REPERES - IREM. N° 59 - avril 2005

LES FIGURES - CLES : UNE IDEE POUR L'APPRENTISSAGE DE LA DEMONSTRATION EN 4e

Marie-Paule KERBOEUF, Jean HOUDEBINE
Irem de Rennes

Introduction

Cet article propose, pour l'enseignement de la démonstration au début de la quatrième une pratique nouvelle, construite autour de l'idée de *figure-clé*. Notre but n'est pas « d'imposer » cette pratique, pas plus que de présenter un point de vue théorique nouveau sur l'enseignement de la démonstration. Nous souhaitons décrire les idées qui sous-tendent notre travail et qui se sont imposées à nous après de nombreuses années de recherche, en particulier sur la démonstration au collège, avec comme ambition de susciter auprès de quelques enseignants l'envie de faire évoluer leur point de vue sur l'enseignement de la démonstration, en imaginant de nouvelles manières de faire et en les expérimentant auprès de leurs élèves.

Changer de point de vue

La plupart des idées que nous reprenons ont été développées dans de nombreux articles [1]. En lisant ces articles, on peut se laisser convaincre ; mais on ne voit pas toujours comment les appliquer concrètement et on peut être déçu par la réalisation de certaines propositions. Il est facile de comprendre les raisons de ces difficultés. La plupart des articles nous invitent, en effet, à un changement profond de point de vue sur l'enseignement de la démonstration et non à un simple amé-

1 Voir par exemple [1] ou [10]. On trouvera dans ces deux ouvrages de nombreuses références.

nagement des pratiques. Et chacun de nous sait combien cela est difficile. Il y faut du temps ; il y faut un cadre favorisant une remise en cause qui ne peut venir que d'une observation approfondie des élèves. Un stage traditionnel n'a aucune chance de réaliser ce but. La lecture d'un article, si pertinent soit-il, n'y suffira pas non plus. Les groupes de recherche-formation, mis au point par les Irem, et auxquels, il n'y a pas si longtemps, n'importe quel enseignant pouvait participer, sont sans doute le meilleur cadre pour qu'un enseignant puisse faire évoluer son enseignement de manière significative.

La géométrie, un aller et retour entre texte et figure

Les programmes actuels du collège indiquent que la géométrie ne doit pas se réduire à observer des propriétés ou à les utiliser pour des constructions. Un autre aspect doit aussi être constamment présent : trouver des arguments pour s'assurer qu'une propriété est vraie sur une figure dont on connaît déjà quelques propriétés. Organiser et communiquer ces arguments ne peut se faire sans l'écriture de textes et dans cette perspective la géométrie doit peu à peu devenir un aller et retour entre un travail sur la figure et la rédaction d'un texte. Cette démarche n'a de sens pour un élève, que s'il fait un véritable travail sur la figure et un véritable travail d'écriture et s'il comprend les différences et les complémentarités de ces deux approches.

Il nous semble que c'est au niveau de la quatrième que cette idée prend tout son sens (cf. l'extrait des programmes ci-contre). C'est en effet à ce niveau qu'on peut raisonnablement se donner pour objectif que *tous les élèves* écrivent de *véritables démonstrations* concernant *des situations géométriques complexes*. En d'autres termes, le but est qu'en fin de quatrième,

— les élèves soient capables :
- de résoudre des problèmes complexes de géométrie,
- d'écrire des textes respectant pleinement le contrat de la démonstration,
- en particulier d'introduire dans un texte bien articulé les énoncés des propriétés sur lesquelles ils se sont appuyés ;

— même si ce n'est pas une démonstration que l'élève écrit naturellement pour rendre compte de son travail de résolution, quand, pour respecter le contrat imposé par le professeur, il écrit une démonstration, celle-ci ne doit pas trahir, à ses yeux, son raisonnement.

Introduire la connaissance à l'aide de figures-clés

Nous partons ici de deux idées développées dans plusieurs publications : représenter un énoncé de théorème à l'aide de figures, utiliser des figures prototypes [2].

Extrait des commentaires des programmes

En classe de quatrième, on demande de façon plus systématique de repérer et de mettre en œuvre les théorèmes appropriés. Le recours, si besoin est, à plusieurs pas de démonstration amène à comprendre le changement de statut d'une assertion au fil d'une démonstration : un résultat intermédiaire est une conclusion dans un pas de démonstration et une hypothèse dans un pas ultérieur.

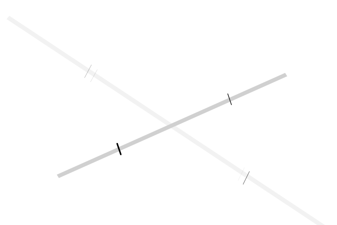
2 Voir [2], [5], [6], [8], [13] et le site http://perso.wanadoo.fr/jean-louis.guillot/geocle/default.htm.

L'idée de figure-clé

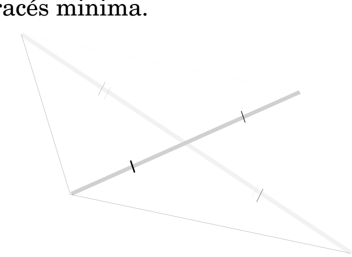
Il s'agit d'associer à un énoncé de théorème une figure correspondant aux hypothèses contenues dans cet énoncé, mais avec *des tracés minima*. En effet, pour raisonner sur la figure, le point essentiel est de reconnaître qu'une partie de cette figure vérifie les hypothèses de l'énoncé d'un théorème. C'est la raison d'être de la figure-clé. Pour appliquer le théorème sur la figure il suffit de trouver une sous-figure qui soit la figure-clé. L'application du théorème devient alors simple.

Premier exemple : les diagonales se coupent en leur milieu

Pour l'énoncé : « **Si** les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu **alors** ce quadrilatère est un parallélogramme », la figure-clé retenue est :



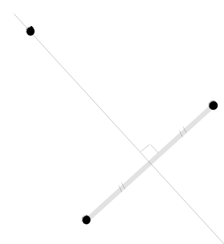
Nous ne considérons pas la figure suivante comme une figure-clé : elle ne correspond pas aux tracés minima.



Notons qu'un élève hésite au début à parler d'un quadrilatère dont les côtés ne sont pas tracés : la figure-clé proposée ici peut l'y aider.

Deuxième exemple : la médiatrice d'un segment, plusieurs figures-clés

Considérons la propriété : « Si un point est situé sur la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment. » On peut lui associer la figure-clé suivante :



Considérons maintenant le théorème : « La droite qui joint deux points équidistants des extrémités d'un segment est la médiatrice de ce segment. »

On sait que l'application de ce théorème est rendue difficile par l'existence de « configurations » ressenties comme franchement différentes ; en particulier la disposition avec les deux points du même côté du segment est difficile à repérer dans un figure. C'est la raison qui nous fait choisir ici trois figures-clés plutôt qu'une. Voici ces figures [3] dans l'encadré du haut de la page suivante.

La figure-clé n°3 correspond au cas où l'un des points est sur le segment. Même s'il s'agit d'un cas particulier du théorème ci-dessus, cette figure est plutôt proche d'énoncés qui s'expri-

3 Ce théorème s'appliquant dans des situations où la médiatrice n'est pas « verticale », nous ne disposons pas la médiatrice verticalement sur les figures associées à cet énoncé.

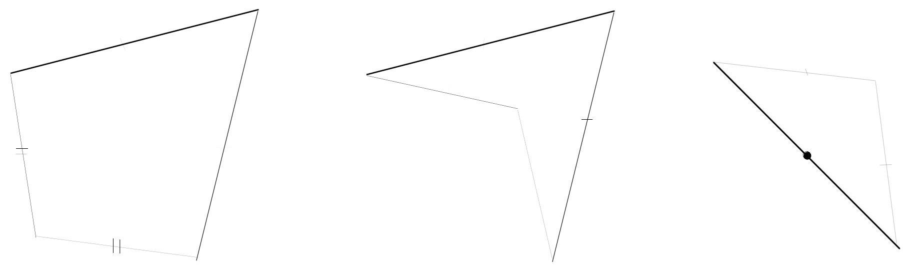


Figure-clé n°1 Figure-clé n°2 Figure-clé n°3

ment en termes de triangle isocèle comme : « Dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal est aussi hauteur et médiatrice. »

On voit sur ces exemples qu'un théorème peut être associé à plusieurs figures-clés et qu'une figure-clé peut être associée à plusieurs théorèmes.

Ces figures illustrent encore l'intérêt de ne garder pour une figure-clé que les tracés minima : ici ni le segment, ni la médiatrice ne sont tracés. Cet outil prend tout son sens pour des problèmes comme celui de l'encadré de la page suivante : « l'efficacité des figures-clés » (surtout si on n'a pas de connaissances sur le cercle circonscrit).

Troisième exemple : des points sur un même cercle

Nous proposons aux élèves les figures-clés ci-contre. La figure-clé n°1 est associée à la définition du cercle comme ensemble de points situés à égale distance d'un point donné. A et B étant deux points d'un cercle de centre O, si les rayons OA et OB ne sont pas tracés, il n'est pas toujours évident, pour un élève de quatrième, d'écrire l'égalité entre OA et OB. Les rayons peuvent aussi être coupés par d'autres segments, gênant la vision de cette égalité.

Figure-clé n°1 :

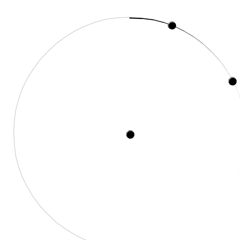
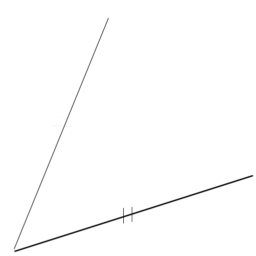


Figure-clé n°2 :



La figure-clé n°2 peut être associée à plusieurs propriétés :

— si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment ;

L'efficacité des figures-clés

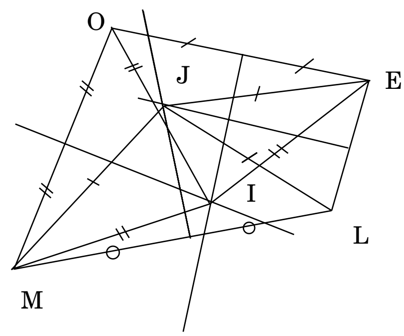
Énoncé [4]

Tracer un quadrilatère OELM. Tracer les médiatrices des segments [OM] et [OE] : elles se coupent en I.

Tracer les médiatrices des segments [ML] et [LE] : elles se coupent en J.

Prouver que la droite (IJ) est la médiatrice du segment [ME].

Copie d'élève [5]



IE = IO
IO = IM
Donc
IM = IE donc I est sur la médiatrice de ME.
JE = JL
JL = JM donc
JM = JE
J est donc sur la médiatrice de ME.
[IJ] est donc la médiatrice de ME.

Ce problème est le premier que fait cet élève, après l'introduction des médiatrices et des figures-clés associées. Ces dernières semblent être un moteur pour son action : il trace en effet sans hésitation les segments [IO], [IE] et [IM], puis code leur égalité de deux petits traits et il fait de même pour J. Il lui faudra très peu de temps pour s'exclamer « ah, ça y est ! » ; on peut penser que la figure-clé EJMI lui a sauté aux yeux. Il maîtrise de manière spectaculaire la complexité de la figure.

Il produit alors un texte minimaliste qu'on peut interpréter comme le décryptage des figures-clés rencontrées. En particulier, pour conclure que I est sur la médiatrice de ME, il ne cite pas la propriété « Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, il est sur la médiatrice de ce segment. » D'une certaine manière ce texte est satisfaisant. Mais, l'expérience montre qu'un élève produisant un texte de ce type peut avoir de sérieuses difficultés à écrire un texte bien articulé dans lequel soient citées les propriétés sur lesquelles il s'appuie. *A priori,* il reste donc du travail à faire (cf. en fin d'article le paragraphe « Faire comprendre les énoncés de théorèmes »).

4 Cet énoncé est extrait du Hachette de quatrième, Édition 98, p. 144, n°10.

5 Pour des raisons de lisibilité les copies ont été dactylographiées.

— si un triangle a deux côtés de même mesure, alors il est isocèle ;
— si deux points sont à égale distance d'un même point O, alors ils sont sur un même cercle de centre O.

Une idée nouvelle : associer à un théorème une figure-clé et un schéma

Plusieurs publications [6] proposent l'idée d'associer, à un énoncé de théorème, un schéma sous forme d'une ou de plusieurs figures. Par exemple, au théorème : « Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme », Marie-Agnès Egret propose d'associer le schéma ci-dessous.

Dans ces publications ces schémas sont souvent présentés avec comme principal objectif la reconnaissance de la structure syntaxique des énoncés de théorème. Une meilleure distinction entre les prémisses et la conclusion et entre un théorème et sa réciproque en serait une conséquence.

Ces schémas sont variés :

— ils peuvent présenter, avec un codage adapté, les prémisses et la conclusion sur une seule figure,

— ils peuvent présenter séparément les prémisses et la conclusion,

— les prémisses peuvent être présentées par une ou plusieurs figures,

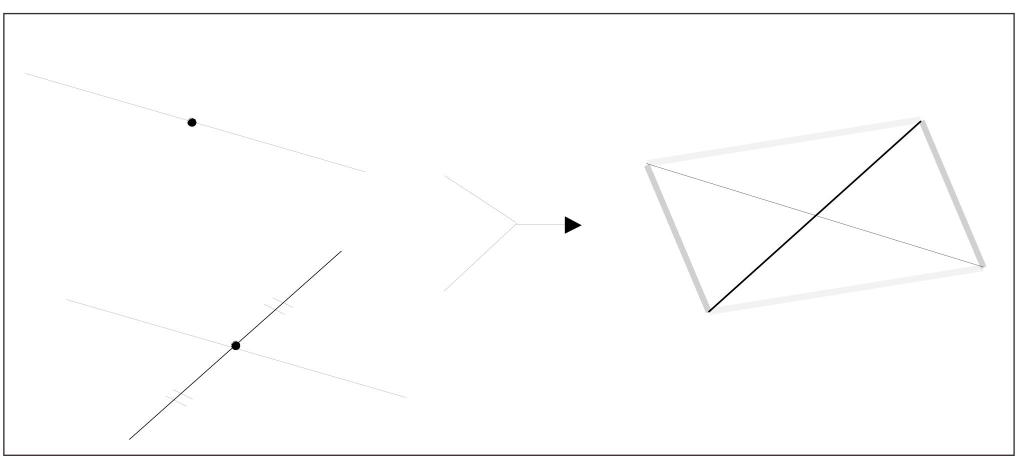
— sur la figure présentant la conclusion, les prémisses peuvent être ou non codées.

Nous aussi sommes partis de l'idée qu'il était utile d'associer des figures à un énoncé. Mais notre proposition diffère de ce qui précède sur des points essentiels. Décrivons-la à propos de l'énoncé précédent.

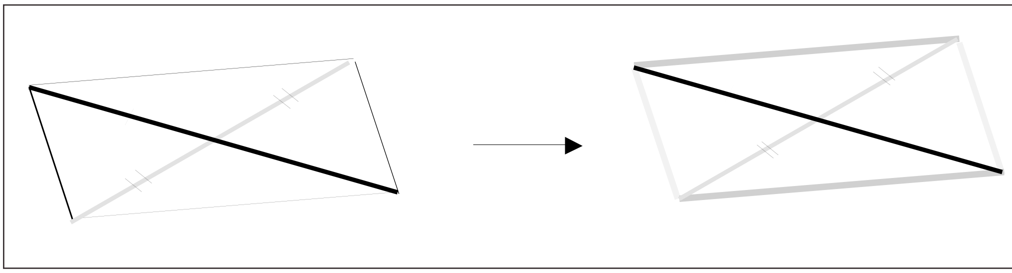
Nous proposons d'associer à un énoncé deux éléments :

— D'une part une ou plusieurs figures-clés comme nous l'avons indiqué ci-dessus.

— D'autre part le schéma représenté en haut de la page suivante.



6 Voir [2], [5], [6] ou le site http://perso.wanadoo.fr/jean-louis.guillot/geocle/default.htm.



Dans ce schéma les deux figures choisies sont autant que possible très près du texte de l'énoncé ; deux énoncés différents du même théorème peuvent donc conduire à deux représentations différentes. Sur la première figure, qui n'est jamais décomposée comme dans la proposition de Marie-Agnès Egret, les données de l'énoncé sont codées et tout ce qui y est évoqué est tracé. Par exemple, l'énoncé évoque ici un quadrilatère ; donc les côtés du parallélogramme sont tracés. La deuxième figure s'obtient à partir de la première en y ajoutant les codages des propriétés contenues dans la conclusion et en y ajoutant les tracés utiles pour mettre ces codages. Dans le cas du théorème ci-dessus, un point important est que la conclusion ne peut être raisonnablement codée directement : ce sont donc des propriétés du parallélogramme que l'on codera sur la deuxième figure.

Dans notre stratégie l'illustration de l'énoncé par le schéma a pour but de donner plus de signification à l'énoncé et non d'insister sur sa structure syntaxique. Nous pensons en effet qu'à ce stade c'est le texte qui est le meilleur soutien pour dégager la structure syntaxique. Cela explique notre choix de ne pas décomposer la première figure du schéma.

C'est la figure-clé qui met les prémisses en évidence. C'est le travail de résolution de problème avec la figure-clé et les liens figure-clé, schéma et énoncé qui permettent peu à peu de découvrir la signification de l'énoncé et par conséquent de prendre conscience du rôle joué par sa structure syntaxique.

Les figures-clés restent des objets « transitionnels »

Raymond Duval souligne le risque d'introduire « des apprentissages intermédiaires qui fassent perdre de vue ce pour quoi ils sont instaurés »[7]. Il s'agit ici de ne pas subordonner à la maîtrise des figures-clés l'apprentissage de la résolution de problèmes de géométrie et de sa rédaction en termes de démonstration. Cette remarque est d'autant plus essentielle que l'on observe que les figures-clés ne sont peut-être pas une aide significative pour quelques élèves, en particulier pour ceux qui privilégient naturellement une démarche qui part de la conclusion du problème pour remonter jusqu'aux données (cf. encadré « partir de la conclusion »).

C'est pour cela que les figures-clés sont présentées comme une aide et comme un outil éventuel ; l'élève est associé à la mise au point de cet outil en particulier en réalisant des fiches qu'il complète lui-même. Une séance de cours peut être consacrée à réaliser ces fiches et à en discuter : on s'assure que ce sont

7 Voir [4], mais aussi [12].

bien les tracés minima qui figurent sur les figures-clés et que les figures-clés, les schémas et les énoncés sont associés de manière pertinente.

En revanche, les figures-clés ne sont pas présentées comme au centre de l'apprentissage. Peu d'activités sont proposées en vue d'en assurer la maîtrise. Aucun exercice de contrôle ne porte sur leur utilisation. Si un élève écrit sans y recourir ou s'il les utilise de manière non standard nous n'intervenons pas pour le remettre dans « le droit chemin ».

C'est au moment des premiers travaux d'écriture de démonstrations par les élèves que les figures-clés montrent toute leur efficacité. Elles sont encore utiles plus tard en remédiation, pour aider un élève, qui a compris le contrat, à corriger son texte et à le compléter, quand il y manque certains rappels de données ou des propriétés générales. L'introduction des figures-clés doit donc se faire suffisamment tôt dans l'année de quatrième pour que les objectifs d'apprentissage concernant la démonstration soient atteints en fin d'année.

Les figures-clés sont associées aux propriétés pour lesquelles elles présentent un intérêt certain du point de vue des tracés minima (par exemple, triangle rectangle et cercle circonscrit). En revanche, pour le théorème de Pythagore, par exemple, nous estimons qu'il est préférable d'introduire d'autres connaissances comme le raisonnement par l'absurde, d'autant plus que la démarche est ici plutôt de type calculatoire.

Faire des mathématiques avec une figure

Tant qu'un élève n'a pas perçu clairement par un travail sur une figure la nature des arguments qui vont lui permettre d'affirmer qu'une propriété est vraie, il nous semble impossible de lui demander de développer ses arguments sous forme de texte. Nous cherchons donc à donner aux élèves des moyens adaptés de travail sur la figure. C'est pour atteindre ce but que nous avons introduit les idées précédentes. La difficulté est de leur donner toute leur efficacité en les engageant *toutes en même temps de manière coordonnée, avec l'objectif d'obtenir des élèves un travail rigoureux de déduction sur une figure*.

S'appuyer sur le codage pour raisonner sur les figures :

Il nous paraissait essentiel de donner aux élèves un moyen simple de raisonner sur la figure sans l'usage d'un langage sophistiqué. Nous avons retenu l'idée très classique du codage : des couleurs [8] sont utilisées pour les parallèles, un petit carré pour les angles droits, des petits traits pour les égalités de longueurs et pour les égalités d'angles. Notons que pour les parallèles, on rencontre plus souvent, dans la pratique de résolution de problème au début de la quatrième, des segments parallèles que des droites parallèles. Pour l'alignement, si on sait que trois points sont alignés, on colorie la droite qui les contient, en utilisant des couleurs différentes pour des directions différentes.

Ce codage va jouer plusieurs rôles :

Traduire les propriétés d'un énoncé de théorème

Nous avons déjà utilisé le codage pour construire les trois figures associées à un

8 Dans cet article les couleurs sont remplacées par des nuances de grisés (contraintes d'impression).

énoncé : la figure-clé et les figures représentant les prémisses et la conclusion.

Traduire les données d'un problème

Le codage permet de traduire les données de l'énoncé d'un problème sur la figure. II nécessite une lecture attentive du texte de l'énoncé. Parfois une donnée de l'énoncé doit être traduite en propriétés codables. Par exemple, milieu se traduit par un alignement et une égalité de segments, parallélogramme se traduit par des droites parallèles.

La pratique qui consiste à réécrire les données d'un énoncé sous forme de phrases ou encore en style télégraphique est, en comparaison, moins performante, car les élèves peuvent s'acquitter de cette tâche en s'appuyant sur des repères superficiels : on trouve un morceau de phrase, on le recopie en remplaçant éventuellement quelques mots par des symboles.

Raisonner sur la figure

Son troisième rôle, dans notre démarche, est de permettre un raisonnement sur la figure. Sur une figure où les données d'un problème sont déjà codées, on recherche des figures-clés. C'est cette recherche qui donne du sens au codage précédent et oriente le raisonnement. L'élève peut alors être amené à ajouter des éléments et des codages sur la figure et celle-ci devient progressivement un outil qu'il s'approprie.

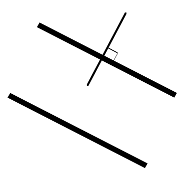
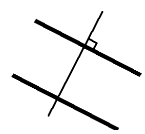
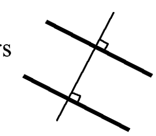
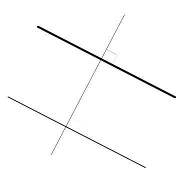
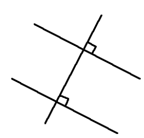
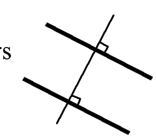
Introduire les figures-clés pour des propriétés déjà connues

L'introduction des figures-clés peut se faire à propos de propriétés et de théorèmes rencontrés en géométrie en sixième et cinquième. Ce sera une manière de les approfondir. Comme nous l'avons expliqué dans le premier paragraphe, aux énoncés choisis seront associées d'une part deux figures représentant les données et les conclusions, d'autre part une ou plusieurs figures-clés. Notons que tous les énoncés ne sont pas concernés. Par exemple les définitions des quadrilatères particuliers ainsi que leurs propriétés ne le sont pas, car, pour la plupart des élèves, elles ne semblent pas poser de difficultés particulières à ce niveau.

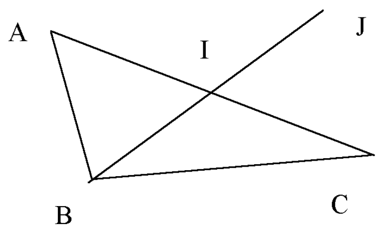
Ce travail (une ou deux semaines) peut se matérialiser par la réalisation d'une fiche « outil », où figurent les énoncés, les figures-clés associées et ce qu'elles permettent de démontrer. Elle est élaborée au fur et à mesure par le professeur avec parfois l'aide des élèves ; ceux-ci sont chargés de remplir certaines cases et s'approprient ainsi les liens entre énoncé, figure-clé, prémisses et conclusion du théorème. Voici (dans l'encadré de la page suivante) une possibilité de présentation de cette fiche en cours d'élaboration.

Choisir d'emblé des situations significatives

Dans beaucoup de manuels, la stratégie adoptée pour l'apprentissage de la démonstration propose de débuter par l'étude de situations très simples. Or il est clair que la déduction ne présente pas d'intérêt quand une figure est si simple que toutes les propriétés sont évidentes. Par exemple la situation suivante, qui se réduit pratiquement à une figure-clé, ne peut donner aucune motivation à un élève de développer une argumentation.

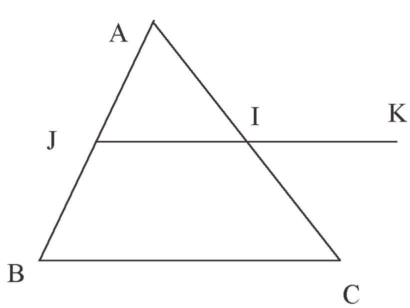
Figures-clés	Propriétés	Pour démontrer :
	Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Si  alors 	qu'un angle est droit.
	Si deux droites sont perpendiculaires à la même, alors elles sont parallèles entre elles. Si  alors 	que des droites sont parallèles.
	Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles, alors c'est un parallélogramme. Si alors	
	Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme. Si alors	
	Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même mesure alors c'est un parallélogramme. Si alors	
	Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même mesure alors c'est un parallélogramme. Si alors	

Soit ABC un triangle, I milieu de [A,C], J le symétrique de B par rapport à I. Montrer que AJCB est un parallélogramme.



Notre stratégie nous permet de démarrer les « raisonnements » sur une figure avec des situations pour lesquelles le repérage de la figure-clé est un véritable travail. Aussitôt après la réalisation de la fiche outil, nous proposons, par exemple, aux élèves **comme premier problème à résoudre** le problème suivant qui est d'ailleurs la propriété du cours « Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle coupe le troisième en son milieu. »

ABC est un triangle quelconque, I est le milieu de [AC]. On trace la parallèle à (BC) passant par I ; elle coupe [AB] en J. On veut montrer que J est le milieu de [AB]. Pour cela, on utilise K symétrique de J par rapport à I.



Ce problème peut être résolu à l'aide des propriétés du parallélogramme que nous venons de revoir. Pour l'élève, la première étape est de coder la figure à partir des données et de rechercher une figure-clé.

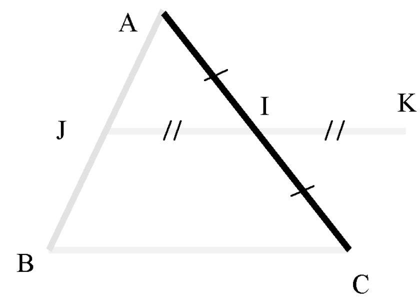
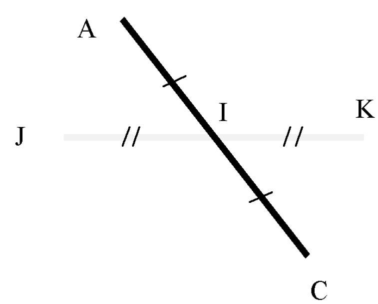


Figure codée

Il peut alors détecter une première figure-clé :

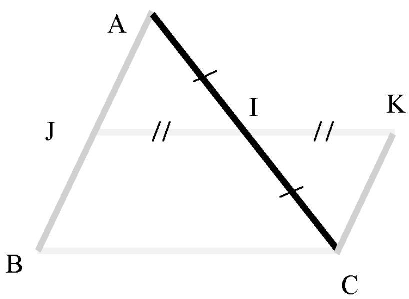


Première figure-clé

Au début il est important de demander à l'élève de l'extraire de la figure en nommant les extrémités des segments qui interviennent ; le professeur peut vite se rendre compte que ce n'est pas évident pour tous.

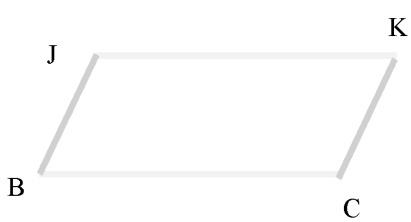
On lui associe alors la propriété correspondante, soit sous forme de texte, soit sous forme de schéma, et la figure peut alors s'enrichir de nouvelles propriétés.

Pour la deuxième étape, le professeur a prévu une deuxième figure enrichie des codages correspondants, car les nouvelles conclusions servent de données pour la nouvelle recherche et donc changent de statut.



Nouvelle figure codée

A ce stade, si un élève a omis de coder l'alignement B, J, A en donnant une couleur à la droite (AB), il peut arriver qu'il code seulement le parallélisme des segments [AJ] et [KC] au lieu de coder le parallélisme des droites (AJ) et (KC) ; il hésite à prolonger la couleur utilisée pour le côté [AJ] à la droite (AB). C'est une véritable difficulté. Le codage de l'alignement est une aide précieuse pour la surmonter.



Deuxième figure-clé

Il faut maintenant rechercher une seconde figure-clé. On extrait cette figure, en nommant les sommets du quadrilatère. De nouveau on demande à l'élève de lui associer la propriété correspondante.

Avec AJ = JB et A, J, B alignés, il peut alors conclure que J est le milieu de [AB].

Lorsque l'élève a fait tout ce travail, il est en mesure d'écrire les étapes de son raisonnement.

Écrire une démonstration

Pour qu'un élève joue vraiment le jeu d'écrire une démonstration, il faut que celle-ci soit, à ses yeux, un véritable texte qui ait pour objectif d'expliquer de manière précise ce qu'il a fait sur la figure et non un exercice d'imitation d'un texte satisfaisant à un canon. Voici les moyens mis en oeuvre pour atteindre ce but :

Attendre que le problème soit résolu avant d'aborder l'écriture d'un texte

Bien sûr pour un mathématicien expérimenté, et sans doute aussi pour des élèves en fin de scolarité, l'écriture d'une ébauche de démonstration est l'un des moyens de résoudre un problème de type « Montrer que ». Mais ce n'est évidemment pas le cas pour un débutant[9].

Une démonstration est un texte qui doit respecter des contraintes qui, pour beaucoup d'élèves n'ont rien de naturel. Elles ne deviennent familières et acceptables qu'après une assez longue pratique. Il est donc nécessaire, avant qu'un élève puisse se lancer dans l'écriture d'un texte qui explique ses déductions, que celles-ci soient déjà claires pour lui.

C'est pourquoi, dans la première étape, le travail se fait entièrement sur la figure

9 Raymond Duval avait déjà souligné cette idée dans [4] et J. Houdebine dans [9].

sans contrainte d'écriture de texte ; pour la deuxième étape, un texte très libre, dans l'esprit des narrations de recherche [10], est demandé à l'occasion d'une situation non évidente et après que la solution ait été trouvée sur la figure. Et enfin pendant la troisième étape, des contraintes du type : *citer les théorèmes concernés au cours de la déduction* sont imposées au texte. L'encadré « Partir de la conclusion » (cf. page suivante) illustre bien ces trois étapes.

Faire écrire des textes qui ont du sens au yeux de l'élève

Liberté de l'écriture : non aux textes stéréotypés

Une première idée est de laisser dans un premier temps beaucoup de liberté pour l'écriture [11]. Les mots de liaison, l'articulation du texte sont simplement soumis à des critères du type : est-ce du bon français, est-ce qu'un autre élève comprendra ? Ainsi le deuxième texte de l'encadré « Partir de la conclusion » sera considéré dans un premier temps comme tout à fait satisfaisant.

Peu à peu on cherchera à obtenir de véritables textes de démonstrations, mais en gardant toutes les libertés que ce type de texte permet : ordre de présentation des arguments, présence de sous-entendus, inclusions de remarques heuristiques, etc.

C'est la stratégie opposée que l'on voit privilégiée dans beaucoup de manuels qui proposent pendant tout le début de l'apprentissage des textes complètement stéréotypés : *je sais que, on a le théorème, j'en déduis*. Ces textes sont très loin de ce que peut produire un élève de manière naturelle et ce sera très difficile pour certains de se les approprier. Mais il sont aussi très loin de ce qu'on pourrait appeler les vraies démonstrations, c'est-à-dire aussi bien les textes produits par des élèves plus expérimentés que ceux produits par des mathématiciens. En d'autres termes, on voudrait apprendre aux élèves à écrire de vraies démonstrations, en leur montrant et en les incitant à écrire des textes qui n'y ressemblent pas ! De plus cette stratégie s'appuie sur l'idée dangereuse que l'on peut apprendre à écrire un texte structuré par simple imitation.

Écrire c'est réécrire

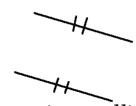
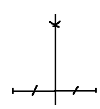
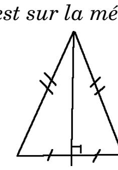
Écrire est une démarche complexe [12]. Et cette démarche comporte comme une étape essentielle la reprise d'un texte déjà écrit pour le modifier et lui donner toute sa force. L'idée serait de privilégier au cours des premières semaines d'apprentissage de la démonstration des écritures en plusieurs étapes : d'abord un texte très libre à partir du travail de résolution de problèmes sur la figure, puis un texte qui privilégie la présentation des déductions, enfin un texte conforme aux critères habituels des démonstrations : explicitation de toutes les propriétés, articulation très explicite de ces données pour faire apparaître l'organisation de la déduction.

Travailler à partir des textes des élèves

Dans la pratique nous faisons travailler les élèves sur des textes produits par eux. Par exemple, à l'occasion d'une correction, un élève lit son texte, tout le monde écoute et le professeur désigne un autre élève qui est chargé de lui mettre une note entre 0 et 10 en

10 Voir [2] ou [14].
11 Voir [9] et [14].
12 Voir par exemple [1], p. 183.

Partir de la conclusion

Énoncé	Copie d'élève *fig clef* 
ABC triangle quelconque, M est le milieu de [AB], N est le milieu de [AC]. On veut démontrer que (MN) est parallèle à (BC). Pour cela on place le point P symétrique du point M par rapport au point N.	*Si les diagonales d'un quadrilatère se coupe en leur milieu alors c'est parallélogramme* *fig clef*  *Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèle et de même mesure alors c'est un parallélogramme*
Tracer un quadrilatère OELM. Tracer les médiatrices des segments [OM] et [OE] : elles se coupent en I. Tracer les médiatrices des segments [ML] et [LE] : elles se coupent en J. Prouver que la droite (IJ) est la médiatrice du segment [ME].	(IJ) *est la médiatrice de* [ME] *car* I *et* J *sont équidistants de* N *et de* E. J *est le point d'intersection des médiatrices des segments* [ML] *et* [LE], I *est le point d'intersection des médiatrices de* [OE] *et* [OM]. *Si un point est sur la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment et si il est équidistant des extrémités d'un segment alors il est sur la médiatrice de ce segment* *Si*  *alors* 
[AC] est un diamètre du cercle de centre O. ABC est un triangle isocèle en C. (AB) coupe le cercle en F et (BC) le coupe en E. Démontrer toutes les propriétés que vous pouvez.	AFC *est rectangle car si un triangle inscrit dans un cercle a un côté diamètre* [AC] *du cercle* C, O *est alors le milieu de l'hypoténuse donc* $\widehat{AFC}$ *droit. Si un triangle est inscrit dans un cercle et que un de ses côtés est un diamètre alors ce triangle est rectangle, même chose pour* AEC, EBC *et* ABF. ABC *est isocèle et* F *sa hauteur donc dans un triangle isocèle la hauteur issue du sommet principal est aussi la médiatrice et la médiane de la base.*

Voici trois copies d'un même élève. La première correspond à la solution du premier problème avec la consigne « Trouver les figures-clés », la seconde se situe environ un mois après et la troisième, deux mois.

C'est un élève qui éprouve des difficultés pour rédiger un texte démonstratif. Sur la première copie, il fait comprendre qu'il sait détecter les figures-clés et qu'il connaît les énoncés des propriétés associées à ces figures. Dans la seconde il rédige un texte proche de sa démarche et énonce les deux propriétés sans les intégrer vraiment parce que sans doute cela reste pour lui seulement une contrainte du professeur. Dans la troisième copie, il se trompe dans la désignation des triangles rectangles et il omet de noter que les deux derniers triangles ne sont pas rectangles pour les mêmes raisons que les premiers.

Comme le montre la présence des « car », il raisonne à partir de la conclusion et le sens des schémas est sans doute une gène. Cependant, on peut penser que les figures-clés lui sont utiles : il n'a aucun mal dans la première copie à les repérer ; le dessin en bas de la deuxième copie semble être là argumentant. Les autres élèves s'ils ne sont pas d'accord interviennent alors ; puis le professeur donne son avis. Ou encore nous demandons aux élèves, dans un travail de groupe, d'améliorer chacun des textes produits par les membres du groupe ; comme les rôles tournent, chaque élève accepte assez volontiers de reprendre son texte avec le regard des autres ; il est amené à développer ses arguments. Les textes de l'encadré « Des copies à ne pas rejeter » peuvent faire l'objet d'un tel travail.

Pour éviter d'imposer aux élèves des stéréotypes, nous ne donnons pas, *a priori*, le texte du professeur. A chaque fois que cela est possible, nous proposons comme corrigé d'une démonstration une ou plusieurs copies d'élèves (cf. encadré « Des copies d'élèves qui servent de corrigé »).

L'avantage de cette démarche est multiple :
— Des textes variés vont être proposés par les élèves et l'étude de ceux-ci leur permet de mieux comprendre les véritables contraintes imposées aux textes de démonstration ; la plupart du temps, chacune des fautes ou des maladresses d'un texte est repérée par au moins un élève.
— L'attention des élèves est bien plus grande lorsqu'il s'agit d'étudier un texte produit par un autre élève que lorsqu'il s'agit d'étudier une démonstration de l'enseignant. Il est plus intéressant d'argumenter sur la qualité d'un tel texte que de s'attarder sur un « truc » qui est forcément bon.
— Plus les textes sont variés, plus l'élève pourra par la suite, au cours de sa scolarité, s'adapter à d'autres types de démonstrations.

Comprendre les textes des élèves

Ce qui importe c'est que l'élève commence à écrire et que cela ait du sens pour lui. Les premiers textes qu'il va produire vont être le plus souvent très différents de ce qu'attend l'enseignant. Par exemple, dans notre démarche, l'aspect descendant (on part des données et on va vers la conclusion) est privilégié ; or certains élèves vont choisir de partir de la conclusion. D'autres vont faire des allers et retours entre ce qu'ils savent démontrer et la question qui est posée ; ils écrivent à partir de ce qui les a mis sur la voie. Le travail du professeur n'est pas alors d'imposer à l'élève un texte standard ; il est de rechercher **dans le texte** de l'élève des « ingrédients » utiles, de tenter d'y retrouver la démarche sous-jacente et d'aider l'élève à améliorer son texte (cf. fiche « Des copies à ne pas rejeter »).

Dans la pratique cela suppose que le professeur relève beaucoup de textes d'élèves pour pouvoir suivre au mieux chaque élève. Il nous paraît important de les évaluer explicitement, même si cette évaluation n'est pas prise en compte dans les notations définitives, car c'est un moyen essentiel pour l'élève de savoir s'il progresse dans le sens des objectifs choisis et pour l'enseignant de repérer la manière dont l'élève a perçu le contrat. La logique qui se dégage des textes de l'élève nous permet de savoir s'il utilise l'outil proposé ou si c'est pour lui une gêne ; par exemple, s'il raisonne à partir de la question il faudra qu'il utilise les schémas de propriété à l'envers (cf. encadré « Partir de la conclusion »).

Pour aider l'élève dans l'analyse de ses propres textes, plutôt que d'utiliser des outils extérieurs au texte (les réseaux suggérés par Raymond Duval, les tableaux) on demande à l'élève de souligner de trois couleurs différentes les parties du texte correspondant à l'utilisation d'une donnée, au rappel d'une propriété générale, ou à l'annonce d'une conclusion. L'absence d'une couleur est alors très signi-

Des copies d'élèves qui servent de corrigé

Énoncé	Copie d'élève [13]
Soit (C) un cercle de centre O. Soient C et A deux points de ce cercle et D le point diamétralement opposé à C. Soit (C') le cercle de diamètre [OC] et E le point d'intersection de (AC) avec ce cercle. Montrer que E est milieu de [AC].	*Comme* (CO) *diamètre du cercle* (C'), *comme* E *point du cercle* (C') *et comme quand un triangle est inscrit dans un cercle et que l'un de ses côtés est un diamètre alors se triangle est rectangle donc* COE *est un triangle rectangle en* E. *Comme* $\widehat{E}$ *est droit alors* EO ⊥ CA. *Comme* EO ⊥ CA *donc* EO *hauteur du triangle* COA. *Comme* C *et* A *sont des points du cercles alors* (CO) *et* (CA) *sont des rayons donc* CO = CA. *Comme* CO = CA, *comme* (EO) *hauteur de* COA *et Comme dans un triangle isocèle la hauteur issue du sommet principal est aussi la médiatrice de la base donc* EO *médiatrice de* (CA) *donc* CE = EA *donc* E *milieu de* [AC].
	ADC *est un triangle inscrit dans le cercle* C. *Un de ses côtés est un diamètre de* C. CEO *est un triangle inscrit dans le cercle* C'. *Un de ses côtés est un diamètre de* C' → *Si un triangle est inscrit dans un cercle et que un de ses côtés est un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle* *Donc* [CA] ⊥ [AD] *et* [CA] ⊥ [EO]. → *Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.* *Donc* [AD] // [EO]. [EO] ⊥ [CA], [AD] // [EO] *et* O *est le milieu de* [CD]. → *Dans un triangle, si une droite est parallèle à un côté et coupe un deuxième côté en son milieu alors elle coupe le troisième côté en son milieu.*

Plutôt que de donner comme corrigé la démonstration du professeur, nous donnons des démonstrations d'élèves, chaque fois que cela est possible. Cela encourage les élèves à rédiger avec soin pour être l'auteur d'une copie donnée en exemple. Si un élève en difficulté rédige une démonstration sans faute, choisir sa copie est un puissant encouragement. En outre, cela permet de faire apparaître aussi bien la diversité des solutions que la diversité des styles de rédaction possible.

On observe, par exemple, que dans la première copie le passage de l'angle droit à la perpendiculaire (Comme E est droit, alors (EO) ⊥ (CA)) est explicité ; il ne l'est pas dans la deuxième. De même la première énonce explicitement la conclusion finale, la seconde ne le fait pas.

Le second texte est intéressant dans sa rédaction car la propriété s'applique à deux triangles différents et l'élève évite les répétitions inutiles. Les propriétés utilisées sont mises en évidence par une flèche en début de ligne et les pas de démonstration sont bien marqués.

Notons qu'au début de la quatrième on valide des copies imparfaites (l'alignement de A, E et C n'est pas évoqué dans la première copie, [EO] ⊥ [CA] est inutile dans la deuxième copie).

13 Pour des raisons de lisibilité les copies ont été dactylographiées.

ficative. Ainsi un élève peut constater que son texte se réduit à une succession de théorèmes sans articulation entre eux, ou au contraire qu'il ne cite jamais les théorèmes concernés.

Faire comprendre les énoncés de théorèmes

On constate que, dans les rédactions des premières démonstrations des élèves, l'une des insuffisances les plus persistantes concerne les énoncés des propriétés utilisées (cf. encadré « Des copies à ne pas rejeter »). Les élèves, conscients de cette difficulté, n'hésitent pas à dessiner dans la marge la figure-clé qui leur a servi, comme pour indiquer qu'ils ont bien vu la bonne propriété même s'ils ne sont pas capables de l'énoncer correctement.

En fait, nous pensons que les difficultés des élèves concernant la compréhension de l'organisation des énoncés de théorèmes ou de définitions sont plus importantes que celles concernant les démonstrations. Ces énoncés nous semblent, en effet, plus étrangers à la pratique langagière habituelle des élèves que les discours argumentatifs que sont, d'une certaine manière, les démonstrations. Nous pensons que ces énoncés ne prennent véritablement leur sens qu'à travers la résolution de problèmes.

Dans notre démarche, deux étapes vont être utiles pour surmonter cette difficulté : d'abord l'association à l'énoncé d'une figure-clé et d'un schéma composé de deux figures qui soulignent l'existence de prémisses et d'une conclusion. Puis, au cours des résolutions successives de problèmes, de nombreux aller et retour se font qui clarifient le sens de l'énoncé, font mieux saisir sa structure syntaxique et aident ainsi à l'écriture de nouveaux textes. Il nous semble tout à fait essentiel d'exiger, dans cette deuxième étape, l'énoncé de la propriété générale. Nous avons constaté, en effet, qu'un élève peut être capable d'écrire : « M est le milieu de [BC], (MN) est parallèle à (AC), donc N est le milieu de [AB] », tout en étant incapable d'écrire l'énoncé général : « *Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, elle passe par le milieu du troisième côté* ».

Changer le contrat didactique

Quel que soit le moment choisi pour introduire l'idée d'une démarche déductive, il ne suffira pas d'exprimer clairement ce nouveau contrat pour que tous les élèves y souscrivent. Pour beaucoup d'élèves de sixième et de cinquième, les petits textes que l'enseignant demande d'écrire restent des exercices de style et non une manière d'exprimer les étapes de son propre raisonnement. Quelles que soient les indications des programmes, il nous semble que c'est en quatrième qu'il faut réussir à clarifier le contrat de la démonstration **pour l'ensemble des élèves**. En effet, cette clarification doit s'appuyer sur des situations mathématiques suffisamment complexes et sur une bonne maîtrise de l'écriture. Nous allons expliquer comment l'introduction des figures-clés nous facilite cette étape.

Apprendre à raisonner sur une figure

Commencer par un jeu

Dans la première étape de notre démarche, l'élève commence par un jeu de reconnaissance de sous-figures ; de même qu'on cherche, dans les images d'Épinal, le personnage caché, on cherche ici où se cache une figure-clé.

Des copies à ne pas rejeter

Énoncé	Copie d'élève [14]
Soit ABC un triangle équilatéral et BCD un triangle isocèle de sommet principal D. Montrer que (AD) est perpendiculaire à (BC).	*Comme* ABC *est un triangle équilatéral donc* AB = BC = AC *Comme* BCD *est un triangle isocèle en sont sommet principal donc* BD = CD *Si deux point sont sur les extrémités d'un segment alors il sont liées et elle coupe la base en son milieu donc se sera sa médiatrice.* *Comme les points* D *et* A *sont les extrémités du segment* [BC] *alors la médiatrice coupera le segment* [BC] *en son milieu.* *Donc* (AD) *est perpendiculaire à* [BC].
	Comme le triangle ABC *est équilatéral et que le triangle* BCD *est isocèle.* *Dans le triangle* ABC : ABC *est équilatéral donc* A *est à égale distance de* B *et de* C *alors on peut dire que* A *est équidistant.* *Dans le triangle* BCD : BCD *est isocèle donc* D *est à égale distance de* B *et de* C *alors il est lui aussi équidistant.* *Donc si deux points sont à égale distance d'une même droite alors le segment qui passe par ces deux même points coupe cette droite perpendiculairement alors c'est une médiatrice*
	BD = CD *Si deux points sont équidistants d'un même point alors* BA = CA *ce point est sur la médiatrice donc* D *est sur la médiatrice* *Si deux points sont équidistants d'un même point alors ce point est sur la médiatrice donc* A *est sur la médiatrice* DA *est la médiatrice donc* [DA] *perpendiculaire à* [BC]

Une étude superficielle de ces trois copies peut conduire à les rejeter. Pour la première copie, pourtant, on peut noter que les premières lignes sont satisfaisantes. L'énoncé de la propriété est bien sûr désastreux ; cela ne fait que renforcer l'idée que l'une des plus grandes difficultés des élèves débutant la démonstration est de retrouver un énoncé correct pour la propriété à laquelle ils pensent. Si on écrit : « équidistant de » au lieu de « sur les », le texte devient déjà plus cohérent, « ils sont liés » semblant vouloir dire qu'ils sont sur la même droite. Il est alors nécessaire de questionner l'élève et de travailler sur le sens des mots qu'elle emploie et sur ce qu'elle veut exprimer. Le paragraphe suivant est cohérent avec le précédent : il faudrait lire « D et A sont équidistants de B et de C ». Dans ce texte les données sont traduites de manière pertinente en terme de distance, les points A et D sont repérés ; la figure-clé détectée peut alors être un bon support pour travailler sur l'énoncé de la propriété. Il est vrai que le terme équidistant pose problème, cela se voit aussi dans les deux copies suivantes. Une bonne discussion sur le sujet peut faire faire à ces élèves un progrès spectaculaire. Dans la deuxième copie la représentation de la situation est structurée à partir du segment [BC] : il coupe la droite perpendiculairement. Un travail approfondi est à faire sur l'énoncé et ce qu'il implique comme prémisses. Pour la troisième copie, la présence des égalités en début de copie laisse à penser qu'il a compris la solution du problème même s'il n'est pas capable de bien la rédiger. L'organisation générale du texte va dans le même sens. Mais on constate là encore de grosses difficultés à produire l'énoncé d'une propriété et un usage plus qu'approximatif du mot équidistant.

14 Pour des raisons de lisibilité les copies ont été dactylographiées.

C'est avec un langage très simple que l'on fait comprendre les règles de ce jeu aux élèves. De plus comme il ne comporte pas d'étapes fastidieuses comme l'écriture, la plupart des élèves s'y engagent sans réticence.

Des théorèmes véritables outils

Très vite, l'élève sent que le plaisir est d'avancer dans la solution du problème et que pour cela il lui faut les connaissances, c'est-à-dire les théorèmes associés aux figures-clés et en particulier leurs conclusions ; les figures associées aux théorèmes présentent ces conclusions de sorte qu'il est facile de savoir les codages que l'on peut ajouter légitimement à la figure. Pour mieux faire comprendre ce contrat nous utilisons des formulations variées : par exemple, à propos de la figure-clé on peut expliquer qu'il s'agit de la reconnaître comme sous-figure. Mais il peut être très utile d'ajouter des commentaires du genre : c'est une clé, elle peut ouvrir une porte (en référence au schéma associé à un théorème), mais cela ne suffit pas, il faut aussi faire la lumière (pour un élève qui par exemple conclut à un parallélogramme sans se servir de ses propriétés).

Dans le cadre de ce jeu sur les figures, les théorèmes ne sont pas des énoncés que l'on place dans le texte en respectant des règles imposées par l'enseignant. Ils sont les outils qui permettent de travailler sur la figure. Cela explique en particulier que l'on n'observe pratiquement pas de confusion entre un théorème et sa réciproque.

Dans la pratique les figures-clés deviennent très efficaces quand un élève lisant un énoncé de problème, trace la figure, code les données et, à mesure qu'il aperçoit des sous-figures qui sont des figures-clés, applique le théorème correspondant en ajoutant les codages adéquats. Quand il a fini de lire l'énoncé, il n'est pas rare que l'élève ait fait l'essentiel du travail de résolution. Nous favorisons cette démarche qui nous semble correspondre à ce que fait l'expert devant un problème de géométrie [15].

Modifier la vision et la « force » de la figure

Pour beaucoup d'élèves en difficulté, l'échec dans la résolution d'un problème de géométrie est lié à l'angoisse d'être devant une tâche globale et complexe : découvrir le chemin qui fait passer des données à la conclusion contenue dans la question qui est posée. On ne sait pas quoi faire de la figure. La recherche des figures-clés est un puissant moyen de faire disparaître ce stress : après un travail sur la mise au point de figures-clés et de schémas pour les énoncés concernés, coder la figure avec les données, puis extraire une sous-figure qui soit une figure-clé sont des tâches à la portée de tous. La recherche peut commencer sans qu'on ait une idée du lien entre les données et la question. Dès que l'on a repéré une figure-clé, un sentiment de réussite apparaît.

Ce travail, qui concerne essentiellement la figure, organise dans l'esprit de l'élève les propriétés de celle-ci. La vision de la figure n'est plus simplement perceptive. Elle est d'une certaine manière discursive [16], même si un texte n'est pas encore écrit. Cela est d'autant plus flagrant que l'élève cherche des figures-clés à mesure qu'il ajoute des codages.

La recherche de figures-clés est également utile pour affiner la lecture d'une figu-

15 Pour une réflexion sur la démarche de l'expert, voir, par exemple, le paragraphe « Radioscopie de l'activité géométrique » dans [11].
16 Voir [3].

re : elle apprend à « voir » un quadrilatère dont les côtés ne sont pas tracés, à voir des égalités de distance alors que les segments correspondants ne sont pas tracés, à voir la droite qui supporte un segment.

Donner du sens à la démonstration

La figure objet du raisonnement

On observe fréquemment des élèves qui, à partir d'un énoncé de problème, construisent la figure et ne la regardent plus du tout au moment de répondre à une question du type « démontrer que ». Pour ces élèves il y a une coupure entre un travail sur la figure et l'écriture d'une « solution ». Cela ne se produit pas dans notre stratégie où le texte est, dans le contrat didactique, fortement lié au travail sur la figure.

Faire découvrir l'importance des structures des textes

Cette découverte ne se fait pas par un travail spécifique. Elle résulte de l'ensemble de la démarche qui met en évidence d'une part l'organisation des énoncés de théorèmes : prémisses et conclusion, d'autre part l'organisation déductive de la démonstration.

Privilégier le sens

Pour parler à un élève de sa démonstration, nous privilégions des manières de s'exprimer proches du sens plutôt que d'insister sur la forme ou les règles. Par exemple, plutôt que de dire à un élève qui n'a mis aucun énoncé de théorème dans sa démonstration « il manque les théorèmes » nous préférons dire « je ne connais pas tes arguments ». De même pour illustrer la notion d'argument ou l'idée de théorème réciproque, nous demandons aux élèves d'en proposer ou nous prenons des exemples dans des domaines familiers aux élèves, éventuellement en dehors des mathématiques. Ainsi pour l'énoncé « Si un point est le milieu d'un segment, il est à égale distance des extrémités de ce segment » les élèves comprennent aisément que la réciproque est fausse.

Conclusion

Notre démarche veut être une illustration de l'idée que la démonstration n'est rien d'autre qu'une confrontation d'un travail sur une figure et de l'écriture d'un texte. Mais il faut toute la figure et tout le texte. Toute la figure cela signifie la possibilité de résoudre des problèmes en ne travaillant que sur la figure, sans le secours d'un texte ; les figures-clés sont ici un outil essentiel. Tout le texte signifie un véritable travail d'écriture de textes complexes et riches, exprimant vraiment le travail fait sur la figure.

Bibliographie

[1] E. Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J. Houdebine, C. Laborde, *Produire et lire des textes de démonstration*, Éditions Ellipses, Paris, 2001.
[2] N. Bellard et M. Lewillion, *Schémas pour la compréhension des théorèmes en classe de 4ème*, Produire et lire des textes de démonstration, Éditions Ellipses, Paris, 2001.
[3] R. Duval, *Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence,* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol 1, p. 57-74, IREM de Strasbourg, 1988.
[4] R. Duval et M.-A. Egret ; *L'organisation déductive du discours*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol 2, p. 41-64, IREM de Strasbourg, 1989.
[5] M.-A. Egret, *Proposition pour introduire des élèves à la démonstration*, Publications de l'Institut de Mathématiques de Rennes, Fascicule 5, 1989-1990.
[6] M.-A. Egret, D. Guin, G. Kuntz, G. Métivier, N. Vogel, *Réflexions sur l'apprentissage de la démonstration en géométrie de 4ème autour d'un logiciel*, L'ouvert, N° 52, p. 32-40, IREM de Strasbourg, 1988.
[7] M.-A. Egret et R. Duval, *Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol 2, p. 25-40, IREM de Strasbourg, 1989.
[8] D. Guin, *Réflexions sur les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol 2, p. 89-109, IREM de Strasbourg, 1989.
[9] J. Houdebine, *Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question,* Repères IREM, N° 1, Topiques Éditions, Pont à Mousson, 1990.
[10] J. Houdebine, *La démonstration ; écrire des mathématiques au collège et au lycée*, Editions Hachette, Paris, 1998.
[11] G. Kuntz, *De l'utilité d'une formation mathématique pour la vie économique et sociale*, Bulletin de l'APMEP, N° 452, p. 398-417, 2004.
[12] L. Mesquita et J. C. Rauscher, *Sur une approche d'apprentissage de la démonstration*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol 1, p. 95-109, IREM de Strasbourg, 1988.
[13] R. Noirfalise, *Contribution à l'étude didactique de la démonstration,* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 13, p. 229-256, 1993.
[14] M. Sauter, *L'écrit en mathématiques, analyses de narrations de recherche d'élèves*, IREM de Montpellier, 1998.