

---

## LES TRANSFORMATIONS EN GEOMETRIE : INTRODUCTION A UNE APPROCHE HISTORIQUE

---

Jean Claude THIENARD  
Irem de Poitiers

Il est illusoire de prétendre communiquer de manière significative les résultats d'une étude sur l'histoire d'un concept mathématique si l'on ne met pas le lecteur en présence des textes qui l'ont créé, développé, fait vivre et sur lesquels se fondent nos interprétations et conclusions.

Le présent article, par sa brièveté, ne peut donc être qu'une introduction à une approche historique du concept de transformation et une invitation à lire la série d'articles consacrés au sujet<sup>1</sup>(\*).

Néanmoins, si la forme brève implique des simplifications, des lacunes, des raccourcis et des affirmations péremptoires faute de produire les référents et donc les éléments de sa critique, elle implique également de ne gar-

der que l'essentiel, de ne focaliser l'attention que sur l'articulation des faits majeurs et peut donc avoir la vertu de fournir au lecteur quelques grands repères qui lui faciliteront ensuite une étude plus approfondie.

Le présent article abordera :

— La genèse et la création de la notion de transformation rapportées à leur contexte historique,

— Le rôle des transformations dans la création, par Poncelet, de la géométrie synthétique moderne,

— Le développement de la géométrie synthétique et de la géométrie projective suscité par l'œuvre de Poncelet,

— La refondation de la géométrie euclidienne, par la notion de mouvement et le rôle fondamental de la translation et de la rotation,

---

(\*) Les notes sont rassemblées en fin d'article.

— L'intégration des différentes géométries en un seul concept et leur subordination à la notion de groupe de transformations,<sup>1</sup>

— La constitution des premières traditions didactiques.

Les titres des différents paragraphes renvoient aux titres des différents articles publiés par l'Irem de Poitiers. Des renvois à ces articles sont faits dans le texte<sup>2</sup>.

### I. La genèse de la notion de transformation. Les premières transformations.

La notion de transformation, étrangère à la géométrie grecque, est en germe dans la création au quattrocento<sup>3</sup> des méthodes de dessin en perspective. Ces méthodes permettaient d'engendrer de façon réglée des formes à partir d'autres : un cercle donnait une ellipse ou une parabole ou... selon les cas. C'est à partir de ces méthodes que Desargues a élaboré un *outil conceptuel qui permet de transporter des propriétés d'une configuration simple (le cercle) à une configuration plus complexe (une conique)*.

Ce qu'a vu Desargues et que n'ont pas vu les créateurs des méthodes du dessin en perspective, c'est que les principes dont sont issues les techniques de ce dessin, matérialisés par exemple par le Portillon de Dürer – à savoir l'intersection du plan du tableau avec les rayons de la pyramide visuelle joignant les points de l'objet à représenter à l'œil – permettaient non seulement d'engendrer une forme à partir d'une autre, mais également de *transporter certaines propriétés* de la configuration initiale à celle obtenue.

Ce que Desargues a vu, c'est que toute conique pouvant, par ces principes, être obtenue

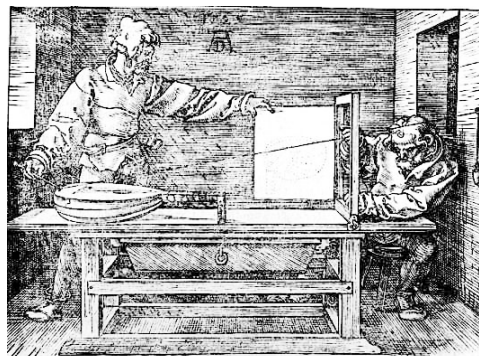
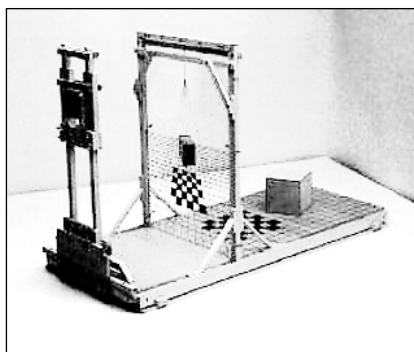
à partir d'un cercle, possèdera toutes les propriétés du cercle qui se conserveront par ce que désormais nous appelons une projection conique ou cylindrique.

Le texte créateur de Desargues s'intitule « *Brouillon project d'une atteinte aux évènements des rencontres du cône avec un plan* ». Ce texte parut sous la forme de feuilles tirées en un petit nombre d'exemplaires en 1639. Il se perdra et ne sera longtemps connu que par des commentaires, jugements ou citations<sup>4</sup>. Il s'agit d'« *...une simple esquisse ou ébauche et encore d'un ouvrage qui n'est pas à examiner en détail comme lorsqu'il paraîtra achevé. Duquel les savants n'en doivent considérer que le fond de la pensée* ».

Le « *Brouillon project* » est rédigé dans le *style hypothético-déductif* des éléments d'Euclide et ne contient donc aucun élément d'ordre heuristique. Tous les éléments sont amenés de façon à conduire le discours de manière linéaire et déductive. Le texte s'ordonne de la manière suivante :

- Un ensemble de définitions<sup>5</sup> ;
- L'introduction et l'étude de l'involution de trois couples de points d'une droite<sup>6</sup>. Dans cette partie figure la démonstration du théorème de la « Ramée » qui établit que l'involution est une propriété projective, c'est-à-dire qui se conserve par projection conique ou cylindrique<sup>7</sup>.
- La démonstration du théorème de Desargues, dans le quadrilatère complet, puis dans le cercle, puis dans toute conique.
- Application du théorème à la théorie des coniques.

La *démarche démonstrative* de Desargues sort des canons instaurés par la tradition



### Le Portillon de Dürer

Le fil tendu d'un point de l'objet à représenter à l'œil de l'observateur matérialise le rayon visuel qui va de ce point à l'œil. Par conséquent, si l'on souhaite que la représentation de l'objet sur le tableau soit fidèle, il faut que le rayon visuel qui va d'un point de l'objet à l'œil et celui qui va de la représentation sur le tableau de ce point à l'œil, soient confondus. Le point doit donc être représenté à l'intersection du plan du tableau et du fil (ou du rayon visuel).

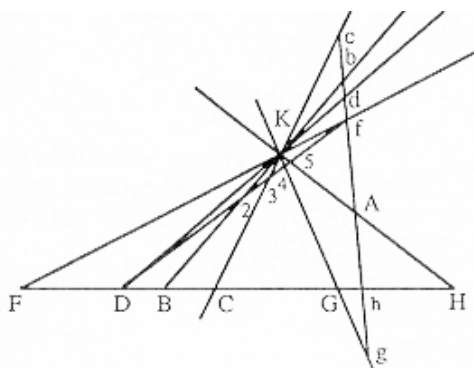
La visée et la méthode du dessin en perspective ayant ainsi été illustrées, des règles vont être élaborées. Dürer en donne quelques illustrations en indiquant comment on peut construire en vraie grandeur l'intersection d'un cône à base circulaire avec un plan, ou ce qui revient au même, comment on peut dessiner la perspective d'un cercle.

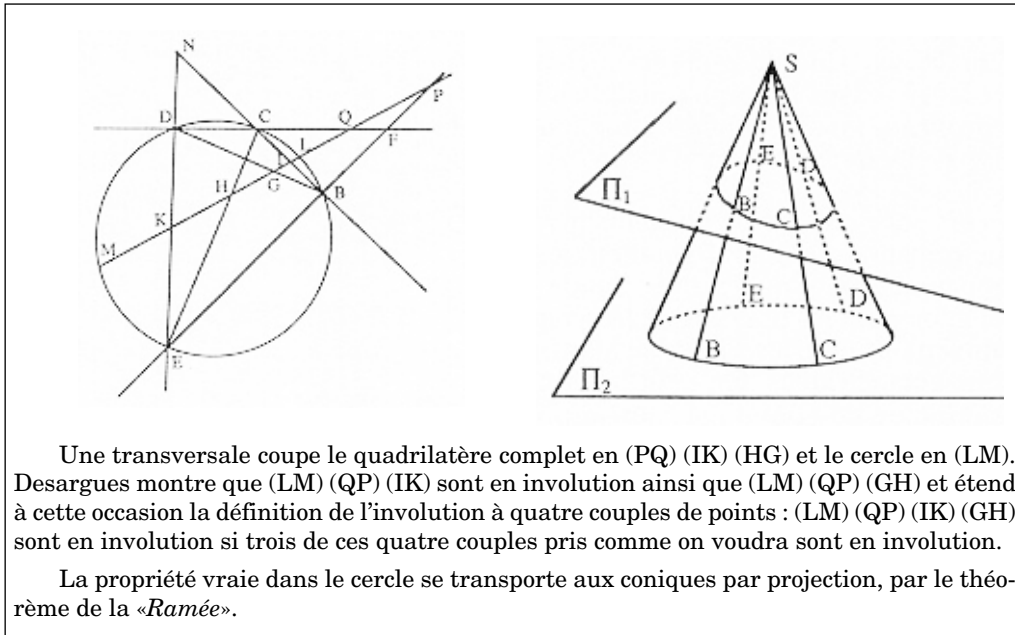
### Théorème de la Ramée :

$(B,H) (D,F) (C,G)$  en involution

implique

$(b, h) (d, f) (c, g)$  en involution.





euclidienne, la seule connue et donc la seule admise à l'époque. Le texte de Desargues est donc *créateur* à plusieurs niveaux :

\* Desargues l'architecte, l'auteur de *Traité*s sur la perspective, la coupe des pierres, la gnomonique voit en perspective et donc dans cette vision, l'ellipse, l'hyperbole et la parabole — perspectives du cercle — participent du cercle quant aux propriétés que conservent les projections (ou perspectives),

\* Desargues *mathématise* la déformation d'une configuration « *par mutation optique d'apparence* »<sup>8</sup>.

a) en introduisant la correspondance entre les points de deux plans, aujourd'hui appelée projection conique ou cylindrique,

b) en traitant de la même façon les faisceaux de droites parallèles et les faisceaux de droites concourantes, par introduction de la notion de points à l'infini : « *But de l'ordonnance à l'infini* »...,

c) en traitant de la même façon cônes et cylindres (sommet rejeté à l'infini),

d) en abandonnant, et c'est un changement considérable, la traditionnelle trichotomie des coniques<sup>9</sup> pour la démonstration de leurs propriétés.

\* Desargues *crée un nouveau mode démonstratif* qu'il qualifie de « *démonstration par le relief* », c'est-à-dire par la perspective. Il utilise alors des considérations de géométrie dans l'espace pour établir des propriétés de

géométrie plane, ce qui est en rupture avec la tradition euclidienne.

Il crée la « *méthode des transformations* » qui consiste à démontrer une propriété sur une configuration complexe — une conique quelconque — en la démontrant tout d'abord sur une configuration simple — le cercle — et en la transportant du cercle à la conique par perspective ou projection.

Desargues, conscient de la généralité et de la fécondité de sa démarche « *Cette démonstration bien entendu s'applique en nombre d'occasions et fait voir la semblable génération...* », saura transmettre ses idées et aura une postérité immédiate et brillante : Pascal « *Essai sur les coniques* »<sup>10</sup> suivi d'un important Traité sur les coniques<sup>11</sup>.

Par la création d'une transformation qui permet d'engendrer dans le plan toute conique à partir d'un cercle et d'en démontrer les propriétés à partir de celles du cercle, Philippe de La Hire, dans ses « *Planiconiques* », introduit dans la géométrie une nouvelle syntaxe démonstrative, dégagée de la sémantique de la vision dans l'espace et donc des référents métaphoriques liés à la perspective. Il fait ainsi faire à la notion de transformation naissante le saut dans l'abstraction qui permettra d'en objectiver le concept .

Cette création trouvera des applications immédiates dans l'oeuvre de Newton : « *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*. » (Voir article I).

Ces idées se perdront au cours du XVIIIème siècle en même temps que se perdra la pratique de la géométrie à la manière des anciens, la vieille science étant supplantée par la géométrie de Descartes<sup>12</sup> et le cal-

cul infinitésimal<sup>13</sup>. Il faudra attendre la fin du XVIIIème siècle pour que les méthodes de la géométrie arguésienne<sup>14</sup> retrouvent de l'intérêt aux yeux des savants, par la création de la géométrie descriptive de Monge<sup>15</sup> et par les ouvrages de Carnot<sup>16</sup>. Les idées de Desargues seront réintroduites par J. V. Poncelet et seront à la base du grand « *Traité des propriétés projectives des figures* »<sup>17</sup> qui fondera la géométrie synthétique moderne et la géométrie projective.

## II. La redécouverte. L'influence de l'oeuvre de Monge. L'oeuvre capitale de Poncelet.

Après plusieurs décennies d'abandon, les méthodes de la géométrie seront remises en usage dans l'oeuvre de G. Monge. Monge se fit reconnaître alors qu'il était chargé de dessiner des plans et de réaliser des modèles en plâtre à l'école royale du génie de Mézières, en inventant une méthode graphique qui devait rapidement donner naissance à la géométrie descriptive, pour résoudre un problème de défilement<sup>18</sup>. Monge, à l'instar de Desargues, s'intéressera toute sa vie aux problèmes posés par les différents corps de métiers : dessin architectural, coupe des pierres et du bois, charpenterie, dessins de machines, de vaisseaux, etc., et trouvera dans ces problèmes matière à géométrie et à inventions géométriques. Cela le conduira à voir, à conceptualiser tous les problèmes à travers la géométrie, et à élaborer ainsi des méthodes qui s'avéreront d'une très grande fécondité. C'est ainsi, pour ne donner qu'un exemple, qu'il introduisit les transformations de contact sous le terme de « *courbes et surfaces réciproques* » afin de résoudre une équation différentielle de la forme  $y = xF(y') + f(y')$  en la transformant en une équation linéai-

re : celle vérifiée par les courbes réciproques des courbes cherchées.

Sa vision géométrique le conduisit ainsi à l'invention de méthodes « géométriques » — une transformation dans l'exemple précédent — qui traduites analytiquement fécondèrent le calcul infinitésimal.

Monge, par ses créations, introduisit dans la géométrie, ce qui était novateur, des méthodes et des procédures réglées voire algorithmiques — les méthodes de la géométrie descriptive — élargissant ainsi le champ d'application de la vieille science en enrichissant sa syntaxe. Il introduisit de plus la *sémantique géométrique* dans l'analyse infinitésimale d'une manière qui s'avéra très opératoire.

La postérité des idées de Monge sera immense, assurée par ses élèves formés dans les institutions qu'il aura fortement contribué à créer (École polytechnique, Ecole normale). Ceux-ci pérenniseront sa vision géométrique des problèmes et créeront la géométrie moderne.

*« Les élèves de Monge et ses premiers successeurs s'appliquent à retrouver géométriquement, sans secours étranger, par les nouvelles méthodes, les nombreux théorèmes acquis par la méthode des coordonnées. A cet égard, il faut citer en première ligne plusieurs travaux de L. Carnot... Et dominant le tout le Traité des Propriétés projectives des figures de J.V. Poncelet, constitue enfin le premier exposé systématique de la «géométrie projective» au sens actuel du mot ».*<sup>19</sup>

L'œuvre de Poncelet est à la fois une œuvre de *redécouverte* et une œuvre de *créa-*

*tion*. Elle redonna vie aux créations de Desargues<sup>20</sup> après un siècle d'oubli et donna une extension considérable à celles de Monge. Elle marqua selon le jugement de G. Darboux « *le vrai commencement de la géométrie synthétique moderne* ».

Le projet de Poncelet est explicité dans la préface : « ... *J'ai cherché avant tout à perfectionner la méthode de démontrer et de découvrir en simple géométrie* ». Il consiste donc à doter la géométrie de méthodes et d'outils, comme il en existe en géométrie analytique, en calcul infinitésimal et en géométrie descriptive, afin de pallier ce qui fait la faiblesse de la géométrie, malgré la somme considérable de résultats accumulés, et qui a été à l'origine de son abandon progressif : « *En effet, tandis que la géométrie analytique offre par la marche qui lui est propre, des moyens généraux et uniformes pour procéder à la solution des questions qui se présentent... tandis qu'elle arrive à des résultats dont la généralité est sans borne, l'autre procède au hasard, sa marche dépend tout à fait de la capacité de celui qui l'emploie...* ».

La réalisation du projet se fera par :

- La création de nouvelles syntaxes démonstratives qui permettront de faire abstraction de la figure — c'est-à-dire des cas particuliers de figures — et donc de donner plus « *d'extension à la simple géométrie* ». Parmi ces syntaxes, citons :

a) le principe de continuité<sup>21</sup> qui a un rôle structurant dans le Traité au niveau heuristique et démonstratif,

b) les éléments (points, droites, etc.) idéaux, imaginaires, à l'infini<sup>22</sup>.

Ces créations renouvellent les types d'énoncés que peut produire la géométrie et



La configuration étudiée est *fondamentale*, puisqu'elle va servir de support à l'introduction des pôles et polaires.

Elle est étudiée en utilisant *toutes les ressources de la méthode des transformations* mises en place dans les chapitres précédents. La configuration n'est pas nouvelle et les propriétés obtenues sont déjà connues.

Elles figurent soit dans le « *Traité des Sections coniques* » de De La Hire (1673 et 1685) soit dans « *l'Algèbre* » posthume de Mac Laurin (1748).

*La méthode des transformations* prouve une fois de plus sa fécondité par les possibilités qu'elle offre pour *repenser* et *fédérer*, simplement, des savoirs anciens. *La démarche suivie est exemplaire* de l'usage fait de la méthode des Transformations par Poncelet dans le *Traité*.

### 1) Étude d'une configuration complexe :

Étant donnés, dans une conique, un quadrilatère inscrit ABCD et le quadrilatère circonscrit formé par les tangentes en A, B, C et D à la conique, déterminer a) les points de concours des différentes lignes et b) les relations entre les points d'une même ligne.

2) On transforme par projection la configuration complexe en une plus simple, Poncelet choisit, cela existe, la projection qui transforme la conique en un cercle et la droite déterminée par  $M = AB \cap CD$  et  $L = BC \cap DA$  en la droite de l'infini. Les deux quadrilatères sont alors transformés en deux rectangles, l'un inscrit et l'autre circonscrit au cercle.

3) Étude des propriétés de la nouvelle configuration.

*Cela posé, par chacun des sommets A, B, C, D menons une tangente au cercle pour former le parallélogramme circonscrit abcd, dont les côtés opposés vont par conséquent concourir à l'infini ; traçons les diagonales AC et BD, ac et bd, elles passeront par le centre P, et, de plus, les deux dernières seront parallèles aux côtés du quadrilatère ABCD, ou concourront avec eux à l'infini. Menons enfin des tangentes aux points E et G, F et H où ces mêmes diagonales coupent la circonférence, elles seront, deux à deux, parallèles entre elles et aux côtés du rectangle inscrit, et iront par conséquent concourir avec eux en deux points à l'infini ; de plus, toutes les droites, partant du centre P et terminées à la circonférence ou aux côtés opposés des deux quadrilatères ABCD, abcd, sont divisés en parties égales en ce point, et peuvent être regardées comme coupées harmoniquement par ce même point et par celui qui est à l'infini, etc.*

*Si l'on se reporte maintenant à la figure primitive, les droites parallèles entre elles seront devenues concourantes en des points de la droite qui représente celle à l'infini ; le centre P sera devenu le pôle de cette droite et tout le reste sera le même de part et d'autre ; donc on a ce théorème :*

**186. Si on inscrit, à une section conique, un quadrilatère quelconque ABCD (fig. 28), et qu'on lui en circonscrive un autre abcd, dont les côtés touchent la courbe aux sommets du premier,**

**1°. Les quatre diagonales de ces deux quadrilatères se croiseront en un même point P.**

**2°. Les points de concours, L et M, l et m, des côtés opposés du quadrilatère inscrit et du quadrilatère circonscrit, seront**



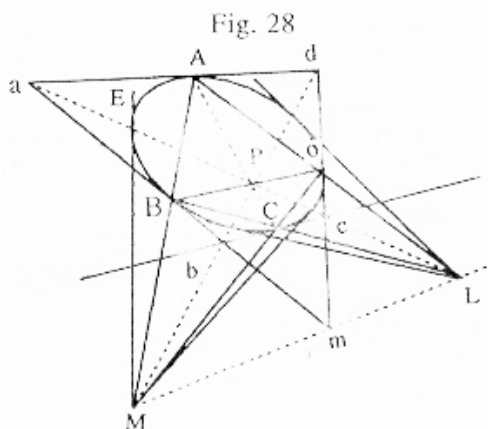
*tous quatre rangés sur une même droite polaire de P.*

**3°.** *Les diagonales du quadrilatère circonscrit iront concourir respectivement aux points L et M où se coupent, deux à deux, les côtés opposés du quadrilatère inscrit.*

**4°.** *Chacun de ces derniers points est le pôle de la droite, ou diagonale, qui passe par l'autre et par le point P ; ou, ce qui revient au même, c'est le point de concours des tangentes qui correspondent à cette diagonale.*

**5°.** *Toute ligne droite, passant par le point P et terminée à la section conique ou à deux côtés opposés de l'un des quadrilatères, est divisée harmoniquement en ce même point et en celui où la droite rencontre sa polaire LM ; et pareille*

*chose a lieu à l'égard des points L, M par rapport aux droites PM et PL dont ils sont les pôles.*



4) *Transport par projection inverse des propriétés projectives, mises en évidence, à la configuration initiale.*

On notera que, d'un point de vue syntaxique, l'opération 4) n'a pas besoin d'être explicitée puisque toute propriété — projective — qui appartient à l'une des figures appartient à l'autre étant donné qu'elles sont projection l'une de l'autre, et qu'il suffit donc de se « reporter » à la figure primitive...

Le texte de la démonstration semble suffisamment clair pour ne nécessiter ni paraphrases, ni explications.

Cette théorie des pôles et polaires conduisit ensuite Poncelet à une ébauche de la Théorie des transformations par polaires réciproques. Il définit en effet l'image par polaire réciproque — par rapport à une conique donnée — d'une courbe quelconque considérée soit,

comme générée par le mouvement d'un point, soit comme enveloppe d'une droite variable. Il termine en remarquant « ... on peut même dire en général, qu'il n'existe aucune relation descriptive d'une figure donnée dans son plan qui n'ait sa réciproque dans une autre figure ; car tout consiste à examiner ce qui se passe dans sa polaire réciproque par rapport à une section conique prise pour directrice... ».

Il y a donc là création d'une méthode, qui permet, par transformation, de découvrir et de démontrer dans le même temps une foule de propriétés nouvelles. Il suffit étant donnée une configuration, de la transformer par polaires réciproques, toute propriété de la configuration initiale se trouve alors reflétée dans la configuration image.

Poncelet et ses contemporains verront immédiatement la fécondité de ce procédé<sup>27</sup> qui permettait de doubler les vérités de la géo-

métrie et qui conduira à la féconde théorie de la dualité développée par Gergonne, Chasles, etc.

Par son « *Traité des propriétés projectives des figures* », Poncelet a réintroduit dans la géométrie la méthode des transformations telle que l'avait imaginée Desargues. Il fait la synthèse des apports de Desargues et Pascal (éléments à l'infini), de Monge (éléments imaginaires, principe de continuité), de De la Hire et Le Poivre (méthode des plans qui deviendra chez Poncelet « *l'homologie* »), de De la Hire, Monge et Brianchon (premiers éléments d'une « *Théorie des pôles et polaires* » utilisée pour la découverte et la démonstration de propriétés nouvelles).

La synthèse de Poncelet est *créatrice de syntaxes nouvelles, de méthodes de démonstration et de découverte générales par les transformations*, organisées en un corps de doctrine, créant ainsi la « *géométrie moderne* », et suscitant une foule de travaux, tant en France qu'en Allemagne, qui aboutiront aux théories de l'homographie et de la dualité de Chasles, aux travaux de Steiner et à l'élaboration de la géométrie projective moderne.

### III. Le concept maîtrisé. L'époque de Chasles.

« *Les travaux de J.V. Poncelet suscitèrent partout les recherches les plus approfondies*<sup>28</sup>. *On chercha à étudier sous toutes leurs faces les principes qu'il avait découverts et à en tirer toutes les conséquences...*

*Partout, on note la plus grande activité, et, comme signe de cette activité mathématique, on peut relever la grande quantité de journaux scientifiques qui prirent naissance*<sup>29, 30</sup>.

M. Chasles s'est fait très tôt le propagandiste des méthodes et concepts introduits par Poncelet, de leur fécondité, de leur facilité d'application « *des ressources puissantes que la géométrie a acquise depuis une trentaine d'années (et qui) sont comparables sous plusieurs rapports aux méthodes analytiques, avec lesquelles cette science peut rivaliser désormais sans désavantage dans un ordre très étendu de questions* »<sup>31</sup>.

Convaincu de la fécondité des méthodes nouvelles et de leur pouvoir fédérateur, Chasles formulera à la fin de l' « *Aperçu historique* » le projet de mettre de l'ordre dans « *un chaos de propositions nouvelles trouvées au hasard* » et dans un amoncellement de méthodes « *encore éparses dans les mémoires des géomètres qui s'en sont servis* » afin de les rendre propres à une large diffusion et de pallier ainsi « *la véritable cause de l'éloignement pour la géométrie rationnelle* ».

Ce projet trouva une première mise en œuvre par un mémoire « *La dualité et l'homographie* » sur « *les deux doctrines générales de déformation et de transformation des figures* ». Il posa dans ce mémoire le problème de la détermination du « *principe de transformation des figures* » et du « *principe de déformation des figures* » dont les paradigmes respectifs étaient la transformation par polaires réciproques<sup>32</sup>, la projection, l'homologie, etc., sous leur forme la plus générale.

L'énoncé du principe de dualité est donné en deux parties. La première est relative « *à la corrélation des relations descriptives des figures* » et la seconde « *à la corrélation de leur relation de grandeurs* ». <sup>33</sup>

**Première partie.** *Lorsqu'une figure de forme quelconque est donnée, on peut tou-*

*jours former, d'une infinité de manières, une autre figure, dans laquelle les points, les plans, les droites, correspondront respectivement à des plans, à des points, à des droites de la première figure.*

*Les points situés sur un même plan, dans l'une des deux figures, auront pour correspondants des plans passant tous par le point qui correspond à ce plan.*

*Les points situés sur une même droite, dans l'une des deux figures, auront pour correspondants, dans l'autre figure, des plans passant par la droite qui correspondra à la première.*

*Les points situés sur une surface courbe, dans la première figure, auront pour correspondants, dans la seconde, des plans tangents à une autre surface courbe ; et les plans tangents à la première surface, en ces points, auront pour correspondants précisément les points de contact des plans tangents à la seconde surface.*

*Enfin, tous les points situés à l'infini, considérés comme appartenant à la première figure, seront regardés comme situés sur un même plan, et tous les plans qui leur correspondront passeront par un même point, qui correspondra à ce plan situé à l'infini.*

Ce sont ces deux figures que nous appellerons *corrélatives*.

**Deuxième partie.** *Dans deux figures corrélatives, à quatre points de la première, situés en ligne droite, correspondent, dans la seconde, quatre plans passant par une même droite, et dont le rapport anharmonique<sup>34</sup> est toujours égal au rapport anharmonique des quatre points.*

*Et, à quatre plans de la première figure, passant par une même droite, correspondent dans la seconde figure, quatre points*

*situés en ligne droite, dont le rapport anharmonique est égal précisément au rapport anharmonique des quatre plans.»*

Le principe d'homographie s'obtient alors en répétant deux fois le mécanisme de transformation des figures par le principe de dualité.

*« Une figure de forme quelconque étant donnée dans l'espace, on peut toujours concevoir une seconde figure du même genre, et jouissant des mêmes propriétés descriptives que la première, c'est-à-dire qu'à chaque point, à chaque plan, à chaque droite de la première figure, correspondront, dans la seconde, un point, un plan, une droite.*

*Aux points à l'infini dans la première figure, correspondront dans la seconde, des points situés tous sur un même plan, de sorte qu'à des faisceaux de droites parallèles appartenant à la première figure, correspondront, dans la seconde, des faisceaux de droites concourantes en des points situés tous sur un même plan.*

*Les deux figures auront entre elles des relations de grandeur, qui consistent en ce que :*

*\* le rapport anharmonique de quatre points situés en ligne droite dans la première figure, sera égal au rapport anharmonique des quatre points homologues dans la seconde figure ;*

*\* le rapport anharmonique de quatre plans de la première figure, passant par une même droite, sera égal au rapport anharmonique des quatre plans homologues, dans la seconde figure. »*

Dans le mémoire de Chasles, les transformations ou déformations sont caractérisées en tant que classe de modes de corres-

pondance entre figures, ayant la propriété générale de refléter ou de transporter certains types de propriétés<sup>35</sup>.

M. Chasles fait ainsi apparaître, dans sa forme la plus générale, car *décontextualisée*, la grande invention : le couple *transformation-invariant*, qui confère à la « *géométrie moderne* » ses méthodes de découverte et de démonstration ainsi que des principes fédérateurs pour les multiples résultats accumulés au hasard des découvertes. Par ce travail d'abstraction, il contribue ainsi à *élever au rang de méthode* les diverses créations de Desargues et Poncelet liées à une utilisation systématique de modes de correspondance entre figures.

En Allemagne, J. Steiner œuvra à la divulgation de ces méthodes par son enseignement et par ses travaux dont la fécondité et la puissance contribuèrent fortement à attirer l'attention sur l'intérêt des méthodes de « *géométrie pure* ». Le projet de Steiner est exprimé dans la préface de « *Etude systématique de la dépendance des formes géométriques l'une de l'autre* »<sup>36</sup>. « *Par ce livre on a tenté de découvrir l'organisation qui relie entre eux les phénomènes les plus disparates de l'espace géométrique. Il existe un petit nombre de relations fondamentales toutes simples par où se révèle le schéma général suivant lequel la masse des théorèmes se déploie logiquement sans aucune difficulté ; l'ordre pénètre le chaos et l'on voit toutes les parties s'enchaîner naturellement...* ».

Les œuvres de Chasles et Steiner constituent un *aboutissement* des méthodes et recherches initiées par Desargues et Poncelet dans le cadre de la géométrie des figures hérité des grecs et plus particulièrement dans

celui de la géométrie des coniques<sup>37</sup> qui, dès les origines, apparaît comme le lieu privilégié pour l'élaboration, le développement et l'application de ces méthodes.

Il y a *aboutissement* car ces auteurs :

- *ont, par leur œuvre et leur enseignement*<sup>38</sup>, *par les résultats nouveaux qu'ils ont découverts et les démonstrations simples de résultats plus anciens, par la présentation dans une théorie unifiée de savoirs épars et apparemment sans liens, convaincu de la fécondité, de la puissance et donc de l'intérêt, des méthodes par transformation ou déformation.*

- *ont donné la forme la plus générale possible aux modes de transformation et de déformation définis et utilisés par leurs prédécesseurs en élaborant les théories de la dualité et de l'homographie.*

- *ne sont pas sortis, comme cela a déjà été dit, des cadres initiaux de la géométrie des figures et de la théorie des coniques*<sup>39</sup>.

Ce dernier point mérite d'être souligné, car les transformations vont, dans les décennies 1860-1880, être utilisées à d'autres fins que celles qui consistent à construire des figures ou à découvrir et établir leurs propriétés. Elles vont, en effet, jouer un rôle de premier plan :

- dans les reconstructions de la géométrie qui accompagneront les réflexions sur l'origine des axiomes suscitées par la diffusion des « *géométries non euclidiennes* »<sup>40</sup>,

- dans la caractérisation et la subordination des diverses géométries par la notion de groupe de transformations qui sera opérée par Klein.

#### IV. Le problème du mouvement en géométrie. Les apports externes.

Des travaux contemporains de ceux de Poncelet et de Chasles sur :

— la description du mouvement d'un corps dans l'espace et corrélativement d'une figure dans son plan (Poincaré, Chasles...),

— la théorie des parallèles (Lobatchevski, Bolyai, Gauss...)<sup>41</sup>,

— les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie (Riemann)

vont conduire les géomètres à se questionner sur l'origine des axiomes de la géométrie vraie : celle d'Euclide. Cela les amènera à introduire de façon explicite le mouvement dans la géométrie et en dernière instance à refonder celle-ci sur les mouvements de translation et de rotation qui conduiront, aux niveaux des syntaxes démonstratives, aux translations et rotations géométriques par considération des seuls états initiaux et finaux des figures. (Voir article IV).

L'histoire de cette évolution est complexe et foisonnante. Les quelques lignes qui suivent ne peuvent qu'en donner sommairement quelques étapes de façon très lacunaire.

A) *Le changement dans les croyances. Les points de vue de Gauss et Lobatchevski.*

Jusqu'à la fin de la première moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle, la croyance répandue dans les milieux savants était que la géométrie d'Euclide était la seule science de l'espace qui pouvait exister, tout autre postulat, demande ou axiome que ceux d'Euclide devant nécessairement conduire à l'absurdité !

Dans cette croyance, la question de la vérité du V<sup>ème</sup> Postulat d'Euclide<sup>42</sup> ne se posait pas. Cette vérité était a priori indépendante de toute démonstration. Cette croyance se doublait de celle de la démontrabilité de cet énoncé dans le cadre des Éléments eux-mêmes, d'où les multiples tentatives de démonstration faites tout au long de l'histoire<sup>43</sup>.

Le premier qui semble avoir douté de l'existence d'une telle démonstration semble être Gauss « *Je suis de plus en plus convaincu que l'on ne peut démontrer par le seul raisonnement la nécessité de la géométrie euclidienne. Il est possible que dans l'avenir nous puissions avoir des idées sur la nature de l'espace qui aujourd'hui nous sont inaccessibles. Ainsi la géométrie ne peut être à côté de l'arithmétique, qui est de nature a priori, mais plutôt à côté de la mécanique* »<sup>44</sup>.

Le premier à avoir transformé ce doute en certitude est Lobatchevski<sup>45</sup>. En développant une géométrie, sans contradiction, sur la base d'une négation du Postulat d'Euclide « *Il existe une droite  $a$  et un point  $A$  non situé sur celle-ci, tels que le point  $A$  soit traversé par au moins deux droites qui ne coupent pas la droite  $a$  tout en étant dans le même plan* ». Lobatchevski établissait définitivement que toute tentative de démonstration du Postulat était vouée à l'échec, que d'autres géométries que celle d'Euclide étaient *logiquement possibles*. En conséquence, la *vérité* de la géométrie d'Euclide, non remise en question et évidente puisqu'elle était le cadre de l'expression des lois de la philosophie naturelle<sup>46</sup>, ne pouvait être établie que par l'expérience. C'est ce qu'exprime clairement Lobatchevski lui-même, croyant pouvoir établir la vérité de la géométrie d'Euclide par des expériences astronomiques : « *Dans mon mémoire sur les principes de la*

*géométrie, j'ai prouvé en m'appuyant sur quelques observations astronomiques, que dans un triangle dont les côtés sont de la même grandeur que de la terre au soleil, la somme des angles ne peut différer de deux droits au plus que de 0,0003 secondes sexagésimales. On doit donc regarder la proposition de la géométrie usitée comme démontrée avec rigueur* ». <sup>47</sup>

L'irruption des géométries non euclidiennes, leur diffusion dans les années 1860 auront pour effet de promouvoir les thèses matérialistes qui subordonnent la géométrie à la physique et plus particulièrement à la mécanique. Ces thèses seront corroborées et renforcées par le mémoire de Riemann sur « *les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie* » (1854). Riemann renouvelant le « *concept* » même de géométrie, montrant la diversité des géométries possibles sur une variété de dimension  $n$ , renvoie explicitement à la physique pour les critères de choix.

En résumé, la possibilité reconnue d'une multiplicité de géométries possibles, toutes logiquement valides, pose le problème de la justification du choix euclidien fait pour l'expression des lois de la physique. Ces choix ne peuvent être fournis que par la physique elle-même et plus particulièrement par la mécanique dont les concepts fondamentaux et primordiaux, notion de solide invariable, mouvement d'un solide dans l'espace, vont fournir aux savants de l'époque le cadre de la justification, voire de la refondation des axiomes d'Euclide.

B) *Le problème de l'origine des axiomes. Les travaux de refondation de la géométrie.*

Helmholtz en Allemagne (1865) et à sa suite Hoüel en France (1867) accréditèrent la thèse

selon laquelle « *les propositions fondamentales de la géométrie correspondent à des relations physiques dont l'expérience seule peut nous fournir la connaissance* », et menèrent des recherches ayant pour objet de caractériser la géométrie de l'espace physique par les propriétés des mouvements. Helmholtz élaborera le premier une caractérisation de la géométrie de l'espace physique par les propriétés des mouvements envisagés comme transformations de points dans une région de l'espace qui aura une postérité considérable avec notamment les travaux de Lie.

En France, ce mouvement d'idées trouvera un zéléateur en la personne de J. Hoüel par son « *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire* ». J. Hoüel s'y élève contre « *... une suite d'idées inexactes sur la nature et l'origine des vérités primordiales de la science de l'étendue* » dont la source est « *... le faux point de vue métaphysique où l'on s'est placé en considérant la géométrie comme une science de raisonnement pur, et ne voulant admettre parmi ces axiomes que des vérités nécessaires et du domaine de la pure raison* ». Cela le conduit à donner aux axiomes un statut différent « *des autres vérités géométriques que l'expérience nous révèle en dehors de toute étude scientifique et que la géométrie rattache à ces axiomes comme conséquences* ». Il y a donc eu erreur sur la nature de la géométrie qui « *... comme la mécanique et la physique a pour objet d'étude une grandeur concrète, l'étendue, affectant nos sens d'une certaine manière* ». <sup>48</sup>

J. Hoüel illustre ces thèses en discutant, ce qui reste à ses yeux, en dépit de tous les livres parus sur le sujet, le modèle d'exposition des *Eléments de Géométrie* : le traité d'Euclide. J. Hoüel traducteur de Lobatchevski, Bolyai, Riemann sait qu'il y a mul-

tiplicité des géométries possibles et en déduit, conformément à l'idéologie de l'époque que « *la nature intime des vérités géométriques* » n'est pas de l'ordre de la logique mais de celui de l'expérience. La géométrie d'Euclide est la « *géométrie réelle ou expérimentale* » autrement dit la géométrie vraie et ses axiomes nous sont révélés par l'expérience, l'instrument de la révélation étant le mouvement.

Aux axiomes, demandes, définitions du Livre I d'Euclide, J. Hoüel propose « *d'en ajouter une... dont Euclide fait souvent un usage tacite, quoiqu'il semble avoir voulu d'abord l'éviter.... Nous demandons qu'une figure invariable de forme puisse être transportée d'une manière quelconque dans son plan ou dans l'espace* ». <sup>49</sup>

Pour J. Hoüel, l'origine des « *idées géométriques* », la « *véritable source* » des propositions est contenue dans les termes de la nouvelle demande :

« *Toute la géométrie est fondée sur l'idée de l'invariabilité des formes. On commencera par admettre qu'il existe dans les figures une certaine propriété qui subsiste lorsque ces figures se trouvent transportées dans une autre région de l'espace* ».

Les concepts de base de la mécanique fondent la géométrie <sup>50</sup>. L'étude géométrique du mouvement faite par Poincaré <sup>51</sup>, Chasles, etc., en fournit les syntaxes par la translation et la rotation. Ces idées vont trouver une traduction didactique dans les « *Nouveaux Eléments de Géométrie* » de Ch. Méray (1874).

C) *La traduction didactique de Charles Méray.*

Ch. Méray reprend à Helmholtz et à Hoüel cette idée que l'expérience du mouve-

ment des corps dans l'espace est la matrice de toutes les idées géométriques et en fait la pierre angulaire d'un ouvrage qui vise à améliorer l'enseignement de la géométrie élémentaire. La démarche suivie, dans le but « *d'élever l'enseignement théorique sans imposer plus d'efforts aux élèves, simplifier l'enseignement pratique sans l'abaisser à ne mettre en jeu que la mémoire... chercher à ôter aux débuts de la géométrie leur caractère aride et tout à fait scolastique* », se fait par des innovations hardies qui bouleversent l'ordre d'exposition traditionnel. Ch. Méray innove sur deux points « *J'ai abandonné la distinction d'usage entre la géométrie plane et la géométrie dans l'espace... puisque la nature ne nous offre que des figures de l'espace* ». <sup>52</sup>

« *J'ai changé la base première des raisonnements en substituant d'autres faits aux axiomes reçus* ». Ces faits sont :

- l'expérience de l'invariabilité des corps solides qui par abstraction conduit à la notion de figure invariable, c'est-à-dire qui peut être « *déplacée dans l'espace* » sans être altérée dans sa forme et ses dimensions,
- l'expérience de la coïncidence qui conduit à celles de figures égales. Deux figures solides sont égales quand on peut (au moins par la pensée) les amener à coïncider.

Ce qui conduit à préciser la notion de déplacement « *on entend par déplacement d'une figure un mouvement limité, en vertu duquel elle passe d'une première position dite initiale, à une seconde dite finale* ».

Méray définit et étudie les deux déplacements qui permettent en mécanique de rendre compte des mouvements d'un corps dans l'espace : le mouvement de translation et le

mouvement de rotation, qui sont des déplacements.

Le mouvement de translation est alors le révélateur des parallélismes et de leurs propriétés et le mouvement de rotation des perpendicularités et de leurs propriétés. Le postulat d'Euclide devient alors une banale propriété qui dérive de la possibilité d'amener une droite en une autre position par translation. La géométrie ainsi construite aux référents externes : « *la réalité des choses* », « *la nature* », « *les faits* », « *des vérités considérables par elles-mêmes* », « *... que l'origine première des vérités géométriques est incontestablement expérimentale (il est bien difficile de voir dans l'évidence mathématique autre chose qu'un souvenir net et présent de l'exactitude de faits simples mille et mille fois observés...)* », est alors *nécessairement euclidienne*. Elle est la géométrie vraie, la géométrie expérimentale fondée sur les mouvements de translation et de rotation qui rendent compte de façon infinitésimale et finie de tout déplacement des figures ou des corps solides.

Cette reconstruction de la géométrie a amené au premier plan deux mouvements qui furent traités syntaxiquement comme des transformations par la seule considération des états initiaux ou finaux : la translation et la rotation<sup>53</sup>. Celles-ci occuperont une place fondamentale dans l'œuvre de F. Klein qui caractérisera les géométries par des groupes de transformations.

## V. Les transformations et la classification des géométries.

Au début des années 1870 émerge une nouvelle conception de la géométrie dans laquelle la notion de transformation occupe une

place centrale et sera dotée d'un nouveau statut. Les travaux de Riemann et Helmholtz déjà mentionnés, ceux de Galois et Jordan sur la théorie des groupes eurent pour postérité immédiate ceux de S. Lie et de F. Klein<sup>54</sup> qui imposèrent, à l'issue d'une synthèse originale et novatrice, le point de vue selon lequel toute géométrie est caractérisée par un groupe de transformations, l'œuvre déterminante est celle de F. Klein connue sous le nom de « *Programme d'Erlangen* ».

Ce texte, publié en 1872, « *considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes* » expose un « *principe général* » qui permet d'édifier la géométrie élémentaire et la géométrie projective (dont les liens étaient mal élucidés) et, par extension, de décrire les rapports de dépendance qu'ont les différentes géométries entre elles : subordinations ou isomorphie.

Klein commence par caractériser les propriétés qui font l'objet de la géométrie élémentaire par un groupe de transformations, le groupe principal :

*« Il y a des transformations de l'espace qui n'altèrent en rien les propriétés géométriques des figures. Par nature, ces propriétés sont, en effet, indépendantes de la situation occupée dans l'espace par la figure, de sa grandeur absolue, et enfin aussi du sens dans lequel ses parties sont disposées. Les déplacements de l'espace, les transformations avec similitude et celles par symétrie n'altèrent donc pas les propriétés des figures, non plus que les transformations composées avec les précédentes. Nous appelons groupe principal de transformations de l'espace l'ensemble de toutes ces transformations ; les propriétés géométriques ne sont pas altérées par les transformations du groupe principal. La réci-*



*proque est également vraie : les propriétés géométriques sont caractérisées par leur invariance relativement aux transformations du groupe principal ».*

Klein étend ensuite ce point de vue :

*« comme généralisation de la géométrie se pose ainsi la question générale que voici :*

*Etant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*

*On donne une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité ; développer la théorie des invariants relatifs à ce groupe».*

Ce point de vue permet à Klein :

- de subordonner les géométries et de mettre ainsi en évidence leurs liens internes. Il montre ainsi que le groupe des transformations projectives contient le groupe des transformations affines (les transformations projectives du plan qui laissent invariantes la droite à l'infini) qui contient lui-même le groupe de la géométrie élémentaire, etc.,
- de montrer :
  - l'isomorphie de la géométrie projective de la droite et de la géométrie projective des systèmes de points d'une conique,
  - l'identité de la géométrie par rayons vecteurs réciproques dans le plan et de la géométrie projective sur une surface du second degré,
- de montrer que la géométrie de Lobatchevski est subordonnée à la géométrie projective.

Klein a donc mis en évidence le fait que le concept de groupe de transformations permettait d'établir des relations entre les dif-

férentes géométries (liens de subordination) — de sérier et de classer les différents types de propriétés géométriques (projectives, métriques, etc.) — de dégager l'identité structurale de géométries en apparence étrangères les unes aux autres.

Les travaux de F. Klein opèrent un déplacement de l'intérêt porté aux transformations géométriques de l'instrumental vers le structural qui aura pour effet de libérer la géométrie de ses bases empiriques, d'éliminer l'intuitif des raisonnements et de libérer les résultats produits de l'adéquation à un certain type d'expérimental ou d'observable comme mode de validation ultime<sup>55</sup>. Cela implique un renouvellement des conceptions quant aux rapports entre le théorique et l'expérimental qui ne peut être développé ici<sup>56</sup>.

Dans les décennies qui suivront le programme d'Erlangen, les transformations seront au cœur de la géométrie<sup>57</sup> et Poincaré voit dans la notion de groupe de déplacements la notion primordiale et fondamentale de la géométrie<sup>58</sup>, mieux encore : une catégorie de l'entendement « *Dans notre esprit préexistait l'idée latente d'un certain nombre de groupes : ce sont ceux dont Lie a fait la théorie* ».

## VI. Les premières traditions didactiques.

La première tradition didactique<sup>54</sup> fut instaurée par M. Chasles lui-même, par son enseignement à la chaire de Géométrie Supérieure à la Faculté des Sciences de Paris et par la publication de son *Traité de Géométrie Supérieure*. Paradoxalement, alors qu'il avait été l'apologiste et le propagandiste de la méthode des transformations dans l'« *Aperçu historique* »<sup>59</sup>, après avoir contribué lui

même à lui donner la plus grande extension possible par ses travaux sur l'homographie et la dualité, il donne à cette méthode structurante et unifiante pour l'ensemble des savoirs géométriques, une place marginale.

Il ne leur consacre en effet que trois des trente cinq chapitres du *Traité de Géométrie Supérieure* :

Chapitre XXV « Théorie des figures homographiques ».

Chapitre XXVI « Théorie des figures corrélatives ».

Chapitre XXVII « Des applications de la théorie des figures homographiques et de celles des figures corrélatives regardées comme méthodes de démonstration »

Ce chapitre donne la clé du paradoxe évoqué ci-dessus. Chasles y rappelle que :

« Ces transformations donnent le moyen d'appliquer à une figure les propriétés d'une figure plus simple... ».

« Ou bien un problème étant proposé à l'égard d'une figure, on cherche à le résoudre sur la plus simple des figures transformées ».

« Avec une figure donnée, on en forme une seconde, aux propriétés de la première figure correspondent des propriétés de la seconde qui dérivent de la première en vertu des propriétés générales qui ont lieu entre deux figures corrélatives ».

Chasles y explique ensuite « Pourquoi l'on ne fait pas usage dans le cours de cet ouvrage des méthodes de transformation ». Bien que ne reniant pas les « méthodes ingénieuses qui ont enrichi la science d'une foule de vérités dont on n'avait pas eu l'idée aupa-

ravant... et que la géométrie doit connaître », Chasles évite d'y recourir car, « Par les méthodes de transformation, on fait un théorème déterminé avec un autre théorème déjà connu. On peut former ainsi une collection plus ou moins ample de propositions », et les propositions obtenues « manquent de liens entre elles », ne se laissant pas « déduire les unes des autres » et ne peuvent donc pas former un corps de doctrine. « Nous avons cherché, au contraire, à former un ensemble de propositions constituant par leur enchaînement naturel des théories et un corps de doctrines susceptibles d'applications fécondes dans toutes les parties de la géométrie. »

« Il nous a donc fallu démontrer directement chacune de ces propositions, ... par les propres ressources que peuvent offrir les théories auxquelles elles se rapportent ».

Chasles écrit un traité ; un traité obéit à une logique déterminée par le modèle des *Éléments* d'Euclide resté canonique jusqu'aux temps présents. Les transformations sont marginalisées au nom de cette logique. Néanmoins, une grande partie du traité de *Géométrie Supérieure* est consacrée à l'étude de notions dont l'importance a été révélée par la méthode des transformations : « *Théorie du rapport anharmonique, de la division homographique et de l'involution* » qui se rapportent aux invariants des projections centrales, révélés par Desargues et Poncelet. Ces théories conduisent à celles des divisions et faisceaux homographiques qui ont un rôle central dans le *Traité*.

D'autres cours et traités vont suivre celui de M. Chasles, dans lesquels la méthode des transformations se verra conférer l'importance qui lui a été reconnue à partir des travaux de J.V. Poncelet<sup>60</sup>. Paul Serret dans

« Des Méthodes en Géométrie »<sup>61</sup> la décrit dans la onzième méthode : « Par la transformation des figures — Réflexions générales sur l'importance de cette méthode » :

*« Cette méthode, l'une des plus importantes et des plus fécondes de la géométrie est certainement celle qui a le plus puissamment servi les géomètres de notre siècle dans leurs efforts pour reculer les bornes de la science de leurs prédécesseurs. Ceux-ci paraissent l'avoir à peu près ignorée... »*

*Dans notre siècle au contraire, d'éminents géomètres, parmi lesquels nous citerons M.M. Poncelet, Chasles et Dupin, ont cultivé cette méthode avec une sorte de prédilection...*

*C'est donc de nos jours seulement que cette méthode a réellement pris naissance ; et des fruits qu'elle a déjà portés, des rapprochements inattendus qu'elle établit si fréquemment entre des figures diverses, il est permis de conclure qu'elle constitue la véritable méthode en géométrie, et doit le mieux contribuer à agrandir indéfiniment le champ des vérités géométriques... ».*

P. Serret exemplifie son propos par une présentation, une étude et diverses applications en géométrie plane et en géométrie sphérique de la transformation par rayons vecteurs réciproques<sup>62</sup>.

M. Höuel dans « Introduction à la géométrie supérieure »<sup>63</sup> qui se propose de mettre à la disposition des élèves et candidats aux concours les méthodes modernes, bien que prenant pour base le traité de M. Chasles redonne à la méthode des transformations un rôle central.

*« On sait que les théories de l'ancienne géométrie, telles que les expose le traité de*

*Legendre, sont devenues insuffisantes pour résoudre une foule de questions que les élèves sont appelés à traiter. Le but que nous proposons est d'exposer... les méthodes modernes qui deviennent alors indispensables<sup>64</sup>. Pour cela, nous n'avons pu mieux faire que de prendre pour base de notre travail le Traité de Géométrie Supérieure de M. Chasles... »*

*Le traité de M. Chasles est entièrement fondé sur le rapport anharmonique : en effet, un grand monument a besoin d'unité ; mais un élève, aux prises avec une question difficile, frappe à toutes les portes pour demander une solution... Aussi nous avons rappelé les idées dont M. Poncelet a tiré un si grand parti... ».*

Le traité se termine par un chapitre consacré à « la rotation des figures et qui n'est pas exclusivement consacré à la géométrie pure »<sup>65</sup>.

Ces méthodes ne feront longtemps que l'objet d'appendices dans les traités de géométrie élémentaire<sup>66</sup>.

Des éléments de « géométrie moderne » liés à la théorie des transformations : inversion, perspective, homographies,... seront introduits au niveau de la classe de mathématiques lors de la réforme 1902 - 1905 (voir article VI). La translation, le mouvement de rotation, l'homothétie feront leur apparition dans le programme de la classe de mathématiques élémentaires en 1891, selon les conceptions exprimées par J. Höuel, développées par Ch. Méray (voir articles IV et V). La tradition didactique qui se constituera pour l'enseignement de ces notions nouvelles sera déterminée par le livre de J. Petersen : « problèmes de constructions géométriques »<sup>67</sup> proposant « Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques avec

*application à plus de 400 problèmes* ». Dans ce livre, J. Petersen met en évidence une classe de problèmes, les constructions géométriques et les recherches de lieux géométriques, pour lesquels translation, rotation, homothétie, inversion etc... trouvent un vaste champ d'application où elles s'avèrent très efficaces. Les exemples développés par J. Petersen (voir article VI) seront la mine dans laquelle les auteurs de livres d'enseignement iront puiser leurs exercices sur le sujet jusqu'aux années 1970, qui marqueront la quasi disparition de l'enseignement de la géométrie « pure »<sup>68</sup>.

## Conclusions

**I** — Ce bref historique suffit à montrer que les transformations géométriques ont été considérées sous trois aspects, apportant des solutions à trois problématiques étrangères les unes aux autres qu'il convient de bien discerner pour leur enseignement.

1) La méthode des transformations fut créée dans le cadre de la géométrie des figures et même plus étroitement dans le cadre de la théorie des coniques, comme *méthode pour découvrir et démontrer* par transport de certaines propriétés — les invariants de la transformation — d'une configuration simple, où celles-ci peuvent être démontrées, à des configurations plus complexes<sup>69</sup>. Elle fut ensuite étendue par la méthode des polaires réciproques en une méthode qui permet de doubler les théorèmes de la géométrie par reflet de toute propriété P d'une configuration C en une propriété P\* de la configuration duale C\* obtenue.

Ces méthodes qui ont enthousiasmé les géomètres des XVII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles, qui

ont conduit ces derniers à penser, eu égard à leur fécondité, qu'elles constituaient « *la véritable méthode en géométrie* », méritent d'être enseignées comme telles<sup>70</sup> en les faisant agir dans un champ d'application privilégié<sup>71</sup> : la théorie des coniques<sup>72</sup>.

2) Le mode de correspondance des figures par transformations intervint dans le cadre de la problématique de la refondation de la géométrie élémentaire — euclidienne — comme géométrie vraie, car expérimentale. D'autres transformations seront alors considérées comme *métaphore* du mouvement qui amène une figure d'une position de l'espace à une autre (translation, rotation), comme métaphore des procédés d'agrandissement - rétrécissement (homothétie) et comme *syntaxe* pour l'égalité et la similitude des figures<sup>73</sup>. C'est dans ce cadre que ces transformations présentent un intérêt<sup>74</sup>, ou dans le cadre étroit des constructions géométriques développées par J. Petersen<sup>75</sup>.

3) Les transformations jouent, par la notion de groupe de transformations, un rôle majeur dans le cadre d'une classification et d'une hiérarchisation des géométries. F. Klein a montré que cette notion de « groupe de transformations » était l'instrument d'une étude structurale des géométries puisqu'il permettait d'identifier par isomorphie des géométries en apparence étrangères les unes aux autres, d'établir des liens de subordination entre des géométries dont on voyait mal les liens qui pouvaient les unir et donc de hiérarchiser espaces et propriétés géométriques<sup>76</sup>. Ce point de vue ne peut être abordé qu'à un niveau avancé.

**II** — L'étude des programmes des quatre dernières décennies permet de distinguer sommairement trois grandes périodes.

1) Dans les années 60, les transformations faisaient l'objet de longs développements dans la classe de mathématiques élémentaires. Le programme comportait une longue partie sur les transformations : Translations - Rotations - Homothéties - Similitudes - Affinités - Inversions - Transformations par polaires réciproques. Celles-ci trouvaient des champs d'application dans les autres parties du programme : Descriptive - Cinématique - Théorie des coniques et dans deux grandes classes de problèmes : problèmes de lieux géométriques et problèmes de construction. Ces derniers initiés par J. Petersen (Problèmes de constructions géométriques<sup>77</sup>) faisaient l'objet d'un apprentissage systématique et donnaient aux translations, rotations, etc., un lieu d'applications privilégié.

La géométrie projective, les homographies, la dualité figuraient aux programmes de Math. Sup et de Math. Spé.

Ces programmes avaient une grande cohérence d'un point de vue épistémologique. Ils s'inscrivaient dans la première tradition historique de la géométrie pure.

2) Dans les années 70, après la réforme des maths modernes, les transformations conservaient une grande place dans le programme de terminale C. Elles étaient alors introduites par l'algèbre linéaire et les groupes. Leur étude était menée essentiellement par voie analytique et vectorielle. L'accent était mis sur la notion d'espace : Transformations affines - Espaces projectifs - Harmonicité - Espace affine euclidien - Pôles et polaires par rapport à un cercle - Isométries vectorielles et affines - Similitudes - Notions sur le groupe circulaire du plan - Inversion - Espace anallagmatique. Les problématiques de la structuration de l'espace et de

la subordination des géométries affines, euclidiennes et projectives étaient mises au premier plan et celle de la géométrie des figures étaient mises au second plan bien que non négligées. Ces programmes avaient eux aussi une grande cohérence d'un point de vue épistémologique. Ils s'inscrivaient dans la troisième tradition historique.

3) La grande cohérence épistémologique de ces programmes ne les mettait pas à l'abri des critiques et des réformes.

Les programmes des années 60 furent réformés car jugés vieillots et n'entretenant plus de liens avec le savoir savant de l'époque et les programmes de l'enseignement supérieur.

Les programmes des années 70 furent réformés en raison des difficultés rencontrées pour leur enseignement, mettant au cœur de celui-ci la notion de structure avant qu'il y ait quoi que ce soit à structurer pour les élèves.

Les programmes qui suivirent diminuèrent fortement la part de la géométrie. Ils ne gardèrent des transformations que la rotation, la translation, les symétries, la similitude et les isométries, sans problématique propre, sans champ d'application clair.

Contrairement aux précédents, ces programmes :

- ne relèvent plus d'aucune tradition historique et n'ont donc plus de cohérence épistémologique.
- ne s'inscrivent clairement dans aucune problématique de résolution de problèmes et en conséquence fonctionnent sur des problèmes

d'inspiration disparate, voire sur de pures créations didactiques.

Ils sont utilisés soit comme outil de démonstration, le plus souvent non nécessaire (voir translation – homothétie), soit comme simple langage démonstratif, et donc

dans des cadres où ils ne prennent pas sens.

A la lumière de ce qui précède, il ne semble pas abusif d'affirmer que la finalité d'un enseignement des transformations visée par ces programmes n'est pas claire et mériterait d'être réexaminée.

### Bibliographie

**Notion de Transformation ; éléments pour une étude historique et épistémologique**, Irem de Poitiers,

Article I : La genèse de la notion de transformation. Les premières transformations. 1994.

Article II : La redécouverte. L'influence de l'œuvre de Monge. L'œuvre capitale de Poncelet. 1995.

Article III : Le concept maîtrisé. L'époque de Chasles. 1997.

Article IV : Les apports externes. 1998.

Article V : Le problème du mouvement en géométrie. 1995.

Article VI : La constitution d'une tradition didactique. 1999.

Article VII : Les transformations et la classification des géométries. 1998.

*Les sommaires de ces brochures sont consultables sur le site de l'IREM de Poitiers : <http://irem.univ-poitiers.fr/>*

*Ces articles contiennent une bibliographie importante.*

*On pourra consulter en particulier :*

**M. Chasles**, Aperçu Historique sur le Développement des Méthodes en Géométrie (1837)

**D. Hilbert**, Les Fondements de la Géométrie

**J. Hoüel**, Essai Critique sur les Principes Fondamentaux de la Géométrie Élémentaire (1867)

**F. Klein**, Programme d'Erlangen

**G. Monge**, Géométrie Descriptive (1799)

**J.V. Poncelet**, Traité des Propriétés Projectives des Figures (1822)

**R. Taton**, L'œuvre Mathématique de G. Desargues

**R. Taton**, L'œuvre mathématique de G. Monge

**Notes :**

1 Sept articles, écrits par Jean Claude Thié-nard, publiés par l'IREM de Poitiers ont été consacrés au sujet. Ceux-ci renferment de très larges extraits expliqués et commentés des grands auteurs qui ont créé et développé le concept de transformation et la méthode de transformation.

2 Voir bibliographie

3 XIVE siècle italien

4 Une copie faite par De La Hire sera retrouvée et publiée par Poudra en 1864. Un exemplaire du texte original sera retrouvé à la bibliothèque nationale en 1950.

5 Celles-ci étant nombreuses et n'ayant pas eu de postérité, constituent un obstacle à une première lecture du texte. Un effort de une à deux heures permet de franchir cet obstacle.

6 (KI) (HG) (PQ) sont en involution signifie

$$\text{que : } \frac{QI.QK}{PI.PK} = \frac{QG.QH}{PG.PH} .$$

7 Le langage est évidemment anachronique. L'anachronisme sera systématiquement utilisé, en dépit de l'inconvénient majeur qu'il a d'éloigner des modes de pensée des auteurs, voire de les dénaturer, comme outil de la forme brève.

8 Selon l'expression de Leibniz.

9 Trichotomie : ellipse, hyperbole, parabole, jusque là observée depuis le Traité des coniques d'Apollonius (262-180 avant J.C.).

10 1640. Cet essai renferme le fameux théorème sur l'hexagramme mystique.

11 Celui-ci s'est perdu après que Leibniz l'ait consulté en 1676.

12 La géométrie de Descartes (1637) fonde, avec

certains travaux de Fermat la géométrie analytique.

13 Le calcul infinitésimal est créé conjointement et de manière apparemment indépendante par Leibniz et Newton dans les années 1660-1670. Les méthodes de la géométrie à la manière des anciens resteront vivaces en Angleterre. Halley Mac Laurin, Simson, Stewart, Taylor resteront dans le cadre des «Principes mathématiques de la philosophie naturelle» de Newton pour donner des solutions aux problèmes de leur époque. Sur le continent ces méthodes tomberont dans l'oubli.

14 Le mot *Arguésienne* est construit sur le nom de Desargues.

15 La géométrie descriptive fut l'objet de leçons à l'école normale en l'an 1793. Elle fut publiée par Hachette en 1799.

16 De la corrélation des figures en géométrie (1801).

Géométrie de Position (1803).

Essai sur la théorie des transversales (1806).

17 Publiée en 1822.

18 Problème classique de l'architecture militaire qui consiste à construire les murs de protection des fortifications en fonction des accidents du terrain, de façon à être protégé des tirs d'artillerie de l'ennemi. Selon les méthodes classiques, ce type de problème se résolvait par approximations successives et exigeait de lourds et nombreux calculs (se rapporter à l'article II).

19 Michel Chasles, dans «Aperçu historique».

20 Dans sa préface, Poncelet évoque longuement les travaux de Desargues qu'il connaît à travers ses disciples ou ses ennemis.

Pour Poncelet, Desargues est le «Monge de son siècle».

21 Voir article II, III 1) a) pour des détails.

Ce principe a son origine dans le principe des

relations contingentes de Monge. Il énonce que si l'on passe d'une figure à une autre par « degrés insensibles » ou par un « mouvement continu » certaines propriétés métriques ou descriptives démontrées pour l'une d'elles seront encore vraies pour l'autre, même si certains éléments ont disparu.

22 Ces derniers avaient déjà été considérés par Desargues.

23 Ceux-ci avaient déjà été bouleversés par Desargues.

24 « Desargues, ami illustre de Descartes, et dont celui-ci faisait le plus grand cas comme géomètre, fut, je crois, le premier d'entre les modernes qui envisagea la géométrie sous le point de vue général que je viens de faire connaître ». Poncelet

25 Hormis la transformation par polaires réciproques (cf infra).

26 Poncelet

27 Dès 1823, Poncelet rédigea un mémoire « Théorie générale des polaires réciproques » qu'il présentera à l'Académie en avril 1824.

28 Elles furent l'œuvre de Chasles, Gergonne, Bobillier... en France, et de Steiner, Möbius, Plücher, Von Staudt... en Allemagne.

29 Les annales mathématiques fondées par J.D. Gergonne (de 1810 à 1831), la correspondance mathématique et physique fondée par A. Quételet, le Journal de Crelle, etc.

30 Cité de l'encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Article de G. Fano (1915).

31 Introduction à l'« Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie ».

32 Le seul exemple connu à l'époque.

33 On notera que le point de vue est global. Ces transformations ou déformations sont considérées par leur action sur les figures et

non sur les éléments d'un espace ; elles sont définies par leur action sur les différents éléments constitutifs des figures : points, droites, plans, tangentes...

34 Le rapport anharmonique d'un faisceau de quatre plans est le rapport anharmonique des quatre points d'intersection d'une droite avec ces quatre plans. Ce rapport est un invariant : il ne dépend pas de la droite.

35 Dans les œuvres des prédécesseurs, celles-ci apparaissent comme modes de correspondance particuliers et effectifs.

36 « Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer gestalten von einander ». (1832).

37 Chasles publie le « Traité des sections coniques » en 1865. Dans ce traité les coniques sont caractérisées par :

« La courbe, lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques, est une section conique qui passe par les centres des deux faisceaux ».  
ou l'énoncé dual

« La courbe, enveloppe des droites qui joignent deux à deux les points homologues de deux divisions homographiques faites sur deux droites est une section conique tangente à ces deux droites ».

38 Chasles milita pour la création d'une chaire de géométrie supérieure à la faculté des sciences de Paris. Celle-ci fut créée en 1846. Il fut le premier à l'occuper. L'essentiel des cours qu'il y professa fit l'objet du « Traité de Géométrie Supérieure » (1852) (cf infra.)

39 Une autre transformation sera introduite et utilisée dans le cadre de la géométrie des figures : la transformation par rayons vecteurs réciproques (inversion en termes modernes) qui aura une grande importance parmi les méthodes nouvelles en géométrie.

40 Expression de Gauss pour caractériser les



géométries de Bolyai et Lobatchevski.

41 De façon précise l'élaboration de géométries niant l'axiome des parallèles appelé Postulat d'Euclide.

42 Dont un équivalent est l'existence d'une unique parallèle passant par un point donné à une droite donnée.

43 Se reporter à l'article IV pour les détails.

44 Lettre à Olhers 1817.

45 Les premiers mémoires sont de 1829. Ils seront suivis par celui de Bolyai (1832). Il semble que ce dernier possédait déjà ses résultats en 1823.

46 Terme par lequel on désignait l'ensemble des sciences d'observation dans lesquelles entrait la physique.

47 Lobatchevski - Géométrie (1835). L'énoncé : « la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits » est un équivalent du Postulat d'Euclide. Dans la géométrie de Lobatchevski, la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits et cette somme croît avec les dimensions du triangle. La différence de cette somme à deux droits ne peut donc être mise expérimentalement en évidence, qu'en considérant des triangles astronomiques.

48 Dans cette conception les vérités géométriques s'ordonnent en deux catégories :

1) celles qui nous sont révélées par les sens au travers des expériences les plus ordinaires de la vie. Certaines (théorèmes) peuvent apparaître comme conséquences logiques d'autres (axiomes) et la limite entre axiomes et théorèmes est arbitraire,

2) celles plus cadrées qui apparaîtront à l'issue d'une démarche déductive et qui a posteriori seront confirmées (ou non infirmées) par l'expérience.

49 J. Hoüel affirme qu'Euclide a recours au

mouvement de façon tacite. Ce point est longuement analysé dans l'article V.

50 Newton affirmait déjà que « la géométrie est fille de la mécanique... ».

51 Voir article IV.

52 Cette distinction hiérarchique faite dans Euclide a toujours été reconduite dans les ouvrages didactiques.

53 L'œuvre de Méray fait l'objet d'une étude détaillée dans l'article IV. On pourra notamment y voir comment Méray rend compte de la deuxième grande problématique de la géométrie élémentaire, celle de la similitude des figures par l'homothétie (la première étant celle de la congruence des figures traitée par les déplacements).

54 Voir article VII pour une étude détaillée.

55 Rappelons que pour Méray, par exemple, les énoncés de la géométrie élémentaire sont factuels et qu'en conséquence leur vérité ultime résulte moins du raisonnement qui les produit que de l'adéquation à certaines expériences. Dans la dialectique de l'interne et de l'externe, l'externe est primordial. Il y a renversement des termes de cette dialectique dans l'optique de Klein.

56 Voir article VII.

57 Même si la construction faite par Hilbert dans les « Fondements de la géométrie » commence par énoncer les axiomes de congruence indépendamment de la notion de déplacement. Voir article VI.

58 Se reporter à l'article VI pour une étude détaillée.

59 La méthode des transformations a « donné lieu aux méthodes qui constituait la géométrie récente »... « Ces modes de transformations sont autant de moyens sûrs, de moules, pour ainsi dire qui servent à créer à volonté des vérités géométriques sans nombre ».

60 Par M. Chasles lui-même. (Cf supra).

61 1855.

62 Voir article VI.

63 1865.

64 Souligné par l'auteur.

65 Rotation et translation sont des mouvements qui appartiennent à la mécanique. Elles commencent à entrer dans la géométrie, sous forme de transformations par considérations des positions initiales et finales et par la théorie du centre instantané de rotation développée par M. Chasles et déjà très usitée par ses contemporains : voir articles III et IV.

66 Voir les différentes éditions du traité de géométrie de Rouché et Comberousse.

67 Copenhague 1866. Traduit en français en 1879.

68 Selon l'expression de M. Chasles.

69 D'où la méthode plus complexe, immédiatement élaborée, qui consiste pour démontrer une propriété P d'une configuration C complexe :

1) à trouver une transformation (bijective)  $f$  telle que P soit invariante par  $f$  et  $C' = f(C)$  soit une configuration plus simple

2) à démontrer P sur  $C'$  et à déduire le résultat sur C

C'est cette démarche qui donne à la méthode sa fécondité.

70 En insistant sur l'aspect méthodologique :

le transport ou le reflet de propriété et donc sur la notion d'invariant...

En faisant ressortir l'aspect culturel, en explicitant les liens entre dessins en perspective et projection centrale et la méthode des plans qui en découle : homologie, etc.

71 Pour rester à un niveau élémentaire.

72 Cela permet d'insister sur le fait que les transformations intéressantes dans le cadre de la géométrie des figures sont a priori celles qui déforment.

A cet égard, le petit traité de J.F Le Poivre reste un modèle du genre. Il conduit avec simplicité et une grande économie de moyens à des propriétés substantielles des différentes coniques.

73 Voir la géométrie de C. Méray par exemple.

74 Ou dans celui qui sera évoqué ci-après (cf infra).

75 S'initier à ce type de problème demande un investissement important en temps et il n'y a guère de saupoudrage possible en la matière.

76 La géométrie élémentaire est alors caractérisée par ce que F. Klein appelle le groupe principal engendré par les rotations, translations, homothéties et symétries.

77 Les nombreux exercices sur ce thème qui rempliront les manuels scolaires pendant des décennies seront directement inspirés voire copiés de ce petit livre.