n , C'EST UN NOMBRE OU C'EST DES NOMBRES ?

ou : Algèbre, Modélisation, Formalisation

Marie-Hedwige DENIS, Stéphane FAES,
Michel JAFFROT, Charly RIEDWEG,
Hélène STAÏNER, Viviane VAISSIER,
Irem des Pays de la Loire

« *n*, c'est un nombre ou c'est des nombres ? », c'est une question d'un de nos élèves. Elle fait écho à des débats entre Russel et Frege au tournant du XIXème et du XXème sur la question de la variable. Qu'est-ce qu'une variable ? Qu'est-ce qu'un nombre ? Est-ce qu'on peut dire le nombre *n* ? Il nous semble que dans cette question d'élève sur la variable, se joue cette même rupture de rationalité que celle qui s'opère en géométrie, entre l'école élémentaire et le collège, dans la construction de la démarche de preuve. Nous avons cherché comment permettre à l'élève de l'identifier.

Cet article est le fruit d'un travail de plusieurs années, celui d'une équipe qui alterne expérimentations, réflexion… Notre groupe de recherche impliquée de l'Irem des Pays de la Loire s'est intéressé d'abord à la preuve en géométrie. Ce questionnement sur la rationalité mathématique s'est poursuivi du côté de l'algèbre.

Nous présentons ici une situation pour la classe de cinquième. Nous poursuivons dans le même esprit en classe de quatrième. Cette situation a aussi été testée en début de quatrième, dans des conditions analogues, dans des classes hétérogènes mais également dans des classes dites « de soutien ». Nous n'avons pas observé de différence dans les réactions et les productions des élèves par rapport à ceux de cinquième.

Pour entrer dans l'algèbre l'élève va devoir :

— être confronté à des situations que l'algèbre peut modéliser alors que l'arithmétique est coûteuse ou défaillante ;

— apprendre à utiliser un langage symbolique ;

— apprendre à modéliser des situations qui relèvent de l'algèbre ;

— apprendre à faire confiance à l'outil algébrique pour travailler sur le modèle en se détachant de la situation modélisée.

La tâche est complexe. Nous avons tous eu, à un moment ou à un autre, deux tentations :

— apprendre aux élèves à pratiquer le calcul littéral « à vide», ou presque, pour les libérer de cet obstacle avant d'entrer dans l'algèbre.

Cette pratique est probablement en partie à l'origine de la perte de sens dont se plaignent les professeurs de lycée quand ils accueillent les collégiens.

— se lancer directement dans la tâche complexe de résolution de problèmes par mise en équations pour montrer aux élèves la pertinence de ce nouvel outil et la nécessité d'un apprentissage technique du calcul littéral. On considère alors d'abord le statut d'inconnue de la lettre.

Or, au collège, il y a bien peu de réelles situations de résolution de problèmes accessibles par résolution d'équations. La plupart du temps, lesdites équations ne sont que des égalités que l'on traite dans l'arithmétique avec un habillage d'équations où existence et unicité de la solution ne sont que très rarement remises en cause. Dans les vraies situations de résolution de problèmes qui requièrent réellement une mise en équations, les élèves en difficulté sont souvent complètement submergés par la complexité de la tâche, englués dans des problèmes techniques qui les empêchent souvent d'accueillir avec confiance ce qui est proposé.

Les activités autour de la notion de « formule » peuvent constituer une alternative à ces deux extrêmes. Elles visent à amener l'élève à découvrir les règles du calcul littéral « en acte » dans des situations de modélisation algébrique dans lesquelles il est capable de développer des stratégies personnelles.

Nous avons choisi quatre axes de travail.

— **Faire en sorte que l'élève puisse instrumenter les techniques**. Ne pas simplement le mettre en face d'une myriade de techniques locales et flottantes mais constituer la technique en éléments d'un instrument complexe, pouvoir référer les différentes techniques (développer, réduire, tester en substituant, factoriser …) à un instrument global, l'instrument algébrique. Permettre à l'élève de faire l'outil à sa main.

— **Faire naître les techniques**. Permettre aux élèves d'inventer du « bricolage » dans leur sphère privée et élever ce bricolage au rang de sujet d'étude collectif qui contribue à une œuvre technique commune.

— **Ne pas réduire l'algèbre à sa dimension instrumentale**. Permettre à l'élève de s'interroger sur les ressorts qui font que cet instrument est efficient. Construire dans le groupe-classe une culture collective commune pointant le changement de régime de rationalité qui s'opère à l'entrée dans l'algèbre.

— **Enseigner les mathématiques dans leur dimension culturelle fondatrice, au delà de leur dimension strictement instrumentale**. Il ne s'agit ni de restaurer l'algèbre que les programmes semblent vouloir réduire au calcul littéral ni d'enseigner une discipline qui se réduit à des outils pour d'autres activités. Il s'agit, d'une façon plus ambitieuse, de confronter l'élève aux enjeux d'une mathématique critique qui lui permette d'interroger la façon dont on s'approprie un objet dans une démarche scientifique. Il s'agit d'**enseigner la modélisation.** Enseigner la modélisation**,** c'est donner à l'élève l'occasion de modéliser, c'est faire de ses premières modélisations des objets d'études. Enseigner la modélisation pour qu'en tant que citoyen, que professionnel aussi, il puisse un jour interroger les conditions dans lesquelles on lui proposera telle ou telle vérité scientifique.

Nous avons exploré trois pistes pour essayer d'atteindre nos objectifs :

— **Travailler sur la modélisation intra mathématique**. Le terme « modèle » est un terme très ouvert. « Modéliser, c'est interpréter, traduire » dit Hourya Sinaceur [1]. On peut modéliser de façon extra mathématique, sur des situations physiques par exemple ; le problème de l'interprétation se localise alors sur des lois externes aux mathématiques dont les ressorts échappent souvent aux élèves. Nous avons choisi d'essayer de faire travailler les élèves sur des modèles intra mathématiques.

— **Travailler d'abord sur les variables avant de travailler sur les inconnues**. Travailler sur l'apparition de « l'indéterminée », du « quelconque », pour marquer l'entrée dans l'algèbre dans une rupture avec les pratiques antérieures des élèves, la plus radicale possible. Un travail prématuré sur « l'inconnue » nous semble maintenir l'élève dans l'illusion d'une arithmétique continuée.

— **Travailler d'abord des situations faisant appel aux mathématiques discrètes**. En travaillant sur les entiers, les élèves ont les moyens de contrôler l'efficience de leurs modèles sans s'engluer dans des problèmes de valeurs approchées liés à leur maîtrise incertaine des ensembles numériques.

Nous avons la volonté de confronter l'élève à l'exigence d'une vraie démarche algébrique sans qu'il soit tenté de faire appel aux outils antérieurs de l'arithmétique. Nous avons expérimenté des situations de classe. Nous vous soumettons, à la suite, l'une d'entre elles.

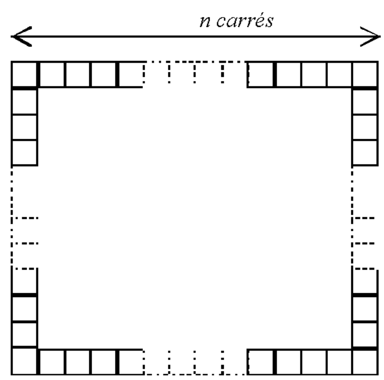
1 [Sin1997]

Une situation de classe en 5ème

Ce n'est pas une nouvelle situation, d'autres équipes l'ont déjà utilisée, nous aussi. Nous avons repensé sa mise en œuvre en fonction de nos axes et de nos hypothèses de travail.

Voici l'énoncé « ancienne version ». La consigne pouvait être :

Combien de petits carrés constituent cette figure ?

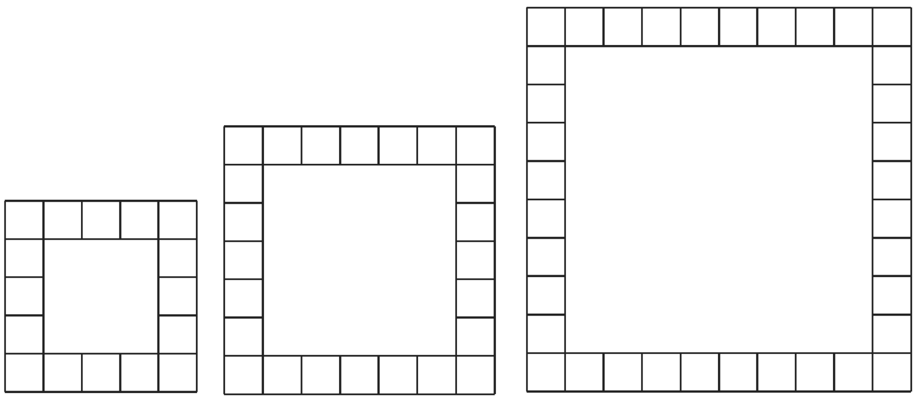


Après plusieurs essais, nous proposons maintenant l'énoncé sous la forme donnée dans l'encadré de la page suivante.

Nous avons supprimé le petit n. Nous présentons, non pas un carré unique à côté variable, mais quelques représentants d'une famille de carrés. Nous avons proposé une consigne plus ouverte.

Nous avons essayé de rendre compte de tout ce qui pouvait illustrer et donner du sens à notre intervention initiale sans détailler le descriptif de la mise en œuvre (temps, constitution des groupes ...).

Pierre joue avec des carreaux de mosaïque.
Il dispose ses carreaux pour obtenir des « carrés ».
En voici trois :



Il se demande en jouant, s'il peut savoir à l'avance combien de carreaux de mosaïque il lui faut pour fabriquer n'importe quel carré.

Pouvez-vous l'aider ?

Remarques :

1. Le travail de groupes dans les différentes phases comprend toujours un travail individuel préalable d'à peu près 10 min.

2. La situation a vécu dans la classe une dizaine d'heures : nous ne rendrons compte que d'une partie du travail.

3. A mesure que le travail avance dans la classe, des comptes-rendus d'activité sont faits avec les élèves : ils servent d'ancrages intermédiaires avant une phase plus tardive d'institutionnalisation des savoirs en jeu.

Dans la suite du texte,

— la colonne de gauche comprend le descriptif succinct pour la mise en œuvre, et quelques commentaires sur le vécu de la classe

— la colonne de droite contient quelques commentaires sur la situation et les choix.

Descriptif succinct pour la mise en œuvre, et quelques commentaires sur le vécu d'une classe	**Commentaires sur la situation et les choix faits**
Ce travail est réalisé par une classe de 5e hétérogène. Les élèves travaillent par groupes de trois.	Cette situation a aussi été testée en début de quatrième, dans des conditions analogues, dans des classes hétérogènes mais également dans des classes dites « de soutien ». Nous n'avons pas observé de différence dans les réactions et les productions des élèves par rapport à ceux de cinquième. Nous permettons juste à chacun de parcourir le chemin depuis son état initial personnel. En 4ème, celui qui est très avancé démarre avec des lettres tandis que d'autres démarrent sur du discours. C'est une façon de différencier…
Phase 1 *Enoncé* : **(voir annexe 1)**	
Consigne orale : *Vous aurez à répondre sur une affiche à la fin de l'heure.* Recherche individuelle (10 min) Après la phase individuelle et les premières concertations, le professeur passe dans les groupes pour s'assurer que les élèves ont bien compris que les carreaux de mosaïque ne sont que sur le bord. Dans certains groupes, les élèves ne s'autorisent pas à envisager d'autres carrés que ceux dessinés. Le professeur intervient en disant que Pierre joue au sol et peut donc faire les carrés aussi grands qu'il le souhaite. Dans deux groupes, les élèves réclament une affiche après avoir réglé les exemples donnés dans l'énoncé. Le professeur n'intervient qu'une seule fois en disant que la réponse est donnée pour le carré de 6, 7 et 10 de côté mais que dans la question, il est écrit « *n'importe quel* carré ». Les affiches de l'**annexe 2** sont produites en 1h 20.	Les activités d'introduction sur lesquelles nous avons fait travailler les élèves font toutes intervenir des « familles » d'objets, des collections « infinies » d'objets. L'élève y découvre progressivement la défaillance de ses stratégies habituelles de comptage ou de mesurage : — Comment atteindre les carrés qu'on ne peut pas représenter, sur lesquels on ne peut pas compter parce qu'ils sont trop grands ? — Cette défaillance va donner du sens au concept de « modélisation ».

Phase 2	
Deux ou trois questions d'explicitation sont posées aux auteurs de deux affiches.	Dans cette phase, seules des questions d'explicitation sont possibles.
Phase 3	
Les groupes travaillent pendant cinq minutes sur la question suivante : *Combien de stratégies différentes ?* En plénière, dans cette classse, deux groupes d'affiches sont constitués, deux stratégies étant identifiées par les élèves.	
Phase 4	
Intervention magistrale : *« Entre le moment où vous avez trouvé et le moment où vous avez réussi à expliquer sur l'affiche, il y a souvent eu plus d'une demi-heure … Souvent, vous donnez des exemples, vous ne dites pas comment on fait pour n'importe quel carré … C'est pas facile à dire : les matheux ont inventé une façon de le dire plus facilement. Ils fabriquent des formules (en option : ils désignent par une lettre le côté du grand carré à obtenir et ils fabriquent une formule qui donne le nombre de carreaux de mosaïque nécessaires).* *Vous allez essayer. Vous utilisez votre affiche et vous fabriquez une formule qui lui corresponde. Allez-y. »* Les élèves produisent les affiches de l'**annexe 3** puis, à mesure qu'ils ont terminé, celles de **l'annexe 4**.	L'intervention magistrale dans notre stratégie est **fondamentale** : — elle désigne pour l'élève la rupture épistémologique inaugurale, et l'aide à l'identifier. — elle apporte à l'élève les moyens de re-parcourir en partie le chemin historique qui mène de l'arithmétique à l'algèbre. Mais elle ne nous paraît efficace que si : — les élèves ont aperçu l'obstacle épistémologique : pour atteindre « le quelconque », pour exprimer « le général », leurs méthodes rhétoriques sont coûteuses, voire défaillantes. — les élèves ont des conditions satisfaisantes (temps, débat entre pairs, liberté d'exploration …) pour s'emparer de la proposition magistrale.
L'ensemble du travail a pris de 10 min à 30 min. Dans les premières minutes, les élèves se lancent sans retenue dans la tâche.	Au premier abord, la formule est un objet qui leur semble familier : il fait partie de leur univers mathématique depuis l'école élémentaire (formules de périmètre, d'aire …).

<table>
<tr><td></td><td>Dans un second temps, quand ils s'interrogent sur leurs productions, cet objet leur devient étrange. Jusque là, ils la voyaient comme une « machine à produire du résultat numérique ».

Dans la situation étudiée, la formule va constituer en elle-même une réponse à la question du « quelconque ». Elle subit progressivement une mutation aux yeux des élèves qui font alors leur premier pas dans l'écriture symbolique. Ils revisitent ainsi plusieurs siècles d'histoire des mathématiques, de Diophante à Viète.

C'est de façon délibérée que nous avons choisi l'environnement des entiers : il permet aux élèves de contrôler leur proposition de façon extrêmement simple en comptant sur les premiers objets de la collection étudiée, sans s'engluer dans des tests de mesurage et des débats autour des valeurs approchées.</td></tr>
<tr><td>Phase 5</td><td></td></tr>
<tr><td>Les affiches sont montrées en deux groupes, en fonction du tri opéré par les élèves, en phase 3.

Consigne : Chaque groupe doit préparer des questions, des critiques (prévoir un rapporteur)

Plénière
Des points forts dans les interventions :
— « il ne doit y avoir que des lettres »
— « il faut dire ce que c'est « a », « x » ...»
— « ça fait pas toujours 76 ».
— « $a + a + a + a$ c'est pareil que $4 \times a$ ».

Les formules retenues après débat dans la classe :
$b = a \times 4 - 4$;
$b = a + a + (a - 2) + (a - 2)$;
$b = a + a + a + a - (1 + 1 + 1 + 1)$;</td><td>C'est de ce questionnement en plénière qu'émergent pour le groupe classe
— les premiers attributs de la notion de « variable » ;
— les premiers éléments de l'écriture symbolique ;
— les premiers embryons de calcul littéral.

Tant que la formule n'apparaît à l'élève que dans sa fonction langagière, il n'est pas encore question de modèle, ni d'algèbre.

L'élève qui vient de refaire le chemin de Diophante à Viète va devoir aussi emprunter celui de Descartes.

Le nouvel outil n'a pas qu'une fonction langagière.

Il va s'extraire de son terrain d'émergence et gagner son autonomie.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Phase 6 Enoncé : (voir annexe 5)</td></tr>
<tr><td>Les affiches de l'annexe 6 sont produites en 15 min pour quatre groupes, en 30 min pour les deux autres.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Phase 7</td></tr>
<tr><td>Consigne : (travail de groupes) Mettez-vous à la place de Pierre qui veut utiliser ces formules pour préparer ses mosaïques pour faire un carré de 20 cm de côté. Préparer vos réactions pour la plénière.
Bilan en classe complète :
La classe retient à première vue :
$a \times 8 - 16 = b$;
$b = (a \times 4 - 4) \times 2 - 8$.
D'un même élan, la première formule est validée parce qu'elle fait appel à la même stratégie de comptage que celle utilisée pour un seul tour.
Le « – 8 » de la seconde formule est questionné à plusieurs reprises en plénière.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Phase 8</td></tr>
<tr><td>Consigne : (travail de groupes)
Vous avez déjà validé $a \times 8 - 16 = b$.
Pouvez-vous valider : $b = (a \times 4 - 4) \times 2 - 8$?

L'argumentation des élèves est alors de deux types : stratégie associée ou calcul algébrique « naturel ».</td><td>Les formules vont se détacher progressivement de la situation, vont gagner en autonomie. Ce détachement s'opère de plusieurs façons :
— la mise en lien des formules entre elles provoque l'éloignement de la situation initiale (certains élèves le faisaient déjà dans la première partie de l'activité : « $a + a + a + a$ c'est pareil que $4 \times a$ »)
— la formule $a \times 4 - 4$ est réinvestie dans plusieurs groupes : elle va produire une nouvelle connaissance sur la situation (nombre de carrés sur deux tours)
L'élève commence à entrer dans une vraie activité de modélisation.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Phase 9</td></tr>
<tr><td>Consigne : Voici les formules élaborées dans une autre classe. Dites ce que vous en pensez en justifiant vos affirmations :
$a \times 4 + (a-4)\times 4 = b$;
$(a-4)\times 8 + 16 = b$;
$a + a + (a-4)\times 2 + a + a + (a-4)\times 2 = b$;
$(a-2)\times 2 \times 4 = b$.

L'argumentation des élèves continue à être de deux types. La recherche de stratégies de comptage est abandonnée au profit d'essais de calcul littéral chaque fois qu'elle échoue ou qu'un élève du groupe commence à être plus efficace que les autres en pratiquant du calcul algébrique.

Les premiers essais de calcul algébrique se font souvent sous contrôle de la situation elle-même avant de s'en détacher progressivement et de façon différenciée .</td><td>Le contrôle permanent que l'élève peut opérer sur la situation lui permet de construire progressivement de la confiance dans ce qu'il fait du côté de l'algèbre.

L'obstacle que constitue le double statut du signe « = » est éclairé : certains élèves retardent le moment d'écrire les égalités algébriques, ils choisissent des dispositions de calcul moins engageantes (en colonnes), parlent de formules équivalentes, tandis que d'autres franchissent le pas.

Les débats entre eux donnent du sens au double statut du signe « = »</td></tr>
<tr><td colspan="2">Phase 10</td></tr>
<tr><td>Consigne : Pierre reprend ses petits carreaux de mosaïque.

Ses petits carreaux sont de cinq couleurs différentes.

Il les trie par couleur et obtient cinq gros tas de petits carrés ou carreaux de la même couleur (148 bleus, 202 rouges, 131 jaunes, 154 verts et 123 blancs).

Il veut réaliser, avec chaque tas, le plus grand carré possible, les carrés étant bordés d'un seul rang.

Aide-le à trouver combien il doit placer de mosaïques sur le premier côté du carré pour être sûr d'obtenir, sans tâtonner, le plus grand carré possible.</td><td>A ce stade, plusieurs facteurs contribuent à donner toute son épaisseur au statut d'inconnue de la lettre :
— Pour les élèves, jusque là, la lettre est pratiquée comme variable. Quand, dans le contexte de recherche de solutions au problème posé, l'élève va écrire $4 \times a - 4 = 148$, il a de grande chance d'y voir autre chose qu'une simple « égalité ».
— Le problème de l'existence de solutions qui se pose, contribue aussi à faire de l'inconnue autre chose qu'un « trou arithmétique à boucher ».

Au passage, constater qu'il peut exister des solutions décimales, voire rationnelles, non entières et donc à rejeter, peut contribuer à redonner du sens à ce qui se joue dans la construction des ensembles de nombres.</td></tr>
</table>

Pour prendre un peu de recul, un détour théorique…

Des travaux tout à fait importants du côté de l'algèbre, notamment autour de la série d'articles d'Yves Chevallard [2] édités dans « petit *x* » dans les années 80, puis au sein d'une brochure de l'Irem de Marseille « Arithmétique, algèbre, modélisation » (1989), ont éclairé ce que Yves Chevallard appelle « le passage de l'arithmétique à l'algèbre » . Ce passage y est analysé comme une *réelle rupture*, rupture que Viète désignait dans son traité de 1591 quand il parlait du passage de « la logistique numéreuse » à « la logistique spécieuse ». Dit de manière élémentaire, de la simple production de résultats sur une situation donnée, on passe à *l'étude des structures sous-jacentes de la situation* et des *conditions de production des résultats*. Yves Chevallard et son équipe affirment que ce passage est marqué par *l'inversion du rapport entre pratiques discursives et pratiques scripturales* : la résolution de problèmes dans l'arithmétique élémentaire relève essentiellement du champ du discours oral alors que la résolution algébrique s'inscrit dans le champ de *l'écriture symbolique*.

Ce passage, et Yves Chevallard le pointe bien, a souvent été envisagé sous l'angle de la simple généralisation des procédures arithmétiques, ce qui explique probablement en partie la difficulté que les élèves ont à donner du sens aux nouveaux outils proposés. Or, si l'algèbre permet de résoudre la totalité des problèmes d'arithmétique élémentaire, elle n'est pas une simple généralisation. C'est ce que montre Joseph Gascon [3] dans un article de « petit *x* ». Il dit que l'algèbre élémentaire n'est pas l'arithmétique généralisée ; si elle permet de modéliser, d'interpréter, de généraliser la plupart des problèmes arithmétiques rencontrés dans le domaine des savoirs scolaires, il en est d'autres qui ne relèvent pas du patron classique de ces problèmes (du type « analyse-synthèse »). L'algèbre ne permet pas seulement de gérer toutes les situations singulières rencontrées dans l'arithmétique, *elle permet aussi de se poser les questions de leur existence, de leur unicité et de leur degré de généralité et dans un même élan, comme toute activité de modélisation, de produire de nouveaux problèmes à propos de la situation initiale*.

Cela soulève bien sûr une interrogation sur la nature des objets en jeu. Cela crée évidemment aussi, un enjeu didactique difficile : enseigner l'algèbre dans toute son épaisseur, c'est donc amener l'élève à rencontrer des problèmes qu'il ne doit pas avoir les moyens de résoudre avec les outils classiques dont il dispose dans l'arithmétique élémentaire, c'est l'amener à se poser les questions de l'existence, de l'unicité, du degré de généralité de situations singulières. Sous peine de quoi, il y a alors simple généralisation, simple extension et donc perte du sens même des activités de l'algèbre. Ces élèves qui résolvent avec parfois une grande virtuosité, mais avec des outils arithmétiques, les problèmes qu'on leur pose avec l'intention de les amener à utiliser les outils algébriques, sont là pour nous le rappeler. La première grosse difficulté du praticien est de trouver de tels problèmes.

Une autre difficulté que l'on rencontre dans l'introduction de l'algèbre, c'est ce que Alain Mercier dans un texte de l'Ecole d'été de didactique des maths en 95 appelait *le manque technologique du côté de la numération*. Il explique qu'on a vu disparaître, dans les avatars postmodernes de la

2 [Che1984-1990]
3 [Gas1984-1990]

grande réforme des mathématiques modernes, le travail sur les ensembles numériques et notamment sur la technologie qui permet en particulier de gérer le problème de la numération : ce qui avait pris notamment la forme d'un travail sur les «bases» de la numération. Les élèves utilisent, dans le domaine de la numération, des techniques sans horizon technologique, au sens d'Yves Chevallard, c'est-à-dire sans pouvoir interroger ces techniques. Ils n'ont plus la possibilité d'entrevoir le niveau de généralité et les modes d'organisation de leurs techniques.

Et pour finir, quelques pistes bibliographiques :

[Che1984-1990] : **Yves CHEVALLARD**, « Le passage de l'arithmétique à l'algèbrique dans l'enseignement des mathématiques au collège », *« petit x » n°5*, 1984, p51-94 ; n°19, 1989, p43-72 ; n°23, 1989-1990, p5-38.

[Che1991-1992] : **Yves CHEVALLARD**, « Le caractère expérimental de l'activité mathématique », *« petit x »*, n°30, 1991-1992, p5-15.

[Dah1998] : **Amy DAHAN DALMEDICO**, PESTRE, Dominique : « Comment parler des sciences aujourd'hui ? », *Alliage,* n°35-36, 1998.

[Gas1993-1994] : **Josep GASCÓN**, « Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l' « arithmétique généralisée » », *« petit x »* n° 37, 1993-1994, p43-63.

[Mer1999] : **Alain MERCIER, Gérard SENSEVY**, « Pourquoi faire encore des mathématiques à l'école ? », *Le Télémaque,* n°15 – Enseigner les sciences – mai 1999, p69-78.

[Ser1998] : **Michel SERFATI,** « Descartes et la constitution de l'écriture symbolique mathématique », *Revue d'histoire des sciences,* n°51/2-3, avril-septembre 1998, p237-289.

[Ser1998] : **Michel SERFATI**, « La dialectique de l'indéterminé de Viète à Frege et Russell »,in SERFATI, Michel, *La recherche de la vérité,* ACL – Les éditions du kangourou, décembre 1999.

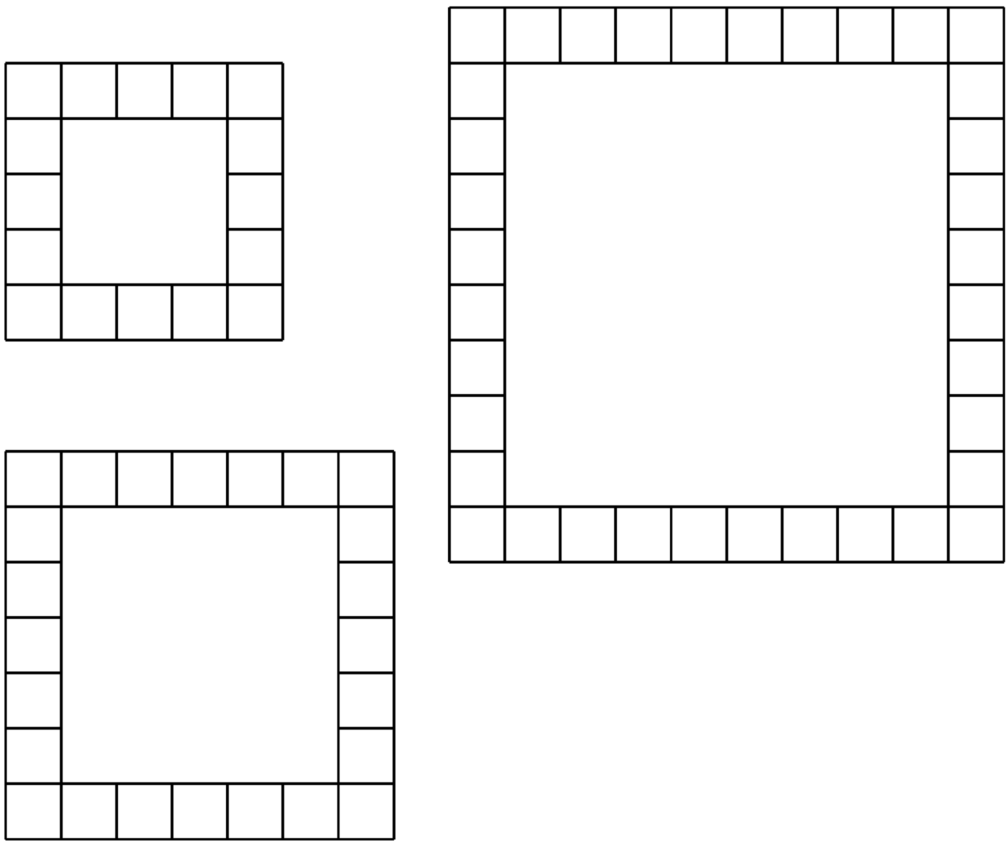
[Sin1997] : **Hourya SINACEUR**, « Indétermination de l'ontologie », *Bulletin de la société française de philosophie,* T. XCII, 1997.

[Woi1999] : **Dominique WOILLEZ**, « Rapport entre raisonnement arithmétique et utilisation de l'algèbre en quatrième : étude du cas d'un élève prénommé Simon », *Actes de l'U.E. de La Rochelle : Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, juillet 1998,* 1999, p65-76.

ANNEXE 1

L'énoncé distribué à chaque élève

Pierre joue avec des carreaux de mosaïque.
Il dispose ses carreaux pour obtenir des «carrés ».
En voici trois :



Il se demande en jouant, s'il peut savoir à l'avance combien de carreaux de mosaïque il lui faut pour fabriquer n'importe quel carré.

Pouvez-vous l'aider ?

ANNEXE 2

Les réponses en «français» après la première phase de recherche

Laëtitia, Peggy, Geoffrey, Thomas

Théorie

Le petit carré

Dans un carré il y a 4 côtés égaux, chaque petits carrés mesurent 1 cm de côté donc 1 côté = à 5 cm

. Pour trouver 16 il faut faire 20 – 4 = 16 car on enlève les 4 carrés des côtés déjà utiliser

. Dans le 1er carré il faut faire :

4 × 5 = 20

20 – 4 = 16

Vincent, Elodie, Anaïs

Ex : 10 cm = longueur

10 cm = largeur

On fait 10 + 10 = 20 cm car il y a 2 fois la longueur

Après on fait 8 + 8 = 16 cm car on enlève 2 carrés qu'on a déjà utilisé

Conclusion : 20 + 16 = 36 cm

Le carré contient 36 petits cubes

Julie, Morgan, Mickaël, Emilie

SOLUTION

on prend 1 côté et on l'additionne avec son côté parallèle. Ensuite on prend les deux autres côtés auxquels on soustrait deux à chacun car on les as déjà compté.

exemple : avec un carré de 20 petits carrés de côtés.

20 + 20 + (20 – 2) + (20 – 2) = 76

Lisa, Marielle, Christopher

Les carrés de mosaïque

Par exemple :

Pierre veut faire un carré de 5 cm de côté = 5 carreaux. Il prend 5 carrés et il multiplie par 4 (car un carré a 4 côtés) – 4 (parce qu'on enlève 1 carré a chaque longueur.

Sinon on compterait 2 fois le même carré.

Donc, il aura besoin de 16 carrés.

Elodie, Emmanuelle, Jonathann, Nicolas

Pour savoir combien de petits carrés, il faut pour en fabriquer un grand carré il faut qu'il calcule la longueur d'un des côtés *du carré × 4 et le soustraire par 4.*

exemple : 8 × 4 = 32

32 – 4 = 28

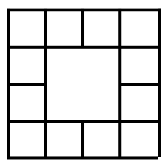
William, Tony, Jonathan

Maths

Sachant qu'on doit fabriquer des grands carrés, on sait que les mesures des côtés sont égaux. Il suffit de multiplier le nombre de petits carrés d'un côté avec le nombre de côtés, c'est à dire quatre. Ensuite on a juste à soustraire quatre du résultat, parce que les carrés des quatres angles sont comptés deux fois.

ex : 4 × 4 = 16

16 – 4 = 12



On a utilisé 12 petits carreaux pour faire le carré.

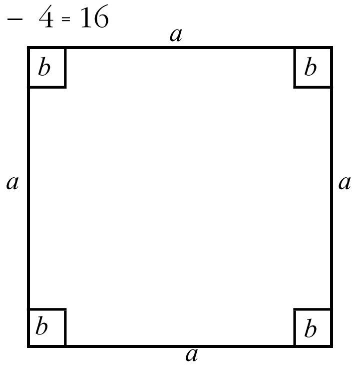
ANNEXE 3

Les formules obtenues à partir de leur propre affiche.

Laëtitia, Peggy, Geoffrey, Thomas

a × b − b = c

5 × 4 − 4 = 16

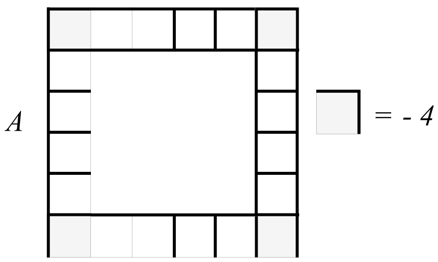


Christopher, Marielle, Lisa

Pierre veut savoir de combien de carrés de mosaïque aura-t-il besoin ?

Formule : A × 4 − 4

Ex :



William, Jonathan, Tony

Formule

longueur = a

a × 4 = b

b − 4 = c

résultat = b

second résultat = c

Exemple :

(ils n'ont pas eu le temps de finir)

Julie, Emilie, Mickaël, Morgan

m = 20

j = 2

e = résultat

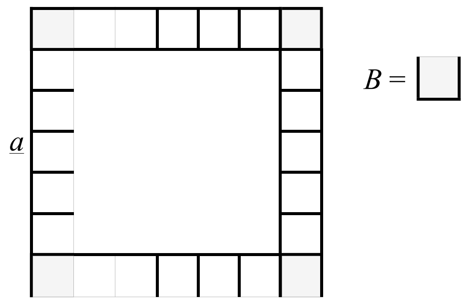
* m + m + (m − j) + (m − j) = e

Elodie, Nicolas, Jonathann, Emmanuelle

Légende

a = 8 cm

B = 1 cm



formule

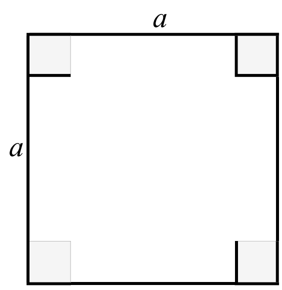
a + a + a + a − B + B + B + B = 28

Vincent, Anaïs, Elodie

Formule

a × 4 = x

x − 4 = b



ANNEXE 4

Les formules obtenues à partir des affiches des autres groupes.

Laëtitia, Peggy, Geoffrey, Thomas

$$a + a + (a - b) + (a - b) = c$$

$$\downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow \; \downarrow$$

$$20 \quad 20 \quad 20 \quad 2 \quad 20 \quad 2 \quad 76$$

Julie, Emilie, Mickaël, Morgan

$m = 20$
$j = 2$
$e =$ résultat

* $m + m + m + m - j - j = e$

* $m \times (j + j) - (j + j)$

Christopher, Marielle, Lisa

Formule :

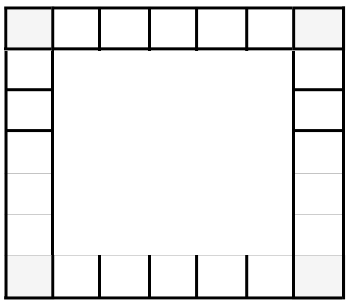
$A + A + (A - 2) + (A - 2) = 76$

Elodie, Nicolas, Jonathann, Emmanuelle

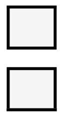
Légende

A= 8 cm
B = 2 cm

a



B =



formule

$A + A + (A - B) + (A - B) = 76$ cm

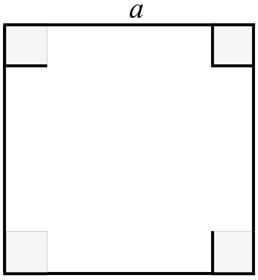
Vincent, Anaïs, Elodie

Formule

$a + a + (a - 2) + (a - 2)$

a

a



William, Jonathan, Tony

Formule

a = 20 carreaux
c = 20 − 2 carreaux

$a + a + c + c = 76$

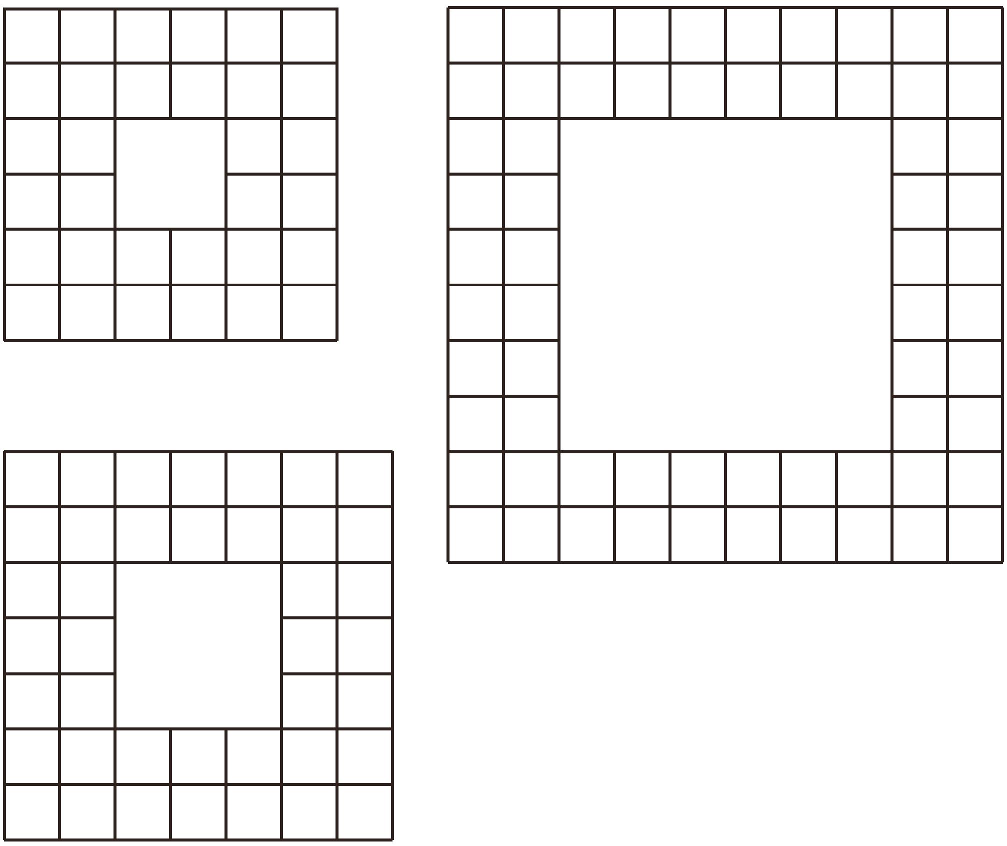
ANNEXE 5

Le deuxième énoncé pour aller plus loin

Pierre décide de border ses grands carrés de deux rangs de petits carreaux de mosaïque.

Il se demande s'il peut savoir à l'avance combien de petits carreaux il lui faut en tout, pour border n'importe quel grand carré.

Pouvez-vous l'aider ?



ANNEXE 6

Les productions des élèves à partir du deuxième énoncé

Morgan, Emilie, Mickaël, Julie : $b = (a \times 4 - 4) \times 2 - 84$

Vincent, Elodie, Anaïs : $(a \times 8) - (4 \times 4)$

Jonathan, Willian, Tony :

$$\boxed{\begin{array}{l} a \times 4 - 4 = b \\ a \times 4 - 4 = b \\ b + b = c \end{array}}$$

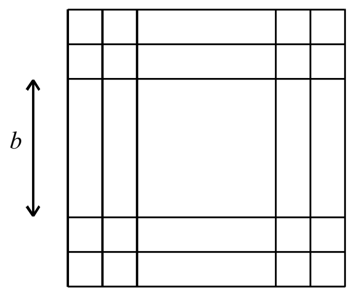
Laëtitia, Peggy, Geoffrey, Thomas :

$$\boxed{\begin{array}{l} a \times 4 = c - 4 = b \\ e \times 4 = f - 4 = i \\ b + i = h \end{array}}$$

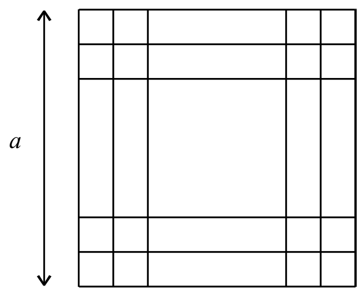
a : côté du carré
c : 1er résultat
b : 2ème résultat
e : côté du petit carré intérieur
f : 1er résultat du petit carré intérieur
i : 2ème résultat du petit carré intérieur
h : résultat final.

Elodie, Emmanuelle, Nicolas, Jonathann :

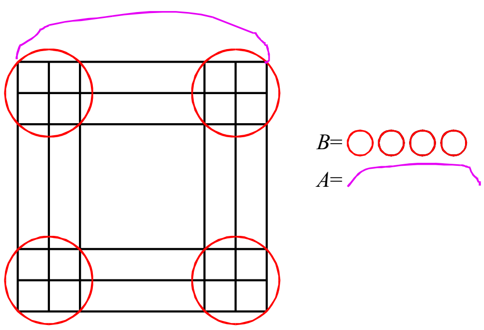
$b \times 4 + 16 = 64$



$a \times 8 - 16 = 64$



Christopher, Lisa, Marielle



$A \times 4 - B = 4$