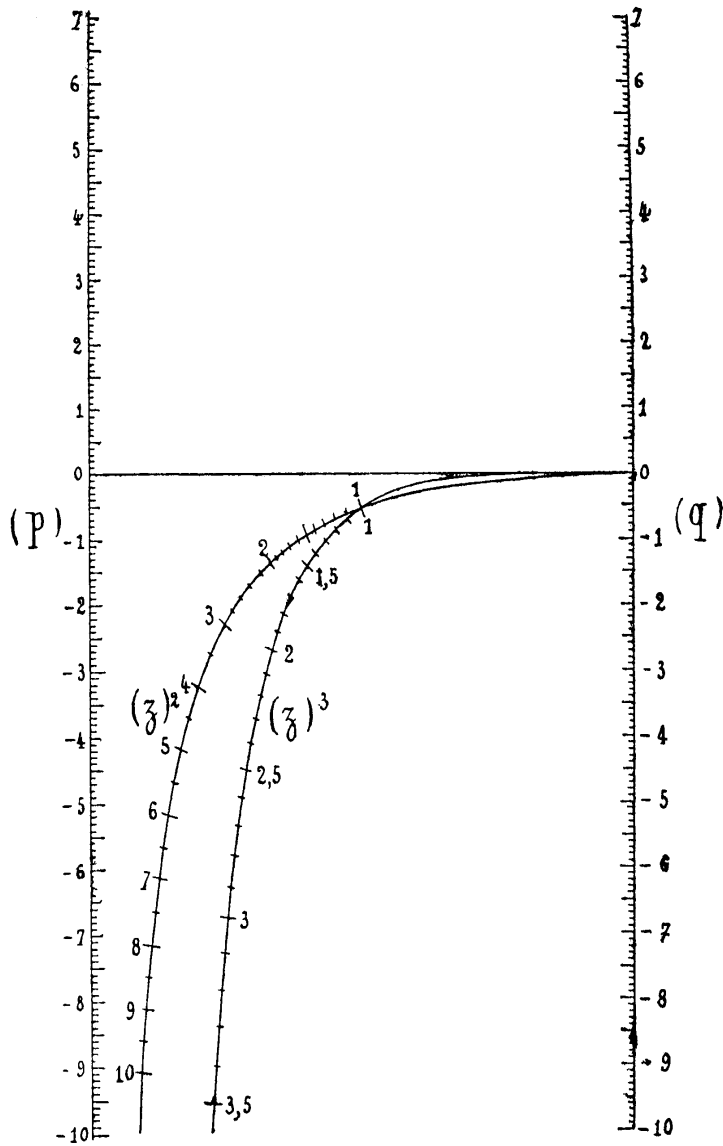
bué à la même époque aux avancées de la théorie des abaques, ont prétendu que si Ocagne avait introduit le mot « nomogramme » pour désigner une table graphique, c'était pour faire croire qu'il s'agissait de quelque chose de totalement nouveau. Pour bien marquer que la nomographie n'était pas, à leur sens, aussi nouvelle que cela, Lallemand et Soreau se sont toujours placés dans la lignée de Pouchet et Lalanne, et ont continué à utiliser de leur côté le mot « abaque ».

Il est certain que Lallemand, Soreau et Ocagne ont apporté chacun des idées nouvelles pour la représentation graphique des relations à plus de trois variables. Par contre, l'originalité incontestable d'Ocagne est d'avoir utilisé la géométrie projective, notamment le principe de dualité, pour transformer les abaques à droites concourantes de Lalanne en nomogrammes à points alignés. Dans ce but, Ocagne introduit de nouvelles coordonnées qu'il appelle « coordonnées parallèles ». Deux axes parallèles étant fixés, le point de coordon-

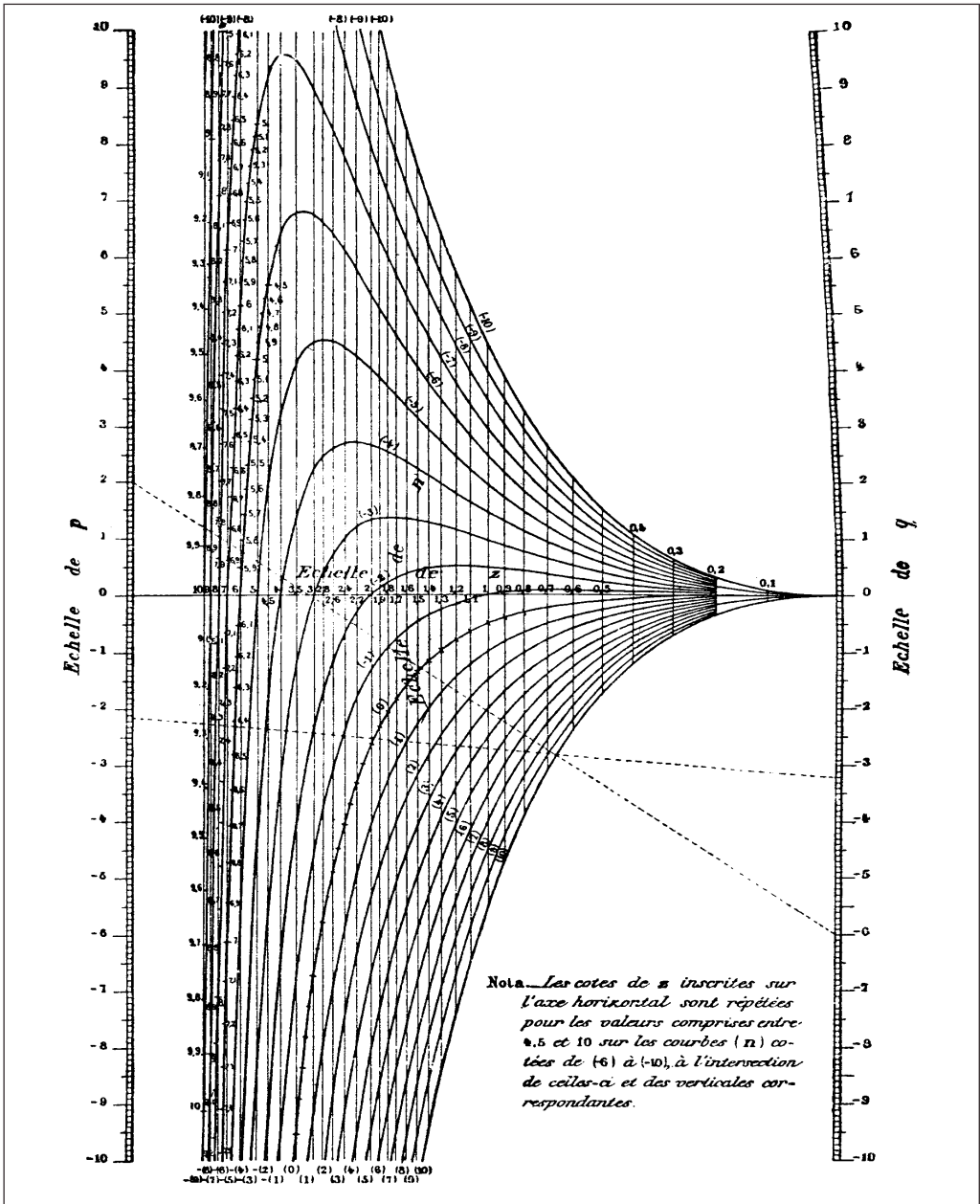
nées  $(x, y)$  est représenté par la droite qui joint le point d'abscisse  $x$  sur le premier axe au point d'abscisse  $y$  sur le second axe (voir fig. 8a). Quant à la droite d'équation  $ux + vy + w = 0$ , elle est représentée par un point : le point d'intersection des droites qui correspondent respectivement aux coordonnées parallèles  $(-w/u, 0)$  et  $(0, -w/v)$  (voir fig. 8b).

L'intérêt pratique de représenter une droite par un point est évident : il en résulte un gain de place considérable. Si l'on reprend l'abaque de Lalanne pour l'équation du troisième degré (fig. 7), chaque droite du faisceau va être transformée en un simple point, et le faisceau dans son ensemble va être remplacé par une simple courbe. C'est cette courbe, notée  $(z)^3$  et correspondant à l'équation  $z^3 + pz + q = 0$ , cotée par les valeurs de  $z$ , qu'on voit sur la figure 9a. Elle a pour équation  $4p^3 + 27q^2 = 0$  dans le système de coordonnées parallèles d'Ocagne, et  $y = (x - 1)^3/x^2$  en coordonnées cartésiennes, en supposant que les axes verticaux sont les droites d'équations





Figures 9a et 9b (au verso). Nomogrammes à points alignés pour l'équation du troisième degré ([Oca1908] et [Mem1909])



$x = 0$  et  $x = 1$ . Grâce au gain de place sur la feuille de papier, on peut tracer sur le même abaque les courbes correspondant à plusieurs équations, ce qui aurait été impossible – ou tout au moins aurait conduit à un résultat quasiment illisible – avec la méthode de Lalanne. Par exemple, sur la figure 9a, on trouve également une courbe  $(z)^2$  représentant l'équation du second degré  $z^2 + pz + q = 0$ . Enfin, sur la figure 9b, on a les courbes correspondant à l'équation générale du troisième degré  $z^3 + nz^2 + pz + q = 0$  pour différentes valeurs de  $n$ . On peut ainsi voir dans l'idée d'Ocagne un véritable processus de compression de données.

Reste à expliquer le fonctionnement de ces nomogrammes. Par le principe de dualité, le concours de trois droites est transformé en l'alignement de trois points. Pour résoudre, par exemple, l'équation  $z^3 - 7z + 6 = 0$ , il suffit de tracer une droite — dans la pratique, on utilise une règle ou un transparent pour ne pas abîmer le nomogramme — joignant le point  $-7$  de l'axe  $(p)$  au point  $6$  de l'axe  $(q)$  : cette droite coupe la courbe  $(z)^3$  en deux points dont les cotes  $1$  et  $2$  sont les racines positives de l'équation. Pour gagner de la place, le graphique ne contient que les points  $z$  de cote positive, ce qui n'est pas un handicap car, en changeant  $z$  en  $-z$ , on s'aperçoit que les racines négatives de l'équation  $z^3 - 7z + 6 = 0$  sont aussi les racines positives de l'équation  $z^3 - 7z - 6 = 0$ . Pour terminer, il suffit donc de tracer la droite qui joint le point  $-7$  de l'axe  $(p)$  au point  $-6$  de l'axe  $(q)$  afin d'obtenir la racine négative  $-3$  qui nous manquait.

La simplicité de l'emploi des nomogrammes à points alignés a suscité l'enthousiasme des ingénieurs. Le livre principal d'Ocagne, *Traité de nomographie* [Oca1899] a fait l'objet de 59 traductions ou adaptations en 14 langues !

Ocagne lui-même a pu réunir, au cours de sa carrière, une collection de plus de deux cents nomogrammes utilisés dans les domaines les plus divers : physique générale, électricité, résistance des matériaux, hydraulique, constructions navales, machines, calculs nautiques, géodésie, topographie, artillerie, aviation, assurances, etc. L'emploi des nomogrammes a continué pendant tout le XX<sup>ème</sup> siècle. Toutefois, après 1950, c'est surtout dans l'ex-U.R.S.S. et dans les pays de l'Est que la nomographie poursuit son essor et suscite encore des recherches théoriques, sans doute en raison du retard pris par ces pays dans l'équipement en calculateurs électroniques.

### 3 Les instruments d'intégration

Les méthodes graphiques manqueraient de généralité et resteraient d'un usage limité si elles s'appliquaient seulement aux opérations algébriques. Dans les sciences de la nature et les sciences de l'ingénieur, il est tout aussi indispensable de pouvoir réaliser graphiquement les opérations du calcul infinitésimal, c'est-à-dire les opérations de différentiation et, surtout, d'intégration. Cela est d'autant plus vrai que, dans les applications, les fonctions considérées sont souvent données sous forme graphique (courbes construites à partir d'une série de valeurs expérimentales ou tracées par un appareil analogique) et que, en l'absence de toute formule analytique, un calcul numérique n'est pas facile à mettre en œuvre.

L'intégration graphique peut certes être réalisée par le calcul par le trait, mais au prix de constructions relativement longues et pénibles que je n'examinerai pas ici (dans la pratique ancienne, on effectuait la quadrature d'une courbe en décomposant approximati-

vement l'aire sous la courbe en une réunion finie de petits triangles, rectangles ou trapèzes, que l'on transformait par des opérations graphiques en un seul rectangle ou un seul carré). Pour éviter aux dessinateurs un travail fastidieux, on a tout naturellement cherché à fabriquer des appareils permettant de réaliser mécaniquement les intégrations.

Ces appareils sont désignés par le terme général d'« intégrateurs ». Bien que Leibniz ait commencé très tôt à y réfléchir, c'est au XIX<sup>ème</sup> siècle que les premières recherches concrètes aboutissent. Dans ce qui suit, je vais présenter d'abord le principe de fonctionnement des intégrateurs les plus simples et je me contenterai ensuite d'évoquer brièvement quelques appareils plus complexes, en renvoyant à la littérature spécialisée pour plus de détails [Abd1886, Jac1911, Mor1913, Hor1914, Asp1990, Mar1994].

### 3.1 Appareils élémentaires d'intégration

Les appareils mécaniques d'intégration se ramènent tous à deux principes de base qui correspondent aux deux aspects de l'intégrale : soit on effectue une quadrature (on construit l'aire sous une courbe en effectuant une somme infinie de petites figures élémentaires), soit on résout un problème inverse des tangentes (on construit une courbe dont la pente des tangentes est donnée). Les enseignants de Terminale connaissent bien ces deux points de vue concurrents (aire sous la courbe ou primitive ?) entre lesquels les programmes n'arrêtent pas de fluctuer ! Les intégrateurs du premier type, qui servent principalement à mesurer l'aire d'une surface délimitée par une courbe fermée, ont reçu le nom de « planimètres ». Les intégrateurs du second type, quant à eux, sont appelés « intégraphes » dans la mesure où ils permettent de tracer d'un trait conti-

nu une courbe intégrale d'une courbe donnée.

Les planimètres reposent sur l'emploi d'une roulette graduée dont on mesure l'angle de rotation. Le premier appareil de cette catégorie semble être celui qui a été construit en 1814 par l'ingénieur bavarois Johann Martin Hermann (1785-1841). Le mécanisme (voir fig. 10) est déplacé parallèlement à l'axe des abscisses (ici vertical), avec un pointeur H qui suit une courbe  $y = f(x)$ . Une roulette liée à H tourne par friction sur un cône C, de sorte que son angle de rotation soit proportionnel à l'ordonnée du point H. Ainsi, pour un déplacement élémentaire  $dx$  le long de l'axe des abscisses, la roulette tourne (à un coefficient près dépendant des dimensions de l'appareil) d'un angle  $f(x)dx$  et, pour un déplacement le long du segment  $[x_0, x]$ , elle tourne d'un angle total :  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ .

On peut par là mesurer l'aire sous une courbe et, plus généralement, en enregistrant les valeurs de l'angle pour diverses valeurs de  $x$ , tracer par points une primitive.

Après Hermann, d'autres ingénieurs imaginèrent de faire tourner la roulette intégrante sur un disque, puis directement sur le plan de la feuille de papier, pour aboutir notamment, en 1854, au fameux planimètre polaire de Jacob Amsler (1823-1912), qui utilise les coordonnées polaires à la place des coordonnées cartésiennes, et où la roulette se déplace par une combinaison de mouvements de rotation et de glissement. Ce planimètre, simple et relativement peu coûteux, connut un grand succès commercial : on estime que, sous ses différentes variantes, il a été fabriqué à plus de 500 000 exemplaires. Jusqu'à



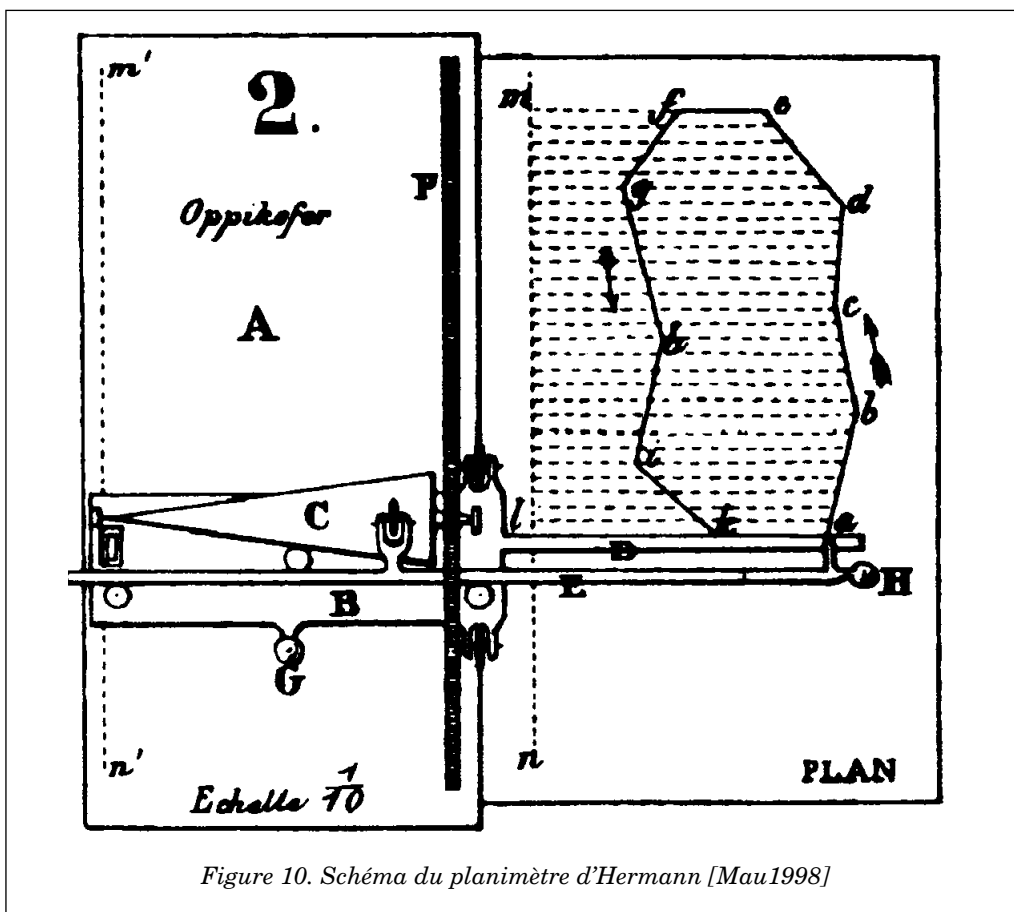


Figure 10. Schéma du planimètre d'Hermann [Mau1998]

nos jours, les planimètres ont été très utilisés dans divers domaines comme, par exemple, la résistance des matériaux, l'évaluation du travail des machines ou l'architecture navale.

Dans le cas des intégraphes, il s'agit de tracer mécaniquement une courbe dont la pente est égale à l'ordonnée d'une courbe donnée. Le premier appa-

reil opérationnel réalisant cet objectif a été imaginé en 1878 par Bruno Abdank-Abakanowicz (1852-1900). La figure 11 en illustre le principe de fonctionnement.

Une équerre mobile  $SmM$  glisse le long de l'axe des abscisses  $Ox$ . Le côté  $Sm$  est pris pour unité de longueur. Le long du côté  $mM$  peuvent coulisser : 1) un pointeur  $M$ , engagé

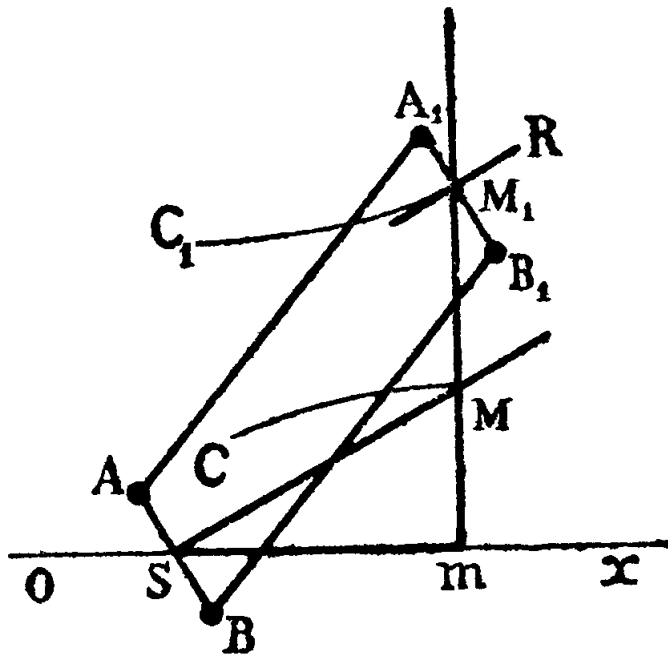


Figure 11. Principe de l'intégraphe d'Abdank-Abakanowicz [Oca1908]

en outre dans la coulisse d'une tige SM pivotant librement autour de S ; 2) le centre  $M_1$  d'une roulette R suffisamment pressée contre le plan horizontal sur lequel repose l'appareil. L'axe  $A_1B_1$  de la roulette R est relié par un parallélogramme articulé à une barre AB perpendiculaire à la tige SM, de sorte que le plan de rotation de la roulette soit toujours parallèle à SM. Lorsqu'on suit avec le pointeur M une courbe donnée C d'équation  $y = f(x)$ , la roulette R enveloppe une courbe  $C_1$  dont la tangente reste à chaque instant parallèle à SM. Comme  $Sm = 1$ , la pente de cette tangente n'est autre que l'ordonnée  $mM = f(x)$  de la courbe C. On trace ainsi une courbe  $C_1$  dont la pente

est constamment égale à  $f(x)$  : c'est le graphe d'une primitive de  $f$ .

### 3.2 Autres instruments

De nombreux instruments, qu'il serait fastidieux d'énumérer, ont été fabriqués en s'appuyant sur des variantes des idées précédentes. Au-delà des quadratures, c'est-à-dire des équations de la forme  $dy/dx = f(x)$ , des intégraphe plus complexes ont également été conçus pour servir à l'intégration de certaines équations différentielles plus générales du type  $F(x, y, dy/dx) = 0$ . Il n'y a pas eu que des appareils mécaniques : à la fin du

XIX<sup>ème</sup> siècle, des inventeurs ingénieux, parmi lesquels on peut citer Leonardo Torres et Michel Petrovitch, imaginent, pour simuler une relation différentielle ou intégrale, les appareils analogiques les plus surprenants en exploitant divers phénomènes physiques de nature électrique, hydraulique, voire chimique ! Tous ces appareils, qui disposent de dispositifs graphiques d'entrée et/ou de sortie des résultats, relèvent incontestablement de notre sujet et, bien que la plupart soient davantage des curiosités que des instruments ayant été réellement utilisés, ils témoignent de la vitalité et de l'importance des recherches effectuées au service du calcul graphique.

Par ailleurs, en 1876, William Thomson (1824-1907) — Lord Kelvin — adapte le principe du planimètre au calcul des coefficients de Fourier d'une fonction, créant ainsi le premier « analyseur harmonique ». Mais on sort là du domaine des petits appareils de bureau : d'imposants analyseurs harmoniques furent construits selon les idées de Lord Kelvin pour servir à la prédiction de la hauteur des marées dans les ports. Dans la même veine, d'autres idées de Lord Kelvin furent concrétisées plus tard, dans les années 1930, principalement par Vannevar Bush au MIT et par Douglas Hartree à Manchester, qui réalisèrent de grands « analyseurs différentiels ». Ces appareils, construits en une dizaine d'exemplaires, servirent à résoudre de complexes problèmes d'électricité industrielle et furent également opérationnels pendant la Seconde Guerre mondiale, où on les utilisa au calcul de trajectoires balistiques. Les analyseurs différentiels sont, en gros, constitués de plusieurs intégraphes élémentaires couplés entre eux par des dispositifs mécaniques, de sorte que la courbe qui « sort » de chacun d'eux serve d'« entrée » au suivant. On peut ainsi réali-

ser automatiquement des quadratures répétées et intégrer à partir de là, sous forme exacte ou approchée, de nombreux problèmes différentiels.

## Conclusion

Dans la mesure où le calcul graphique est fait de méthodes et d'instruments qui ont quasiment disparu de notre paysage mathématique actuel, il est devenu difficile de percevoir correctement sa place historique. La prolifération rapide des calculatrices de poche et des ordinateurs personnels a fait définitivement tomber dans l'oubli tout ce qui a été décrit dans cet article. Si l'on produit toujours de nombreux graphiques, ce ne sont plus, en général, des figures pour calculer, mais des figures servant à visualiser des résultats obtenus au préalable sous forme numérique.

Il me semble pourtant que l'on devrait étudier davantage le calcul graphique en tant que composante essentielle de l'histoire du calcul, afin de mieux prendre conscience du mouvement général qui fait passer, dans ce domaine, d'une pensée géométrique ancienne à une pensée algébrique moderne, jusqu'au point actuel où l'on parle de « tout numérique ». Par ailleurs, ce serait une façon de ne pas limiter l'histoire des mathématiques à quelques grands noms et quelques grandes théories, mais de se pencher aussi sur la pratique quotidienne des utilisateurs. Au passage, une telle étude pourrait avoir des retombées pédagogiques dans l'enseignement secondaire : les méthodes graphiques de calcul sont de nature à constituer un excellent support pour des activités

concrètes, parlantes, permettant de manipuler des instruments, d'appliquer la géométrie élémentaire, de faire un lien profond entre algèbre et géométrie, et d'introduire valablement à la notion de fonc-

tion. Et cela d'autant plus que les logiciels de géométrie dynamique nous permettent de simuler numériquement les méthodes graphiques du passé, dans une dialectique riche de sens pour les élèves.

### Bibliographie

- [Abd1886] Abdank-Abakanowicz, B. (1886) *Les Intégraphes*, Paris : Gauthier-Villars.
- [Ale1784-89] Alembert, J. le Rond d', et al. (1784-89) *Encyclopédie méthodique. Mathématiques*, Paris : Panckoucke, vol. 1, 1784 ; vol. 2, 1785 ; vol. 3, 1789. Rééd. Paris : ACL, 1987.
- [Asp1990] Aspray, W. (éd.) (1990) *Computing before computers*, Ames : Iowa State University Press.
- [Bos1984] Bos, H.J.M. (1984), "Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory : the 'Construction of equations', 1637 – ca. 1750", *Archive for History of Exact Sciences*, 30, pp. 331-380.
- [Boy1945] Boyer, C.B. (1945) "Early graphical solutions of polynomial equations", *Scripta Mathematica*, 11, pp. 5-19.
- [Caj1909] Cajori, F. (1909) *A history of the logarithmic slide rule and allied instruments*, New York : The Engineering News Publishing Company.
- [Con2000] Conti, F. et Giusti, E. (2000) *Au delà du compas : la géométrie des courbes*, Roma : Diagonale.
- [Cou1839] Cousinéry, B.-E. (1839) *Le Calcul par le trait, ses éléments et ses applications à la mesure des lignes, des surfaces et des cubes, à l'interpolation graphique et à la détermination, sur l'épure, de l'épaisseur des murs de soutènement et des murs de culées des voutes*, Paris : Carilian-Gœury et Dalmont.
- [Des1637] Descartes, R. (1637) *La Géométrie*, appendice au *Discours de la méthode*, Leyde ; rééd. New York : Dover, 1954.
- [Dho1992] Dhombres, J. (dir.) (1992) *École normale de l'an III. Leçons de mathématiques. Laplace-Lagrange-Monge*, Paris : Dunod.
- [Eve1982] Evesham, H.A. (1982) *The history and development of nomography*, Ph.D. Thesis, University of London.
- [Eve1986] Evesham, H.A. (1986) "Origins and development of nomography", *Annals of the History of Computing*, 8, pp. 324-333.
- [Gou1862] Gournerie, J. de la (1862) *Traité de géométrie descriptive*, Paris : Mallet-Bachelier.
- [Ham1988] Hambly, M. (1988) *Drawing instruments. 1580-1980*, London : Sotheby's. Trad. fr. de Dominique Bauthier, *Les instruments de dessin. 1580-1980*, Gennevilliers : Ars Mundi, 1991.
- [Hor1914] Horsburgh, E.M. (éd.) (1914) *Modern instruments and methods of calculation. A handbook of the Napier tercentenary exhibition*, London : Bell and The Royal Society of Edinburgh.

- [Jac1911] Jacob, L.-F. (1911) *Le Calcul mécanique*, Paris : Doin.
- [Jos1998] Joss, H. (1998) "Messrechnen : 350 Jahre Rechenschieber", *Elemente der Mathematik*, 53, pp. 73-78.
- [Lal1843a] Lalanne, L.-L. (1843) "Représentation graphique des tableaux numériques", appendice au *Cours complet de météorologie* de L. F. Kaemtz, trad. et annoté par Ch. Martins, Paris : Paulin.
- [Lal1843b] Lalanne, L.-L. (1843) "Mémoire sur la substitution de plans topographiques à des tables numériques à double entrée", *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 16, pp. 1162-1164.
- [Lal1844] Lalanne, L.-L. (1844) *Abaque, ou Compteur universel, donnant à vue à moins de 1/200 près les résultats de tous les calculs d'arithmétique, de géométrie et de mécanique pratique*, Paris : Carilian-Gœury et Dalmont ; 2ème éd., Paris : Hachette, 1851 ; 3ème éd., 1863.
- [Lal1845] Lalanne, L.-L. (1845) *Description et usage de l'abaque ou compteur universel*, Paris : Dubochet.
- [Lal1846] Lalanne, L.-L. (1846) "Sur les tables graphiques et sur la géométrie anamorphique appliquée à diverses questions qui se rattachent à l'art de l'ingénieur", *Annales des Ponts et Chaussées*, 11, pp. 1-69.
- [Lil1867a] Lill, E. (1867) "Résolution graphique des équations numériques d'un degré quelconque à une inconnue", *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 65, pp. 854-857.
- [Lil1867b] Lill, E. (1867) "Résolution graphique des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue, et description d'un instrument inventé dans ce but", *Nouvelles Annales de mathématiques*, 6, pp. 359-362.
- [Mar1994] Marguin, J. (1994) *Histoire des instruments et machines à calculer*, Paris : Hermann.
- [Mau1998] Maurer, B. (1998) *Karl Culmann und die graphische Statik*, Berlin : Verlag für Geschichte der Naturwissenschaft und Technik.
- [Mem1909] Memke, R. et Ocagne, M. d' (1909) "Calculs numériques", dans *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, t. I, vol. 4, Paris : Gauthier-Villars, pp. 196-452 ; rééd. Paris : Jacques Gabay, 1993.
- [Mor1913] Morin, H. de (1913) *Les Appareils d'intégration, intégrateurs simples et composés, planimètres, intégromètres, intégraphes et courbes intégrales, analyse harmonique et analyseurs*, Paris : Gauthier-Villars.
- [Oca1884] Ocagne, M. d' (1884) "Procédé nouveau de calcul graphique", *Annales des Ponts et Chaussées*, 8, pp. 531-540.
- [Oca1885] Ocagne, M. d' (1885) *Coordonnées parallèles et axiales. Méthode de transformation géométrique et procédé nouveau de calcul graphique déduits de la considération des coordonnées parallèles*, Paris : Gauthier-Villars.
- [Oca1891] Ocagne, M. d' (1891) *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques*, Paris : Gauthier-Villars.

- [Oca1893] Ocagne, M. d' (1893) *Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques*, Paris : Gauthier-Villars ; 2ème éd. entièrement refondue et considérablement augmentée, 1905 ; 3ème éd. avec une rédaction entièrement renouvelée et de nombreuses additions, 1928.
- [Oca1899] Ocagne, M. d' (1899) *Traité de nomographie. Théorie des abaques, applications pratiques*, Paris : Gauthier-Villars ; 2ème éd. entièrement refondue, avec de nombreux compléments, 1921.
- [Oca1908] Ocagne, M. d' (1908) *Calcul graphique et nomographie*, Paris : Doin ; 2ème éd. revue et corrigée, 1914 ; 3ème éd., 1924.
- [Pen1723] Penther J.H. (1723) *Praxis geometriæ*, Augsburg : Wolff ; 9ème éd. 1788.
- [Pou1794] Pouchet, L.-É. (1794) *Tableau des nouveaux poids, mesures et monnoies de la République française, suivis des rapports qu'ils ont avec les plus connus de l'Europe comparés entre eux, d'après la Métrologie de Paucton et au moyen des lignes proportionnelles*, Rouen : l'auteur, an III.
- [Pou1795a] Pouchet, L.-É. (1795) *Échelles graphiques des nouveaux poids, mesures et monnoies de la République française et des villes et pays les plus commerçants d'Europe*, 2ème éd. augmentée d'un Traité sur les changes et d'un d'arithmétique linéaire, Rouen : Guedra, an IV.
- [Pou1795b] Pouchet, L.-É. (1795) *Arithmétique linéaire, ou Nouvelle méthode abrégée de calculer, que l'on peut pratiquer sans savoir lire ni écrire*, Rouen : Guedra, an IV.
- [Pou1797] Pouchet, L.-É. (1797) *Métrologie terrestre, ou Tables des nouveaux poids, mesures et monnoies de France*, 3ème éd., Rouen : Guilbert et Herment, an V.
- [Row1771] Rowning, J. (1771) "Directions for making a machine for finding the roots of equations universally, with the manner of using it", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 60, pp. 240-256.
- [Run1912] Runge, C. (1912) *Graphical methods*, New York : Columbia University Press.
- [Sch1989] Scholz, E. (1989) *Symmetrie, Gruppe, Dualität. Zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik und Anwendung in Kristallographie und Bausatik des 19. Jahrhunderts*, Basel : Birkhäuser.
- [Seg1761] Segner, J.A. von (1761) "Methodus simplex et universalis, omnes omnium æquationum radices detegendi", *Novi commentarii Academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ*, 7, pp. 211-226.
- [Tou2000] Tournès, D. (2000) "Pour une histoire du calcul graphique", *Revue d'histoire des mathématiques*, 6, pp. 127-161.
- [Ver1997] Verine, H. (1997) "Interdisciplinarité ou transdisciplinarité ? Le cas d'une méthode de calcul graphique : la nomographie et sa terminologie", *Bibliothèque des cahiers de l'Institut de linguistique de Louvain*, 93, pp. 73-91.
- [Wil1928] Willers, F.A. (1928) *Methoden der praktischen Analysis*, Berlin : de Gruyter ; 2ème éd., 1950 ; 3ème éd., 1957, 4ème éd., 1971. Trad. angl. de Robert T. Beyer, *Practical analysis. Graphical and numerical methods*