
L'ÉMERGENCE D'UNE SCIENCE DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : MOTIFS ET ENJEUX

Guy BROUSSEAU

1. INTRODUCTION

La *diffusion des connaissances* entre les humains est une pratique si primitive et fondamentale que son étude est très ancienne et qu'elle intéresse pratiquement toutes les disciplines.

Traditionnellement, les deux questions fondamentales : qu'y a-t-il à savoir et comment l'enseigner devaient être dissociées.

Comenius exposait dans « la grande didactique » (Chapitre XIX, problème IV)

« Comment une méthode unique suffit pour toutes les matières... Il n'existe qu'une seule méthode pour enseigner toutes les sciences : c'est la méthode naturelle, valable

aussi bien dans les arts que dans les langues. Les variations qui pourraient exister sont si insignifiantes qu'elles ne sauraient exiger de méthode spécialisée ».

Cette opinion offre l'avantage de bien séparer les domaines du savoir et de l'éducation et de simplifier ainsi le travail et la formation des professeurs. En particulier elle ferme les yeux sur les transformations du savoir destinées à le mettre à la portée des élèves et alimente ainsi l'idée généreuse mais fautive que « naturellement » les élèves peuvent avoir directement accès au même savoir que les savants. Elle était probablement indispensable pour rompre avec la scolastique et pour permettre le formidable développement de la scolarisation qui a suivi.

Au milieu du siècle dernier, aucune des nombreuses « approches » de l'enseignement n'avait modifié ce partage entre savoir et

(*) Cet article ne prétend pas "traiter" les questions soulevées, il est « seulement » la rédaction d'une intervention orale au CS ADIREM, à la demande de Jean DHOMBRES, son président.

enseignement. Pourtant il devenait de plus en plus difficile d'accepter cette position sans la nuancer fortement, dans la mesure où nous savions mieux distinguer diverses sortes d'apprentissages et notamment celles qui requièrent et développent chez l'élève la réflexion personnelle et l'invention, et aussi parce que nous savions mieux que l'humanité doit construire chaque nouveau savoir dans des conditions et par une aventure différentes. La géométrie et l'algèbre par exemple n'ont pas été construites par les mêmes moyens, à propos des mêmes questions, ni à la même époque ni dans le même temps, comment penser que leur mode de connaissance et leurs apprentissages soient identiques ?

Il devenait nécessaire de trouver un nouvel équilibre entre les méthodes qui font appel au sens particulier du savoir en cours d'apprentissage et celles, indispensables aussi, mais qui s'en détachent. Il devenait évident que celui qui reçoit une connaissance ne doit pas seulement la citer ou la réciter, mais la « reproduire », c'est-à-dire la produire à nouveau, comme une création personnelle ; ce qui conduisait à inclure la production de connaissances comme un élément de leur diffusion et à englober l'étude de la première dans celle de la seconde. Aujourd'hui la complexité et la variété des « approches » de l'enseignement n'ont cessé d'augmenter, mais pour la plupart des lettrés l'antique séparation demeure.

Nous nous occupons ici de celles qui la remettent en cause : l'enseignement d'une notion mathématique fait appel à des dispositifs qui peuvent être plus ou moins spécifiques à la fois de la notion, de son apprentissage et de son enseignement. En France ces approches ont surgi au moment où une réorganisation des sciences mathématiques a paru devoir s'imposer dans l'enseignement.

Depuis, l'Epistémologie Génétique a fortement contribué à rendre à la connaissance elle-même, une place centrale dans les questions d'apprentissage. Certains de ses succès ont laissé espérer que l'enseignement serait guidé par les apports de la Psychologie Cognitive ou même par ceux de la neurophysiologie et les études d'élèves et de réponses d'élèves se sont multipliées. D'autres études se sont portées sur le travail des professeurs, tandis que l'Epistémologie et l'Histoire des Mathématiques éclairaient l'organisation du savoir... De plus, chaque acteur ou institution, de même que chaque produit d'une action et chaque action elle-même peut faire l'objet d'études venant de toutes sortes de disciplines, (la Psychosociologie... la Linguistique, l'Intelligence artificielle, etc.). On comprend qu'il semble impossible d'englober toutes ces approches autrement que par des voies philosophiques et par la critique.

La didactique des mathématiques a surgi de l'intérêt principal porté, non plus aux éléments du triangle didactique (professeur, savoir, élève), mais essentiellement *aux conditions — spécifiques — qui président à la diffusion des connaissances mathématiques utiles aux humains et à leurs sociétés*. Et son principal apport a été *de considérer ces conditions, non plus isolément et par acteurs, mais par systèmes* : conceptions, situations, praxéologies, etc.

Précisons que la didactique étudie les cas où cette diffusion se fait à l'initiative de l'institution « diffuseur », alors que la cible n'en exprime et n'en éprouve pas le besoin (les conditions dans lesquelles elle se trouve ne le lui font pas spontanément ressentir). Autrement dit, le diffuseur est investi d'un « projet de faire approprier une connaissance précise à un sujet que rien n'avertit de cette

nécessité, même s'il n'ignore pas le rôle de l'institution ». Assumer cette réalité inéluctable mais honnie, allait à l'encontre de tous les euphémismes développés pour dissimuler les coercitions liées à l'enseignement et l'anoblir ainsi à bon compte. Cela n'a pas été la moindre des difficultés rencontrées par cette voie de recherche. Ce n'était pas la seule, car toute tentative globale apparaît aussitôt dans ce domaine comme une prétention à instaurer une sorte de discipline des disciplines, une méta science universelle, concurrente de toutes les autres sur chacune de leurs approches.

2. LES QUESTIONS

Les principales questions qui pourraient nous intéresser aujourd'hui au sujet de la didactique sont les suivantes :

Sur le corps des connaissances de didactique

- Existe-t-il une catégorie de phénomènes propres à la diffusion d'une discipline comme les mathématiques ?
 - Les aspects essentiels de ces phénomènes peuvent-ils être déterminés et étudiés à l'aide d'un corps relativement simple de concepts autonomes, (i. e. qui ne soit pas totalement réductibles aux autres disciplines ou/et qui ne soit pas en contradiction avec leurs résultats).
 - Quels sont les fondements et les sources de ces concepts ?
 - Existe-t-il une unité de forme et de méthode pour ces concepts? Quels sont les rapports de ces concepts avec la contingence, présente et passée ?
 - Se structurent-ils en un tout organique ou forment-ils un magma d'esquisses séparées ?
- Tendent-ils à structurer les approches des autres disciplines ou s'y superposent-ils seulement ? Les résultats sont-ils stables ou labiles ? En particulier les apports nouveaux sont-ils héréditaires ?
 - Quels langages la didactique utilise-t-elle? en particulier, la question des rapports avec la terminologie « naïve » est-elle celle de toute science avec la connaissance commune que l'on en a ?
 - Autrement dit ce corps de connaissances constitue-t-il une science ou une branche d'une science déjà établie ?

Sur les institutions qui peuvent supporter ce corps de connaissances

- A quelle(s) discipline(s) se rattachent les chercheurs ? A laquelle devraient-ils se rattacher principalement ? Quelles relations entre ces domaines peuvent assurer une production soutenue, une homogénéité raisonnable, un contrôle scientifique rigoureux, et une éthique responsable ? Les différentes sciences sont portées par des institutions qui sont prêtes à en défendre les acquis et à les remettre en cause avec une égale ardeur, les raisons de consistance, de validité et de cohérence primant sur celles d'habitude, de convenance, d'utilité immédiate ou d'économie. Le choix de la discipline de rattachement ne dépend pas uniquement des relations scientifiques, théoriques ou méthodologiques. Dans le cas de l'enseignement, la multiplicité, la variété, l'agitation et la puissance des institutions en présence rend nécessaire une masse critique de chercheurs en interaction solide avec des branches scientifiques bien établies.
- Quelles institutions et quels instruments (scientifiques et sociaux) sont indispensables à ces recherches (labo-

ratoires, formation, établissements d'observation, etc.) ?

- Quelles sont celles qui peuvent bénéficier des connaissances ainsi établies (l'enseignement, l'ingénierie didactique, la formation des professeurs, le public et la noosphère) ? Quels retours et quelles corrections proposent-elles éventuellement ?
- Quelles sont les institutions relais qui sont nécessaires pour à la fois assurer la « transposition » des résultats et rétroagir sur les erreurs inévitables.
- Quels rapports ces recherches entretiennent-elles avec l'activité de réflexion et de recherches naturelles propres aux différentes institutions dont la production et la diffusion des connaissances est la fonction sociale ?

En résumé de cet inventaire non exhaustif, nous nous demandons si la science de la didactique (ou mieux du didactique) existe et peut exister en tant que discipline¹.

3. VUE D'ENSEMBLE SUR UN MOUVEMENT DE REFORME

Dans les années 60-70, le flux d'injonctions que l'enseignement reçoit habituellement de l'ensemble des institutions de la société s'intensifie brutalement. Avec l'aisance financière des trente glorieuses, des propositions d'origines diverses, entre autres, l'éducation (LANGEVIN-WALLON), la psychologie (PIAGET), « la » mathématique (BOURBAKI), la linguistique (CHOMSKI), etc., se rassemblent sous une même bannière épistémologique (le structuralisme). Le bouillonnement se fait plus pressant et déborde en un train de réformes sco-

laires à tous les niveaux. La didactique classique dont nous parlions plus haut (issue des humanités), et ses avatars (la méthodologie), sont submergés, enfoncés, « dépassés » et discrédités, au moment même où s'effondrent les rapports de l'enseignement (notamment public) avec les institutions qui assuraient sa « protection » politique et scientifique.

Les critiques à l'encontre des actions des corps de l'état et du système éducatif sont radicales et très violentes, et elles s'accompagnent paradoxalement de l'affirmation que ces mêmes corps doivent et peuvent se réformer eux-mêmes et inventer des solutions nouvelles. (Cette position contradictoire se maintient aujourd'hui). Mais rien de concret ne vient remplacer ce qui est rejeté. D'autant plus que rien au fond ne relie de façon cohérente la masse des espoirs qu'il a fallu mobiliser pour obtenir un mouvement appréciable.

Ainsi la didactique traditionnelle aurait-elle sans doute pu présenter les nouvelles connaissances de mathématiques aux élèves, en séparant le « contenu » et les méthodes de l'enseignement et en déterminant le vrai à la manière d'Aristote, grâce au structuralisme et à l'axiomatique. C'est d'ailleurs sous cette forme qu'elle s'est présentée aux professeurs. Et en même temps la nécessité d'une adaptation (d'une transposition) était déniée : de la maternelle à l'université, le savoir devait pouvoir être le même, s'exprimer dans les mêmes termes. La vérité (du point de vue structuraliste) paraissait même ne pas requérir la médiation d'une transmission à condition que la structure soit suffisamment épurée (BOURBAKI).

Pourtant, il n'était plus possible d'ignorer ostensiblement la psychologie, la pédagogie moderne, la sociologie, la philosophie... De toute

¹ BROUSSEAU G., Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège, "petit x" n°21 pp 47-68. Grenoble (1989)

part, les exigences se multipliaient et se présentaient comme des impératifs catégoriques. Mais le structuralisme triomphant recouvrait d'un voile rassurant les divergences et mêmes les contradictions de toutes ces ambitions.

Or il n'était pas possible de satisfaire, sur de nouveaux contenus, en même temps — et surtout dans le faible laps de temps imparti —, toutes les orientations prescrites. Elles prônaient en vrac l'activité et la généralisation, l'abstraction et la construction d'un sens², la rigueur et l'utilité, la manipulation de machines et la découverte, l'individualisation et le développement des relations sociales, la communication et l'innovation, le respect des stades génétiques ou celui de la liberté des élèves (selon FREINET, MARCUSE, ILLICH³...), etc.

Ce faisceau de projets était une utopie qui ignorait totalement toutes les difficultés et toutes les lois de la diffusion des connaissances et des pratiques dans une société, en particulier les questions de temps de réponse des systèmes. Il a crû et est mort dans l'illusion de la transparence des faits didactiques et de la toute puissance des moyens de connaissances. Dans cet épisode, ni les « contenus » de l'enseignement — les mathématiques — ni leur conception — moderne ou pas — ne peuvent être mis en cause, et les excès spectaculaires en tous genres qui ont ensuite servi d'alibi à la contre réforme ne sont eux-mêmes que des conséquences et des révélateurs d'un fait principal : notre ignorance de la fragilité et de la complexité des systèmes didactiques. Un grand

nombre d'appétits économiques, sociaux, culturels et politiques ont fait de l'enseignement (en particulier public) que l'on croyait indestructible, le champ clos de leurs affrontements. Il faudrait faire une place à part à tout un ensemble de courants anarchistes (sans rapports avec le structuralisme) qui trouvèrent un exutoire en mai 68 ; œuvrant d'abord en faveur des réformes mais en leur assignant leurs propres objectifs, ils se retournèrent contre elles lorsqu'il s'est agi de les mettre sérieusement en œuvre.

La didactique est née — avec les Irem — de ce projet de réformes, et de la conscience (bien mal partagée par les acteurs, dans les disciplines) que, s'il fallait accompagner, aider la réforme par des propositions de toutes sortes, il fallait aussi l'observer et chercher à comprendre et à corriger ce que l'idéologie réformatrice pouvait produire d'erreurs.

Les mécanismes de régulation imaginés à l'époque reposaient tous

- sur les interactions entre différentes institutions afin de rendre disponibles les savoirs existant (interdisciplinarité, pluridisciplinarité, transdisciplinarité...)
- et sur les qualités personnelles des protagonistes : n'étaient didacticiens à l'époque, que les « ingénieurs » qui préparaient des matériaux (manuels curriculum, matériels jeux etc.) pour l'enseignement.

Ceux — peu nombreux — qui pensaient que des connaissances de type scientifique étaient nécessaires pour l'étude de la diffusion des savoirs, imaginaient une multitude de travaux dans des disciplines différentes (principalement psychologiques) portant sur un même objet : l'enseignement formant ainsi un « champ scientifique », dont l'unité était empi-

2 Le sens était dans la structure pour les structuralistes, ou dans la sémantique au sens de Carnap, c'est-à-dire dans les réalisations de la structure, ou dans la fonctionnalité de la structure...

3 I. Illich, Une société sans école, Seuil 1971

rique et pragmatique. L'idée que, dans ce champ, il était nécessaire de disposer de concepts théoriques et unitaires nouveaux était à la fois évidente⁴ et scandaleuse. Je propose de nous arrêter un moment sur cet aspect du problème. J'espère que vous me pardonneriez de rapporter à ce propos quelques souvenirs personnels qui concernent la naissance et l'histoire des Irem.

4. LA NAISSANCE DES IREM ET DE LA DIDACTIQUE

Pour moi cette histoire commence en 1964, quand A. LICHNEROWICZ (à qui Lucienne FELIX m'avait présenté en 1962) m'a proposé d'étudier « les conditions limites d'une expérience en pédagogie des mathématiques »⁵. Ma réponse⁶ fut communiquée en partie au colloque d'Amiens (en février 68). Elle indiquait la structure et les moyens nécessaires à un Institut de *Recherches* sur l'Enseignement des Mathématiques, en particulier les relations avec le système éducatif et une « école pour l'observation »⁷. Les bases théoriques et les premières recherches expérimentales et d'ingénierie furent exposées au cours des deux ou trois années suivantes⁸. Après deux essais pénibles et infructueux, l'école pour l'observation JULES MICHELET fut créée en 1973, tandis que les recherches méthodologiques — en particulier en statistiques — progressaient à Strasbourg, à Bordeaux et à Rennes. En 1975 deux Irem (Strasbourg et Bordeaux) et une unité de Paris VII

(Didactiques des disciplines) se virent dotés d'un D.E.A. Le terme de « Didactique » fut préféré à celui d'« épistémologie expérimentale »⁹. Régine DOUADY en fait une bonne présentation dès 1980 dans l'*Encyclopedia Universalis*¹⁰. Les premières thèses sortirent entre 1979 et 1982.

Les Irem ont été le résultat d'un très grand nombre d'actions entreprises par de nombreuses personnes et institutions, avec des motivations très différentes. Il serait saugrenu de vouloir en faire le résultat de ma modeste étude de l'époque. Mais les faits attestent qu'il y avait alors, de la part des promoteurs du projet, une volonté de faire développer des recherches *scientifiques* sur l'enseignement des mathématiques, conduites par des mathématiciens, avec des moyens théoriques et expérimentaux éventuellement nouveaux mais se pliant aux pratiques et aux règles scientifiques classiques. Quels moyens ? Là était le nouveau problème.

5. LES MOTIVATIONS

Il n'était pas évident de savoir ce que veut dire « faire faire des mathématiques à un élève », ni de décrire les conditions techniques à réaliser pour organiser et obtenir différentes formes d'apprentissage, ni comment communiquer *ce qui est important* dans les pratiques d'enseignement et sur les moyens effectifs de leur contrôle dynamique : dans les classes, les professeurs ne voient pas les

4 Du moins pour moi, au point que j'ai longtemps naïvement ignoré son caractère scandaleux.

5 En sujet complémentaire d'une thèse que je commençais à préparer sous la direction de P. GRECO.

6 Ma réponse fut de créer à titre expérimental, un centre de recherches qui « éprouverait » ces conditions.

7 Inaugurée en présence de A. LICHNEROWICZ et de MAUGUIN (I.A.) par J. COLMEZ (Dir. Irem).

8 Au Colloque de l'APMEP de 1972 à Clermont-Ferrand, à celui des Sciences de l'éducation en 1973 etc.

9 Terme proposé par J.L. OVAERT au cours d'un colloque à Bordeaux en 1975.

10 « Didactique des mathématiques » Vol 14. 707 Cet article côtoie celui d'A. REVUZ sur « l'enseignement des mathématiques Vol 14. 711 tandis que P. GRECO traite de la « Pédagogie des mathématiques » (vol 7. 396) et Daniel LACOMBE de la didactique et de la didactique des disciplines (vol 7. 394).

mêmes choses, ne parlent pas des mêmes choses, les mots et le sens des mots sont fluctuants.

Nous passerons rapidement sur les motivations générales de l'intérêt porté aux connaissances sur « l'éducation mathématique », bien qu'elles soient les plus importantes. *Les réformateurs affichent leurs motivations au cours des colloques de Caen puis d'Amiens. Pour trouver celles des recherches qui étaient envisagées il faut faire précéder chaque objectif de la mention « connaître les conditions effectives de... »* (ex. : connaître les conditions effectives, politiques, sociales et sociologiques d'un accès bien partagé à la connaissance, celles de la régulation des influences sur l'éducation dans une gestion démocratique de l'enseignement, celles de la professionnalisation du métier d'enseignant et notamment les savoirs minimaux spécifiques à la formation etc.).

Malgré les poussées d'un certain anarchisme épistémologique¹¹, chaque discipline affirmait ou manifestait implicitement *l'ambition de placer les « pratiques inefficaces » et les « suggestions anarchiques » relatives à l'enseignement, sous le contrôle de son propre corps de connaissances scientifiques* (et de le faire prévaloir sur toutes les autres disciplines). L'enjeu était, à terme, l'acquisition pour la recherche universitaire des postes dévolus à la forma-

tion des professeurs. Mais aucune n'allait jusqu'à prendre en charge la relation entre un dispositif d'enseignement déterminé relativement à un objet d'enseignement précis, et les effets de telle ou telle suggestion sur son déroulement et ses résultats. Par exemple Piaget montrait des dispositifs destinés à mettre en évidence une certaine connaissance « du » nombre chez « l'enfant » (à un certain stade), mais rien ne permettait de montrer objectivement que la structure mathématique reconnue par l'observateur était bien celle que l'élève mettait en œuvre dans son action. Les dispositifs eux-mêmes étaient les fruits d'une heureuse invention des expérimentateurs mais n'étaient l'objet d'aucune étude critique. Tout en affirmant — ce qui est essentiel — que les élèves n'apprennent pas et ne pensent pas les mathématiques comme les manuels les disposent, Piaget cherchait dans les nouvelles mathématiques, une vertu descriptive directe de la pensée des élèves, une sorte de « main invisible » sans justification théorique ou ergonomique. L'originalité et les vertus étaient dans les mathématiques « nouvelles », qui devenaient explicatives par le simple fait que l'observateur les connaissait et qu'elles n'étaient pas enseignées aux élèves. Cette observation ne tend en rien à diminuer l'apport de Piaget qui se gardait bien de vouloir traiter des savoirs et apprentissages scolaires, mais à souligner le véritable saut de complexité qu'a dû affronter la didactique.

Il s'agissait d'étudier l'objet central de l'enseignement, c'est-à-dire *les interactions spécifiques au cours desquelles un sujet modifie son répertoire pour appréhender une nouvelle connaissance particulière*. Or cette interaction n'était guère étudiée en elle-même. Elle était considérée soit comme une production du sujet lui-même (de ses schèmes par exemple),

11 A propos de P. FEYERABEND (Against Method, 1975), G.G. GRANGIER écrit dans l'Encyclopedia Universalis : « la doctrine de l'« anarchisme épistémologique » a été lancée dans les années soixante par Feyerabend... Elle assure, d'une part, que la société doit donner une même chance de se développer à toute procédure qui se prétend productrice de connaissance, si incontrôlée ou même incontrôlable qu'elle soit, sans aucunement favoriser les méthodes positives ; d'autre part, que toutes les tentatives, présentes ou passées, en fin de compte, se valent. Astrologie, alchimie et magies auraient apporté autant de satisfaction que les sciences à l'esprit humain. Dans un tel déferlement de scepticisme... toute tentative brouillonne est digne de considération. »

soit comme l'expression même du savoir, soit enfin comme un effet d'un « art » de l'enseignant à peu près indépendant à la fois des sujets apprenants et des objets d'études (le « fameux » triangle didactique). Les conditions non didactiques de la connaissance, c'est-à-dire celles qui resteraient après l'apprentissage et l'école, formant le *milieu* où la connaissance apprise entrerait en œuvre sans intervention extérieure, n'étaient même pas reconnues. Les mathématiques modernes fournissaient ainsi l'occasion et le moteur d'une réflexion pouvant générer une discipline.

L'objet d'une étude de ce genre peut être comparé à celui de la micro économie : quels sont les équilibres qui régissent le besoin de connaissance d'un sujet et la satisfaction de ce besoin ? La question peut être posée sans évoquer autre chose que les choix ouverts par une situation à un homo economicus doté d'un minimum de moyens de réflexion. Pour quelle raison « l'élève » ferait-il ceci plutôt que cela, quelles sont les bonnes (ou les moins mauvaises) raisons de retenir ceci ou d'oublier cela ? Ou plus exactement, quelle distribution des élèves y a-t-il lieu de considérer en créant les conditions dans lesquelles une connaissance pourra être appréhendée (inventée, comprise, apprise, ...), par une classe ? Ainsi les premières études de didactique se sont inspirées de considérations ergonomiques¹². Le fond épistémologique du structuralisme et la systémique aidant, cette approche a presque immédiatement conduit à concevoir que les conditions d'apprentissage d'une connaissance précise devaient être considérées comme un système et non de façon isolée.

12 Etudes sur les procédés du calcul humain des opérations élémentaires et de leur apprentissage, (ex.: BROUSSEAU Guy (1973) "Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ?", Actes du 3e congrès des Sciences de l'éducation, Apports des disciplines fondamentales aux sciences de l'éducation, 1, 361-378)

Les interactions fondamentales non didactiques : l'action des sujets, les formulations et la communication, la production de preuve etc. étaient bien repérées et possédaient déjà des modèles dans différents domaines, parfois même des modèles mathématiques assez sophistiqués (théorie des jeux, théorie de l'information, de la communication, etc.). Par exemple P. LORENZEN¹³ fondait le calcul propositionnel comme moyen de règlement entre un proposant et un opposant.

Il leur correspondait naturellement des objets didactiques tels que les problèmes, les démonstrations etc. Inversement de nombreux faits de didactique semblaient relever clairement de modèles théoriques connus, ce qui soutenait l'espoir de cerner assez bien des conditions assez générales de mise en œuvre de connaissances¹⁴.

Tous ces signes étaient alors interprétés comme favorables à un projet social considéré alors comme important : faire assurer la responsabilité de l'usage des mathématiques dans la société par ceux qui les produisent, c'est-à-dire par la communauté des mathématiciens, alors que cette responsabilité semblait devoir appartenir à ceux qui utilisent les mathématiques (les ingénieurs par ex.). Et elle devait assurer de surcroît dans la société, une homogénéité démocratique minimale des rapports aux mathématiques. Car en France, notamment, les mathématiques, pro-

13 P. LORENZEN Métamathématique, Gauthier Villars Paris 1967.

14 Dans les années 60 de nombreuses tentatives de modéliser certains aspects de l'enseignement à l'aide de diverses théories, témoignent de cet espoir, par exemple: J.R. PIERCE, ou H. FRANCK dans « Pédagogie et cybernétique » avec la théorie de l'information, DIENES avec des extrapolations de l'isomorphisme, plus tard Claude BRUTER avec des modèles analytiques etc.

gressivement, étaient associées à une culture d'élite (la noblesse d'Etat, dont allait parler Bourdieu) et les mathématiques modernes se présentaient comme un moyen automatique de démocratisation (à cause de l'unification signalée plus haut).

5. LES DIFFICULTES, LES DEFIS

Mais dès qu'il s'est agi d'utiliser effectivement ces modèles pour interpréter des actes réels d'apprentissage ou d'enseignement les difficultés ont commencé : les modèles étaient inadéquats ou partiels et de ce fait inutilisables. Par exemple, les schémas de communication utilisés par les linguistes ou par les ingénieurs ne tenaient aucun compte de ce qui déterminait le contenu des messages. D'autre part, les rapports avec l'enseignement ne fournissaient pas les informations indispensables. L'administration tout en faisant obstacle à l'intrusion de personnels qu'elle ne contrôlait pas, commença à laisser l'initiative à toutes sortes d'improvisations. Les enseignants excluaient (même involontairement) l'observation directe de leurs méthodes de travail. Il a fallu développer une culture extrêmement locale et spécifique pour pouvoir le faire¹⁵. Je n'évoquerai pas ici les polémiques qui ont accompagné l'arrachement des « faits » de didactique à la gangue idéologique et affective qui les dissimulait.

Il a fallu reprendre et rendre cohérents les concepts et les modèles de base, déterminer la nature des phénomènes étudiés et les méthodes expérimentales, forger les instru-

ments institutionnels, exiger les précautions et préciser l'éthique, etc.

Mais les principales difficultés étaient inhérentes au projet.

Les notions mathématiques, malgré la stabilité que leur donne la précision catégorique de leur définition, ne « fonctionnent » pas de la même façon dans des « milieux » aussi différents que l'apprentissage scolaire à tel ou tel niveau, dans l'usage pour telle ou telle institution ou entreprise, dans la culture mathématique à différentes époques ou dans les différentes branches de la recherche actuelle. Dès lors qu'il s'agit de faire « reproduire » ou apprendre des usages, ces différences deviennent évidentes, pour peu que l'on prenne un peu de recul par rapport à l'ambition de les reproduire « à l'identique ». Utiliser ces différences et les combattre aussi devient l'essence de l'action didactique¹⁶. De même l'acquisition des connaissances ne s'effectue pas en une fonction croissante monotone, dans le bon ordre des présentations axiomatiques, des obstacles se présentent (même en mathématiques contrairement à ce que croyait Bachelard), des retours sont inévitables. Et les erreurs ne sont plus seulement des marques d'échec mais la conséquence prévisible d'une activité légitime. Tout ceci peut s'inscrire comme une motivation à la création d'une science autonome.

Mais en même temps, cela peut signifier l'inanité du projet. L'ambition d'étudier spécifiquement les conditions particulières de la compréhension et de l'acquisition de chaque connaissance dans chacune des circonstances où elle pourrait se présenter apparaît totale-

15 A l'école pour l'observation J. Michelet, création de l'IREM de Bordeaux, il a fallu dix ans d'observations des élèves dans des situations convenues avant de pouvoir « regarder » des actes d'enseignement effectifs.

16 C'est l'objet de la théorie de la transposition voir infra.

ment extravagante. Cette ambition va exactement dans le sens inverse de toute l'activité scientifique qui tend à abstraire de leurs conditions particulières les relations les plus générales. Elle va ainsi à l'encontre de toute didactique, qui tend à faire émerger des méthodes communes aux plus vastes contenus à enseigner possibles, afin de projeter la complexité sur deux ou trois composantes et de cette façon permettre une formation « économique » des professeurs.

Et de plus, en même temps, elle semble vouloir rassembler « de force » en un objet d'étude *unique* ce qui a fait depuis si longtemps l'objet de diversifications si nombreuses et si subtiles dans des disciplines qui couvrent déjà si bien tous les aspects de la réalité. Cette prétention apparaît légitimement à plus d'un, comme scandaleusement prétentieuse !

Des raisonnements « de bon sens » comme le suivant tendent à la faire paraître comme inutile. Les facteurs qui agissent sur l'enseignement sont mis en évidence indépendamment les uns des autres, par diverses disciplines et les enseignants doivent en tenir compte. Pourtant les enseignants et le public tendent à penser que la qualité de l'enseignement est une fonction monotone de ces variables, de sorte que les choix extrêmes sont souvent retenus comme « théoriquement meilleurs », bien que la didactique montre que les liaisons créées entre ces variables par les systèmes et les régulations qui en résultent font qu'au contraire, jamais aucune de ces variables n'est optimale sur les bornes de son intervalle de pertinence. On oppose à la recherche des solutions optimales le fait que d'instinct les professeurs choisissent des voies médianes, ce qui est interprété comme une correction « raisonnable » de la pratique à l'encontre de la soi-disant théorie.

Enfin les trente ans d'accumulation de connaissances et de concepts dans ce domaine peuvent constituer un sérieux obstacle à la curiosité des débutants, surtout de ceux qui, ayant fait de bonnes études de mathématiques, voudraient investir ce terrain. La préparation des chercheurs est de plus en plus longue et difficile. D'autant plus que, pour des raisons que nous n'examinerons pas ici, il s'est constitué entre la communauté constituée des mathématiciens didacticiens et les mathématiciens des autres disciplines, une sorte de « fire wall » qui rend presque impossible les dialogues et même les échanges d'informations.

6. L'ÉMERGENCE DIFFICILE MAIS EXALTANTE

Comment les défis scientifiques, conceptuels, méthodologiques, et technologiques ci-dessus ont-ils été relevés ?

En voici quelques exemples. Y. CHEVALLARD a repris avec succès au moins trois fois le projet de donner à la didactique un fondement plus large que celui proposé par la théorie des situations¹⁷, et de donner à cette dernière une alternative et des prolongements : - d'abord dans sa « théorie de la transposition didactique »¹⁸ (1980) En effet les situations didactiques sont à la fois les causes et les effets de la transposition. Les deux études sont complémentaires du même objet, différentes mais équivalentes¹⁹.

17 BROUSSEAU G., La théorie des situations didactiques La pensée sauvage (1998)

18 CHEVALLARD Y. La transposition didactique 2e Edition La pensée sauvage, Grenoble, exposé à la 1ere école d'été de DdM (1980).

19 Admettre que les connaissances et les savoirs traités dans les situations didactiques par les professeurs comme par les

- puis dans sa « théorie formelle du didactique »²⁰ (1986) où la notion de situation est reprise dans un concept plus général d'assujettissement à une institution et où une étude des relations didactiques entre institutions est amorcée.
- enfin dans sa « théorie anthropologique du didactique »²¹ qui constitue la forme la plus développée de ces efforts. Elle tend à modéliser les rapports aux mathématiques, des individus, des institutions et de leur environnement en prenant en compte toutes les contraintes qui rendent ces relations possibles, nécessaires, économiquement et écologiquement adaptées. D'autres efforts sont à noter qui ont pour but de donner des fondements épistémologiques à la didactique, en direction de la psychologie²² en particulier avec G. VERGNAUD²³, de la sociologie, de la linguistique, etc. et se poursuivent encore aujourd'hui.

Mais d'autres défis se présentaient : pour comparer les vertus de deux solutions didactiques par leur effet sur deux échantillons d'élèves (et non pas celles des deux échantillons d'élèves), il faut pouvoir s'assurer que les épreuves qui permettent la comparaison sont « à égale distance des deux groupes d'élèves »

élèves sont légitimement différentes, volontairement ou involontairement transposées des connaissances « savantes » est le premier axiome de la théorie des situations.

20 Y. CHEVALLARD Communication 1er Colloque Franco Allemand Actes. La pensée Sauvage

21 Y. CHEVALLARD L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, Recherches en didactique des mathématiques vol. 19/2 221-265 La pensée sauvage (1999)

22 En 1975 les mathématiciens d'ICME n'imaginaient pas d'autre base que la psychologie pour l'étude expérimentale scientifique de l'éducation mathématique, d'où la création de PME à Karlsruhe.

23 VERGNAUD G. La théorie des champs conceptuels, Recherches en didactique des mathématiques vol. 10/2.3 1333-169 La pensée sauvage (1991)

(F. PLUVINAGE, 1975). Les relations entre les variables didactiques qui nous intéressent sont par essence dissymétriques et s'expriment en termes de causalité. Or les seules méthodes statistiques disponibles tant en statistique inférentielle qu'en analyse de données dans les années 70 étaient fondées sur des distances (chi carré, Euclidiennes, de Mahalanobis etc.). En réponse, la statistique implicite apparut. Elle est à mettre à l'actif des mathématiciens didacticiens (R. GRAS 1979). La détermination de ce qui est reproductible et de ce qui ne l'est pas en didactique était essentielle pour distinguer un fait de cet ordre (M. ARTIGUE 1982). Le défi de la construction de situations et de longs processus a été relevé par R. DOUADY (1982) et quelques autres, et ont fortement contribué à l'émergence d'une ingénierie didactique (Michèle ARTIGUE 1990)²⁴... Il ne s'agit là que des premières œuvres, d'autres nombreuses ont suivi. Il est très difficile aujourd'hui d'imaginer l'enthousiasme et la passion qui portaient les professeurs de mathématiques à explorer tous les moyens d'améliorer leur enseignement, d'en comprendre les mystères et d'accroître le rayonnement de leur discipline. Le mouvement de rénovation des mathématiques projetait très loin les uns des autres, ceux qui expérimentaient, innovaient, publiaient, ou entraînaient l'adhésion des profanes, et ceux qui sondaient les failles, critiquaient les improvisations et tentaient de prévenir les dérives. Mais les Irem établissaient entre tous une profonde complicité et finalement une cohésion étonnante. Nous manquons cruellement aujourd'hui de synthèses de tous ces résultats. Une histoire des réformes des enseignements de mathématiques de cette période devrait permettre

24 Naturellement l'évocation de ces quelques noms serait très injuste à l'égard des très nombreuses personnes qui ont enrichi ce champ, si on l'interprétait comme une sorte de florilège

de combler ce besoin, histoire qui pourrait être entreprise aujourd'hui dans le cadre des Irem.

Cependant les travaux de recherche scientifique ont été à la fois stimulés et freinés par leur engagement IREMique. Par exemple leurs auteurs étaient impliqués dans des rapports étroits avec les enseignants, ce qui les conduisait à faire part de leurs idées de leurs expériences, de leurs conceptions, souvent prématurément, et sous des formes inachevées, qui se trouvaient bloquées par la suite quand il fallait les reprendre. La confusion entre les usages courants des termes et ceux qu'il faut bien arrêter dans une acception précise contrarie la diffusion correcte des connaissances et brouille les débats...

Pendant ce temps, les travaux en didactique, indépendants de tout souci de cohérence d'ensemble, ont proliféré, les concepts se sont multipliés, les discussions byzantines ont envahi l'espace éditorial que des scotomisations insidieuses avaient libéré... Les chercheurs se sont complus dans les observations particulières d'un aspect précis de la résolution par quelques élèves d'un problème unique ou dans l'inventaire des erreurs curieuses sur des chausse-trappes singulières. Les synthèses sont rares et souvent plus conviviales que scientifiques. Les bases ne sont pas encore suffisamment universellement acceptées pour permettre beaucoup de débats pourtant indispensables.

Malgré les tentatives d'unification, l'énorme augmentation de complexité des connaissances nécessaires, aussi bien pour identifier et poursuivre l'étude scientifique rigoureuse des phénomènes de didactique que pour l'utiliser dans la formation des professeurs est devenue le principal obstacle à la diffusion de

cette science dans un milieu qui pourtant accepte dans d'autres domaines une complexité comparable, accroché qu'il est à l'illusion de la transparence de sa propre action.

7. CONSTITUTION DE LA SCIENCE DU DIDACTIQUE

Tendances

Aujourd'hui on peut distinguer une organisation de la didactique *stricto sensu* à l'intérieur d'un très grand champ de recherches d'origine et de statuts variés présentant des intersections avec à peu près toutes les disciplines. Il faut néanmoins noter que la didactique des mathématiques, qui prolonge par certains aspects le projet de COMENIUS et sa philosophie humaniste, s'oppose aussi à lui en ce sens qu'elle ne se présente pas comme une spécification de la didactique générale. Au contraire, elle prétend reprendre, à partir du savoir à enseigner lui-même, tout l'édifice des conditions d'enseignement et d'apprentissage. De plus, en reconnaissant que les connaissances doivent s'adapter à des âges, ou à des conditions différentes, et que des institutions didactiques doivent s'interposer entre les humains et le savoir des humains, et même le transposer, elle semble abandonner un des postulats fondamentaux de l'humanisme : l'égalité des droits des humains à l'accès direct aux mêmes savoirs. Je crois qu'il n'en est rien et qu'il vaut mieux reconnaître les difficultés pour mieux les surmonter que d'affirmer comme des lois naturelles ce qu'on désire obtenir.

La didactique classique abordait l'enseignement en la partageant d'emblée en deux secteurs sans relation, la discipline d'une part et une méthodologie non disciplinaire, d'une

autre. Les phénomènes d'enseignement n'étaient donc perçus que par leurs projections sur ces deux composantes indépendantes. La didactique des mathématiques actuelle s'intéresse, elle, à l'espace de leurs interactions.

Elle se sépare de même totalement de la psychologie, même si c'est pour mieux réintégrer et légitimer ses apports. Par exemple, devant un tableau représentant les comportements d'une collection de sujets affrontant une collection de problèmes, le psychologue considère avoir des renseignements sur un corpus d'élèves, le didacticien considère en avoir sur un corpus de situations et tout est différent.

On tente de la placer sous l'égide de l'anthropologie, et cette position en vaut bien d'autres. Elle convient assez bien pour présenter tous les travaux d'observation du milieu que forment les partenaires de l'enseignement des mathématiques. Mais l'anthropologie n'est guère plus proche de la didactique que l'économie, la sociologie ou la médecine et elle ne peut pas bien accueillir l'ingénierie.

A mon point de vue, la seule égide qui soit inévitablement indispensable à la didactique telle que je viens de la présenter est celle des mathématiques, celle des sciences mathématiques plus précisément²⁵. Cette appartenance est logiquement fondée et fonctionnellement nécessaire. Cela ne suffit pas pour qu'elle soit fatale. Si 80% de l'activité des mathématiciens professionnels, qu'ils soient ou non professeurs, est de nature didactique, l'entrée et la sortie des domaines scientifiques

dans ou hors des mathématiques obéit à des règles encore inconnues. L'histoire vient confirmer que de toutes les disciplines, la mathématique est celle qui a les liens les plus étroits avec son enseignement.

Constitution du champ

Les recherches en didactique des mathématiques peuvent être classées suivant de très nombreux groupes de critères : suivant la discipline instrumentale (psychologie, linguistique, sociologie...), l'objectif (science « pure », ingénierie, formation), suivant la centration sur une composante du système (le savoir, l'élève, le professeur, le milieu : par ex. les problèmes...) suivant le niveau scolaire, suivant le pays ou la culture, eux-mêmes déclinés en une multitude de sous classes et de croisements. Ces travaux ont des références différentes et s'adressent en fait à des « publics » différents, ce qui les conduit à adapter leur langage et leurs concepts et donc à s'isoler davantage. En dehors de leur discipline de rattachement, ils ne peuvent utiliser pour les autres aspects de leur travail que des concepts « communs migrants » et des représentations culturelles²⁶. Rien ne favorise les regroupements, de sorte qu'aucune organisation d'ensemble n'est acceptée unanimement pour l'instant. De nombreux travaux ont développé des concepts spécifiques intéressants pour appréhender tel ou tel aspect des situations et des processus didactiques mais très peu se sont donné le but de prendre en compte l'ensemble des phénomènes liés à la communication didactique des savoirs mathématiques²⁷ et l'accueil des connaissances venues

25 Guy BROUSSEAU et Gilles CHRISTOL, Les études doctorales de didactique des mathématiques à l'Université, Bulletin de la S.M.F. (2000).

26 Il est difficile d'examiner avec précision une idée mathématique profonde dans un article où on analyse les comportements d'un élève, surtout s'il s'agit de la scolarité obligatoire par exemple, et aussi bien d'utiliser des notions de psychologie ou de sociologie un

peu particulières, pour argumenter sur le travail d'un professeur.

27 La TSDM et l'anthropologie du didactique sont les tentatives les plus récentes. Elles dépassent largement les précédentes, orientées vers l'action, et qui ne visaient pas le statut de science : la didactique behavioriste, la méthodologie heuristique, la psycho-mathématique de Diénès, le constructivisme radical, etc.

des autres disciplines. Cette situation favorise un développement consensuel qui fait barrage aux pensées originales et aux débats scientifiques sincères. Elle maintient les chercheurs dans l'impossibilité de vérifier dans plusieurs secteurs la consistance de leurs analyses de sorte que la « culture didactique internationale » me semble être une collection amorphe et contradictoire où pullulent les concepts vagues et les méthodes douteuses. Mais l'inconsistance d'ensemble n'est pas le propre de la didactique et il n'est pas sûr que les mathématiques elle-même y échappent.

Micro et macrodidactique

Cependant il me semble que dans la plus grande partie des travaux de didactique actuels, on peut identifier un objet commun : l'analyse de la *détermination simultanée de connaissances précises et des conditions dans lesquelles elles peuvent être proposées et apprises par des sujets ou par des institutions.*

Enseigner n'est pas distribuer une marchandise, et la didactique n'est pas l'étude des aspects économiques et financiers de l'éducation mathématique. Pourtant, si on considère qu'au lieu de *biens*, il s'agit de diffuser des *savoirs* entre des humains ou leurs institutions. Si on respecte bien les différences fondamentales qui s'imposent, on peut établir d'utiles parallèles entre la didactique²⁸, et l'économie²⁹. La théorisation mathématique de l'économie a conduit

à distinguer une théorie micro économique³⁰ et une théorie macro économique³¹.

Or, le caractère commun que nous venons de relever pour des travaux de didactique correspond à celui qui détermine une théorie microéconomique : dans la mesure où l'individualité de chaque connaissance et de chaque partenaire est respectée on peut faire entrer ces travaux dans le cadre d'une théorie microdidactique telle que la théorie des situations. Par exemple dans cette homologie, l'étude — descriptive expérimentale ou normative — de l'enseignement de la mécanique rationnelle à des élèves de différents niveaux scolaires, suivant divers objectifs professionnels, ou suivant les époques, relèverait de la micro didactique. Par contre celle de la disparition de l'enseignement de la mécanique rationnelle dans la formation des professeurs de mathématiques, en relation avec l'évolution des préoccupations scientifiques des institutions de recherche en mathématiques, relèverait plutôt de la macrodidactique.

Trois exemples peuvent illustrer l'intérêt de cette distinction.

Les difficultés des enfants avec notre système oral de dénomination des entiers (soixante-treize) sont bien connues. Passer à une numération régulière ne présente aucune difficulté microdidactique : tous les enseignants de France sauraient enseigner

28 BROUSSEAU Guy. "Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques", (2002), p 83-155, Questions éducatives, l'école et ses marges : Didactique des mathématiques, n° 22-23 décembre 2002 Centre de recherches de l'Université Jean Monnet Saint Etienne et Conférence au colloque InterIrem « Rallyes, Jeux, » de Toulouse 2000

29 L'économie se préoccupe « de la façon dont les ressources rares sont employées pour les besoins des hommes vivants en société, elle s'intéresse aux opérations essentielles que sont la production, la distribution et la consommation des biens, d'autre part aux institutions et aux activités ayant pour objet de faciliter ces opérations » Ed. MALINVAUD Leçons de théorie microéconomique p. 1.

30 La microéconomie « a pour objet principal l'analyse de la détermination simultanée des prix et des quantités produites, échangées et consommées. Elle est dite microéconomique parce qu'elle prétend respecter dans ses formulations abstraites l'individualité de chaque bien et de chaque agent » id. p. 2.

31 La macroéconomie « raisonne sur des agrégats de biens et d'agents... elle se propose de dégager comment sont déterminées les grandes caractéristiques de la croissance et de l'évolution conjoncturelle... par référence à l'organisation institutionnelle effective de nos sociétés ... » Ed. MALINVAUD Théorie microéconomique p.2

« septante trois » en Belgique. Pourtant il a été impossible jusqu'à ce jour de faire entrer dans les classes la réforme décidée par la convention au dix-huitième siècle. L'étude des causes de ce fait relève de la macrodidactique. J'ai montré — théoriquement et expérimentalement — (cf. l'article cité plus haut) qu'il était possible de gagner l'équivalent de près de deux années d'enseignement du calcul à l'école primaire en modifiant la disposition des calculs pour assurer de meilleures caractéristiques ergonomiques (moindres efforts de mémoire et de calculs, meilleure fiabilité, etc.) Les problèmes microdidactiques résolus, il n'a jamais été possible d'examiner la possibilité de généraliser les conclusions de cette recherche. Les blocages sont d'ordre macrodidactique.

Les conditions de l'enseignement des statistiques en France pourraient fournir un troisième exemple. Alors que diverses solutions « microdidactiques » ont été proposées³², certaines bien connues dans divers pays, des difficultés subsistent, qui semblent liées à une représentation assez particulière que se font de la statistique diverses institutions importantes. Les « explications » historiques, épistémologiques ou politiques ne suffisent pas à fournir des solutions.

On aperçoit ici l'intérêt qu'il peut y avoir à distinguer clairement les types de phénomènes pour trouver des solutions adéquates micro ou macrodidactiques aux problèmes d'enseignement.

32 J'ai montré (en 1973-74) qu'on peut enseigner le test d'hypothèse et les bases des probabilités au cours de la scolarité obligatoire. Guy BROUSSEAU, Nadine BROUSSEAU, Virginia WARFIELD, "An experiment on the teaching of statistics and probability", *Journal of Mathematical Behavior*, 20 (2002) 363-441.

8. CONCLUSIONS

Il n'y a pas lieu de conclure me semble-t-il. Ceci n'est qu'une courte présentation. La didactique continue avec et dans les Irem, et à côté aussi, comme il se doit. Je me suis borné à remuer quelques souvenirs et quelques idées. De très nombreux nouveaux mathématiciens didacticiens sont arrivés et d'autres arrivent encore qui peuvent utilement parler de leur point de vue sur leur discipline.

Par contre, avant de terminer, je veux adresser ici une supplique à ceux d'entre nous qui ont le pouvoir d'assécher ou d'irriguer la recherche en didactique : ne dissuadez pas tous les jeunes mathématiciens de talent qui sont prêts à payer le prix d'une orientation vers la didactique. Et lorsqu'ils ont fait les efforts considérables exigés par une seconde adaptation à des problèmes très variés et difficiles, ne leur retirez pas leur appartenance au monde des mathématiciens.

Ces deux attitudes excessivement introverties ont terriblement appauvri les relations entre les deux communautés, et accessoirement, elles ont privé un certain nombre de jeunes docteurs en mathématiques d'un accès légitime à une carrière universitaire dans un secteur où ils auraient été bien utiles s'ils avaient acquis les connaissances nécessaires.

La didactique des mathématiques n'est d'ailleurs pas la seule discipline à souffrir du retrait des mathématiciens de domaines qui leur seraient tout naturellement ouverts. Refuser que des mathématiciens s'adaptent aux divers besoins de la société est aussi une faute contre les mathématiques elles mêmes. Prétendre que les mathématiques orientées vers la recherche mathématique — telle qu'on

se la représente actuellement — doivent être suffisantes pour affronter tous les problèmes d'enseignement ou d'application des mathématiques, relève d'une certaine suffisance. Cette attitude conduit à restreindre le recrutement et les débouchés des étudiants en mathématique. Elle résulte d'une mécon-

naissance des conditions d'enseignement des mathématiques que rencontrent les non mathématiciens, et contribue à les aggraver, faute de mathématiciens disponibles. Nous voyons aujourd'hui les conséquences de ces attitudes corporatistes et irresponsables sur la formation des professeurs³³.

33 Je ne dirai pas ici un mot sur la mise à mort des IUFM, les grandes douleurs sont muettes.