REPERES - IREM. N° 58 - janvier 2005

PAREIL, PAS PAREIL ?

Comparaison d'objets géométriques au cycle 3 de l'école élémentaire

Jean-Louis PORCHERON
INRP, Equipe ERMEL
IUFM de Midi-Pyrénées,
Gridife ERTe 46

1. Introduction

Les réflexions et les propositions de l'équipe ERMEL ont pour origine la recherche INRP « Rôle de l'argumentation dans les phases de validation en géométrie au cycle 3 ». Cette recherche concerne l'enseignement de la géométrie au cycle 3 de l'école élémentaire, ce qui recouvre plusieurs thèmes d'étude, dont celui concernant la comparaison d'objets géométriques [1]. Dans cette recherche, nous nous intéressons également aux rôles respectifs des validations intellectuelles et pratiques lors des phases de conclusion des activités de géométrie ; on trouvera quelques réflexions sur ce thème au fil de notre exposé.

Dans ce texte, nous nous intéressons à la comparaison d'objets géométriques par l'intermédiaire de réalisations concrètes c'est-à-dire de dessins ou de productions matérielles, papier découpé, objets en trois dimensions… Comparer des objets, c'est dire dans quelle mesure ils sont différents, pareils ou se ressemblent, en explicitant les critères utilisés.

A l'école primaire, ce problème se rencontre dans plusieurs contextes. La tâche elle-même peut mettre en jeu une comparaison. Par exemple, dans une reproduction de figure la copie et l'original ne doivent présenter aucune différence (on fait abstraction de la position sur la feuille) ou, dans la recherche des patrons du cube, on se demande naturellement quels assemblages sont vraiment différents. Plus généralement, pour résoudre un problème, on doit souvent catégoriser des figures,

1 D'autres thèmes concernent les relations de parallélisme, de perpendicularité et d'alignement, les distances, les systèmes de repérage, les solides, etc. L'ensemble des activités proposées en cycle 3 fera l'objet d'un ouvrage à paraître chez HATIER.

ce qui suppose une comparaison. Par exemple, si on demande de dessiner un trapèze, nous obtiendrons des productions sensiblement différentes entrant toutefois dans la même catégorie ; en géométrie, la question se pose fréquemment de savoir à quel niveau d'abstraction on doit traiter les objets au-delà de leurs représentations. Une difficulté dans la comparaison d'objets matériels ou graphiques vient également des imprécisions de tracé ou de découpage car on doit accepter une marge d'erreur pour affirmer, par exemple, qu'une figure est superposable avec une autre ou qu'un angle est droit par comparaison avec un gabarit de référence.

Les problèmes de comparaison présentent donc plusieurs aspects, d'une part un aspect lié à la géométrie perceptive et instrumentée pratiquée au primaire, dans laquelle on attribue ou refuse une propriété en fonction d'exigences de précision, et, d'autre part, un aspect « catégorisation des objets » qui concerne les propriétés partagées au delà des particularités des dessins et de leurs positions sur la feuille. Pratiquement, on est souvent confronté à la question suivante : des objets matériels ou graphiques présentant certaines différences doivent ils être distingués ou regardés comme des représentants d'un même objet plus abstrait ? Les catégories mises en jeu pour distinguer ou assimiler les objets peuvent être conventionnelles (les trapèzes) ou créées *ad hoc* par celui qui résout le problème (un type de patron du cube, les quadrilatères possédant un seul angle droit …).

Parmi les critères permettant de fonder des ressemblances entre figures l'isométrie et la similitude occupent une place privilégiée. En mathématiques, on s'est toujours intéressé au fait d' « avoir même forme et même taille » ou d' « avoir même forme, mais en plus grand ou en plus petit », les dispositions dans le plan ou l'espace n'étant pas nécessairement les mêmes. Nous aborderons ces points par la suite, mais nous n'avons pas voulu restreindre notre approche au cas d'une ressemblance perceptive très marquée. Deux raisons sont à prendre en compte : les exemplaires d'une même catégorie présentent souvent des différences perceptives notables (qu'on pense aux trapèzes ou aux quadrilatères) et, par ailleurs, une tâche exige souvent de « rapprocher » ou de « mettre ensemble » des figures ayant une propriété commune sans avoir à proprement parler la même forme [2].

Dans ce qui suit, nous allons indiquer les grandes lignes d'une approche géométrique des problèmes de reproduction (en vraie grandeur) et d'agrandissement-réduction. Nous mettrons l'accent sur la conservation de propriétés géométriques significatives de la forme, en cherchant à modérer la prise en compte des aspects métriques. Ensuite nous aborderons les problèmes de comparaison de figures à l'aide de propriétés géométriques en dépassant les aspects de forme globale.

2. Isométrie et similitude : approche usuelle.

D'une manière générale, on peut distinguer deux approches des notions d'isométrie et de similitude. Dans l'approche « par les transformations », on montre que deux figures sont isométriques (ou semblables) en explicitant une isométrie (ou une similitude) transformant l'une en l'autre.

2 A cet égard des catégories comme celles des « chevrons » ou des « cerfs-volants » (parmi les quadrilatères) ne nous paraissent pas très intéressantes car pouvant reposer sur une reconnaissance visuelle globale.

Dans l'approche « par les propriétés », on explicite des propriétés communes, mais sans faire référence à une transformation particulière passant de l'une à l'autre. Dans cette perspective, on a enseigné au collège les cas d'égalité ou de similitude des triangles [3]. Lors de la réforme des « mathématiques modernes » (1970), cette approche a été abandonnée au profit de l'étude des transformations et de leurs invariants. La question se pose aujourd'hui d'un retour à un enseignement reposant sur les cas d'égalité ou de similitude des triangles.

A l'école élémentaire [4], l'idée d'isométrie se retrouve dans des exercices de reproduction en vraie grandeur. Ces exercices sont proposés dès le CE1. La plupart du temps on reproduit, sur quadrillage, un dessin en position translatée par rapport à l'original.

L'étude des transformations est centrée sur la symétrie axiale dans le plan dont on trouve une approche à tous les niveaux, y compris parfois à l'école maternelle. En début de scolarité, on s'appuie sur le pliage et le découpage (construction de ribambelles, reproduction d'une tache par pliage…). Au cycle 3, on recherche des axes de symétrie (sans mettre en jeu l'idée de transformation) et on construit, sur quadrillage, le symétrique d'une figure par rapport à un axe « vertical », « horizontal » ou orienté selon une diagonale. On retrouve le même type d'activités d'un niveau à l'autre, sans véritable progression, toutefois on complexifie les figures et on réserve les axes « penchés » pour le cours moyen. Sur quadrillage, les constructions sont souvent faites de proche en proche, chaque point ou segment étant repéré par rapport au précédent. Cette procédure ne met pas en jeu l'idée de corres-

3 Dans l'approche par les cas d'égalité, il est nécessaire de définir ce que sont des figures égales. Dans l'ouvrage Leçons de géométrie élémentaire de J. Hadamard (A. Colin 1947, tome 1, page 3) on trouve : « Une figure quelconque peut être transportée d'une infinité de façons dans l'espace sans déformation, comme cela a lieu pour les corps solides usuels. On nomme figures égales deux figures que l'on peut transporter l'une sur l'autre, de manière à les faire coïncider exactement dans toutes leurs parties ; en un mot, deux figures égales sont une seule et même figure, en deux places différentes ». Le principe d'égalité par superposition est essentiel comme le signale d'Alembert dans son Essai sur les éléments de philosophie (1759, cité par M. Carral dans son traité de Géométrie, Ellipses, 1995) : « La superposition, telle que les Mathématiciens la conçoivent, ne consiste pas à appliquer grossièrement une figure sur une autre, pour juger par les yeux de leur égalité ou de leur différence, comme l'on applique une aune sur une pièce de toile pour la mesurer ; elle consiste à imaginer une figure transportée sur une autre, et à conclure de l'égalité supposée de certaines parties des deux figures, la coïncidence du reste : d'où résulte l'égalité et la similitude parfaite des figures entières ».
Pour une analyse de l'approche par les cas d'égalité, on se réfèrera à l'article Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles, de R. Bkouche. Bulletin de l'APMEP n° 430.

4 Les instructions officielles de 1980 pour le cours moyen indiquent que les activités géométriques « peuvent concerner la reproduction (la réalisation d'une copie conforme) d'un objet », elles « peuvent également concerner des actions sur les objets géométriques. », en précisant qu'il s'agit « de pratiquer, sur des objets géométriques divers déplacements, des agrandissements, des réductions, des déformations…A partir d'une réflexion sur ces actions et leurs effets, on caractérisera quelques transformations par leurs invariants et leurs propriétés (…) ». Pour des développements sur ce thème on consultera l'ancienne édition ERMEL Cycle Moyen tome 3, chapitre 2 (SERMAP-HATIER, 1982). On trouve, dans les programmes et instructions de 1985 pour le cycle 3, « reproduction, agrandissement ou réduction d'un dessin fait sur fond quadrillé » et l' « application à des objets géométriques des transformations ponctuelles (translation, rotation, symétrie) ». Les programmes de l'école primaire de 1995 pour le cycle 3 précisent, dans le paragraphe « Actions sur les figures planes », « mise au point de techniques de reproduction, construction et transformations (symétrie axiale, agrandissement, réduction) », on note donc une restriction concernant les transformations abordées. Les instructions de 2002 mettent également l'accent sur les activités autour de la symétrie axiale tout en précisant que « ces activités (réalisation d'assemblages, de frises, de pavages de puzzle, etc.) peuvent être l'occasion de mettre en évidence des phénomènes de déplacement, avec ou sans retournement, et ainsi de rencontrer d'autres transformations. ». Le paragraphe « agrandissement, réduction » renforce le lien avec l'étude de la proportionnalité.

pondance ponctuelle [5] et n'exige qu'une analyse minimale de la figure, en particulier la conservation des angles droits y reste implicite. Les problèmes d'agrandissement-réduction, évoqués dans les programmes depuis 1980, ne relèvent pas des activités géométriques, mais du modèle de proportionnalité. On étudie la manière dont les longueurs sont modifiées alors que la conservation de la forme, des angles, du type de figure, n'est que rarement évoquée.

3. Notre approche de l'isométrie à l'Ecole Elémentaire

3.1. *Sens de la question concernant l'isométrie de deux objets : un premier obstacle.*

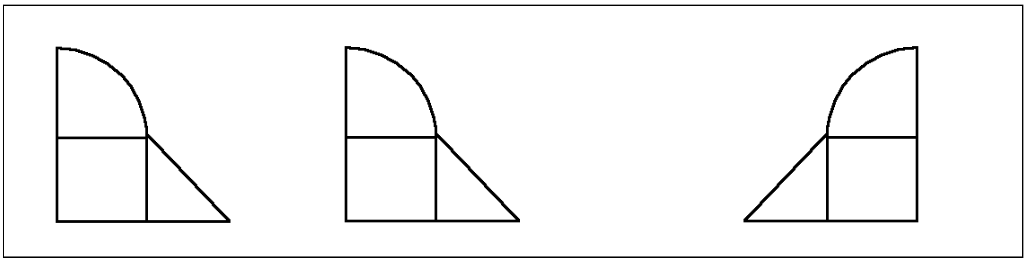
A l'école primaire, on peut donner un contenu intuitif à la notion d'isométrie sans se référer à l'idée de transformation. Très tôt, les enfants constatent la permanence par déplacement d'objets familiers. Dès l'école maternelle, ils réalisent par empreinte la copie d'une face d'un solide ou reproduisent une même forme à des emplacements différents. On peut donc comprendre la question « ces deux objets sont-ils pareils ou pas pareils ? » en l'interprétant « l'un est il une copie de l'autre ? », « l'un peut-il être amené en coïncidence avec l'autre ? » ou « l'un résulte-t-il du déplacement (sans déformation) de l'autre ? ». Dans tous les cas, il est fait référence au mouvement de faible amplitude de l'objet lui-même, d'un calque ou d'un gabarit. L'utilisation du mouvement se retrouve dans la procédure de comparaison par déplacement mental [6]. Dans les tâches de comparaison, on s'attend donc à ce que la mémorisation de la forme, la ressemblance avec un objet familier, le déplacement mental soient largement utilisés sans explicitation de la conservation des propriétés géométriques caractéristiques de la forme. Nous pensons qu'il y a là un premier obstacle lié à la perception et aux actions mentales.

Précisons ce point, car la géométrie à l'école primaire possède évidemment un aspect intuitif et visuel. Par exemple, pour rechercher un axe de symétrie ou le symétrique d'une figure, on peut plier sa feuille, rabattre une partie sur l'autre et prendre des repères par transparence ou piquage. Si l'action est impossible, on peut chercher à l'imaginer et à « voir ce que cela donnerait ». Il est indispensable de donner l'occasion d'utiliser ces procédures, mais en fin de compte on doit développer des stratégies qui mobilisent les concepts de la géométrie et qui s'affranchissent des modèles pratiques. On ne saurait se contenter de trouver un axe de symétrie par pliage ou en imaginant que l'on plie, de déclarer sans autre précision que l'axe est « un trait qui passe par le milieu du dessin », ou de décider par déplacement si deux pièces sont superposables.

L'enseignant doit donc à la fois s'appuyer sur la perception, les représentations ou les actions mentales et en même temps les dépasser, montrer leur insuffisance en mettant en évidence les concepts géométriques qui permettent de rationaliser les réponses au problème posé. Dans cette optique le choix des problèmes proposés à l'élève est crucial.

5 Ce qui serait le cas si, pour construire le symétrique d'un polygone par rapport à un axe, on commençait par construire les symétriques des sommets pour ensuite les joindre dans l'ordre.

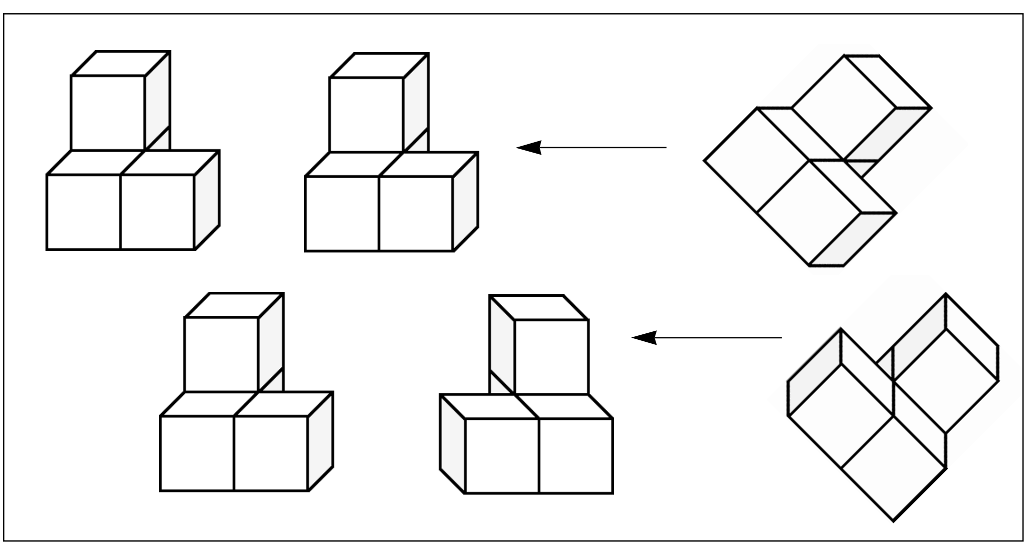
6 On pourra consulter sur ce point : Image et cognition de M. Denis. PUF 1989, en particulier le chapitre III, ainsi que Image mentale et développement de J. Bidaud et Y. Courbois. PUF 1998.

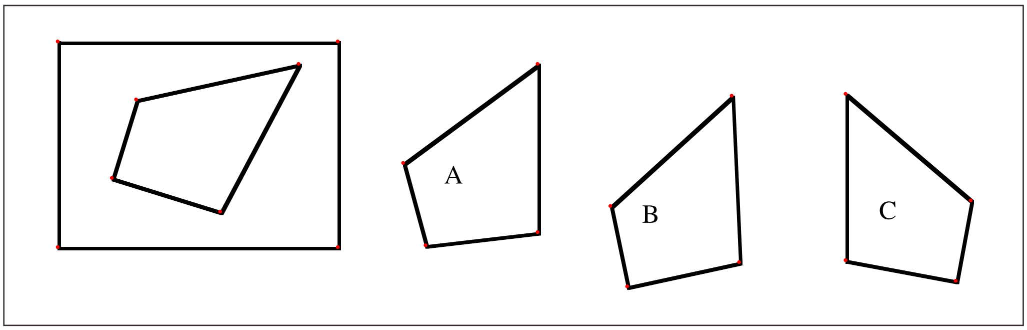


3.2. *Isométrie et superposabilité*

Dans le plan, deux objets isométriques (deux formes découpées dans du papier par exemple) peuvent être superposables directement (isométrie directe) ou après retournement (isométrie indirecte). Pour mettre cette propriété en évidence, au CE2, nous demandons de construire tous les assemblages différents constitués d'un carré, d'un triangle rectangle isocèle et d'un quart de disque (de même côté ou rayon, voir l'illustration ci-dessus). Pour comparer des objets déplaçables, les enfants les placent spontanément en position translatée (« à côté ») ou en miroir (« en face »).

De même, au CM1, nous demandons de construire tous les « tétracubes » et de trouver combien il y en a de différents (voir ci-dessous). Deux tétracubes peuvent être isométriques directement ou non. La superposabilité ne peut être effectivement réalisée, mais ils peuvent être rapprochés et mis dans des positions qui facilitent la comparaison.

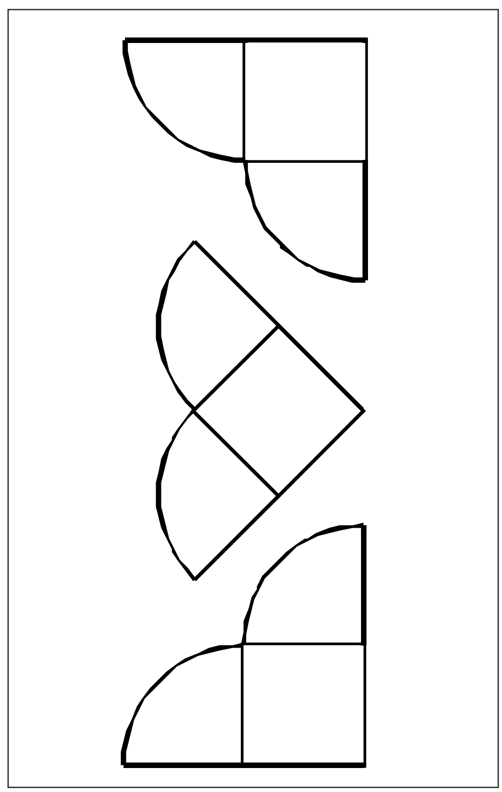




Les procédures pratiques de déplacement, rapprochement, superposition de tout ou parties d'objets plans ou spatiaux permettent de résoudre concrètement le problème de comparaison, mais elles sont aussi une manière de vérifier une prévision lorsque le déplacement effectif est rendu momentanément impossible et le déplacement mental peu fiable. Voici un exemple de problème mettant en jeu une anticipation : quel quadrilatère va rentrer exactement dans l'empreinte dessinée à gauche ? On propose de choisir parmi un ensemble de quadrilatères dont plusieurs ont des côtés égaux à celui de référence (ce qui est le cas dans l'illustration ci-dessous)[7].

3.3. *Axe de symétrie d'une figure plane*

Les déplacements d'objets mettent bien en évidence les deux conditions de congruence directe ou indirecte. Mais ces deux conditions ne sont pas exclusives l'une de l'autre puisque, dans le plan, un objet possédant un axe de symétrie peut être superposé directement avec son image en miroir[8].



7 Remarque : on joue ici sur la propriété suivante : deux quadrilatères ayant des côtés respectivement égaux ne sont pas nécessairement isométriques.

8 De même, dans l'espace, un objet possédant un plan de symétrie peut être placé indifféremment « en miroir » ou « en translaté » avec un objet isométrique.

Ceci nous amène à étudier les objets « réversibles » (c'est à dire retournables dans leur empreinte) puis ensuite à expliciter la propriété de symétrie. Lorsqu'une figure plane admet un axe de symétrie, on la partage naturellement en deux parties « pareilles », d'ailleurs les élèves définissent spontanément l'axe comme étant « un trait qui coupe la figure en deux moitiés ».

Pour ne pas se limiter à la référence au pliage, nous avons introduit le modèle du miroir (en utilisant un miroir semi-réfléchissant [9]). Lorsqu'une figure admet un axe de symétrie, on peut placer le miroir de manière à voir l'image d'une partie placée devant coïncider avec celle placée derrière. Contrairement au pliage, ce modèle est statique car aucun mouvement n'amène l'objet sur son image.

Cependant, nous avons remarqué que certains élèves se ramènent spontanément à l'image dynamique du pliage. Pour dépasser l'aspect perceptif inhérent à la recherche d'axes de symétrie, nous avons développé trois approches indépendantes en visant leur intégration : une figure admettant un axe de symétrie est « pliable » (selon un pli permettant de faire coïncider deux parties), est réversible (retournable dans sa propre empreinte) et est sa propre image dans un géomiroir. Ces aspects assez globaux portant sur des propriétés de figures sont toutefois insuffisants pour faire apparaître l'idée de symétrie axiale comme transformation ponctuelle [10].

9 Nous utilisons un « géomiroir » (marque CELDA). Un miroir semi-réfléchissant permet de voir à la fois ce qui est derrière le miroir et l'image d'un objet placé devant lui.

10 Ce qui suppose de définir la transformation sans référence au mouvement, de la définir point par point et non globalement sur des figures, de la définir sur tout le plan et non comme appliquant en sens unique un demi-plan sur un autre.

3.4. *La symétrie axiale comme transformation ponctuelle. Une difficulté propre à la symétrie axiale : coordonner mesure et direction.*

Dans le plan, construire sur papier blanc le symétrique d'un point par rapport à un axe, exige de prendre en compte une direction et une égalité de distances. Dans nos activités, nous présentons d'abord une situation d'action consistant à prévoir, sur un support non quadrillé, la position d'un objet pour que son image dans un miroir (semi-réfléchissant) soit dans une boîte posée de l'autre côté du miroir. Les anticipations sont validées immédiatement. Ensuite nous proposons des exercices papier-crayon (se prononcer sur la position d'un point, construire un axe, l'image d'un point,…), la validation s'effectuant toujours avec le miroir. Des bilans portent sur les modèles d'action dans la première phase (comment réussir ?) et les procédés efficaces de construction géométriques dans la seconde. Dès le CE2, les élèves mobilisent l'équidistance à l'axe, en prenant, par exemple, un écart entre deux doigts et en le reportant. Mais, même au CM1, ils ont du mal à préciser la direction correcte et déclarent qu' « il faut mettre le pion en face » [11] ou qu'« il faut aller tout droit » [12].

D'une manière générale il est difficile de conceptualiser la direction de l'image à l'aide de la perpendicularité. La distance est plus précocement prise en compte, mais elle est souvent mesurée sur une sécante grossièrement perpendiculaire à l'axe ou sensiblement parallèle à un bord de la feuille. Cette difficulté nous paraît assez générale : les élèves ont tendance à centrer leur démarche sur le respect

11 Comme on dit de quelqu'un qu'il est assis en face de soi.

12 Comme on dit « aller droit devant soi » par opposition à « aller à droite, à gauche ou en biais ».

des dimensions des figures, en se fiant à la perception pour ce qui concerne les invariants de forme et la définition des directions.

3.5. *Un second obstacle à la prise en compte des propriétés géométriques : la prégnance de la mesure.*

Dans un problème de géométrie, la prégnance des mesures consiste à privilégier la mesure des longueurs aux dépens d'autres propriétés géométriques de la figure à traiter. Cette centration sur l'aspect métrique est liée à l'importance des invariants métriques dans l'environnement, mais aussi au contrat de travail scolaire en géométrie : « en géométrie, il faut être précis, il faut que ça tombe juste ».

Il en résulte que dans un problème de géométrie, l'élève pense souvent qu'« on va s'en sortir en mesurant » et privilégie l'outil règle graduée. Par exemple, dans l'utilisation de l'équerre, il y a conflit entre la production d'un angle droit et la mesure des longueurs (le zéro n'étant pas au sommet). Dans le dessin d'un carré de côté imposé, l'enfant privilégie souvent la mesure, l'angle au sommet étant dessiné à peu près droit. Il est vrai que s'il paraît possible de tracer un angle à peu près droit à vue, il est difficile de tracer un segment de 10 cm de long sans règle graduée [13].

En résumé, l'enfant a tendance à traiter perceptivement les invariants de forme, sans expliciter les propriétés géométriques correspondantes et à prendre en charge ostensiblement les aspects métriques. La règle graduée est perçu comme l'outil par excellence de la géométrie [14].

Pour pallier cette difficulté, il nous semble pertinent de proposer des activités mettant en jeu un agrandissement ou une réduction plutôt que de travailler toujours en vraie grandeur.

4. Notre approche de la similitude à l'Ecole Elémentaire

4.1. *Deux modèles pour l'agrandissement réduction : modèle fonctionnel et conservation de propriétés géométriques.*

Modèle fonctionnel de l'agrandissement réduction :

Le modèle fonctionnel consiste à chercher une relation entre les mesures des segments de l'original et celles de leurs correspondants sur le transformé. Ce point de vue semble prépondérant chez les élèves de cycle 3 qui, lorsqu'on demande d'agrandir une figure sans contrainte supplémentaire, propo-

13 Si l'on excepte l'étude de l'angle droit, il faut noter la quasi éviction de l'étude des angles à l'école primaire depuis les années 1970. Les instructions de 1945 sont les dernières à exiger l'usage du rapporteur (« la notion d'angle, en général, sera associé à l'usage de rapporteurs, soit pour mesurer, soit pour construire des angles »). Depuis 1970 cet instrument est ignoré ou même banni (« l'usage du rapporteur gradué classique ne relève pas du cycle 3 », document d'application des programmes de 2002). La notion d'angle n'est pas citée dans les programmes de 1970, le « gabarit pour reporter un angle » fait une timide apparition dans les instructions de 1980. Cette réduction de l'étude à l'usage de gabarits pour comparer et reproduire des angles est confirmée dans les instructions de 2002 pour le cycle 3. Pour une réflexion sur l'étude des angles à l'école primaire et en début de collège, on se reportera à la thèse de R. Berthelot et M.-H. Salin.

14 Notons que le double-décimètre ne sert pas qu'à mesurer des longueurs, il a de multiples usages qui détournent l'élève des instruments plus spécialisés ou des procédures techniques. Il permet de tracer des parallèles, en utilisant ses deux côtés les plus longs, en le faisant éventuellement glisser sans tourner. Le double décimètre sert également à tracer des perpendiculaires en plaçant deux graduations situées face à face, voire une seule graduation, sur le segment de référence.

sent fréquemment de multiplier les dimensions de l'original par 2 ou 3. Le modèle additif erroné, par ajout d'un même nombre à toutes les dimensions, est favorisé par la donnée d'un couple de valeurs sans rapport simple, par exemple lorsque « le segment qui mesure 4 cm sur le modèle devra mesurer 7 cm sur votre reproduction » [15]. Dans cet exemple, une autre erreur fréquente, « multiplier par 2 et enlever 1 », relève également du modèle fonctionnel.

Modèle géométrique de l'agrandissement réduction :

L'agrandissement ou la réduction par conservation de propriétés géométriques consiste à transférer sur le transformé des propriétés de l'original.

Nous travaillons sur les invariants suivants :
— Pour trois points, être alignés ; pour deux segments, être dans le prolongement l'un de l'autre ;
— Pour un point, être le (au) milieu d'un segment ;
— Pour un angle, être droit ;
— Pour deux segments, avoir même longueur ; pour deux couples de points, être à égales distances ;
— Pour deux droites, être parallèles ;
— Conservation du type de figure lorsque celle-ci peut être catégorisée (exemple : être un trapèze).

Nous avons observé que le modèle fonctionnel est un obstacle à l'utilisation d'un modèle géométrique car beaucoup d'enfants sont décontenancés de ne pas trouver de règle permettant de passer des longueurs mesurées sur l'original à celles du transformé [16]. Cet obstacle n'est qu'une forme particulière de la prégnance de la mesure évoquée dans le paragraphe précédent.

Alors que la superposition règle en grande partie le problèmes de validation d'une reproduction en vraie grandeur dans le plan, valider des agrandissements ou des réductions pose des problèmes particuliers.

4.2. *Problèmes de validation dans l'approche géométrique de l'agrandissement réduction.*

Il est fréquent de ne pouvoir déceler visuellement une erreur dans un agrandissement de figure. L'agrandissement ou la réduction, au sens mathématique, avec conservation des rapports, ne résultant pas d'une action directe sur les objets on ne peut pas mimer mentalement ces transformations. Néanmoins, on conçoit que la forme ne doit pas changer, ce qui n'est pas toujours suffisant pour garantir un résultat correct. Par exemple, il est clair qu'un carré ne devient pas un rectangle, par contre, il n'est pas évident de voir si un rectangle est un agrandissement d'un autre, sauf si l'un est beaucoup plus allongé que l'autre [17]. En dehors de cas particuliers, il est donc nécessaire de disposer de critères objectifs pour distinguer les productions correctes. Dans la situation « Agrandissement du puzzle » de N. et G. Brousseau, les pièces sont agran-

15 Voir la célèbre situation « Agrandissement du puzzle » dans Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire, N. et G. Brousseau, IREM de Bordeaux, 1987, page 138.

16 Rappelons qu'à l'école élémentaire les décimaux et les rationnels ne sont pas disponibles comme coefficients de proportionnalité puisque « multiplier par un décimal » ou « prendre la fraction d'un nombre » ne sont plus au programme.

17 Le rectangle 3x4 est « plus petit » que le rectangle 4x5, au sens où on peut l'inclure dans l'autre, mais n'est pas une réduction de celui-ci, car $3/4 \neq 4/5$.

dies séparément et la reconstitution du puzzle agrandi nécessite le respect des angles droits et une procédure numérique reposant sur la proportionnalité [18].

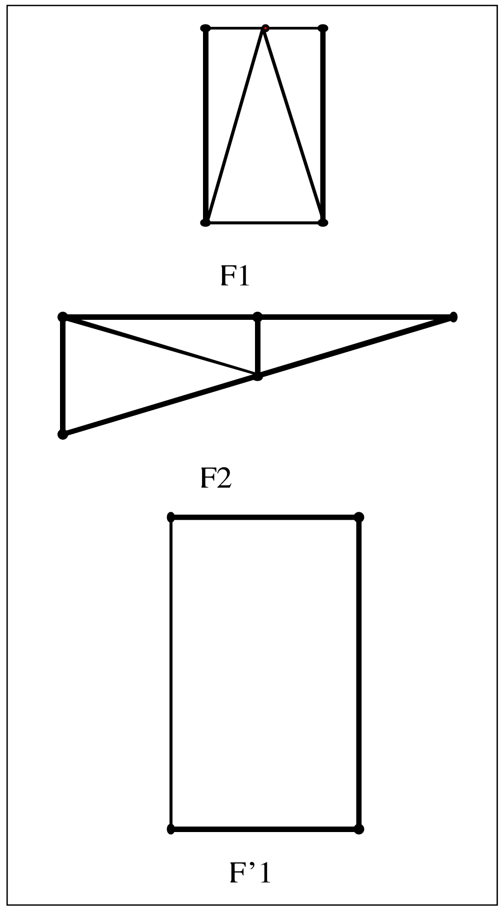
Pour notre part, nous souhaitons éviter le recours aux mesures, valoriser le transfert de propriétés géométriques de l'original vers l'agrandi et proposer des activités dès le CE2 pour développer des stratégies concurrentes au mesurage. Cela suppose des activités évitant tout appel à la proportionnalité.

Voici quelques activités proposées :

Un ensemble de pièces permet de constituer deux puzzles F1 et F2. F1 doit être agrandi dans un cadre donné [19] comme un dessin, sans découper les pièces. Pour valider, on découpe l'agrandi F'1 et on agence les pièces en respectant le modèle (réduit) F2.

Si on devait reproduire la figure en vraie grandeur, il suffirait de reporter des mesures. Puisqu'on doit agrandir, il faut transférer sur F'1 la propriété, pour un point, d'être au milieu du côté du rectangle [20]. Si cette propriété n'est pas respectée, il n'est pas possible de reproduire le modèle F2 après découpage de F'1.

Ou encore au CE2 (figure page suivante) : comment placer le losange agrandi dans le puzzle agrandi ? La validation s'effectue en reconstituant l'ensemble du puzzle agrandi (les pièces étant fournies à ce moment)

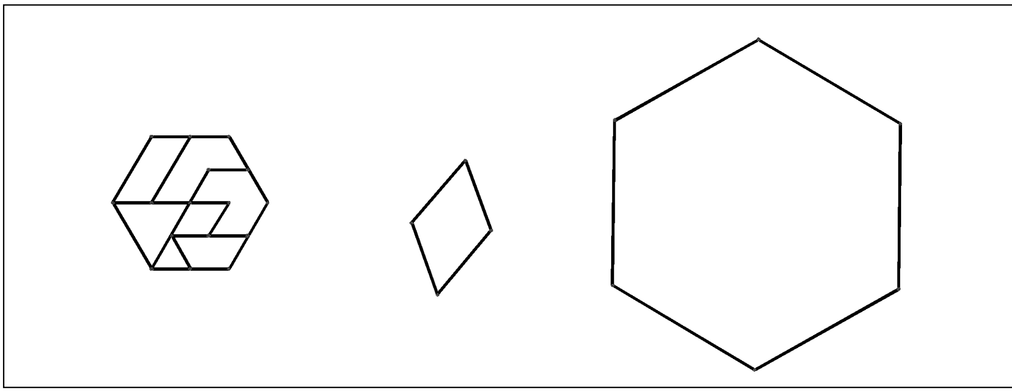


Nous proposons également, au CM1, d'agrandir des dessins permettant la construction d'une boîte à fond carré. La validation s'effectue en réalisant en volume l'objet visé ; le non respect des propriétés de la figure de référence entraîne des anomalies repérables dans la réalisation.

18 Sauf si « les enfants se tirent d'affaire en donnant par-ci, par-là quelques coups de ciseaux de manière à raccorder tous les morceaux » op cité. Les procédures adaptées reposent sur l'utilisation des propriétés de linéarité de la correspondance entre les mesures de l'original et de l'agrandi.

19 La donnée du cadre agrandi permet de neutraliser l'aspect proportionnalité, que ce soit sous la forme de la donnée d'un coefficient d'agrandissement, d'une longueur et de son correspondant ou de la conservation du rapport « interne » longueur / largeur des cadres rectangulaires.

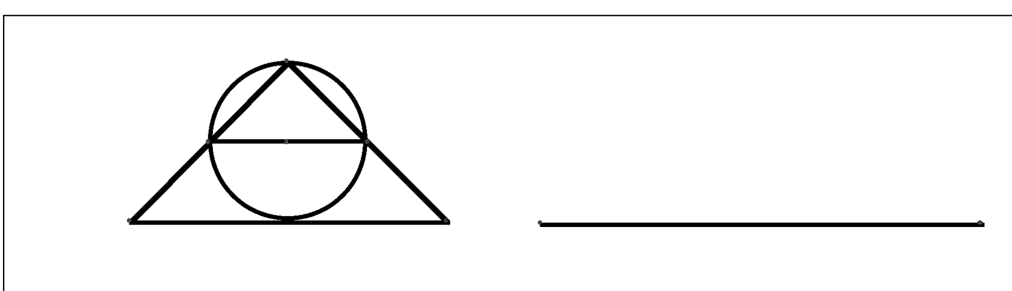
20 Il faut passer de la relation, pour un segment, d' « avoir telle mesure » à la relation, entre deux segments d' « avoir même mesure ».



Au CM2, on demande d'agrandir la figure ci-dessous, l'agrandi du plus grand côté du triangle étant donné. Le non-respect des propriétés de l'original, qu'il est nécessaire de lister avec les élèves après quelques tentatives, entraîne l'impossibilité de reproduire correctement la figure.

D'une manière générale, on s'efforce de trouver des situations dans lesquelles une erreur conduit à une production ou à une réponse non recevable après vérification.

Mais en géométrie, la mise en œuvre de ce schéma se heurte à des difficultés. Une difficulté vient du fait que la validation pratique ne fournit pas toujours un verdict clair, car il faut interpréter les écarts entre ce qui est obtenu et ce qui est attendu. Par exemple, au CM1, dans un problème d'agrandissement du rabat d'une enveloppe, le contour agrandi de l'enveloppe étant donné, une élève agrandit correctement ce rabat, un triangle rectangle isocèle, en respectant l'angle droit et l'égalité des côtés. Mais, mesurant la distance de l'extrémité du rabat à la base de l'enveloppe, elle ne trouve pas le double de la mesure correspondante sur l'original : elle en conclut qu'elle s'est trompée. Lors de la validation pratique, un écart d'un millimètre avec l'agrandissement sur calque réalisé à la photocopieuse conforte l'élève dans son opinion alors que les autres sont satisfaits et imputent l'écart à des imprécisions de tracé.



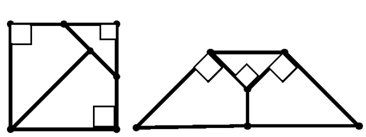
Dans ce cas, la validation devrait être théorique, ce qui est impossible à l'école élémentaire. Une première difficulté résulte donc des erreurs que l'on peut imputer, à tort ou à raison, à des imprécisions. Une seconde difficulté à gérer les situations autocorrectives vient de l'interprétation des échecs et des réussites. Par exemple, pour agrandir le dessin ci-dessous, si l'élève se trompe en plaçant un segment, il en résulte qu'ils ne peut reconstituer la variante du puzzle, mais il ne comprend pas nécessairement pourquoi. Même les élèves qui réussissent ne comprennent pas toujours la nécessité de joindre les milieux des deux côtés.

5. Les propriétés géométriques, des outils pour comparer.

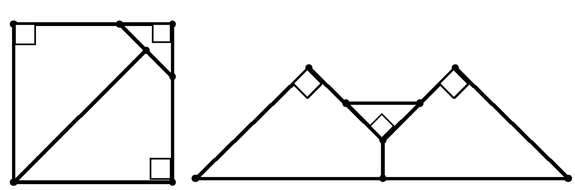
A l'école primaire parler de propriétés des objets géométriques n'a pas le même sens que dans le cadre de la géométrie déductive.

En géométrie déductive, l'objet géométrique est caractérisé par un ensemble de propriétés dont certaines sont déclarées (par exemple, ABCD est un quadrilatère convexe) et d'autres inférées, de manière déductive ou par évocation de propriétés (par exemple la somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut 360 degrés). Ces propriétés sont régies par des relations de dépendance hiérarchiques (si ABCD est un rectangle, il possède les propriétés des parallélogrammes, un parallélogramme possède les propriétés des quadrilatères convexes, etc.). Pour aider le raisonnement, la résolution d'un exercice amène souvent une production graphique. A l'école primaire, au lieu de servir le raisonnement, la production ou l'analyse d'objets matériels et graphiques est souvent le but même de l'exercice ; de ce fait les aspects perceptifs deviennent prédominants. En effet, à l'opposé du concept géométrique, l'objet graphique est particularisé [21], il possède des propriétés perceptives, contrôlables à l'aide de la règle graduée, du compas, de l'équerre… et souvent visibles à l'œil.

Lorsqu'un dessin est présenté, il est licite de lui attribuer des propriétés. L'enseignant exige qu'elles soient formulées en termes géométriques et de plus contrôlées expérimentalement (comparaison d'un angle avec un gabarit d'angle droit, vérification de l'écart constant entre deux parallèles …). Lorsqu'on demande de produire un dessin (exercice de construction), on donne en général suffisamment de propriétés pour qu'il soit parfaitement



Puzzle original



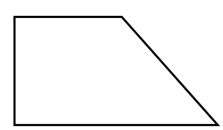
Puzzle mal agrandi

21 Ce qui n'est pas le cas pour une figure réalisée avec un logiciel de géométrie dynamique comme Cabri Géomètre.

spécifié ; dans l'évaluation du résultat, les critères de précision et de soin sont prédominants. La production ou l'analyse d'un dessin soigné ont certainement leur place à l'école élémentaire [22], mais leur rapport avec les apprentissages géométriques mériterait d'être précisé. Il nous semble qu'il y a souvent un lien trop rigide entre un dessin particularisé et sa liste de propriétés et qu'il faudrait davantage travailler sur des classes de dessins ou sur des figures à main levée.

Une première piste d'activités consiste à travailler à partir de descriptions d'objets non complètement spécifiés. Notre expérience montre qu'à l'école primaire rédiger des descriptions ou des plans de construction est difficile [23] et, qu'en dehors de cas particuliers, il est peu productif de demander de « décrire afin de pouvoir reproduire sans avoir vu » [24]. Par contre le problème consistant à faire une figure correspondant à une description, nous paraît essentiel. Par exemple l'enseignant propose « il y a un cercle et deux droites parallèles, une des droites coupe le cercle mais pas l'autre», l'élève doit créer une image mentale correspondant à cette description et faire un dessin à main levée suivi éventuellement d'un dessin soigné. En prolongement, l'élève doit prendre conscience que différents dessins sont possibles et recevables. Il doit être capable de comparer et de critiquer des réalisations en se centrant sur le respect des propriétés indiquées et en négligeant les autres. Il est possible que des propriétés non explicites soient également réalisées comme conséquences de celles qui sont données, comme on pourrait le démontrer dans le cadre de la géométrie déductive ; bien choisis, ces problèmes devraient donner lieu à des débats intéressants [25].

Une seconde piste de travail repose sur l'idée de comparaison de figures possédant des traits de ressemblance sans pour autant être semblables ou tout au moins sans que la conservation des proportions soit exigée. Par exemple, au CM, nous proposons de réaliser des figures conformes à des modèles donnés en taille réduite (par exemple un trapèze rectangle comme ci-dessous) en assemblant des



figures (un carré imposé et un triangle à choisir parmi plusieurs [26]). Le modèle ne peut être

22 Voir en particulier les propositions de Barataud, Durand et Lestievent Activités géométriques, dossiers n°1 et 2 CNEFEI Centre National de Suresnes, 58-60 avenue des Landes, 92150 Suresnes.

23 Il est difficile de cerner le bon niveau de description des objets, des actions, l'ordre à respecter, de distinguer entre les différentes contraintes, de savoir s'il faut reproduire la position du dessin sur la feuille. Les différentes possibilités de définir un objet géométrique sont loin d'être maîtrisées. Par exemple un cercle peut être défini par son centre et son rayon, par son centre et un point, trois points non alignés. Toutefois des descriptions mettant en jeu ces définitions devraient être comprises.

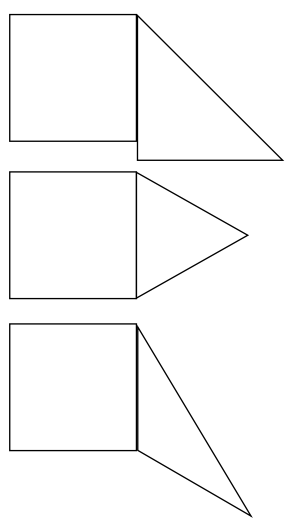
24 Rappelons que décrire une figure n'est pas en rédiger un plan de construction Le plan de construction est procédural, indique comment on fait, alors que la description est déclarative et dit ce qui est. Les exercices habituellement proposés conduisent à rédiger des plans de construction. Voir le jeu du télégramme (ancienne édition ERMEL Cycle Moyen, SERMAP-HATIER 1982, tome 3, page 180) et le jeu du téléphone (Le Nouvel Objectif Calcul, CM2 Hatier 1996, page 68).

25 Exemples de problèmes : - tracer deux traits de manière à faire apparaître aucun, 1, 2, 3 ou 4 angles droits. La discussion porte sur l'impossibilité d'avoir 3 angles droits sans en avoir un quatrième. – construire un triangle ayant deux angles droits (Cf. DEA de M.-P. DUSSUC : Du constat graphique à l'évidence géométrique : étude de démarches d'élèves de CM2, Université de Lyon 1, 1994).

26 Plus précisément, on donne un carré de côté différent de celui du modèle ainsi que 4 triangles non rectangles et 4 triangles rectangles, dont un non isocèle.

reproduit en vraie grandeur, mais la tâche n'exige pas de réaliser un trapèze semblable au modèle mais seulement un trapèze rectangle.

Pour réussir, il faut choisir un triangle rectangle isocèle dont un côté de l'angle droit a même longueur que le côté du carré. Un mauvais choix ne permettra pas de produire un trapèze. On obtiendra, par exemple :



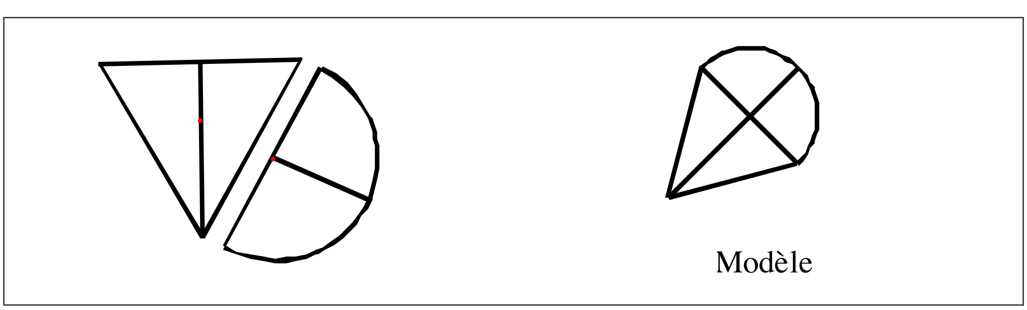
Voici une autre proposition au CM. Est-il possible, en déplaçant les deux pièces de gauche (ci-dessous) et en les plaçant comme à droite de faire un dessin conforme au modèle ? L'élève doit répondre sans découper les pièces. Les réponses pourront être validées ou invalidées par découpage en fin de travail.

Une troisième piste de travail consiste à exploiter l'idée qu'une propriété géométrique permet, dans un lot donné de figure, de créer deux classes : celle des objets qui possèdent la propriété et celle des objets qui ne la possèdent pas. Du point de vue du critère retenu, à l'intérieur d'une même classe, les objets se ressemblent (sont « pareils » mais sans être « identiques »), d'une classe à l'autre ils sont différents (pas pareils). Pour ce type d'activité, on pense au classique jeu du portrait : par exemple dans un lot de polygones la propriété « posséder deux angles droits exactement » peut être discriminante.

Enfin on peut proposer, dans un lot de figures, de « décrire afin de reconnaître une figure particulière » (l'usage de la règle graduée étant interdit). Cet exercice difficile demande de trouver une ou plusieurs propriétés permettant de distinguer un objet de tous les autres.

6. Conclusion

En conclusion, nous résumerons les difficultés rencontrées dans les activités concer-



nant la comparaison de figures et le sens général de nos propositions.

Rappelons d'abord les problèmes auxquels nous avons confronté les élèves.
— Décider si des objets sont « pareils » ou « pas pareils » (du point de vue de l'isométrie ou de la similitude) ;
— Produire un objet « pareil » qu'un autre (isométrique ou semblable) ;
— Produire des objets possédant une ou plusieurs propriétés communes (ces objets présentant des différences perceptives malgré des propriétés partagées) ;
— Reconnaître une figure dans un référentiel (ce qui exige de catégoriser les objets grâce à une ou plusieurs propriétés : du point de vue des critères retenus, d'une classe à l'autre les objets ne sont pas pareils, à l'intérieur ils se ressemblent).

Au cours des activités nous avons été confrontés à l'obstacle du perceptif et des actions mentales consistant à traiter les invariants de forme au niveau perceptif approximatif sans recours à la conceptualisation que permet l'approche géométrique. Dans ce contexte, le souci omniprésent de précision se fixe sur le respect des mesures de longueurs et l'usage du double décimètre. Ces difficultés n'étaient pas inconnues jusqu'à présent mais les solutions proposées, reposant essentiellement sur le travail sur quadrillage, nous ont paru limitées, en particulier parce qu'on y occulte la conservation de l'angle droit.

Pour notre part, nous avons privilégié trois directions de travail visant à favoriser la prise en compte des propriétés significatives de la forme :
— Dessiner sur papier blanc pour reproduire, agrandir, construire le symétrique… sans privilégier de direction sur la feuille ;
— Agrandir et réduire et pas seulement reproduire en vraie grandeur ;
— Contrôler et limiter l'utilisation des procédures reposant sur le mime mental de l'action (agrandissement, réduction, utilisation d'un miroir semi réfléchissant dans l'approche de la symétrie axiale plane).

En complément de ces aspects graphiques nous amenons l'élève à catégoriser les objets selon des critères qui ne sont pas uniquement perceptifs. Par exemple dans un référentiel donné, on peut considérer « les quadrilatères qui ont un seul angle droit », qui ont un trait commun de ressemblance, sans être ni isométriques, ni semblables et alors que certains exemplaires sont d'allure franchement différentes. Comparer des objets géométriques au-delà du perceptif consiste à expliciter des propriétés partagées et à se demander s'il est pertinent de les distinguer dans le cadre d'une tâche donnée.

Dans le contexte d'une géométrie du dessin on pourrait penser que des productions sont soit identiques (aux erreurs d'exécution près) soit différentes ; nous avons tenté de nous écarter d'une alternative aussi réductrice. Mais, nous avons constaté la difficulté de prendre en compte les propriétés des figures sous leur forme experte alors que les notions correspondantes ont été étudiées. Les élèves sont toujours tentés de s'en tenir à un point de vue pratique et spatial [27], mais ils y sont largement incités par les types de tâches auxquels ils sont confrontés. Il y a en fait une double difficulté, l'une concerne la difficulté de mobiliser les notions géométriques, autres que la mesure,

27 Pour une description des différents types de problématique concernant les problèmes spatio-géométriques on pourra consulter la thèse de R. Berthelot et M.-H. Salin L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire, Université de Bordeaux, 1992, pages 49 et 50.

pour résoudre un problème présenté ou perçu comme spatial et l'autre concerne la maîtrise du langage géométrique qui se révèle très complexe. Evidemment ceci nous interroge sur les tâches proposées : les notions géométriques sont-elles incontournables, servent-elles vraiment d'outils pour anticiper, prévoir, inférer, et dans quelle mesure est-ce possible à l'école élémentaire ?

Pour mieux cerner cette question, prenons l'utilisation de l'angle droit lors de la résolution d'un problème. Plusieurs cas sont possibles : a) l'angle droit est occulté, la réponse étant néanmoins acceptable. Exemple : l'enseignant demande de trouver l'écart entre deux parallèles, l'écart correct est donné sans faire référence à la position de la règle pour effectuer la mesure[28] ; b) l' angle droit est constaté, repéré d'abord à vue puis vérifié par comparaison avec un référent. Exemple : sur un dessin soigné de losange, on demande « trace les diagonales, que constates-tu ? » ; c) l'angle droit est connu. Exemple : la propriété « avoir des angles droits » est mobilisée pour tracer un rectangle. Sur papier blanc, la maladresse peut néanmoins conduire à une production non acceptable ; d) enfin, l'angle droit est inféré ou anticipé. Par exemple pour obtenir un trapèze rectangle à partir d'un carré il faut associer un triangle rectangle pour produire un alignement sur la grande base (cf. plus haut la situation évoquée en 4.2).

Evidemment, on évite les tâches dans lesquelles la notion géométrique peut être occultée. On peut chercher à amplifier les erreurs qui pourraient en résulter (tracer des parallèles éloignées, trouver l'image d'un point distant de l'axe de symétrie...) et prendre en compte les intentions des élèves, au-delà des problèmes d'exécution. Nous avons aussi tenté (cf. 4.2) de diversifier les types d'activités, en particulier en proposant des tâches d'anticipation (si on fait ceci, si on choisit cela que se passera-t-il ?), de sélection (quel est le bon choix ?) ou de jugement (tel choix est-il satisfaisant ?) qui amènent des positions contrastées de la part des élèves ; des débats doivent alors être organisés avant toute validation pratique. L'enjeu de ces discussions est de savoir comment être sûr avant toute réalisation concrète et c'est alors que l'on fait vraiment de la géométrie. Les validations expérimentales doivent être possibles en géométrie à l'école primaire, mais elles ne sont pas suffisantes : la pratique ne tranche pas toujours !

28 Si les parallèles sont écartées de 10 cm, il faut une erreur de positionnement de 8° par rapport à une perpendiculaire pour obtenir une mesure de 10,1 cm.

Bibliographie

BERTHELOT R., SALIN M.-H., (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de l'université de Bordeaux I.

BKOUCHE R., (2000), *Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles*.. Bulletin de l'APMEP n° 430.

BROUSSEAU N. et G., (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM de Bordeaux.

CARRAL M. (1995) *Géométrie*. Paris, Ellipses.

DENIS M., (1989), *Image et cognition*. Paris, PUF.

DUSSUC M.-P., (1994), *Du constat graphique à l'évidence géométrique : étude de démarches d'élèves de CM2*, DEA Université de Lyon 1.

ERMEL (1982),(ancienne édition) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cycle moyen, Tome 3*. SERMAP-HATIER.