DU PENTAGONE AU DODECAEDRE ETOILE AU COLLEGE

David BOUTRY
Irem de Lille

Ce travail réalisé au collège propose à partir de pentagones réguliers de construire un solide complexe : le petit dodécaèdre étoilé de Kepler. Les justifications sont abordées à partir de la classe de troisième et se poursuivent au lycée.

1. LE PENTAGONE REGULIER CONVEXE

Nous proposons dans cette partie une méthode de construction du pentagone convexe régulier à la règle et au compas [1]. La difficulté consiste à placer 5 points A, B, C, D et E de façon à ce que les cinq longueurs AB, BC, CD, DE et EA soient égales et les cinq angles aux sommets soient égaux (figure [1]).

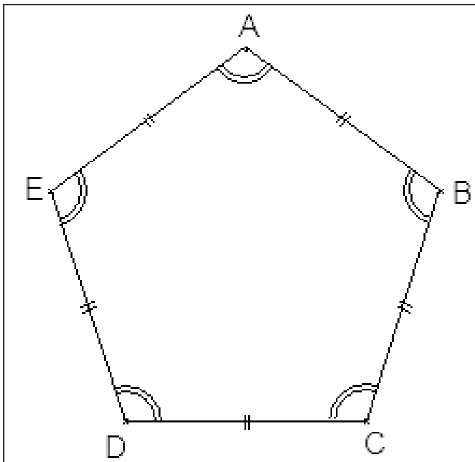


Fig. 1

Deux stratégies sont possibles :

(1) Le segment [AB] étant fixé, il faut trouver une méthode permettant de placer les trois points manquants.

1 Bien sûr, il est aussi possible de le construire avec un rapporteur mais les intérêts pédagogiques ne sont pas les mêmes.

(2) Si on remarque qu'un pentagone régulier est inscriptible dans un cercle, il faut trouver une longueur qui reportée cinq fois sur ce cercle permet de retomber sur le point de départ.

Dans le premier cas, il s'agit de trouver une construction à la règle et au compas de l'angle de 108°(angle au sommet du pentagone régulier) ; dans le second, si le cercle est de rayon 1, il s'agit de construire la longueur : $2.\sin 36° = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$. Autant dire qu'un élève a peu de chance de réussir l'une de ces constructions, même par hasard.

En sixième, cette activité peut être proposée assez tôt dans l'année et s'inscrit dans le travail sur la construction géométrique (utilisation des instruments, description d'une figure, mise en place du vocabulaire, extraire des figures dans une configuration complexe, écrire un programme de construction). La figure [2] est projetée sur le tableau.

Il s'agit pour les élèves de la reproduire à une échelle donnée (OA = 10 cm).

Cette figure est suffisamment complexe pour que les élèves doutent sur le cheminement logique de la construction. Dans un premier temps, ils sont livrés à eux-mêmes et effec-

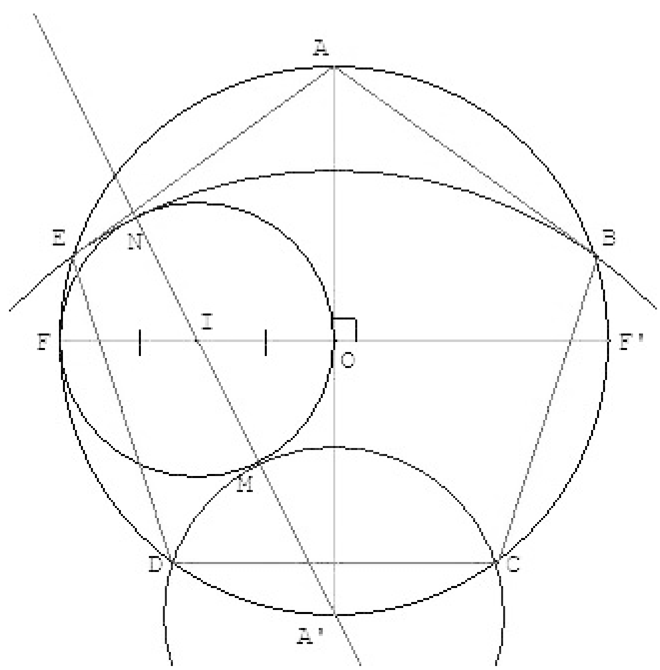


Fig. 2

tuent la construction sur une feuille de brouillon.

Quasiment tous commencent par tracer le grand cercle (quelques-uns commencent par tracer le segment [OA], certainement influencés par la donnée de sa longueur), puis dans le meilleur des cas les deux diamètres perpendiculaires [AA'] et [FF']. Pour les élèves en difficultés, [FF'] n'est plus un diamètre mais une corde vaguement perpendiculaire à [AA'].

Pour tracer le cercle de centre I, beaucoup d'élèves ont besoin de connaître son rayon ; à ce niveau de la construction l'idée de « mettre la pointe du compas en I et d'écarter la mine jusqu'en O » est rarement exploitée, elle l'est plus naturellement lorsqu'il s'agit de tracer les deux arcs de cercle.

Par contre, ceux-ci sont souvent tracés avant la droite (AI) qui est dessinée uniquement parce qu'elle est sur la figure, l'idée que c'est cette droite qui détermine les points M et N échappe à une grande majorité de la classe. Une mise en commun sur l'ordre à respecter est faite dès que les élèves ont fini leur construction. La classe se met d'accord sur une construction cohérente et la recommence sur une feuille plus épaisse (160g).

Un programme de construction est ensuite demandé. C'est l'occasion de revenir sur la précision du vocabulaire à utiliser (segment, droite, rayon, diamètre, cercle, arc de cercle…) et de remarquer qu'il n'est pas utile de citer les instruments utilisés pour expliquer une construction. On arrive (ensemble) à un texte approchant celui-ci :

> Dans un cercle C de centre O et de rayon 10 cm, tracer deux diamètres perpendiculaires [AA'] et [FF']. On note I le milieu du segment [OF] et soit C' le cercle de centre I passant par O. La droite (A'I) coupe C' en M et N, et les cercles de centre A' passant par M et N recoupent le cercle C en B, C, D et E.

Si en Sixième on se contente de mesurer les côtés et les angles du pentagone obtenu pour montrer qu'il est régulier ; on propose en troisième de construire la figure d'après le texte et de résoudre l'exercice suivant [2] :

(1) En utilisant le triangle IOA', calculer la longueur A'I.
(2) Justifier que A'D = A'M = A'I – IM. En déduire la longueur de A'D.
(3) Démontrer que le triangle A'DA est rectangle en D et calculer l'angle $\widehat{DA'A}$.
(4) Calculer l'angle $\widehat{A'OD}$.
(5) Justifier que C est le symétrique de D dans la symétrie d'axe (AA'). En déduire la mesure de l'angle $\widehat{DOC}$.
(6) Justifier que A'N = A'I + IN et en déduire la longueur de A'E.
7) Justifier que le triangle A'EA est rectangle en E et calculer l'angle $\widehat{EA'A}$.
(8) Calculer l'angle $\widehat{EOA}$.
(9) Quel est le symétrique de E dans la symétrie d'axe (AA') ? En déduire la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

2 Au collège, les valeurs exactes peuvent être remplacées par les valeurs trouvées par une calculatrice. Ce peut être l'occasion d'apprendre son emploi dans un contexte difficile. On signalera aux élèves que les valeurs exactes des différents cosinus, sinus ou tangentes utilisés dans ce texte peuvent être trouvées, mais que les méthodes utilisées sont inaccessibles au collège. On peut par contre donner les

(10) Calculer $\widehat{EOD}$ et déduire $\widehat{COB}$.
(11) Que peut-on dire du pentagone ABCDE ?

2. LE PENTAGONE ETOILE ET LA PYRAMIDE

Chacun ayant réalisé sa figure, on la complète en traçant les segments [AC], [CE], [EB], [BD] et [DA] (figure [3]). On obtient le pentagone régulier étoilé ACEBD.

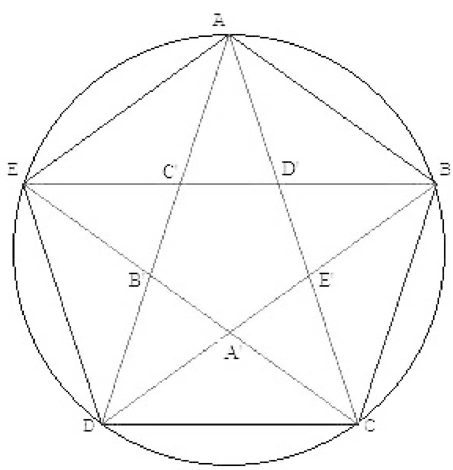


Fig. 3

Il est important de dégager de cette nouvelle configuration les principaux éléments qui la composent : les cinq triangles isocèles et le pentagone régulier qui est une réduction du premier pentagone construit.

Extraire ces figures dans un environnement complexe n'est pas un travail évident au collège, et relève d'un apprentissage que le professeur doit mener. Le changement de point de vue est difficile : une même figure nous amène à voir un pentagone étoilé (figure [4]), puis une configuration dans laquelle apparaît six pentagones (figures [6] et [7]). De plus l'accumulation des traits de construction ajoute encore à la difficulté. On fera remarquer l'utilité de nommer les différents points (A', B', C', D' et E') afin de nommer plus facilement les objets, puis, on peut les faire colorier ou au moins les repasser en couleur.

Ce pentagone étoilé est ensuite découpé et plié, il devient une pyramide régulière à base pentagonale (figure [4] et [5]).

3. LES PENTAGONES ET LE DODECAEDRE

Le travail précédent va nous permettre de construire un dodécaèdre régulier. Il existe bien entendu plusieurs méthodes pour cette construction, on peut par exemple en réaliser le patron en construisant un par un douze pentagones réguliers. Nous allons donner ici une construction plus élégante qui complète les configurations construites jusqu'à présent.

A partir du pentagone étoilé, on trace les droites (A'C'), (C'E'), (E'B'), (B'D') et (D'A') de manière à obtenir la figure [6] (cf. verso de la page suivante). On obtient ainsi six pentagones réguliers superposables (figure [7]).

Cette dernière construction n'est pas demandée à l'ensemble de la classe car d'une part, l'accumulation des traits de construction perturbe et décourage les élèves en difficulté, et d'autre part, pour la suite de l'activité seul deux ou quatre de ces configurations sont nécessaires (cela dépend de l'effectif de la classe). En général on demande aux élèves ayant

Fig. 4

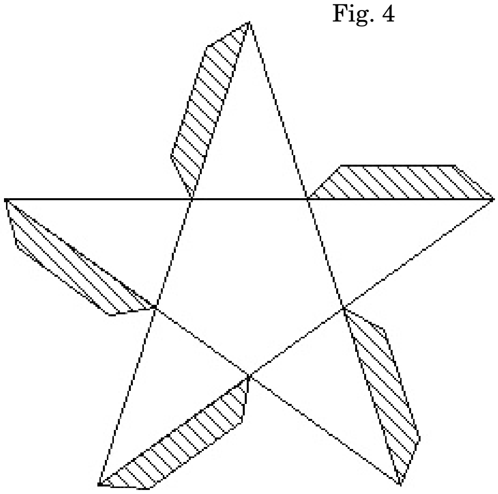
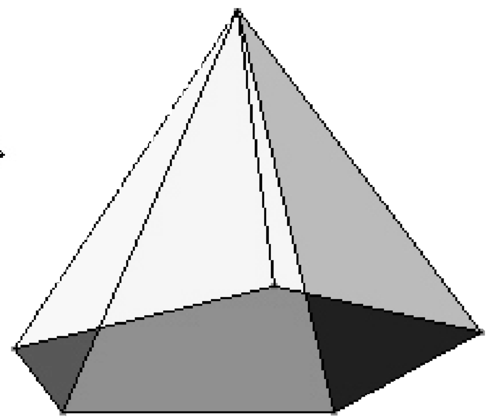


Fig. 5



le plus d'avance (à condition que leur construction soit soignée) de réaliser cette configuration. Remarquons que ces élèves ne sont pas forcément les meilleurs de la classe.

De la même manière qu'avec le pentagone étoilé, on extrait de la construction les six pentagones réguliers convexes, ce travail est mené à l'aide d'un transparent avec l'ensemble de la classe, les élèves ayant réalisé la construction doivent découvrir les pentagones et les repasser en couleur.

On réalise deux figures [7] ; en joignant bord à bord les pentagones (garder les triangles comme languettes d'assemblage), on obtient deux demi-dodécaèdres qu'il reste à assembler pour obtenir la figure [8] [3].

4. LE PETIT DODECAERE ETOILE DE KEPLER

Pour cette dernière partie, nous allons coller douze pyramides construites précédemment sur chacune des faces du dodécaèdre régulier. La base de chaque pyramide coïncide parfaitement avec chaque face du dodécaèdre puisque le pentagone convexe de la base est de la même dimension que le pentagone définissant les faces du dodécaèdre. Le solide obtenu est le petit dodécaèdre étoilé de Kepler (figure [9]).

Ce polyèdre compte 12 faces [4] (Les pentagones étoilés grisés sur la figure [9]), 12 sommets (les sommets des pentagones étoilés) et 30 arêtes (les cotés des pentagones étoilés).

3 Une étude du dodécaèdre utilisant les outils du lycée est proposée en annexe.

4 On rappelle que pour tout polyèdre, une face est déterminée par l'ensemble des points coplanaires du polyèdre.

Fig. 6

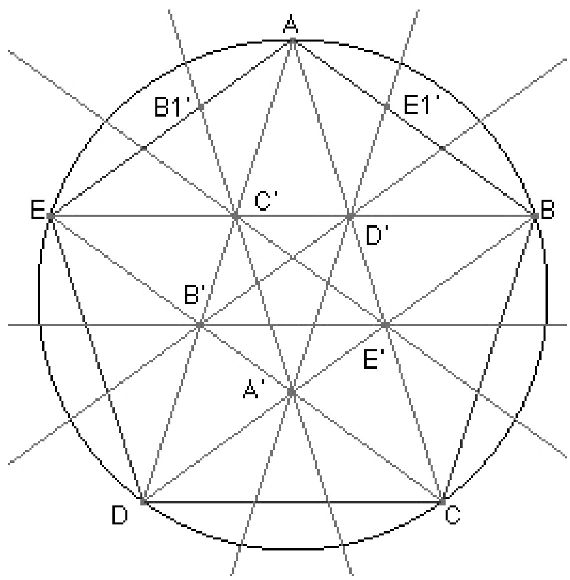


Fig. 7

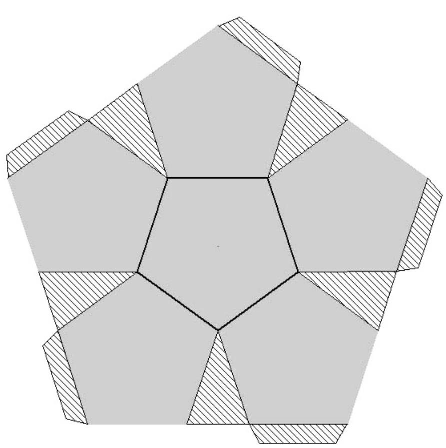
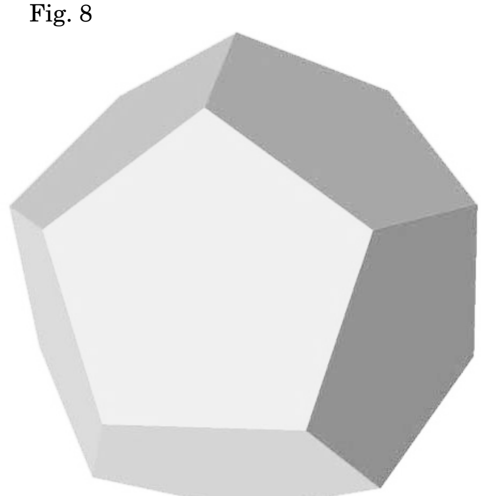


Fig. 8



Cette dernière étape est un prétexte pour aborder le vocabulaire de la géométrie dans l'espace à l'aide d'un solide complexe et inconnu des élèves. Décider ce qu'est une face ainsi qu'une arête ou même un sommet n'est pas facile : on peut être tenté de choisir les triangles isocèles pour faces, les côtés des triangles pour arêtes et les sommets des triangles comme sommets ; mais on remarquera que les triangles isocèles sont coplanaires cinq par cinq, ils définissent donc une seule face. De plus c'est cette réalisation qui donne du sens au travail mené précédemment : les constructions ne sont pas qu'un prétexte à utiliser un vocabulaire mathématique, elles servent à la réalisation d'un objet esthétique. Enfin, cette activité implique tous les élèves puisque chacun doit apporter sa pyramide à l'édifice, tous (ou presque) se sentent concernés par la réussite de l'objet.

Bien entendu, l'esthétique de ce polyèdre dépend en grande partie de la précision et du soin apportés à chaque étape de la réalisation (dessin, découpage, collage). Pour limiter les imprécisions, il est possible de construire les pentagones à l'aide d'un logiciel de géométrie (au moment de les retracer sur le papier de 160g).

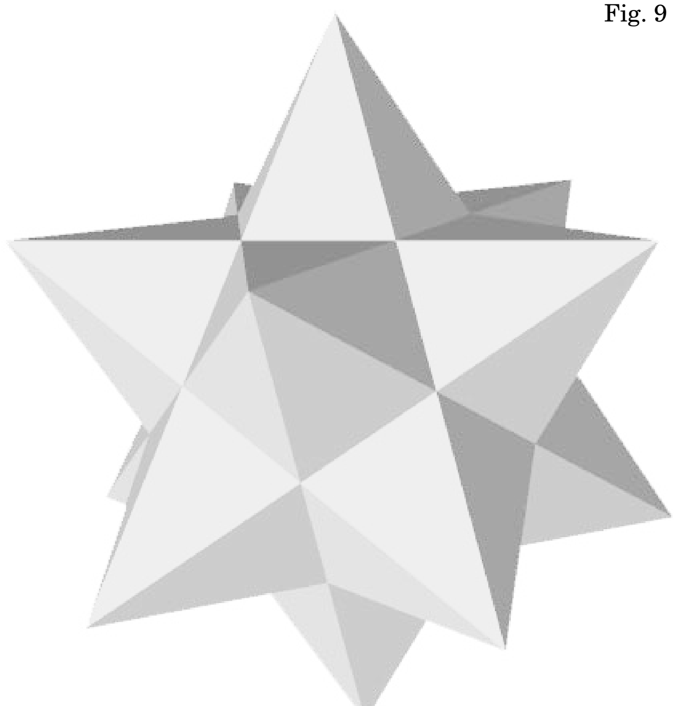


Fig. 9

Ce solide a inspiré de nombreux artistes et notamment le plus célèbre d'entre eux que la géométrie passionne : M.C. Escher.

Escher aimait beaucoup cette figure spatiale, car elle était en même temps simple et compliquée, il s'en servit pour plusieurs de ses estampes. Dans cette lithographie, chaque étoile forme avec sa pyramide, un petit monde habité par un monstre ayant quatre pattes, un long cou mais pas de queue car chaque pyramide ne possède que cinq ouvertures. C'est pourquoi Escher eu d'abord l'intention de faire habiter ce polyèdre par des tortues. Les parois de la « tente » de l'un des monstres servent de sol à cinq des onze autres monstres. Chaque plan qu'il est possible de voir sert donc aussi bien de paroi que de sol.

Fig.10. La pesanteur (1952).

ANNEXE A

TRIGONOMETRIE ET PENTAGONE : $cos 72°$, $sin 72°$ et $tan 72°$

Dans le plan complexe, les affixes des sommets du pentagone convexe régulier inscrit dans le cercle unité vérifient l'équation :

$$Z^5 = 1 \text{ soit } Z^5 - 1 = 0$$

Les solutions de cette équation sont les nombres complexes Z_k vérifiant pour k prenant les valeurs {0, 1, 2, 3, 4}, $Z_k = e^{2ki\pi/5}$.
En factorisant cette expression, on trouve :

$$(Z - 1)(Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1) = 0.$$

On en déduit que le polynôme ayant pour racines les racines cinquièmes de l'unité autres que 1 est : $P(Z) = Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1$.
On résout donc l'équation : $Z^4 + Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$. 0 n'est pas une solution de cette équation. En divisant cette expression par Z^2 on obtient : $Z^2 + Z + 1 + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2} = 0$.

$Z = e^{2i\pi/5}$ est une solution de cette équation, donc,

$$e^{4i\pi/5} + e^{2i\pi/5} + 1 + e^{-2i\pi/5} + e^{-4i\pi/5} = 0 .$$

Rappelons à présent une des formules d'Euler : $cos\,\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$. On déduit que :

$$2cos\frac{4\pi}{5} + 2cos\frac{2\pi}{5} + 1 = 0.$$

De plus, pour tout a réel, $cos 2a = 2cos^2 a - 1$, donc,

$$4cos^2\frac{2\pi}{5} + 2cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0.$$

On en déduit que $cos\frac{2\pi}{5}$ est une racine de l'équation : $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

Cette équation du second degré à coefficients réels a pour discriminant réduit $\Delta = 5$, elle admet donc deux solutions : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Comme $cos\frac{2\pi}{5} > 0$ on obtient :

$cos 72° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Puis, en utilisant la relation $cos^2 a + sin^2 a = 1$: $sin 72° = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

Enfin, puisque $tan\,a = sin\,a/cos\,a$: $tan 72° = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Une étude similaire donne : $cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $sin 36° = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ et $tan 36° = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

ANNEXE B

POLYGONE REGULIER ET CERCLE

Propriété 1 : *Un polygone régulier est inscriptible dans un cercle. C'est-à-dire que, pour n'importe quel polygone régulier, il existe un cercle passant par tous les sommets de ce polygone.*

Nous allons démontrer cette propriété pour un polygone quelconque à n côtés que nous appellerons P_n . On appelle A_0 , A_1 , … , A_{n-1} les sommets de ce polygone. La figure [11] représente une partie de celui-ci.

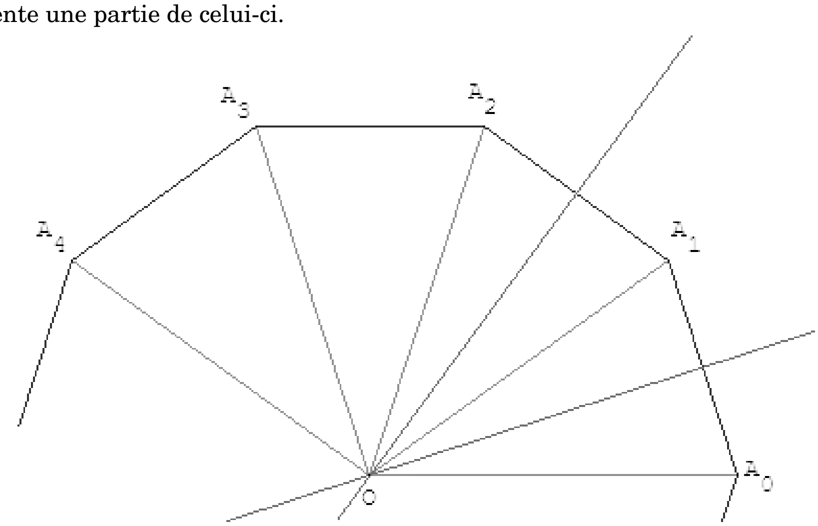


Fig. 11.

Soit (d_0) et (d_1) les médiatrices respectives des segments $[A_0A_1]$ et $[A_1A_2]$. Comme les droites (A_0A_1) et (A_1A_2) ne sont pas parallèles, les droites (d_0) et (d_1) se coupent en O. Nous allons établir que O est équidistant de chaque sommet du polygone P_n .

$OA_0 = OA_1 = OA_2$ car O est le centre du cercle circonscrit aux triangles $A_0A_1A_2$, et $A_0A_1 = A_1A_2$. Les triangles OA_0A_1 et OA_1A_2 sont égaux car les côtés sont égaux chacun à chacun. Nous en déduisons :

$$\widehat{OA_0A_1} = \widehat{OA_1A_0} = \widehat{OA_1A_2} = \widehat{OA_2A_1} = \frac{1}{2}\ \widehat{A_0A_1A_2}\ .$$

Les angles aux sommets étant égaux, on a aussi : $\widehat{OA_2A_1} = \widehat{OA_2A_3}$, donc (OA_2) est la bissectrice de l'angle $\widehat{A_1A_2A_3}$, et comme $A_1A_2 = A_2A_3$, l'image de A_1 dans la symétrie d'axe (OA_2) est A_3 .

Du résultat précédent, on déduit que $OA_3 = OA_1$. Par conséquent le point A_3 appartient au cercle de centre O passant par A_0 .

On procède de la même manière pour le point A_4 , puis de proche en proche pour les autres sommets du polygone P_n . Ainsi, P_n est inscriptible dans un cercle.

Propriété 2 : *Les angles au centre d'un polygone régulier sont égaux et valent* $360/n$. *C'est-à-dire, dans le cas d'un polygone* P_n *de sommets* A_0 , A_1 , … , A_{n-1} , *on a :*

$$\widehat{A_0OA_1} = \widehat{A_1OA_2} = \ldots = \widehat{A_{n-2}OA_{n-1}} = \widehat{A_{n-1}OA_0} .$$

En effet, les triangles OA_0A_1 , OA_1A_2 , … , $OA_{n-1}A_0$ sont égaux, car pour chaque triangle, les côtés sont égaux chacun à chacun, donc les angles au centre sont égaux. L'angle plein ayant pour mesure 360°, on en déduit que la mesure de l'angle au centre est : $360/n$.

ANNEXE C

ANGLE DIEDRE DU DODECAEDRE

L'angle dièdre d'un polyèdre est l'angle formé par deux faces consécutives. Pour calculer celui du dodécaèdre, nous le choisissons de côté 1.

On considère le tétraèdre régulier SABC (figure [12]) de sommet S formé par les arêtes issues du dodécaèdre. On a SA = SB = SC = 1 et $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 108°$.

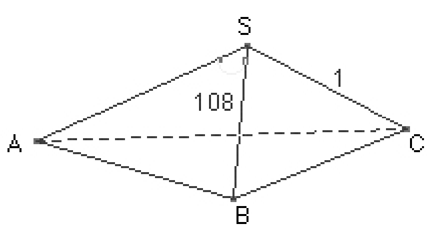


Fig. 12

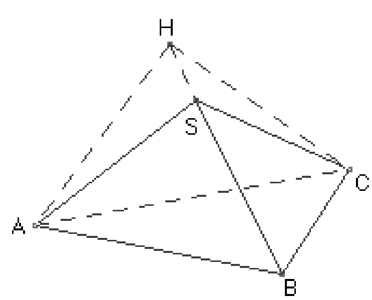


Fig. 13

On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle SAB, H est aussi le pied de la hauteur issue de C dans le triangle SBC. L'angle entre deux faces du tétraèdre est une mesure de l'angle $\widehat{AHC}$ dans le triangle AHC (figure [13]).

Commençons par calculer AH :

Le triangle SAB est isocèle de sommet principal S tel que SA = SB = 1 et $\widehat{ASB} = 108°$.

On en déduit que $\widehat{SAB} = \widehat{SBA} = 36°$. Soit K le milieu de [AB] (figure [14]).

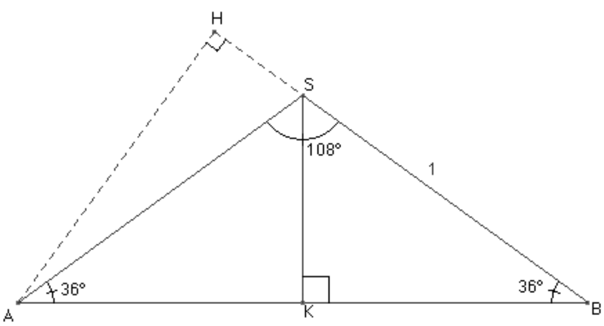


Fig. 14

Dans le triangle KAS, rectangle en K, AK = $cos36°$, donc AB = $2.cos36°$.
Dans le triangle HAB, rectangle en H, AH = AB.$sin36°$, donc, AH = $2.sin36°cos36°$.

Pour faciliter les calculs posons $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ainsi : $cos36° = \varphi/2$ et $sin36° = \sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4}} = \frac{\sqrt{3-\varphi}}{2}$.

Et donc,

$$AC = AB = \varphi$$

$$AH = \varphi \times \frac{\sqrt{3-\varphi}}{2}$$

Rappelons à présent la formule d'Al Kashi : *Dans un triangle* ABC (figure [15]), *si on pose* BC = a, AC = b et AB = c , *on a* : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos\,\hat{A}$

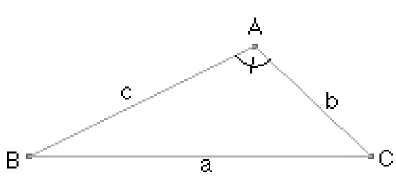


Fig. 15

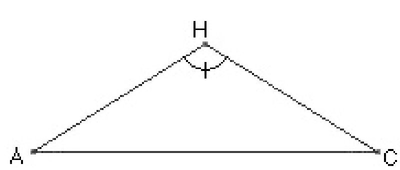


Fig. 16

On applique cette formule dans le triangle AHC (figure [16]) :

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 - 2AH.AC.\cos\widehat{H}$$

$$AC^2 = 2AH^2 - 2AH^2\cos\widehat{H} = 2AH^2(1 - \cos\widehat{H})$$

C'est-à-dire, en tenant compte des relations précédentes :

$$\varphi^2 = 2\varphi^2\,\frac{3-\varphi}{4}\,(1 - \cos\widehat{H})$$

D'où,

$$\cos\widehat{H} = 1 - \frac{2}{3-\varphi} = \frac{1-\varphi}{3-\varphi}.$$

En remplaçant φ par sa valeur, on trouve :

$$\cos\widehat{H} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

On en déduit en utilisant la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ que :

$$\sin\widehat{H} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Et donc, comme $\tan\widehat{H} = \sin\widehat{H} / \cos\widehat{H}$:

$$\tan\widehat{H} = -2.$$

En utilisant la relation Arctan $(-a) = -$ Arctan (a) et le fait qu'un résultat d'arc tangente est donné à 180° près, on trouve :

$$\widehat{H} = 180° - \text{Arctan } 2 \approx 116°\,34'.$$

Références :

J.L. Locher, *La magie de M.C. Escher, Taschen, 2000*

Euclide, *Les éléments, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, PUF, 1990*

D. Boutry, *Le pentagone dans tous ses états, Irem de Lille, 2004*

J.C. Carrega, *Théorie des corps : la règle et le compas, Hermann, 1989*

L. Joly, *Les polyèdres : réguliers, semi-réguliers et composés, Blanchard, 1992*