LE LIVRE COMPLET EN ALGEBRE D'ABU KAMIL

Odile KOUTEYNIKOFF
Groupe M.:A.T.H. Irem de Paris VII

Résumé : *Abu Kamil, à la jonction des 9ème et 10ème siècles, est un maillon important de la chaîne de développement et de diffusion de sa discipline, à la fois fidèle à son prédécesseur al-Khwarizmi, le fondateur de l'algèbre, et influent sur ses propres successeurs. Sa rigueur et les avancées théoriques qu'on lui doit ont été déterminantes pour l'élaboration de l'algèbre, au moment où elle émerge des disciplines antérieurement établies que sont l'arithmétique et la géométrie.*

Il n'est pas possible de parler du mathématicien arabe Abu Kamil Shuja Ibn Aslam Ibn Muhammad (~850 ~930) sans évoquer son prédécesseur illustre, Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi (~780 ~850), en qui Abu Kamil lui-même reconnaît le fondateur de l'algèbre.

Originaire d'Asie centrale, al-Khwarizmi a été mathématicien et astronome à la Maison de la Sagesse de Bagdad, sous le règne du Khalife al-Ma'mun (813–833). L'ouvrage pour lequel il est célèbre, *L'abrégé du calcul par les procédés du jabr* (restauration) *et de la muqabala* (réduction) [3], peut être considéré comme l'acte de naissance de l'algèbre. Deux raisons à cela : l'intérêt propre de son contenu et aussi l'intérêt qu'y portent les contemporains et successeurs immédiats d'al-Khwarizmi, qui étudient et commentent son traité. Parmi eux, Abd al Hamid Ibn Wasi Ibn Turk al Jili, contemporain, Thabit Ibn Qurra, très grand mathématicien mort en 901, Sinan Ibn al-Fath, et Abu Kamil donc, surnommé le calculateur égyptien, sans qu'aucune information biographique le concernant ne puisse aujourd'hui être attestée.

Dans son livre intitulé *Le catalogue* [4] le bibliographe de Bagdad, Muhammad Ibn an-Nadim, mort en 990, attribue à Abu Kamil un grand nombre d'ouvrages, mais peu d'entre eux ont été retrouvés à l'heure actuelle :

Le livre sur l'arpentage et la géométrie [15] traite de nombreuses questions pratiques, de calcul ou de géométrie.

Le Livre sur les choses curieuses en calcul [2] est consacré aux systèmes d'équations. Six problèmes y sont traités, mais dans une perspective qui dépasse le simple exposé des algorithmes de résolution puisqu'il s'agit, pour l'auteur, de montrer l'existence des systèmes impossibles, de ceux ayant une et une seule solution et, enfin, de ceux qui peuvent avoir plusieurs solutions [6, p. 271].

Le livre complet en algèbre [1] est d'une grande importance historique et théorique puisque c'est un commentaire et aussi un prolongement du traité d'al-Khwarizmi. Il comporte trois parties distinctes ou livres, inégalement diffusées.

Le livre III présente un ensemble de trente-huit équations ou systèmes d'équations du premier ou du second degré, dont le second membre est toujours un carré [16]. La forme de ces problèmes fait penser au contenu des *Arithmétiques* de Diophante dont la traduction en arabe par Qusta Ibn Luqa, mort en 910, est contemporaine des travaux d'Abu Kamil. On ignore si Abu Kamil a eu connaissance des *Arithmétiques*. Il aborde ses problèmes « d'analyse indéterminée » comme des problèmes d'algèbre. Les vingt-cinq premiers problèmes, dont la formulation moderne se ramène à l'écriture d'une équation à deux inconnues, relèvent d'un même groupe, et Abu Kamil énonce une condition nécessaire et suffisante pour qu'ils admettent des solutions rationnelles positives. Les treize problèmes suivants sont également susceptibles d'une formulation moderne unique par un système de deux équations à trois inconnues et Abu Kamil en donne méthodiquement des solutions particulières. On trouve aussi un système de quatre équations à quatre inconnues, trente-neuvième problème qui semble indépendant des précédents. [1]

1 D'après un exposé de Roshdi Rashed pour le séminaire sur l'Histoire de l'algèbre du CHSPAM, 2002-2003.

Les livres I et II ont fait l'objet de traductions et d'études plus nombreuses que le livre III. On dispose, comme pour *Le Livre sur les choses curieuses en calcul*, à la fois d'un texte en latin, qui daterait du treizième siècle au plus tard, et d'un texte en hébreu, écrit en 1454 par Angelo Mordekhai Finzi, astronome, traducteur et commentateur de Mantoue, dont les travaux sont représentatifs de la littérature mathématique hébraïque dans l'Italie du XVème siècle. L'existence de ces traductions a été déterminante pour la diffusion de la discipline.

Le livre II, *Sur le pentagone et le décagone* [9], [13], est consacré au traitement numérique de problèmes géométriques relatifs aux pentagones et aux décagones réguliers. Cette entrée en « géométrie analytique » semble attachée à des démarches précises que l'on trouve au livre I.

Le livre I [8], [14], qui va retenir plus particulièrement notre attention, se présente comme un traité sur la résolution des équations du second degré et d'équations s'y ramenant. Abu Kamil décrit des algorithmes généraux de résolution des équations en les appliquant à des exemples numériques canoniques et il donne, de toutes les règles qu'il explique, des démonstrations géométriques qui s'appuient sur les *Eléments* d'Euclide. Il résout aussi soixante-neuf problèmes dont certains sont repris des quarante problèmes d'al-Khwarizmi, mais dont beaucoup requièrent une habileté technique et une maîtrise théorique plus avancées. Un aspect important du travail présenté ici consistera donc à tenter de distinguer, des compétences devenues classiques qu'Abu Kamil tiendrait de ses prédécesseurs, celles dont il serait l'auteur ou le promoteur efficace.

Nous allons consacrer la première partie de notre étude à l'exposé des règles décrites par Abu Kamil pour la résolution des équations du second degré ou équations quadratiques. Rappelons qu'il s'agit toujours de résoudre des équations à coefficients tous positifs, dont on ne peut imaginer dans le contexte de l'époque qu'elles aient des racines autres que positives. La chose la plus importante à noter dès maintenant est sans doute qu'Abu Kamil donne pour les équations quadratiques complètes, outre les algorithmes de calcul des racines que l'on trouve déjà chez al-Khwarizmi, des règles d'obtention directe des carrés des racines.

Dans une deuxième partie volontairement rapide, nous signalerons le soin avec lequel Abu Kamil explicite et valide les règles de multiplication des monômes et des binômes, sommes ou différences, comportant des indéterminées. Nous noterons également la précision avec laquelle il énonce et justifie les règles opératoires sur les nombres irrationnels. Ce souci théorique de recenser et de fonder les règles de l'algèbre fournit aussi un outil puissant pour ramener la résolution d'équations de degrés élevés ou de systèmes comportant plusieurs inconnues à la résolution d'équations quadratiques ; et ceci même si les calculs conduisent à des extractions de racines carrées, ou de racines de racines, d'expressions comportant ou non des indéterminées.

Il restera dans une troisième partie à examiner quelques problèmes, choisis parmi les soixante-neuf du traité d'Abu Kamil, pour l'intérêt des justifications géométriques qui accompagnent leur résolution numérique, ou pour la beauté technique de cette résolution, ou pour la diversité des méthodes auxquelles ils donnent lieu, aucun critère n'excluant aucun des autres.

Rappelons que l'écriture d'Abu Kamil est entièrement rhétorique et que l'écriture symbolique à laquelle nous allons recourir, parce qu'elle nous est devenue nécessaire, est tout à fait anachronique.

Les algorithmes de résolution et leurs validations

Aucune des traductions dont nous disposons aujourd'hui ne comportant la préface de l'auteur, nous entrons directement dans le vif du sujet, en suivant de près le texte de Levey [8]. Pour ne pas abuser de citations en anglais encombrantes et pour éviter de traduire en français un texte anglais qui n'est sans doute pas irréprochable, nous userons fréquemment de la paraphrase.

Quelques extraits du texte de Levey sont donnés en annexe.

Abu Kamil rappelle que, conformément à ce que dit al-Khwarizmi, les objets de l'algèbre se classent en trois catégories : les racines (pour nous bx ou x), les carrés (pour nous ax^2 ou x^2), et les nombres (pour nous c). Il précise que la racine, qui peut être unité, nombre plus grand que 1, fraction de l'unité ou tout autre nombre, se multiplie par elle-même, que le carré, qui peut être nombre entier ou nombre fractionnaire, est le produit de la racine par elle-même et que le nombre, qui n'est ni racine ni carré, est rapporté à une unité liée au problème. En égalant deux catégories entre elles ou en égalant une catégorie aux deux autres, on obtient six formes d'équations (de degré inférieur ou égal à deux) à coefficients tous positifs, qui donnent lieu chacune à l'énoncé d'une règle de résolution propre.

Ce sont, en écriture symbolique actuelle, les trois équations incomplètes et les trois équations quadratiques à trois termes, ainsi classées par Abu Kamil :

[1] $ax^2 = bx$ [2] $ax^2 = c$

[3] $bx = c$ [4] $ax^2 + bx = c$

[5] $ax^2 + c = bx$ [6] $bx + c = ax^2$

La première équation résolue par Abu Kamil, comme par al-Khwarizmi, est : $x^2 = 5x$.

Contrairement à son maître qui ne soulève pas cette question théorique au début de son traité, Abu Kamil manifeste d'entrée le souci de rigueur qui le caractérise en tentant d'expliquer « pourquoi » la racine est 5. Il avance d'abord des arguments de type algébrique :

> *For the square which is equal to the roots, it is as if one says that the square equals 5 roots because the square is equal to 5 of its roots. This is since the root of the square is always according to the sum of the roots of its square. Here it is 5. The square is 25; it is equal to 5 of its roots.* [8, p. 28]

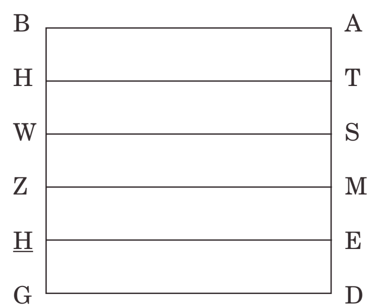
Ce que l'on peut peut-être expliciter ainsi, en anticipant un peu sur l'éclairage géométrique qui suit :

$$x \times x = x + x + x + x + x =$$

$$= 1x + 1x + 1x + 1x + 1x =$$

$$= (1+1+1+1+1) \times x \text{ donc } x = 5$$

Abu Kamil complète en effet ces premières explications par une « démonstration géométrique ». Ne disposant que de la géométrie pour convaincre à cette époque où, on va le voir, les règles de l'algèbre s'extraient de celles de l'arithmétique, et souhaitant justifier tous les gestes reproductibles, il procèdera ainsi tout au long de son ouvrage.



> *Further I shall explain what the root of the square is according to the total of the roots. I shall base the explanation on this question. For example, I construct the quadrate as a square surface ABGD. Its sides are AB, BG, GD, DA. Each one of its sides multiplied by a unit of the total length of this surface is a root of this unit surface. The result of the product of AB by a unit, namely line BH* [i.e. the unit length], *is the surface AH. It is a root of AG which is [divided] into five equal parts— the surfaces of AH, TW, SZ, MH, EG. The line BG is 5 and is the root of the square; the square is 25. This is what one wished to explain.* [8, p. 29-30]

Abu Kamil attire ensuite l'attention sur la nécessité de se ramener toujours, par multiplication ou par division, à une équation dont le carré ait le coefficient 1. Il le rappellera systématiquement pour chacun des six cas.

Il présente rapidement les cas [2] et [3] avant de passer à la résolution des équations trinômes. Sa méthode de travail est peu différente de celle d'al-Khwarizmi dont il reprend les exemples numériques :

$$1x^2 + 10x = 39$$

$$1x^2 + 21 = 10x$$

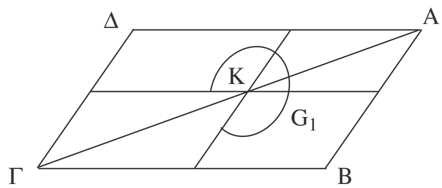
$$3x + 4 = 1x^2$$

Il s'agit d'expliquer les règles de calcul correspondantes en les appliquant pas à pas aux exemples traités et d'en donner ensuite des démonstrations géométriques. La méthode numérique tire sa légitimité de ce que les algorithmes sont attachés à la forme des équations et non aux valeurs des coefficients. Ainsi les exemples numériques traités deviennent canoniques à force d'être repris, et les justifications géométriques elles-mêmes sont générales du fait qu'elles sont « exemplaires ».

Une spécificité d'Abu Kamil que nous avons déjà mentionnée tient au fait qu'il donne pour chacune des trois équations deux algorithmes de résolution numérique, celui qui fournit les racines, qui était déjà connu des mathématiciens babyloniens, qui est exposé par al-Khwarizmi, et qui est de fait encore utilisé aujourd'hui, sous le couvert des formules que l'algèbre symbolique a générées, et un second qui donne directement les carrés des racines. Abu Kamil donne des validations géométriques pour chacune des deux procédures numériques et il fait explicitement référence au livre II des *Eléments* d'Euclide, contrairement à al-Khwarizmi, dont il est difficile de savoir s'il connaît ou non le géomètre grec.

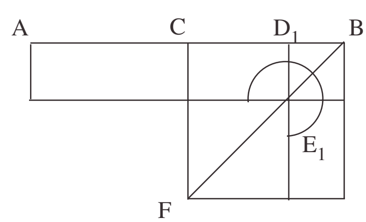
Nous rappelons ici la teneur des propositions euclidiennes de référence. Leur explicitation est facilitée par l'utilisation du gnomon, qu'Euclide définit ainsi :

Que dans tout parallélogramme, l'un quelconque des parallélogrammes décrits autour de la diagonale avec les deux compléments soit appelé gnomon.
[10, p. 41 : définition II, 2]



gnomon G_1 =
parallélog. AK + complt KΔ + complt KB
ou gnomon G_2 =
parallélog. KΓ + complt KΔ + complt KB

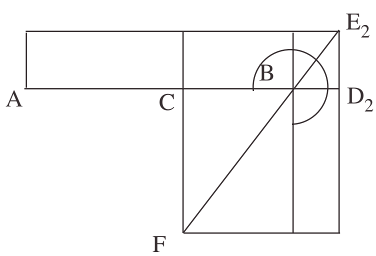
Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, le rectangle sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le quarré de la droite placée entre les sections, est égal au quarré de la moitié de la droite entière. [10, p. 45 : proposition II, 5]



C est milieu de [AB], D_1 est quelconque
Rectangle AE_1 = gnomon E_1
donc Rect. AE_1 + carré FE_1 = carré FB

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une

droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.
[10, p. 46 : proposition II, 6]



C est milieu de [AB], D_2 est quelconque
Rectangle AE_2 = gnomon B
donc Rect. AE_2 + carré FB = carré FE_2

La résolution de l'équation : $1x^2+10x=39$
[8, pp. 31-32 : extraits donné en annexe I]

Nous proposons maintenant une transcription pas à pas des étapes des calculs dont Abu Kamil donne l'écriture rhétorique, pour les deux résolutions numériques de l'équation : $1x^2+10x=39$. Nous avons bien sûr recours à l'écriture symbolique, mais nous repoussons volontairement à la fin de la présentation la condensation des algorithmes dans les formules connues.

Nous insistons sur le fait que ces calculs obéissent à des règles identifiées puisqu'ils sont reproductibles pour tout autre exemple numérique se présentant sous la même forme : $x^2+bx=c$. Abu Kamil enchaîne en donnant une démonstration géométrique de chacune des procédures numériques. Dans l'édition de Levey, ces démonstrations sont accompagnées de figures très dépouillées, qui ne comportent pas d'autres indications que les segments, les surfaces et les lettres qui les nomment. Pour reproduire les figures, il suffit de suivre les étapes du discours, qui sont ci-dessous les étapes des tableaux. Les grandeurs géométriques, longueurs ou aires, ne sont pas dissociées de leurs mesures et il est important de noter que la démarche géométrique est complètement accordée à la démarche numérique : par exemple, construire le milieu L du segment BH ou calculer la moitié du nombre des racines, c'est la même chose. La présentation que nous adoptons tente de rendre compte de ces correspondances (Cf. Encadré 2 ci-contre).

Bien que le résultat soit alors acquis, Abu Kamil complète la figure et poursuit son commentaire, pour expliquer lui-même la proposition 6 du livre II des *Eléments* d'Euclide dont il a fait usage dans le corps de la démonstration. Quelle est donc sa préoccupation ? de rigueur, cela ne fait aucun doute ; mais à l'égard de qui ? de lui-même qui ne peut douter du bien-fondé de la proposition d'Euclide, ou de son lecteur à qui il voudrait fournir un corpus complet, se suffisant à lui-même, dans lequel rien ne serait dit qui ne serait prouvé, dans lequel l'égalité : $GB.GH + BL^2 = GL^2$ aussi serait construite ?

Dans le corps de la démonstration suivante, au moment de construire le segment AM, Abu Kamil écrit : « We construct the line AM equal to 100 and accordingly AG is 39 ». Bien que cette précaution de cohérence n'ait pas la valeur qu'aurait le choix préalable d'une grandeur unité, elle est toutefois signe de l'attention portée à la correspondance entre les gran-

Encadré 1

Recherche de la racine du carré

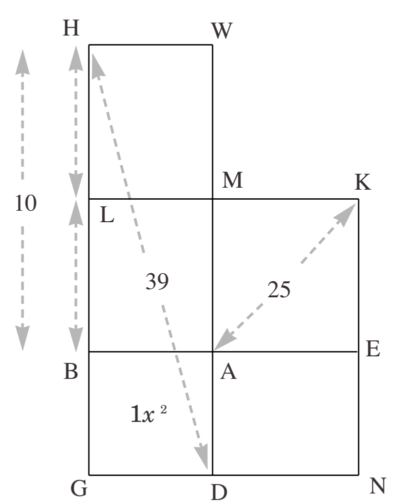
1	x^2	+	10	x	=	39
	⋮		5	⋮		
	⋮		25	⋮		
	⋮		25	⋮	+	39
	⋮			⋮		64
	⋮			⋮		8
	⋮		–5	⋮	+	8
	⋮			3		
	9					

$$x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}$$

Recherche directe du carré

1	x^2	+	10	x	=	39
	⋮		100			
	⋮		100		×	39
	⋮					3900
	⋮		50			
	⋮		2500			
	⋮		2500		+	3900
	⋮					6400
	⋮					80
	⋮		50		+	39
	⋮		89		–	80
	9					

$$x^2=\frac{1}{2}b^2+c-\sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2+b^2c}$$



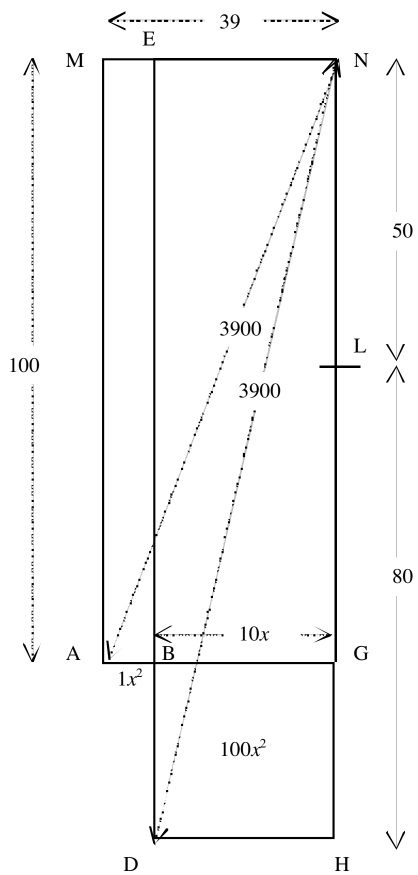
Justification de la règle de la racine. [8, p. 34]

ABGD	$1x^2$
ABHW	$10x$
BH	10
ABGD + ABHW	$1x^2 + 10x$
WHGD	39
GD.GH	39
GB.GH	39
BL = LH	5
GB.GH + BL²	39 + 25
(Euclide II, 6) GL²	64
GL	8
GL – BL	8 – 5
GB	3
ABGD	9

Encadré 2

Encadré 3

Justification de la règle du carré.
[8, p 36 : extrait donné en annexe II]



AB	$1x^2$
BG	$10x = 10\sqrt{AB}$
AB + BG	$1x^2 + 10x$
AG	39
[BH] = DHGB = BG^2	100.AB
AM	100
AM.AG	100×39
[AN]	3900
AM = BE = GN	100
AM.AB	100.AB
[AE] = [BH]	100.AB
[AE] + [BN]	3900
[BH] + [BN]	3900
[DN]	3900
HD.HN = HG.HN	3900
GL = LN	50
HG.HN + GL^2	3900 + 2500
(Euclide II, 6) LH^2	6400
LH	80
LG + GH	80
LG + GB	80
LG + GA	50 + 39
LG + GA	89
GA – GB	89 – 80
AB	9

deurs numériques et les grandeurs géométriques.

Nous utilisons la notation [DN] pour désigner la surface du rectangle de diagonale DN (Cf. encadré ci-dessus).

Cette démonstration est plus qu'une simple curiosité. En effet pour valider géométriquement son nouvel algorithme, Abu Kamil s'affranchit des règles d'homogénéité considérées comme usuelles, et fonde sa démonstration sur la représentation du carré inconnu par la longueur AB. Quelles peuvent être les motivations présidant à ce choix ?

Quand, au 17ème siècle en Europe, René Descartes (1596–1650) se donne les moyens théoriques de représenter le produit de deux lignes par une ligne, en introduisant une grandeur unité, nombreux commentateurs y voient un facteur décisif pour le développement de la géométrie analytique [5]. Et il est vrai qu'Abu Kamil lui aussi, au livre II de son ouvrage, se montre capable, grâce à la mise en correspondance de lignes géométriques et de puissances de l'inconnue, de résoudre algébriquement des questions géométriques délicates relatives aux pentagones et aux décagones réguliers. L'intérêt des résultats qu'il obtient permet-il pour autant d'avancer que sa démarche aurait à voir avec la géométrie analytique comme projet, quand il semble, en l'état actuel de la connaissance de ses textes, que ses calculs géométriques ne débordent guère le champ des figures classiques nommées plus haut ?

A quelle nécessité Abu Kamil obéirait-il donc ? Serait-ce le besoin impérieux de démontrer, donc de démontrer géométriquement, donc de mettre à plat sur le plan les étapes des résolutions numériques, qui lui suggérerait cette représentation d'un carré par une ligne ? La question se poserait alors de savoir si ce choix a toute la portée qu'un lecteur moderne est tenté de lui prêter. Le souci de l'homogénéité est-il si présent chez les mathématiciens arabes du début du 10ème siècle que la liberté prise par Abu Kamil soit tellement innovante ? Au 11ème siècle, le mathématicien Omar al-Khayyam (~1048 ~1131) consacre son traité d'algèbre à l'élaboration d'une théorie géométrique des équations de degré inférieur ou égal à trois et écrit que « l'art de l'algèbre et de l'al-muqabala est destiné à déterminer les inconnues numériques et géométriques ». S'il prend le plus grand soin pour expliquer le concept fondamental d'unité de mesure, dont l'introduction a pour effet de rendre un nombre homogène à une surface, c'est peut-être qu'il ne s'agit pas d'un acquis antérieur définitif :

> *Et toutes les fois que dans ce traité nous dirons : un nombre est égal à une surface, nous entendrons par le nombre un quadrilatère à angles droits, dont l'un des deux côtés est un et l'autre une droite égale en mesure au nombre donné, et tel que chacune des parties de sa mesure soit égale au deuxième côté, je veux dire celui que nous avons supposé un.* [12, p. 20]

Les questions que pose la démonstration d'Abu Kamil étant ouvertes, il reste au moins la possibilité d'y voir une nouvelle preuve de son souci d'établir ce qu'il énonce avec les moyens dont il dispose, qui sont géométriques.

Pour la résolution de l'équation : $1x^2 + 21 = 10x$, sans surprendre, Abu Kamil détaille d'abord le calcul des deux racines positives. Il explique le cas impossible qui se présente si le carré de la moitié du nombre des racines est inférieur au nombre et qui nécessite que l'on « change de procédure », ce qui veut peut-être dire que l'on revoie la mise en équation du problème ; il explique bien sûr le cas de la solution unique. Il poursuit en décrivant son algorithme de recherche directe des deux carrés solutions, dans le cadre duquel il signale à nouveau les cas particuliers. Abu Kamil est plus complet qu'al-Khwarizmi [7, pp. 104-107] pour les démonstrations géométriques de l'algorithme des racines, puisque lui est systématique. Non seulement il construit de bout en bout la racine plus petite que la moitié du nombre des racines et aussi la racine plus grande, sur deux figures séparées complètes sur lesquelles opère la proposition II, 5 des Eléments d'Euclide, mais même il élabore ce qui ressemble à un raisonnement par l'absurde par constructions géométriques pour visualiser le cas particulier de la solution unique !

Les règles arithmétiques et les règles algébriques

Sans transition, Abu Kamil passe de l'étude des six algorithmes de référence à celle des règles incontournables qui fondent le calcul algébrique, qu'il a le souci d'isoler en tant que règles et de démontrer, donc de démontrer géométriquement.

Chaque règle est énoncée de façon générale, puis appliquée à un ou plusieurs exemples numériques, et enfin démontrée sur une figure correspondant à l'un des exemples. Nous choisissons de citer, dans le cadre de cette présentation rapide, des exemples auxquels Abu Kamil attache une démonstration géométrique. Ils sont représentatifs de l'ensemble des règles abordées. [8, pp. 52-76]

Les deux premiers exemples (Cf. encadré ci-contre) donnant lieu à une figure démonstrative se distinguent l'un de l'autre moins par l'aspect des figures associées que par le commentaire d'accompagnement qui prend en compte les différences de « catégories » des facteurs engagés dans les produits.

Les cinq figures qui suivent dans le texte d'Abu Kamil ont pour objet de justifier, par des comparaisons d'aires, les règles énoncées pour le calcul des cinq expressions suivantes :

$$(10+1x)\times 1x$$

$$(10+1x)\times(10+1x)$$

$$(10-1x)\times(10-1x)$$

$$(10+1x)\times(10-1x)$$

$$(10+1x)\times(1x-10)$$

Abu Kamil passe ensuite à des calculs sur les racines de nombres « connus ou indéterminés », ainsi qu'il le précise, et explique géométriquement, par les aires, les trois égalités numériques :

$$2\sqrt{16}=\sqrt{4\times 16}=\sqrt{64}=8$$

$$\tfrac{2}{3}\sqrt{9}=\sqrt{\tfrac{4}{9}\times 9}=\sqrt{4}=2$$

$$\sqrt{9}\times\sqrt{4}=\sqrt{36}=6$$

Il énonce alors les trois règles générales suivantes :

$$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

$$b\times\frac{a}{b}=a$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

qu'il démontre, sans recourir à des valeurs numériques cette fois-ci, par des considérations sur les proportions étayées de figures constituées de lignes posées sur la page, comparables à celles que l'on trouve dans les versions connues des *Eléments* d'Euclide.

Pour les règles d'addition et de soustraction des irrationnels, Abu Kamil donne une

Encadré 4

If one asks how much is 1 thing multiplied by 1 thing, say a square. The explanation is that one puts the thing in a figure as 1 and multiplies it by 1. The answer is 1; it is a square. If one asks how much is 2 things by 2 things, say 4 squares just as I showed. […] I shall set up the example of this in the multiplication of 2 things by 2 things. Make line AG equal to 2 things and line HG equal to 2 things. Multiply line AG by line GH; it is surface AH. Say that surface AH is 4 squares. The proof of this is that line AG is divided by the number which represents the amount of the things; its parts are AB, BG. Divide line GH by the number which represents the amount of the things; its divisions are GD, DH. Draw a line parallel to line GH from point B to E; draw a line parallel to line AG from point D, or line $D\underline{H}$. *Because of this, there arise 4 equal quadrilaterals in the surface AH; these are quadrilateral* $\underline{H}B$, *quadrilateral BD, and DE, and* $\underline{H}E$. *Every one of these quadrilaterals is a square, and every one of the lines AB, BG, GD, and DH multiplied by one is a thing. This is the rule of the square and the thing. Surface AH is 4 squares. This is what I desired to show.*

If one asks how much is 3 things by 6 numbers, place the 3 things in a figure as 3; multiply the 3 by 6 to give 18, or 18 things. […] [8, pp. 54-58]

$AB = 6$ et $BD = 3x$

$AG = GH = HW = WZ = Z\underline{H} = \underline{H}B = 1$

$BT = TK = KD = 1x$

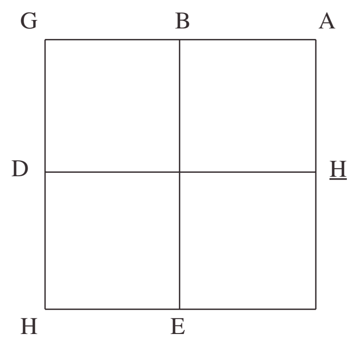
$[AD] = \text{surface } AD = AB \times BD = (6)(3x)$

or $[\underline{H}T] = BT \times B\underline{H} = (1x)(1) = 1x$

et $[\underline{H}T] = \ldots = [KL] = \ldots = [ES] = \ldots = [\underline{K}G] = \ldots = 1x$

donc $[AD] = 18 \times [\underline{H}T] = 18x$

$$2x \times 2x = 4x^2$$



$AG = 2x$ et $AB = BG = 1x$

$GH = 2x$ et $GD = DH = 1x$

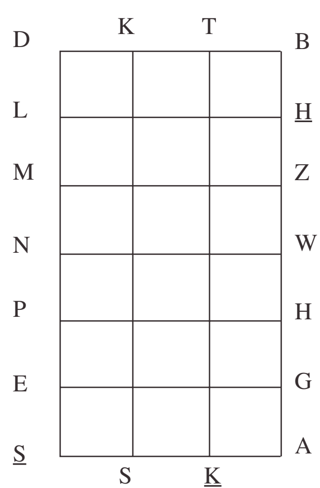
$[AH] = \text{surface } AH = AG \times GH = (2x)(2x)$

or $[BD] = BG \times GD = (1x)(1x) = 1x^2$

et $[\underline{H}B] = [BD] = [DE] = [\underline{H}E] = 1x^2$

donc $[AH] = [\underline{H}B] + [BD] + [DE] + [\underline{H}E] = 4x^2$

$$6 \times 3x = 18x$$



visualisation par les aires des égalités numériques : [8, pp. 76-82]

$$\sqrt{9}+\sqrt{4}=\sqrt{9+4+2\sqrt{36}}=5$$
$$\sqrt{9}-\sqrt{4}=\sqrt{9+4-2\sqrt{36}}=1$$

Il termine cette partie de son traité en distinguant les trois cas qui peuvent se présenter, selon que la somme et la différence sont rationnelles, comme dans l'exemple ci-dessus, ou qu'elles sont irrationnelles quadratiques :

$$\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{8+18+2\sqrt{144}}=\sqrt{50}$$
$$\sqrt{18}-\sqrt{8}=\sqrt{18+8-2\sqrt{144}}=\sqrt{2}$$

ou bien encore irrationnelles biquadratiques :

$$\sqrt{2}+\sqrt{10}=\sqrt{12+2\sqrt{20}}$$
$$\sqrt{10}-\sqrt{2}=\sqrt{12-2\sqrt{20}}$$

Ainsi Abu Kamil renouvelle l'énoncé des règles arithmétiques classiques en en montrant la trame et leur confère une généralité qui en fait des règles algébriques, susceptibles d'opérer sur des objets nouveaux pouvant comporter des quantités indéterminées. Ce sont des calculs d'un type nouveau qui s'élaborent, et la résolution des problèmes qui suivent donne les meilleures preuves de leur efficacité.

La résolution de quelques problèmes remarquables

Les six premiers problèmes sont choisis par Abu Kamil pour conduire à l'utilisation, dans l'ordre, des règles données pour les six équations canoniques. Parmi les suivants, nous choisissons de présenter le problème 42, qui s'apparente à un exercice de style, puisqu'Abu Kamil en donne trois démonstrations algébriques différentes, et les problèmes 10 à 13, qui font l'objet de démonstrations géométriques dont l'intérêt justifie que nous les étudiions.

Le problème 42

Il s'agit de partager 10 en deux parties de façon que la somme des quotients de chaque partie par l'autre soit égale à $\sqrt{5}$. [8, pp. 150-154]

Le premier choix d'inconnue qui vient à l'esprit consiste à poser que l'une des deux parties est une chose : $1x$, et que l'autre est : $(10 - 1x)$. Le problème s'écrit alors :

$$\frac{1x}{10-1x}+\frac{10-1x}{1x}=\sqrt{5}$$

soit : $1x^2+(10-1x)^2=\sqrt{5}\times 1x\,(10-1x)$

et cette seconde formulation est le point de départ de la première démonstration d'Abu Kamil. Première démonstration qui met bien en évidence tout l'intérêt des règles de calcul sur les monômes, les binômes et les quantités irrationnelles qu'Abu Kamil a justifiées.

En voici (Cf. Encadré 5 ci-contre) les étapes successives en écriture symbolique actuelle reproduisant le plus fidèlement possible le développement rhétorique de l'auteur.

Le résultat obtenu suggère une mise en équation qui aurait été possible, qu'Abu Kamil

Encadré 5

$$(1x)^2+(10-1x)^2=100+2x^2-20x$$

$$\text{et } 1x\,(10-1x)=10x-1x^2$$

$$\text{soit } \sqrt{5}\times\left(10x-1x^2\right)=\sqrt{500x^2}-\sqrt{5x^2x^2}$$

$$\text{l'équation du problème s'écrit donc } \sqrt{500x^2}-\sqrt{5x^2x^2}=100+2x^2-20x$$

$$\text{par restauration de } \sqrt{500x^2} \text{ par } \sqrt{5x^2x^2},\ \sqrt{500x^2}=\sqrt{5x^2x^2}+100+2x^2-20x$$

$$\textbf{par restauration à nouveau, } 20x+\sqrt{500x^2}=100+2x^2+\sqrt{5x^2x^2}$$

$$\text{par multiplication par } \left(\sqrt{5}-2\right)\text{, qui est le résultat de la division de 1 par } \left(2+\sqrt{5}\right),$$

$$1x^2+\sqrt{50000}-200=10x$$

$$\text{on calcule } \left(\frac{10}{2}\right)^2-\left(\sqrt{50000}-200\right)=225-\sqrt{50000}$$

$$\text{une partie est } 5-\sqrt{225-\sqrt{50000}}$$

$$\text{et l'autre est } 5+\sqrt{225-\sqrt{50000}}$$

ne donne pas pour le problème 42, mais dont on le sait capable. Des commentateurs la relèvent en citant le problème 7, qui n'en est d'ailleurs pas le lieu unique. Il s'agit de la mise en équation qui consiste à poser que les deux parties cherchées sont de la forme $(5 + \alpha)$ et $(5 - \alpha)$.

La deuxième démonstration (Encadré 6) procède par introduction d'une inconnue auxiliaire, puisqu'il s'agit de partager d'abord $\sqrt{5}$ en deux parties de produit 1, qui deviendront respectivement :
$\left(\dfrac{1x}{10-1x}\right)$ et $\left(\dfrac{10-1x}{1x}\right)$.

Plus élaborée que la première démonstration, elle conduit à des calculs plus simples puisque chacune des deux équations quadratiques qui se succèdent est moins lourde. On pose que l'une des deux parties est une chose que nous notons : $1y$, et que l'autre est alors : $\sqrt{5}-1y$.

Encadré 6

$$1y\left(\sqrt{5}-1y\right)=\sqrt{5y^2}-1y^2=1$$

par restauration de $\sqrt{5y^2}$, $1y^2+1=\sqrt{5y^2}$

on calcule $\frac{1}{2}\sqrt{5}=\sqrt{1\frac{1}{4}}$, puis $\left(\sqrt{1\frac{1}{4}}\right)^2-1=\frac{1}{4}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ et on obtient la racine $\sqrt{1\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$.

(l@autre racine $\sqrt{1\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}$ n@est pas prise en compte)

on cherche alors $1x$ tel que $\frac{10-1x}{1x}=\sqrt{1\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$

soit $\sqrt{1x^2+\frac{1}{4}x^2}-\frac{1}{2}x=10-1x$

ou encore $10-\frac{1}{2}x=\sqrt{1x^2+\frac{1}{4}x^2}$

$$\left(10-\frac{1}{2}x\right)^2=100+\frac{1}{4}x^2-10x=1x^2+\frac{1}{4}x^2$$

par restauration $100+\frac{1}{4}x^2=1x^2+\frac{1}{4}x^2+10x$

et par simplification, $1x^2+10x=100$

dont la racine est $1x=\sqrt{125}-5$; l@autre partie de 10 est : $10-1x=15-\sqrt{125}$

Abu Kamil ne fait pas de commentaire sur la forme différente des nombres obtenus par cette deuxième méthode.

La troisième démonstration (Encadré 7) se présente comme la résolution d'un système de deux équations dont les deux inconnues sont l'une celle de la première démonstration et l'autre l'inconnue auxiliaire de la deuxième démonstration. Cette troisième démonstration, plus difficile, montre comment peut s'organiser une résolution à deux inconnues et se termine par la mise en relation des valeurs numériques obtenues à l'issue des trois démonstrations.

Encadré 7

le choix des inconnues conduit à $[2] \quad 1y \times 1x = 10 - 1x$

et $\dfrac{1x}{10-1x} = \sqrt{5} - 1y$ donc $\left(\sqrt{5} - 1y\right)(10 - 1x) = 1x$

soit d'après $[2] \quad 10 - 1x + \sqrt{500} - \sqrt{5x^2} - 10y = 1x$

$$1x + 10y = 10 - 1x + \sqrt{500} - \sqrt{5x^2}$$

$$10 - 2x + \sqrt{500} - \sqrt{5x^2} = 10y$$

$$1y = 1 + \sqrt{5} - \frac{1}{5}x - \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{10}x^2}$$

et d'après $[1] \quad \dfrac{10-1x}{1x} = 1 + \sqrt{5} - \dfrac{1}{5}x - \sqrt{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{10}x^2}$

$\left(\dfrac{10-1x}{1x}\right)1x = 10 - 1x$ et $1x + \sqrt{5x^2} - \dfrac{1}{5}x^2 - \sqrt{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{10}x^2x^2} = 10 - 1x$

par deux restaurations, $2x + \sqrt{5x^2} = 10 + \dfrac{1}{5}x^2 + \sqrt{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{10}x^2x^2}$

par multiplication par $\sqrt{500} - 20$, il vient $10x = 1x^2 + \sqrt{50000} - 200$

on calcule $\left(\dfrac{10}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{50000} - 200\right) = 225 - \sqrt{50000}$

une partie est $5 - \sqrt{225 - \sqrt{50000}}$

or $\sqrt{225 - \sqrt{50000}} = \sqrt{125} - 10$

donc cette partie est $5 - \left(\sqrt{125} - 10\right) = 15 - \sqrt{125}$

et l'autre est $10 - \left(15 - \sqrt{125}\right) = \sqrt{125} - 5$

On pose que l'une des deux parties est une chose : $1x$, que l'autre est : $(10 - 1x)$ et que :

$$[1] \quad \frac{10-1x}{1x} = 1y \ ,$$

« *un dinar* », dans le texte.

Ces trois démonstrations sont largement représentatives de l'ensemble des méthodes algébriques qu'Abu Kamil maîtrise [2].

Les derniers problèmes traités dans le cadre du livre I du *Livre complet en algèbre* exigent une grande habileté pour les calculs, et leur écriture rhétorique ne nous en facilite évidemment pas l'accès. Parmi eux et souvent cité, le problème 60, qui serait plus spectaculaire que ses voisins non moins difficiles, pour la raison qu'il engage une équation de degré huit. Ce n'est, de fait, qu'une équation quadratique en x^4, mais elle reste significative de la bonne appréhension des puissances successives de l'inconnue qu'Abu Kamil a déjà.

Les problèmes 10 à 13

Pour chaque problème, Abu Kamil donne successivement :

— une méthode arithmétique qui indique les grandes étapes du calcul, en collant à l'énoncé du problème, sans introduction d'inconnue,

— une méthode géométrique qui dessine soigneusement les étapes du calcul précédent,

— une méthode algébrique qui ne diffère de la méthode arithmétique que par l'introduction de la « chose » inconnue et par la mise en équation du problème, qui se développe à travers les mêmes calculs que la méthode arithmétique, pour se terminer par la résolution détaillée de l'équation canonique à laquelle on est parvenu.

Nous expliquons le problème 11 (Encadré 8) , dans une formulation que nous prenons la liberté de paramétrer pour dégager plus nettement la portée générale de la méthode, tout en respectant scrupuleusement les étapes des calculs d'Abu Kamil. [8, p. 108 : extrait donné en annexe III]

Nous présentons la démonstration géométrique dans l'encadré 9, en veillant à restituer fidèlement les étapes explicitées par Abu Kamil. Les flèches „ repèrent les étapes numériques du tableau ci-dessus. Les valeurs numériques correspondant au problème 11 sont indiquées dans le tableau.

Reste à analyser ce qui ressort de la confrontation de ces deux solutions, numérique et géométrique, outre leur remarquable accord. S'il est vrai que notre manière de conduire les calculs est aujourd'hui un peu différente de celle d'Abu Kamil, il semble en revanche que le déroulement de la démonstration géométrique puisse nous paraître très naturel, une fois passée la réticence fréquente à l'égard de la démarche géométrique du lecteur moderne rompu aux méthodes algébriques. C'est que chaque pièce du puzzle géométrique se met en place selon une logique qui s'impose. Or la cohérence des deux démarches numérique et géométrique est voulue par Abu Kamil. N'avons-nous pas ici un bel exemple d'algèbre géométrique, au sens propre, et sans anachronisme puisque nous nous situons après le traité d'al-Khwarizmi qui date la naissance de l'algèbre ? Les objets et les concepts nouveaux ont été définis, les résolutions algorithmiques sont au point, les problèmes font l'objet de mises en équa-

2 On trouve une traduction en français complète du texte du problème 42 dans : Djebbar A., Matériaux pour l'étude de la tradition algébrique arabe (IXe-Xe S.), version inédite : novembre 1996, pp. 13-16.

Encadré 8

Problème : Si l'on partage la somme a entre des hommes, chacun reçoit une certaine part. Si l'on partage la somme A entre les mêmes hommes et b autres, chacun reçoit une part inférieure de c à la part du premier partage. L'inconnue du problème est le nombre d'hommes.

Ci-contre, les quatre étapes de calcul qui, à partir de l'équation de départ, permettent de se ramener à une question que l'on sait résoudre.

La cinquième étape ne figure que dans la résolution algébrique.

$$\frac{a}{x}-\frac{A}{x+b}=c$$

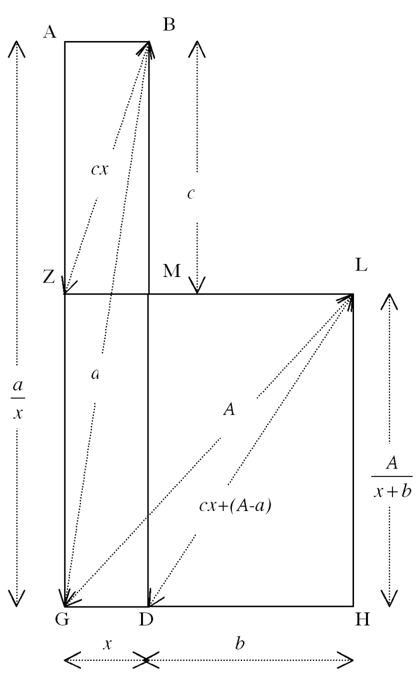
$$a-\frac{Ax}{x+b}=cx$$

$$A-\frac{Ax}{x+b}=cx+(A-a)$$

$$\frac{A}{x+b}=\frac{1}{b}\left[cx+(A-a)\right]$$

$$A=\frac{1}{b}\left[cx+(A-a)\right]\times(x+b)$$

$$\frac{c}{b}x^2+\left[\frac{1}{b}(A-a)+c\right]\times x=a$$



	BDGA	$a = 10$
	GD = ZM	x
	GA	$\frac{a}{x}$
	DH	$b = 4$
	GH	$x + b$
	GHLZ = GZ.GH	$A = 30$
	GZ=HL	$\frac{A}{x+b}$
	GA – GZ	$\frac{a}{x}-\frac{A}{x+b}$
•	ZA	$c = 4$
•	ZM.ZA = [ZB]	cx
	GHLZ = [GM] + [DL]	A
	BDGA = [GM] + [ZB]	a
	[DL] – [ZB]	$A - a$
	[ZB] + [DL] – [ZB]	$cx + (A - a)$
•	[DL] = DH.DM	$cx + (A - a)$
•	GZ = DM	$\frac{1}{b}\left[cx+(A-a)\right]$
•	GZ.GH	$\frac{1}{b}\left[cx+(A-a)\right]\times(x+b)$
	[GL]	A

Encadré 9

tion, les règles de calcul sur les quantités composées ont été reconnues, grâce à quoi les équations sont réductibles à une forme canonique. Mais ce sont aussi les méthodes de l'algèbre qui s'élaborent autant que ses algorithmes de calcul, et la démonstration algébrique d'Abu Kamil est fondue dans le moule éprouvé de la géométrie.

Nous avons vu des règles arithmétiques donner leur forme à des règles algébriques ; nous voyons ici une démonstration géométrique donner sa forme à une démonstration algébrique. Est-ce à dire que l'algèbre désignerait un type de calculs, sans spécificité nécessaire de ses objets, nombres quelconques ou grandeurs géométriques ?

Ce n'est peut-être pas si simple. On conduit les calculs en faisant des opérations, additions et soustractions, multiplications et divisions ou extractions de racines. Les résultats des opérations sur des nombres sont des nombres, alors que les mêmes opérations sur des grandeurs géométriques conduisent à des résultats qui ne sont connus, en tant qu'objets géométriques, que si l'on effectue les constructions correspondant aux opérations. Or les démonstrations géométriques que nous avons trouvées dans le texte d'Abu Kamil ne construisent pas les grandeurs. Il devient alors nécessaire de se demander ce qui rapproche ou distingue essentiellement les algorithmes de calcul et les raisonnements géométriques qui les accompagnent.

On sait que la démarche algébrique est analytique : en travaillant sur l'inconnue comme si elle était connue, on enchaîne des calculs qui produisent des conditions nécessaires, et l'on conclut que la racine ne peut être que celle qui est trouvée à l'issue de cette phase de calculs. Il faut alors procéder à une synthèse qui consiste à démontrer, souvent rapidement, à vérifier, que la solution pressentie est bien solution du problème. Deux manières de faire : la vérification numérique, souvent triviale, qu'Abu Kamil ne pratique pas de façon explicitée, ou la vérification géométrique qu'il pratique de façon presque systématique, qui démontre que l'on trouve bien ce que l'on cherche en faisant les calculs que l'on fait. La même figure d'ailleurs montre à la fois l'analyse et la synthèse de la démarche algébrique, puisque le commentaire qui l'accompagne commence, à peu de chose près, par : « Nous prenons pour le carré une surface carrée de côtés inconnus et c'est la surface ABGD … », et qu'il se termine par « …il reste la ligne GB qui est égale à 3 et c'est la racine du carré ». Ce sont donc, à proprement parler, des démonstrations d'algorithmes de calcul qu'Abu Kamil produit systématiquement dans ses démonstrations géométriques, opérant de la même façon sur les désignations des grandeurs géométriques et sur les nombres.

Il serait malgré tout restrictif de considérer qu'une figure géométrique ne produit que de l'information algébrique. Al-Khayyam, dont nous avons déjà indiqué qu'il a le projet d'une algèbre qui détermine les inconnues numériques et les inconnues géométriques, et qui, dans la première partie de son traité consacrée aux équations quadratiques, donne pour les algorithmes numériques les mêmes démonstrations géométriques que ses prédécesseurs, va, lui, plus loin dans la lecture des mêmes figures. Car, s'il reste vrai que l'analyse de la figure supposée construite ne détermine pas l'inconnue géométrique, il est tout aussi vrai qu'elle peut mettre en évidence le procédé pour la construire. Et la synthèse en géométrie, c'est la construction effective de la grandeur géométrique inconnue.

La première construction à laquelle procède al-Khayyam est celle du segment solution de l'équation : $x^2 = a$. Il construit un rectangle de longueur le nombre a et de largeur l'unité, donc d'aire a ; il rappelle que, grâce à la proposition 14 du Livre II des *Eléments* d'Euclide, on sait construire un carré de même aire que ce rectangle, et il indique que le côté du carré ainsi construit est la grandeur cherchée. [12, p. 20]

Pour l'étude des équations : $x^2 = ax + c$, que supporte l'exemple numérique : $1x^2 = 5x + 6$, al-Khayyam rappelle l'algorithme de résolution numérique, procède à la validation géométrique habituelle du dit algorithme, puis explique comment construire le segment solution, par un algorithme géométrique constructif dont les étapes suivent, pas à pas, celles de l'algorithme numérique. Lui déploie donc ici toutes les facettes possibles de la résolution achevée d'une équation, que l'inconnue en soit un nombre ou un segment. [12, p. 29], [7, pp. 108-111]

Le fait que l'inconnue géométrique ne soit effectivement connue que si elle est construite, ou reconnue constructible par un procédé connu, nous conduit à nuancer l'hypothèse faite plus haut, selon laquelle l'algèbre, qui s'élabore comme science de l'inconnue, se constituerait comme un ensemble de règles de calcul propres à opérer sur des objets de nature non spécifique. L'examen que nous venons de faire nous suggèrerait plutôt que le calcul algébrique n'aurait pas d'autres objets que les désignations des grandeurs elles-mêmes, lesquelles deviendront progressivement puis définitivement symboliques à la fin du 16ème siècle, en ce qui concerne l'Europe. Ce serait alors la nature de l'inconnue, nombre ou grandeur géométrique, qui ferait que, dans un contexte donné, la connaissance de sa désignation permettrait ou non de la déterminer complètement.

Abu Kamil est un maillon important de la chaîne de diffusion de sa discipline, à la fois fidèle à son prédécesseur al-Khwarizmi et influent sur ses propres successeurs. Parmi eux, al-Karaji (~953 ~1029) puis al-Samawal (~1130 ~1180) sont des mathématiciens importants qui eux-mêmes font connaître et progresser les connaissances qui leur sont léguées. Il semble que Leonardo Fibonacci (~1170 ~1240) aussi ait eu un accès direct à l'œuvre d'Abu Kamil et y ait trouvé le point de départ d'une partie importante de ses travaux personnels.

La rigueur d'Abu Kamil et les avancées théoriques qu'on lui doit ont été déterminantes pour l'élaboration de l'algèbre, au moment où elle émerge des disciplines antérieurement établies que sont l'arithmétique et la géométrie.

ANNEXES

[I] The square plus roots which equal numbers is as when one says the square plus 10 roots equal 39. This is to say that when we add to the square 10 of its roots, then it equals 39. There are two solutions to this problem; one indicates the root of the square and the other indicates the square. Moreover, I shall explain their rule using geometric figures clarified by wise men of geometry and which is explained in the Book of Euclid. The solution which the root of the square shows was already related by Muhammad al-Khwarizmi in his book. This is that you always take $\frac{1}{2}$ the roots; in this problem, it is 5. You multiply it by itself; it is 25. One adds this to 39; it is 64. Take its root; it is 8. Subtract from it $\frac{1}{2}$ the roots or 5; 3 remains. It is the root of the square. The square is 9. For the solution which reveals the square, one multiplies the 10 by itself; it is 100. Multiply by the 39; it is 3900. Take $\frac{1}{2}$ the 100 and it is 50. Multiply it by itself; it is 2500. You add it to 3900. It is 6400. Take its root and it is 80. Subtract it from [the sum of] 50 which is $\frac{1}{2}$ of 100 and 39, the equal of the square. [3] It comes to 89. There remains 9, the square. [8, pp. 31-32]

[II] The rule of the solution which yields the square is that one construct the square as the line AB :
Add 10 of its roots or line BG ; or, line AG is 39. If one wishes to know how much AB is, construct a plane square quadrilateral on line BG. It is surface DHBG. It is 100 times line AB multiplied by one of its units because line BG is 10 roots of line AB. Ten roots of the thing (square) multiplied by itself is equal to the thing itself 100 times. We construct the line AM equal to 100 and accordingly AG is 39. Construct surface AN; it is 3900 since line AG is 39 and line [AM] has a length of 100. Draw line BE parallel to the 100 line to give surface AE equal to the square BH for it is also 100 times as large as line AB multiplied by its unit. This is since the length of the line AM is 100. Because of this the surface DN also is 3900; it is the product of line GH by line HN for HG is equal to HD. Line GN is 100 for it is equal to AM. Divide it in half by point L. Already one has added to line NH. In view of this, the surface is the product of NH by line HG plus the square quadrilateral on the line GL equal to the square quadrilateral on line LH just as Euclid said in the second chapter of his book. But the surface NE by HG is 3900 and the square quadrilateral on line GL is 2500. We add them to obtain 6400. It is the product of line LH, or 80, by itself; line GH is equal to BG or equal to lines LG, BG, or 80. And when you subtract BG and BL whose sum is 80 from lines AG and GL which are 89, there remains line AB which equals the square, 9. This is what it was desired to know. [8, p. 36]

3 It might rather be "the equal of square and roots"

[III] One says that 10 be divided among men so that every one receives something. Add 4 men and divide 30 among them. For every one of them, the share is 4 less than what came to the former. The procedure here is that the former men be multiplied by the difference between the first and the last quotients. Add the difference between the first and second number to be divided to the result of the multiplication. Divide the sum by the difference between the former and latter men and multiply the result by the latter men. It equals the larger number which was divided, or 30. I shall make a figure for this method. Make the smaller number divided, or 10, as surface ABGD :

The former men are line GD. AG is what each of the former men receives. Add to the former men, line GD, four men as line DH to give line GH, the latter men. Make surface GHZL, 30. Divide it by line GH to get line GZ. This is what each of the latter receives. Line AZ remains as 4 since it is the difference between what each of the former and latter receives. Multiply the former, line ZM, equal to line GD, by line ZA to get surface ZB. Add to surface ZB the difference between 30 and 10, or 20, to get surface DL which is 20 more than ZB. It is more than the two divided numbers since surface AD is 10 and surface GL is 30. Surface GL is greater than surface [DA] by 20. Subtract the common surface, GM; DL remains as 20 more than surface ZB. Divide surface DL by line DH which is 4 to get line DM which is equal to line [GZ] and equal to the share of one of the latter. Multiply line GZ by line GH to get surface GL or 30. This is what it was desired to show. [8, p. 108]

Bibliographie

[1] Abu Kamil, *Al-Kitab al kamil fi'l-jabr*, Istambul, MS Kara Mustapha Pasha 379. Paris, BN MS Lat. 7377 A. Munich, Cod. MS Heb. 225.

[2] Abu Kamil, *Al-Kitab al-Tara'if fi'l Hisab*, Leiden, MS Arab. 1003, ff. 50r-58r ; Paris, BN MS Lat. 7377 A 6 ; Munich, Cod. MS Heb. 225.

[3] Al-Khwarizmi, *Al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wa'l Mukabala*, édité par Mashrafa et Mursi Ahmad, Le Caire, 1968.

[4] An-Nadim, *Al-Fihrist*, édition de Rida Tajaddud, Téhéran, 1971.

[5] Descartes R., *La Géométrie. Appendice au Discours de la Méthode*, 1637, Dover Publications, Inc. New York, 1954.

[6] Djebbar A., « Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe (IX^{e}-XV^{e} siècles) » in *Actes de l'Université d'Eté de la Commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des mathématiques*, Toulouse, 1986.

[7] Kouteynikoff O., « Aspects du rôle de la géométrie dans la construction

de l'algèbre : Regard historique sur la résolution des équations du second degré », in *Repères-IREM*, n° 28, juillet 1997.

[8] LEVEY M., *The Algebra of Abu Kamil*, *Kitab fi al-jabr wa'l-muqabala*, *in a commentory by Mordecai Finzi*, hebrew text, translation, and commentary with special reference to the arabic text, The University of Wisconsin Press, Madison, Milwaukee and London, 1966.

[9] LORCH R., « Abu Kamil on the pentagon and decagon », in *Vestigia Mathematica*, Amsterdam, 1993, pp. 215-252.

[10] PEYRARD F., *Les œuvres d'Euclide, traduites littéralement,* Paris, 1819. Nouveau tirage introduit par J. Itard, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1993.

[11] RASHED R., *Entre Arithmétique et Algèbre*, Société d'Edition Les Belles Lettres, Paris, 1984.

[12] RASHED R. et DJEBBAR A., *L'œuvre algébrique d'al-Khayyam*, établie, traduite et analysée, University of Aleppo, I.H.A.S., 1981.

[13] SACERDOTE G., « Il trattato del pentagono e del decagono di Abu Kamil Shogia ben Aslam ben Muhammed », in *Festschrift zum Achtzigsten Geburtstage Moritz Steinschneider's*, Leipzig, 1896, pp. 169-194.

[14] SESIANO J., « La version latine médiévale de l'Algèbre d'Abu Kamil » in *Vestigia Mathematica*, Amsterdam, 1993, pp. 315-452.

[15] SESIANO J., « Le Kitab al-Misaha d'Abu Kamil » in *Centaurus*, 38, 1996, pp. 1-21.

[16] SESIANO J., « Les méthodes d'analyse indéterminée chez Abu Kamil », in *Centaurus*, 21 (2), 1977, pp. 89-105.