MATHEMATIQUES ET AUTRES DISCIPLINES

Claude LOBRY
Université de Nice
et INRIA Sophia Antipolis

Introduction

En décembre 2002 j'ai eu le plaisir de faire une conférence devant les directeurs d'Irem réunis à Nice. Le titre de cet article est celui de l'exposé que m'avait commandé Marc Legrand. J'ai un peu «nettoyé» les notes que j'avais préparées à l'époque pour mon exposé de certains propos qui avaient (peut-être ?) leur place dans un exposé oral, mais qui obscurcissaient l'idée centrale en aiguillant sur de mauvaises pistes.

La question des rapports entre les mathématiques et les autres activités humaines est redoutable. Je l'aborderai ici sous un angle très particulier : celui du professeur de mathématiques qui, dans ses cours, a la prétention de s'aventurer dans des considérations qui sortent strictement du champ de sa discipline. Je commencerai brutalement par trois exemples simples d'une activité que souvent on présente comme étant de la *modélisation*. Ces exemples peuvent être exposés dans les lycées ou en première année de faculté. Ensuite j'essayerai de théoriser un peu sur ce que j'entends par *modélisation* et, dans le cadre ainsi proposé, j'analyserai mes exemples.

Trois exemples

Exemple 1 : Sciences sociales

Dans un scrutin, où s'affrontent A et B, des sondages prédisent le résultat, ce qui a pour conséquence de modifier le comportement des électeurs, donc de changer le résultat prédit. On peut se demander s'il existe une prédiction dont le résultat sera correct.

H. Simon (prix Nobel d'économie) dit oui et propose l'argument suivant : *Soit R(P) le* *résultat du vote pour A après une prédiction de P voix pour A. C'est une fonction continue de* [0, 1] *dans lui-même, elle possède un point fixe* R($\underline{A}$) = $\underline{A}$, *d'après le théorème de Brouwer. Ce point fixe est une prédiction exacte.*

Critique de l'argument de Simon

Je construis une expérience de pensée très simple : il y a 100 électeurs, 45 votent pour A, 35 votent pour B, quoi qu'il arrive, et les 20 restant sont constitués de « rebelles » : si A est annoncé gagnant ils votent pour B, si B est annoncé gagnant ils votent pour A, si l'égalité est annoncée ils s'abstiennent. On a donc le tableau :

Prédiction de votes pour A	Résultats	
≤ 49	65	A gagnant
50	45	A perdant
≥51	45	A perdant

On voit que la prédiction, dans cet exemple, ne sera jamais exacte. L'argument de Simon, est sérieusement remis en cause.

Exemple 2 : Probabilités élémentaires

Je sonne chez mon ami X qui a deux enfants, une petite fille m'ouvre, quelle est la probabilité pour que mon ami ait un garçon ?

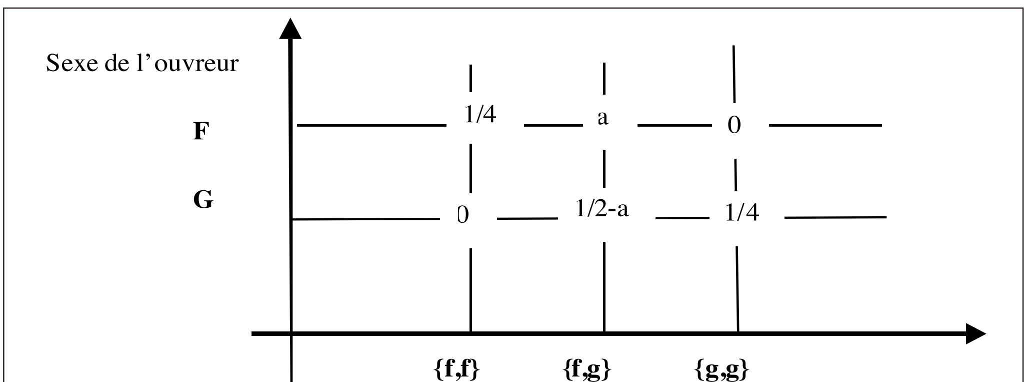
Réponse 1 : *Les sexes à la naissance sont indépendants, il y a une chance sur deux pour que l'autre soit un garçon.*

Réponse 2 : *L'hypothèse d'indépendance des sexes implique que les trois compositions possibles (ff), (fg), (gg) ont respectivement les probabilités 1/4, 1/2, 1/4 et la question est, « sachant qu'il existe une fille dans la famille, quelle est la probabilité pour que l'autre soit un garçon » , soit :*

P({fg}/{(fg), (ff)})=(1/2)/(3/4)=2/3.

Quelle est la bonne réponse ?

Pour répondre à ces devinettes qui font le désespoir des "forts en maths" (et parfois des professeurs de mathématiques) nous avons apris à faire un "modèle", comme, par exemple, celui ci - dessous :



$$0 \leq P(\{(f,g),(g,g)\}/\{F\}) = \frac{a}{\frac{1}{4}+a} \leq \frac{2}{3}$$

Le paramètre $2a$, s'interprète comme la "probabilité pour que la fille ouvre dans une famille où il y a un garçon et une fille". Ce modèle montre clairement que les deux réponses possibles reposent en fait sur deux hypothèses différentes, mais non explicitées :

— réponse 1/2, $a = 1/4$: Dans une famille où il y a un garçon et une fille il y a autant de chance que l'un ou l'autre ouvre.
— réponse 2/3, $a = 1/2$: Dans une famille où il y a un garçon et une fille c'est la fille qui ouvre systématiquement.

On voit que, curieusement, l'hypothèse symétrique de l'hypothèse $a = 1/2$, si les deux sexes son présents c'est le garçon qui ouvre systématiquement, qui conduirait à une probabilité 0, n'est généralement pas proposée.

Exemple 3 : Ecologie

Deux espèces X et Y vivent en compétition dans deux environnements possibles, I et II. On dit qu'un environnement est favorable à Y si l'espèce Y élimine X . Au cours du temps deux environnements I et II se succèdent périodiquement, tous les deux favorables à l'espèce Y. Quelle est l'issue de la compétition ? Le bon sens dit que, le milieu étant toujours favorable à Y, c'est Y qui éliminera X. Pourtant…

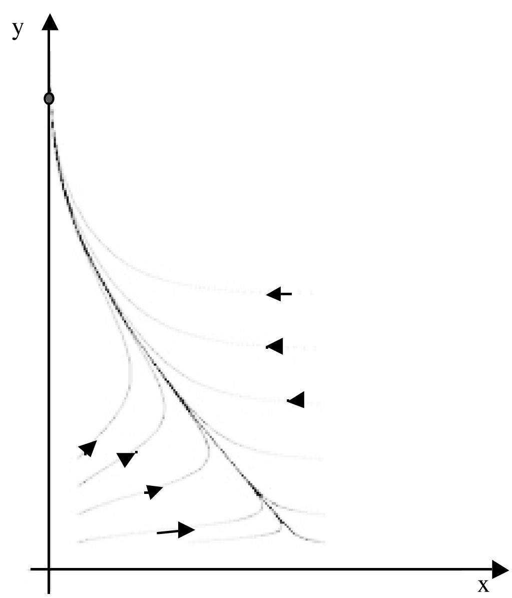
Considérons le classique modèle de compétition de Volterra :

$$x' = ax(1 - px - qy)$$
$$y' = by(1 - rx - sy)$$

c'est un système de deux équations différentielles où les constantes a, b, p, q, r, s sont positives et x et y représentent la « quantité » (nombre ou biomasse) de deux espèces. On dit qu'elles sont en compétition car la croissance de chaque espèce diminue le taux de croissance de l'autre. Il est facile de voir sur le portrait de phase que si :

$$p > s$$
$$q > r$$

pour toute condition initiale, la limite sera le point $(0, \frac{1}{S})$, ce qui *veut bien dire* que l'espèce Y à éliminé l'espèce X. La figure suivante montre le portrait de phase associé à l'équation :



$$x' = 5x(1 - x - y)$$
$$y' = y(1 - 0{,}5x - 0{,}5y)$$

qui satisfait la condition pour que y élimine x. On voit que toutes les trajectoires convergent vers le point de coordonnées (0,2). Nous considérons maintenant un autre système qui satisfait aussi la condition, comme, par exemple :

$$x' = x(1 - 2x - 2y)$$
$$y' = 5y(1 - 1{,}5x - 1{,}5y)$$

Nous supposons que ces deux systèmes représentent l'évolution de deux populations dans les environnements I et II respectivement et nous représentons le fait que les environnements I et II varient périodiquement dans le temps, ce qui se traduit par le système d'équations écrit dans l'encadré ci-dessous, où la fonction $u(t)$ est une fonction qui prend périodiquement les valeurs 0 ou 1 avec la fréquence w. Il n'est pas difficile de voir que quand w tend vers l'infini les trajectoires de ce système convergent vers les trajectoires du système « demi-somme » des deux systèmes considérés. Ceci est bien expliqué par le dessin ci dessous qui rappelle le pas des patineurs…

Or a demi-somme des deux systèmes est le système :

$$x' = 6x[1 - (7/6)x - (7/6)y]$$

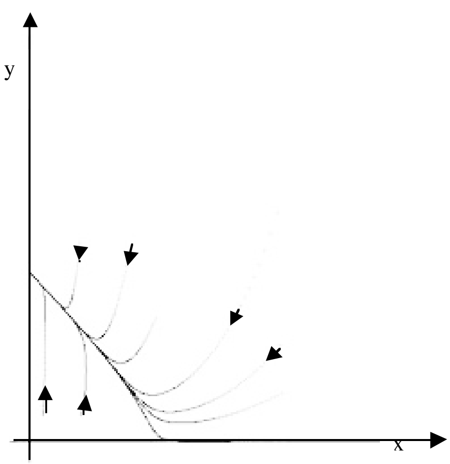
$$y' = 6y[1 - (8/6)x - (8/6)y]$$

pour lequel l'issue de la compétition est renversée !

Il y a là un petit paradoxe qui est facile à élucider. Commençons par représenter des simulations du système correspondant à l'environnement II, soit le système :

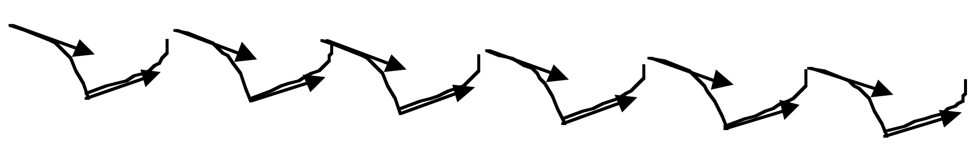
$$x' = x(1 - 2x - 2y)$$
$$y' = 5y(1 - 1{,}5x - 1{,}5y)$$

On voit les trajectoires qui convergent vers (0,2/3) ce qui traduit bien l'élimination de x.

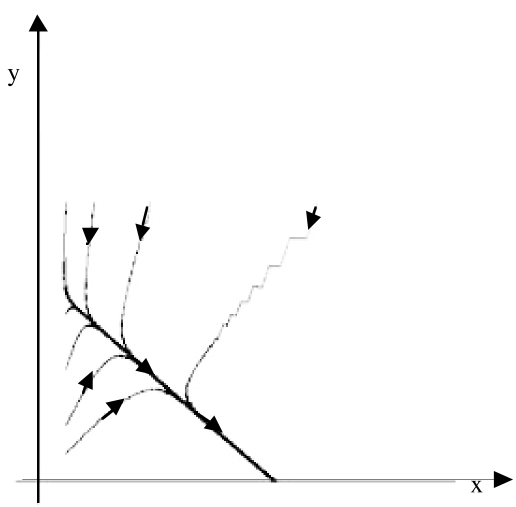


Maintenant nous voyons sur les simulations ci-contre ce qui se passe pour une fréquence de 200. La fréquence étant rapide, les solutions des systèmes I ou II n'ont jamais le temps d'atteindre la sorte de «fleuve» qu'elles doivent suivre dans l'un ou l'autre environnement pour rejoindre l'équilibre. On voit également, en regardant le portrait de phase dans

$$x' = u(t)[5x(1 - x - y)] + (1 - u(t))[x(1 - 2x - 2y)]$$
$$y' = u(t)[y(1 - 0{,}5x - 0{,}5y)] + (1 - u(t))[5y(1 - 1{,}5x - 1{,}5y)]$$



l'environnement I, que la phrase *l'espèce y remporte la compétition* est « exacte », mais décrit incomplètement le phénomène. En effet, pour certaines conditions initiales, la trajectoire est presque horizontale et va vers la droite pendant un certain temps, ce qui veut dire que pendant ce temps c'est l'espèce *x* qui croît alors que *y* reste stagnante. Pendant un certain temps, le milieu I est favorable à *x*. Nous venons de mettre en évidence que dire *y remporte la compétition* veut simplement dire que *y* finit par être en tête de la course, pas que *y fait la course en tête*. Nous en concluons que dire que *le milieu est favorable à y si y remporte la compétition* n'est pas une conceptualisation suffisante.



Approximation des trajectoires du système :

$$x' = 6x[1 - (7/6)x - (7/6)y]$$

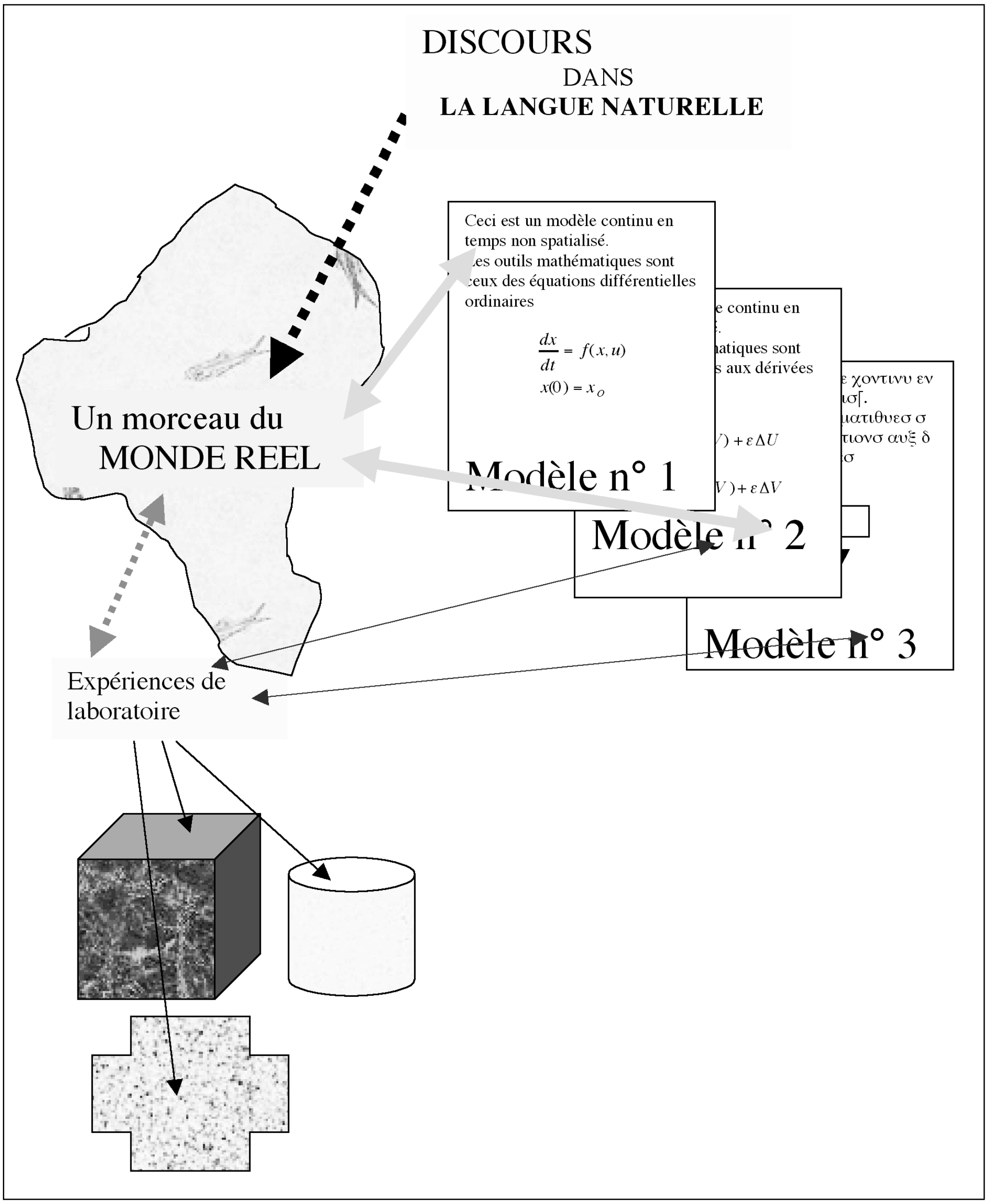
$$y' = 6y[1 - (8/6)x - (8/6)y]$$

par le système :

$$x' = u(t)[5x(1 - x - y)] + (1 - u(t))[x(1 - 2x - 2y)]$$
$$y' = u(t)[y(1 - 0{,}5x - 0{,}5y)] + (1 - u(t))[5y(1 - 1{,}5x - 1{,}5y)]$$

avec :

$$u(t) = +1 \text{ si } t \in [kh, (k+1)h[\qquad u(t) = -1 \text{ si } t \in [(k+1)h, (k+2)h[$$


DISCOURS
DANS
LA LANGUE NATURELLE
Ceci est un modèle continu en temps non spatialisé.
Les outils mathématiques sont ceux des équations différentielles ordinaires
$\frac{dx}{dt} = f(x,u)$
$x(0) = x_o$
Modèle n° 1
Modèle n° 2
Modèle n° 3
Un morceau du
MONDE REEL
Expériences de
laboratoire

On m'accordera sans doute que ces trois exemples relèvent d'une expression très en vogue actuellement : *la modélisation*. Voyons ce qu'il en est de façon plus précise.

La modélisation

Voici un schéma possible (encadré ci-contre) de ce qu'on entend généralement par modélisation. Dans ce schéma que lisons nous ?

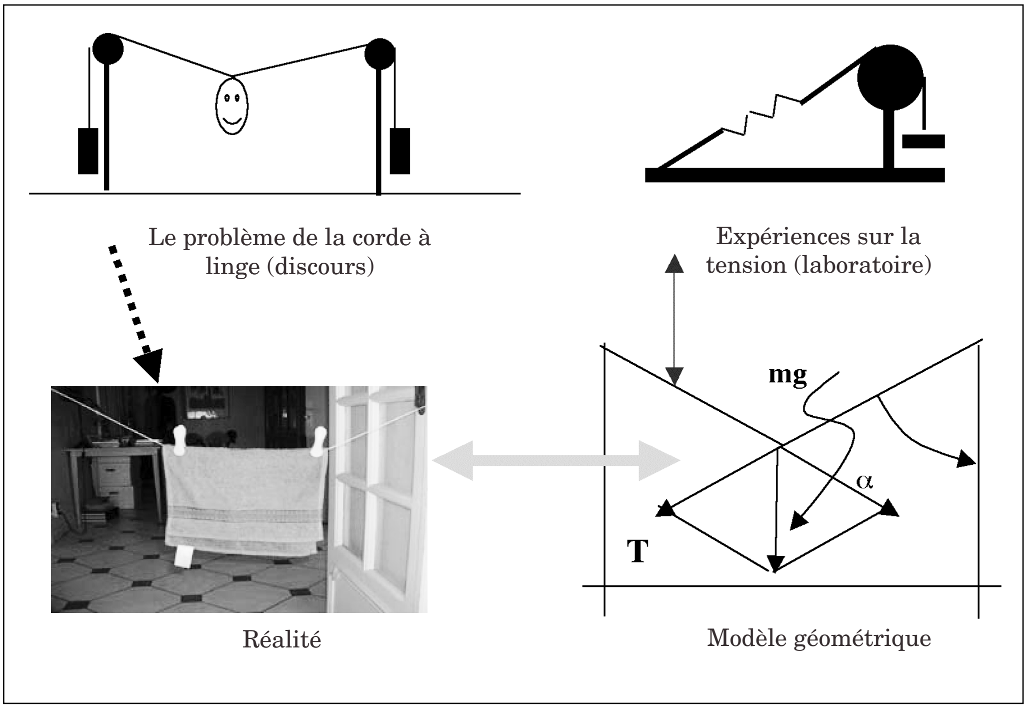
Les modèles sont des textes mathématiques ou informatiques, donc formalisés, qui sont associés à certains aspects du monde réel, décrits dans un discours prononcé dans la langue naturelle (gros pointillé). Les modèles entretiennent avec la réalité des relations directes (flèches épaisses) ou, le plus souvent, indirectes, par le biais d'expériences de laboratoire (flèches minces) qui sont liées au monde réel (petit pointillé). Prenons un exemple comme le simulateur de vol d'un Airbus A 320. Ici le morceau de réalité traité est un certain type d'avion, le modèle un énorme programme informatique qui a demandé des dizaines d'années ingénieur pour sa réalisation. Divers paramètres de ce modèle ont été ajustés par comparaison avec des données mesurées sur des vols réels flèches épaisses), mais dans la structure du modèle, dans son écriture, de nombreuses connaissances relatives à la dynamique du vol des plus lourds que l'air ont été incorporées. Ces connaissances ont été établies dans des laboratoires et ont servi tout autant à la construction du simulateur de vol que la construction de l'avion lui-même. Les mathématiques sont très présentes dans le modèle, que ce soit dans le traitement des équations de la mécanique que dans le traitement numérique des algorithmes qui tournent sur l'ordinateur. Le monde réel est également très présent et la concordance entre le comportement de la réalité (le comportement de l'avion) et celui du modèle (le simulateur de vol) est considéré comme absolument essentiel.

Regardons maintenant mes trois exemples. Il est difficile de les faire rentrer dans ce cadre. En effet, les modèles ne sont en aucune façon reliés au monde réel. C'est d'autant moins concevable que les « situations concrètes » qui sont décrites sont virtuelles. Alors d'où vient que nous ayons accepté, sans trop de difficulté que ces trois exemples relèvent effectivement de la modélisation ? Une première explication vient immédiatement à l'esprit : s'agissant d'enseignement, donc de pédagogie, il faut simplifier, parfois à l'extrême, au risque de dénaturer. Mais cette explication ne tient absolument pas. Il me vient à l'esprit un exemple bien connu de Marc Legrand : la corde à linge.

Rappelons qu'il s'agit de réfléchir sur les raisons de l'impossibilité de faire qu'une corde à linge, même soutenant une faible charge, soit parfaitement rectiligne. Tans cet exemple, on ne peut plus pédagogique, toutes les flèches de mon schéma sont représentées (cf. encadré de la page suivante).

Un modèle mathématique simple (géométrique) relié directement à des expériences de laboratoire concernant le concept physique de tension, la possibilité d'observer et de corroborer des prédictions avec de vraies cordes à linge.

Rien de comparable à mes trois exemples. Qu'est ce qui me permet donc de qualifier ces exemples de modélisation ? L'existence d'une flèche importante que j'ai volontairement omis de faire figurer sur le schéma, parce que en général on n'en parle pas, et que je propose de rajouter, une flèche qui relie le *discours sur le monde réel* et les modèles.

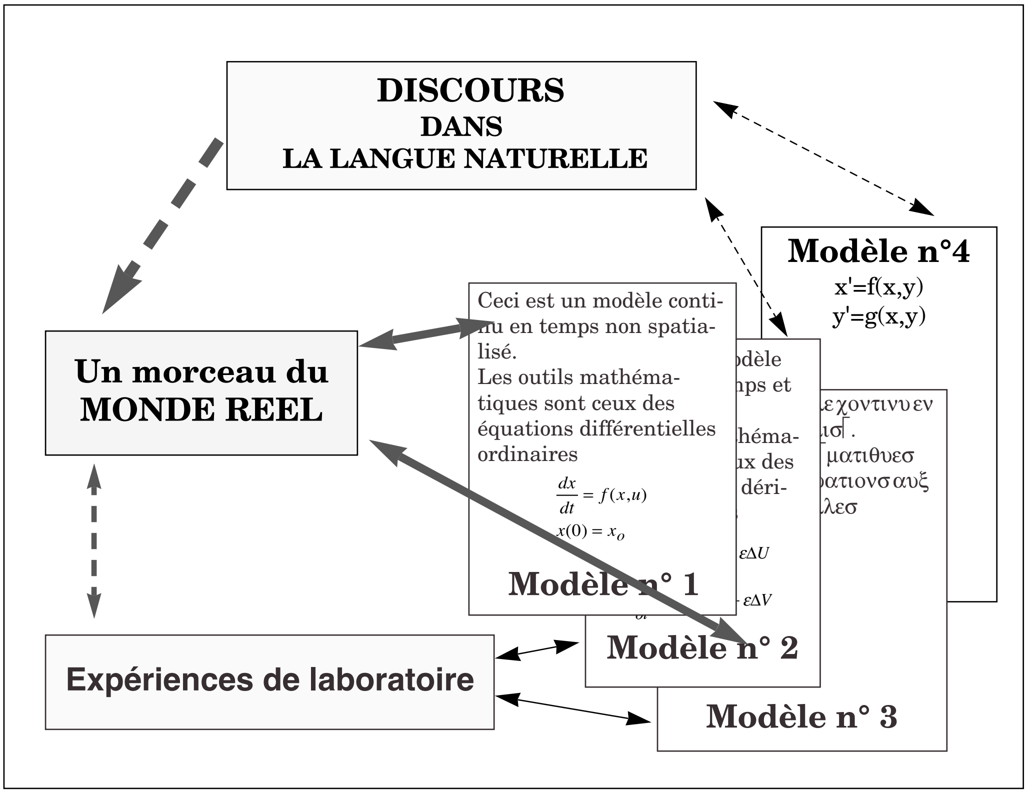


Sur le nouveau schéma de la page suivante figurent maintenant des flèches pointillées très minces qui peuvent relier certains *modèles* au *discours dans la langue naturelle.* Certains modèles, comme le modèle n° 4, peuvent n'avoir d'autre lien avec la réalité que celui qui les unit avec un certain discours sur la réalité. Les trois exemples que j'ai choisi sont du type du modèle n° 4.

Analyse des trois exemples

Les trois exemples proposés ont en commun :
— Ils commencent par des discours dans la *langue naturelle* portant sur des situations *concrètes*.
— Les situations sont *concrètes* mais *imaginaires*. Il n'est pas besoin de préciser de quel scrutin il s'agit, de quel ami, de quelles espèces en compétition. Le discours veut produire des énoncés à caractère général.
— Les mathématiques permettent de définir un monde virtuel où vont se produire des faits dont la nécessité est inéluctable puisque ce sont des « faits mathématiques », des résultats de calcul.
— Le retour au discours permet d'améliorer ce dernier.

Exemple 1 : H. Simon fait de la propagande. Il utilise un argument destiné à impressionner : le théorème de point fixe de Brouwer (en réalité sa version ultra légère que constitue le théorème de la valeur inter-



médiaire !) réputé être un résultat profond des mathématiques. Il est possible de démonter cette argumentation en construisant un monde où tout interlocuteur de bonne foi reconnaîtra un monde satisfaisant les conditions du questionnement (un scrutin) assez simple et formalisé pour que l'arithmétique élémentaire produise un contre-exemple. On voit que la fonction R(P) de Simon (à supposer qu'elle existe, car pour cela il faudrait admettre que lors de deux scrutins successifs, dans les mêmes conditions, les résultats sont les mêmes) n'a aucune raison d'être une fonction continue.

Exemple 2 : une « modélisation » mathématique permet de mettre en évidence une imprécision dans l'argumentation : on y confond l'évènement « il y a une fille dans la famille » avec l'événement « une fille à ouvert », ce qui n'est pas tout à fait la même chose. La modélisation est assez riche pour suggérer d'autres développements.

Exemple 3 : Il a son origine chez des gens qui ont des préoccupations en dynamique des populations. On constate :

(1) Un discours qui propose une inférence (si…alors) est prononcé dans la langue

naturelle : *Si les milieux I et II sont tous deux favorables à Y alors une alternance régulière des milieux I et II sera favorable à Y.*

(2) On propose un monde mathématique (les équations de Volterra), donc virtuel, où chacun veut bien reconnaître les prémisses de l'inférence ci dessus (les deux systèmes d'équations conduisent à la victoire de Y).

(3) On fait fonctionner le monde mathématique et l'on constate que, dans ce monde, la conclusion de l'inférence (1) est contredite. Nous admettons donc que le discours (1) n'a pas une portée universelle, que l'assertion n'est pas valide. Dans la langue savante de Popper nous dirions que la « théorie (1) a été falsifiée », dans la langue moins savante des professeurs de mathématiques nous dirons plus simplement qu'un « contre exemple » a été produit à « l'affirmation (1) ».

Dans cet exemple, en prime, le monde mathématique nous explique pourquoi l'usage du mot « favorable » est dangereux dans un contexte dynamique. Une situation transitoirement défavorable peut finir par être favorable. C'est ce qui se passe avec les équations choisies.

Il est essentiel de remarquer que dans ces trois exemples, à aucun moment, le monde réel n'est appelé pour nous éclairer ou trancher. La référence à la réalité n'est làque façon très lointaine, le cœur du problème est bien une *analyse de texte* et les mathématiques produisent un monde virtuel auquel notre texte s'applique. On a produit un modèle mathématique d'un discours. Le monde mathématique a produit certains faits que le discours ne produisait pas. Nous en avons conclu que le discours de départ manquait de cohérence et avons envisagé sa révision. Je pense que ces exemples montrent bien la nécessité d'inclure les flèches pointillées très minces dans le schéma de modélisation.

La modélisation du discours et les mathématiques

Appelons modélisation (mathématique) du discours l'activité qui consiste à faire des modèles mathématiques de textes littéraires sans autre référence particulière à la réalité. Mes trois exemples étaient des exemples de modélisation mathématique du discours.

Cette activité, beaucoup plus répandue qu'on l'imagine, est pourtant rarement décrite. En effet, ces jeux de langage en dehors de toute réalité peuvent sembler extérieurs à l'activité scientifique. On peut effectivement avoir une conception très conservatrice de ce qu'on appelle la science (et ce serait plutôt ma position) et ne réserver cette expression que pour les pratiques de laboratoire proche de celles des physiciens, ce qui reviendrait à exclure une partie de l'écologie par exemple. Mais même cette vision intégriste est obligée d'admettre qu'il existe des activités rationnelles, qui ne sont peut-être pas de la science, mais qui sont nécessaires. Clarifier le langage est une de ces activités.

Ainsi ma position intégriste me fait-elle refuser de considérer l'économie mathématique comme une science, mais l'accepter comme activité tout à fait légitime en tant que modélisation de certains discours portés sur la société. L'économie mathématique permet certainement d'améliorer la cohérence interne de ces discours. Savoir si le discours nous dit quelque chose de pertinent sur la réalité est une autre question. Mais je crains, au point où j'en suis arrivé dans mon exposition, de donner l'impression que les mathématiques sont une sorte de juge de paix infaillible de la cohérence du langage. Il n'en est rien.

D'abord rien n'impose qu'un modèle d'un discours soit un modèle mathématique. Un romancier qui construit un monde fictif le sait bien. Il a dans sa tête (ou sur le papier) un modèle de ce monde dans lequel la distance entre tel édifice A et tel édifice B a une valeur précise et il s'assurera que le dialogue entre deux personnages qui marchent de A vers B ait une durée cohérente avec la distance, même s'il ne fait pas part au lecteur de ces détails au lecteur. C'est à ce prix qu'il assurera une cohérence nécessaire au réalisme de son histoire. Mais plus profondément la raison pour laquelle il faut se garder de voir dans les mathématiques le juge suprême est que ces dernières à leur tour ne sont pas sûres de leur propre langage. Voici un petit exemple tiré de mon expérience de chercheur.

Considérons le texte ci-dessous, qui est extrait d'un livre de L. Arnold, Catastrophe Theory, Springer Verlag, 1986, pp 20-21. Il y est question d'une famille d'équations diffé-

Chapter 6. Loss of Stability of Equilibrium and the Generation of Auto-Oscillations

Loss of stability of an equilibrium state on change of parameter is not necessarily associated with the bifurcation of this state. An equilibrium state can lose stability without even interacting with another state.

The corresponding metamorphosis of the phase picture on the plane is indicated in Fig. 16. Two versions are possible:

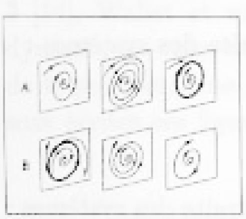


Fig 16

A. On change of the parameter *the equilibrium state gives birth to a limit cycle* (radius of order $\sqrt{\varepsilon}$ where the parameter differs from the bifurcation value by ε). The stability of the equilibrium is transferred to the cycle, the equilibrium point itself become unstable.

B. An *unstable limit cycle collapses to an equilibrium state*: the attraction domain of the state collapses as the cycle disappears and the instability is transferred to the equilibrium state.

It was know by Poincaré and proved by Andronov and his pupils (the detailed proof was published before the war, in 1939*), that apart from the loss of stability resulting from a stable equilibrium state combining with an unstable one (as described in Chapter 5) and the A and B cases just described, for generic one parameter families of systems with two dimensional phase space no other forms of loss of stability are encountered. Later it was proved that also in systems having phase spaces of higher dimension loss of stability of equilibrium states on change of parameter must take one of the above forms (in the directions of all the additional co-ordinate axes the equilibrium states continue to be attractors).

If an equilibrium state represents a steady state in a real system the metamorphoses A and B represent the following situations.

A. On loss of stability of equilibrium the *steady state becomes a periodic oscillatory state* (Fig. 17), the amplitude of the oscillation being proportional to the square root of the criticality, the difference of the parameter from the critical value at which stability of equilibrium is lost.

This form of loss of stability is called '*soft*' loss of stability since the oscillating state for small criticality differs little from the equilibrium state.

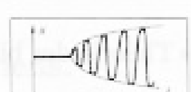


Fig 17

* Andronov, A. A., Leontovitch, E. A.: Some cases of the dependence of limit cycles on parameters, Uchenye Zapiski Gor'kovskovo Universiteta, *6* (1939), 3–24.

The results were also included in the first edition of the famous book of Andronov and Haikin, Oscillation Theory, Moscow 1937 (English trans: Princeton University Press, 1949).

rentielles qui dépendent du paramètre ε. On y lit : *On change of the parameter the equilibrium state gives birth to a limit cycle.* Ce qui est repris sur la figure 17 où le paramètre ε est représenté en abscisse, il croît de façon continue et se transforme continûment en un cycle qui grossit.

Dans un texte présenté à un acte de colloque en 1985, G. Wallet et moi nous présentons une simulation numérique qui reproduit l'expérience suggérée à la figure 17 sur un ordinateur. Nous obtenons quelque chose de radicalement différent comme le montre la figure ci-dessous.

Ce résultat, archi connu (Poincaré le connaissait déjà...) se généralise à des systèmes de dimension arbitraire, voire infinie. Il est symbolisé par le célèbre "schéma de bifurcation" ci-dessous.

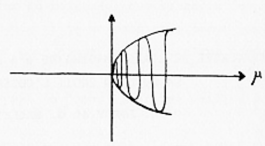


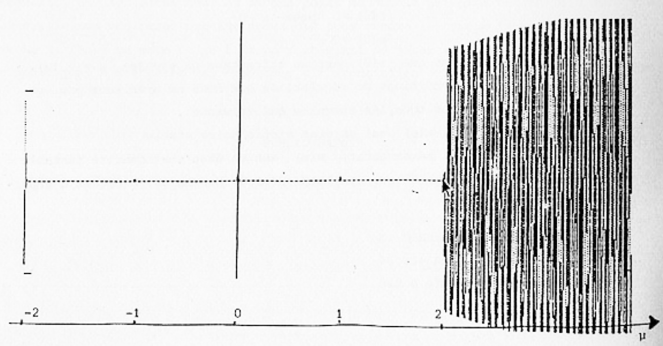
Schéma de la bifurcation de Hopf

2. UNE EXPÉRIENCE NUMÉRIQUE.

Si on désire illustrer numériquement ce résultat on peut prendre, par exemple, le système :

$$\dot{x}_1 = x_2 + \mu x_1 - x_1(x_1^2+x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2+x_2^2)$$

(qui est la "forme normale" de $x = f_\mu(x)$ quand les conditions du théorème sont remplies). Avec un micro ordinateur classique, en simple précision avec la méthode RK_4 banal, on obtient la "chose"ci-dessous :



- 45 -

On n'y retrouve pas la transition continue que décrit Arnold au point de bifurcation 0, mais une transition discontinue au point $\varepsilon = 2$ (en fait le paramètre est μ dans notre papier). Ce qui se passe dans cet exemple, c'est que le « temps » est traité, de façon très informelle, comme un « temps » d'un certain type dans la description du comportement de l'équation différentielle, et comme un autre « temps » dans la variation du paramètre (c'est la figure 16) sous-entendu dans l'expression « naissance ».

Puis ces deux temps sont réunis en un seul dans la figure 17. Ce qui veut dire que la figure 16 traite du système différentiel :

$$x'(t) = f(x(t), \ \mu)$$
$$\mu' = 0$$

alors que la figure 17 traite du système :

$$x'(t) = f(x(t), \ \mu)$$
$$\mu'(t) = \varepsilon$$

et nos expériences montrent que dans ce cas la figure n'est pas la figure attendue. On peut discuter de ma façon d'interpréter le texte d'Arnold (et je l'ai fait en détail par ailleurs), ce qui n'est pas discutable, c'est que les deux systèmes ci-dessus, avec $\mu = 0$ et $\varepsilon = 0$, ne sont pas les mêmes et donc n'ont pas, a priori, les mêmes propriétés.

Donc, dans cet exemple, partant d'un texte interne aux mathématiques, mais dont le sens est ambigu, une formalisation particulière (l'écriture de deux systèmes différentiels) permet de lever l'ambiguïté et d'oublier toute question d'interprétation, quitte à y revenir ensuite. C'est exactement la démarche de mes exemples 1, 2 et 3, mais cette fois interne aux mathématiques.

Et pour finir, ne cédons pas à l'illusion de croire que la formalisation des mathématiques permettra de lever toutes les ambiguïtés. La logique et le formalisme mathématique, à leur tour, se fondent dans la langue naturelle ! C'est la vie.

Conclusion

De ce dernier exemple je tirerai la thèse suivante :

Les mathématiques sont l'art de faire des aller-retours entre des textes plus ou moins formalisés, les moins formalisés donnant du sens aux plus formalisés ces derniers précisant le sens des premiers ce qui suscite de nouvelles propositions de formalisation qui auront à leur tout leurs interprétations et ainsi de suite

Thèse sur laquelle je ne chercherai pas à argumenter plus. Mais on voit que, si elle est correcte, elle donne au mathématicien professionnel une certaine aptitude à la recherche du sens, aptitude qui peut être utile dans d'autres domaines et, s'il en a le goût, il ne doit pas avoir peur de quitter le pré où il se croit enfermé. N'est-ce pas une façon, parmi d'autres, de mettre en pratique cette phrase de Marc Legrand que je trouve profondément juste :

…ce n'est que lorsque les mathématiques sont enseignées dans ce qu'elles ont de plus spécifique — ***un certain mode d'intelligibilité du monde*** *— qu'elles apportent l'ossature indispensable à la compréhension et au développement des autres sciences.*

Eléments bibliographiques

Le livre de I. LAKATOS, *Preuves et réfutations*, Hermann, Paris, 1984 est le grand classique sur cette question de la nature de l'argumentation en mathématiques.

On trouve explicité la polémique avec H. Simon dans l'article de E. J. Aubert, Mathematical intelligencer, Vol 6 n° 3.

Pour ceux que les rapports des mathématiques et la modélisation en biologie intéressent la brochure des journées annuelles de la SMF (2002) y est consacrée. Dans mon texte, je donne de nombreuses références à des textes d'écologie où la relation mathématiques/biologie est du type de celle que j'ai décrite.

Des faits paradoxaux du genre de celui décrit ici sont détaillés dans la publication : C. Lobry, A. Sciandra, P. Nival*, Effets paradoxaux des fluctuations de l'environnement sur la croissance des populations et la compétition entre espèces*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sciences de la vie. 1994, 317, pp. 102-107.

Une introduction aux questions de théorie des bifurcations évoquées ici se trouve dans mes deux articles :

Sur le sens des textes mathématiques: Un exemple, la théorie des bifurcations dynamiques, Annales de l'Institut Fourier T. 42 vol 1-2 pp. 327-351 (1992)

L'herméneutique mathématique, actes du colloque de Cerisy 1994, dans l'ouvrage collectif : «L'herméneutique : Les textes, la Science» P.U.F. collection Philosophie d'Aujourd'hui. pp 333 – 355 (1997)

Nicolas Bouleau, mathématicien et architecte, apporte dans ses ouvrages, un éclairage original et pertinent sur les questions de modélisation :

Philosophies de mathématiques et de la modélisation : Du chercheur à l'architecte, l'Harmattan.

La règle, le compas et le divan : Plaisirs et passions mathématiques, Seuil