
MISE EN EQUATION DIFFERENTIELLE ET MESURE DES GRANDEURS

Un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique

Marc ROGALSKI
Irem de Lille

Résumé : *Les programmes de la terminale scientifique mettent désormais l'accent sur la collaboration entre mathématiques et physique, pour la mise en équation différentielle de phénomènes physiques et, plus marginalement, pour la mesure des grandeurs par une intégrale. Nous comparons d'abord la pratique des physiciens et un point de vue de mathématiciens. On analyse les concepts qui sous-tendent la possibilité d'une intervention spécifique des enseignants de mathématiques dans les classes sur des questions de physique. Nous dégageons ainsi une procédure générale de l'accroissement différentiel, dans ses versions physique et mathématique, susceptible de donner du sens aux pratiques des physiciens et à certaines notions d'analyse : la négligeabilité, des procédures de majoration et d'encadrement. Cette notion de négligeabilité est centrale dans le concept de dérivée, mais les programmes de la terminale la sous-estiment, et en évitent une pratique opérationnelle. Quelques situations de travail pour les élèves sont proposées, qui permettent d'aborder un large éventail des questions qui se posent. Ces situations pourraient s'insérer dans une ingénierie destinée à l'apprentissage de la procédure de l'accroissement différentiel et à l'amélioration de l'enseignement de l'analyse. Quelques pistes pour une telle ingénierie sont avancées. Nous poursuivons ainsi des réflexions déjà entamées par d'autres chercheurs dans un travail interdisciplinaire des années 1980 dans le cadre du CNRS, et concernant la première année d'université.*

Introduction

Le programme mathématique des terminales scientifiques met depuis 2002 l'accent sur les liens entre les mathématiques et la physique. Ce lien est développé de façon très explicite autour des *procédures de mise en équation différentielle de phénomènes physiques* (étude des varia-

tions d'une grandeur à taux de variation instantané proportionnel à la grandeur, équations différentielles $y' = ky$).

Par ailleurs un changement important est intervenu dans la présentation de l'intégra-

le définie : jadis application de l'existence, admise, des primitives des fonctions continues, elle est maintenant *définie comme l'aire du sous-graphe* (quand $f \geq 0$) de la fonction f . Le fait que l'aire entre les verticales d'abscisses a et x soit une primitive de la fonction continue f est *démontré* (au moins pour les fonctions monotones). De plus, le lien avec les sommes de Riemann de la fonction f est fait, même si le théorème de convergence n'est pas du programme. On voit là clairement une procédure (implicite) de *définition et calcul de mesures de la grandeur « aire »*, que l'on retrouve pour d'autres grandeurs physiques ou géométriques.

Depuis 2002, et sous le vocabulaire très général de *modélisations*, de nombreux exemples de mises en équation ont été proposés, soit dans le cadre des Irem, soit dans le bulletin de l'APMEP, soit dans les commissions Inter-Irem.

Au delà de ces exemples, qui ne concernent pas tous la mise en équation différentielle ou la mesure de grandeurs par une intégrale, nous nous centrons ici sur ces deux activités. Nous nous proposons d'analyser, d'un point de vue épistémologique d'abord, puis didactique ensuite, ce que pourrait être un apport *spécifique* des mathématiques à ces activités interdisciplinaires dans l'enseignement, le bénéfique dans l'apprentissage de certaines notions mathématiques qui pourrait en être tiré, et l'infléchissement de pratiques mathématiques qui rendrait viable et utile le fait de « faire de la physique dans la classe de mathématiques ».

Les questions que nous nous posons apparaissent déjà, mais à propos de l'enseignement des mathématiques et de la physique en première année d'université, dans [1], [4], [8].

I. Etude de quelques situations prototypiques

Dans cette partie, d'abord à propos de la mise en équation différentielle (MED en abrégé), puis ensuite sur la mesure des grandeurs par intégrale (MGI), nous présentons des situations prototypiques que nous analysons ensuite. Puis nous étudierons de façon plus spécifique la méthode de calcul des volumes donnée en terminale.

I.1. Situations de mise en équation différentielle

1) *Evaporation d'une goutte d'eau* ([4], [8])

Une goutte d'eau de forme sphérique de 2 mm de rayon, en suspension dans l'air, s'évapore peu à peu. Sa vitesse d'évaporation, en grammes par seconde, est proportionnelle à sa surface, avec un coefficient de proportionnalité égal à 10^{-6} g/s pour 1 mm^2 de surface. Au bout de combien de temps la goutte d'eau sera-t-elle complètement évaporée ?

2) *Chute avec résistance proportionnelle à la vitesse*

Un point matériel de masse m tombe verticalement sous l'effet de la pesanteur ; il est soumis à une résistance de l'air dont l'intensité est proportionnelle à la vitesse, avec un coefficient k . Décrire son mouvement.

3) *Ecoulement dans une canalisation poreuse* ([4], [8])

On étudie les pertes d'eau le long d'une canalisation poreuse cylindrique de rayon 10 cm. On suppose que le débit d'entrée est de 1800 litres à la minute.

On envisage deux hypothèses :

1° hypothèse : les fuites sont de 1 litres/mn par mètre carré de surface de la canalisation ;

2° hypothèse : sur un petit segment de la canalisation, la fuite (en litres/mn) est à peu près proportionnelle à la surface (en mètres carrés) du segment et au débit (en litres/mn) à travers ce petit segment, le coefficient de proportionnalité étant égal à 10^{-2} .



Pour chacune de ces deux hypothèses, on demande quelle longueur maximum peut avoir la canalisation pour que le débit d'eau à sa sortie soit au moins de 1000 litres/mn. Comparer les méthodes utilisées dans chacune des deux hypothèses.

4) La loi de désintégration radioactive ([5])

A l'issue d'une expérimentation sur le radon contenu dans le sol, le texte suivant est proposé (extrait du document d'accompagnement des programmes) :

« L'expérience suggère que, si l'on considère une population macroscopique de noyaux radioactifs (c'est-à-dire dont le nombre est de l'ordre du nombre d'Avogadro, soit 6.10^{23}), le nombre *moyen* de noyaux qui se désintègrent pendant un intervalle de temps Δt à partir d'un instant t , rapporté au nombre total de noyaux $N(t)$ présents à l'instant t et au temps d'observation Δt , est une constante λ caractéristique du noyau en question. On peut donc écrire

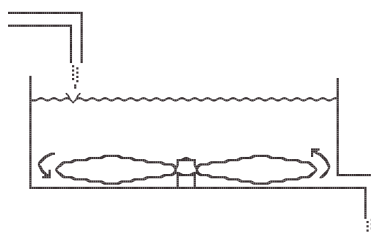
$$(*) \quad \Delta N(t) / N(t) = - \lambda \Delta t .$$

A priori, la constante λ pourrait dépendre du temps. Ce serait le cas si un processus

de vieillissement était en cause, comme, par exemple, si l'on s'intéresse au nombre de décès dans une population donnée. Le fait que λ ne dépende pas du temps s'interprète comme un processus de "mort sans vieillissement". »

Déterminer la loi de la radioactivité (c'est-à-dire la fonction $t \rightarrow N(t)$).

5) Dilution d'une solution saline



Un bassin contient 100 litres d'eau, dans lesquels sont dissous 10 kg de sel. Une arrivée d'eau pure, avec un débit de 10 litres/mn, démarre à l'instant 0. En même temps que l'arrivée d'eau pure, une évacuation du mélange contenu dans le bassin est assurée avec un débit de 10 litres/mn. L'homogénéisation du contenu du bassin est assurée de façon permanente et instantanée par un mélangeur. Au bout d'une heure, quelle quantité de sel reste-t-il dans le bassin ?

I.2. Analyse des problèmes de mise en équation différentielle

I.2.1. En amont de la MED

Un premier constat est que sous l'apparence d'une simple demande *numérique* (temps d'évaporation, longueur de la canalisation,...), c'est en fait une *fonction* qu'il faut déterminer (débit à la distance x , quantité de sel à l'ins-

tant t, \dots). C'est normalement en physique que ce constat devrait être fait, mais il est clair que le concept mathématique de fonction, et en particulier de fonction dérivable (nous y reviendrons), va être central.

Un corollaire de ce constat est qu'il faudra choisir une grandeur qui va avoir le rôle de *variable* (le temps, la distance x à l'origine de la canalisation, ...) et une ou plusieurs autres qui vont tenir le rôle de *fonctions inconnues*. En fait, il faut, à ce niveau de terminale, choisir *une* fonction inconnue, et voir comment les autres en dépendent (dans le cas de la goutte d'eau, il faut se départir entre la masse, la surface, le volume, le rayon, et l'expérience montre que ce n'est pas facile pour les élèves).

Il s'agit d'entrer dans la problématique d'une *équation fonctionnelle*, où l'inconnue est une fonction, et non plus un ou plusieurs nombres. Il y a là un saut épistémologique que les enseignants de mathématiques doivent accompagner... et qui va déboucher sur la notion d'équations différentielles (linéaires à coefficients constants en terminale).

De plus, à ce premier niveau de l'analyse, on se rend compte qu'il va falloir introduire des *notations* variées concernant les diverses grandeurs en présence (voir l'exemple de la goutte d'eau), et dans certains cas, si on veut saisir la généralité du processus de résolution mis en œuvre, introduire des *paramètres* qui peuvent être nombreux (une masse volumique, un coefficient de proportionnalité, des dimensions, ...). Cela présente ainsi une *rupture* avec un leitmotiv des programmes de mathématiques depuis de nombreuses années : pas de paramètres, tout doit être numérique ! Signalons que de surcroît les enseignants de physique conseillent souvent de travailler avec des notations symboliques (variables, paramètres...), à la fois pour minimiser les erreurs de calcul numérique et pour utiliser

l'homogénéité nécessaire des formules comme moyen de vérification. De quoi rendre les élèves schizophrènes !

I.2.2. Procédure physique et procédure mathématique de l'accroissement différentiel

I.2.2.a. *Petite analyse mathématico-physique*

On constate que les problèmes proposés ne se situent pas du tout sur le même plan du point de vue de l'épistémologie de la MED.

Dans les problèmes 1 et 2, la MED est déjà faite, puisque, soit le mot vitesse (ce pourrait être débit, taux de variation instantané, ...) est donné dans l'énoncé (dans 1 : « la vitesse d'évaporation est... »), soit l'application immédiate d'une *loi physique d'emblée différentielle* donne directement une équation différentielle (ainsi, dans 2 : $m\Gamma = mg - kv$, soit $mv' = -kv + mg$, équation différentielle portant sur la fonction v). De plus, le problème 1 débouche sur une recherche directe de primitive (cas très simple d'équation différentielle).

Dans le problème 3.1° (première hypothèse), il n'y a même pas de MED ! En effet, la fuite est directement proportionnelle à la longueur de la canalisation, on est devant un simple problème de mise en équation algébrique (proportionnalité). Par contre, le cas de la deuxième hypothèse de 3 est très différent, puisque il apparaît que le taux de fuite (par unité de longueur) va être différent selon l'abscisse x , car dépendant du débit $d(x)$ en ce point. Et ce constat de *non proportionnalité* est l'indice décisif du fait qu'il y a une modélisation à faire, menant à une MED.

Dans l'énoncés 3.2°, une *modélisation locale* est proposée, qui présente ce que nous appellerons la *procédure de l'accroissement dif-*

férentiel : on regarde un accroissement Δx de la variable, à partir de sa valeur x , et on dit quelque chose sur l'accroissement correspondant Δf de la fonction f cherchée.

Mais que dit-on précisément ? Le texte de l'énoncé 4 est assez typique de ce que disent parfois (souvent ?) les physiciens : ils énoncent une proportionnalité *exacte* (relation (*)) entre les deux accroissements de la fonction et de la variable, sous la réserve que Δx soit « assez petit ». La relation (*) de 4 a entraîné de nombreuses protestations d'enseignants de mathématiques, pour qui une telle proportionnalité locale *exacte* implique que le phénomène étudié est *globalement* proportionnel (voir [3]) ; dit autrement : une fonction localement affine sur un intervalle y est globalement affine.

L'énoncé 3.2° est plus nuancé : on y énonce une *proportionnalité approximative* de Δf à Δx , qu'on écrit souvent $\Delta f \approx K\Delta x$, le coefficient K dépendant explicitement de x et de $f(x)$. Dans 3.2°, on a, si $d(x)$ est le débit à l'abscisse x de la canalisation : $\Delta d \approx -k2\pi r d(x) \Delta x$; de façon analogue, on aurait pu écrire (*) dans 4 sous la forme $\Delta N \approx -\lambda N(t)\Delta t$, formulation qui aurait moins choqué les enseignants de mathématiques.

Mais reste à savoir ce que signifie précisément le signe \approx ainsi utilisé. Les physiciens mettent en avant à juste titre l'idée d'*approximation*, mais, dans ce type de modélisation, ils restent dans le flou quant au type d'approximation dont il s'agit, c'est-à-dire quant à *la nature de l'erreur* commise. Ce point devrait être essentiel, s'agissant de physique ! Or ce point est très délicat pour les élèves, et encore pour les étudiants à l'université (voir [1], [4]). Il s'agit certes de dire que l'erreur commise en remplaçant Δf par $K\Delta x$

tend vers 0 avec Δx , mais pas n'importe quelle erreur : il s'agit de *l'erreur relative* par rapport à Δx , l'erreur absolue $\Delta f - K\Delta x$ doit être *négligeable devant* Δx . En effet, clairement Δf et $K\Delta x$ tendent tous deux vers 0 avec Δx (dès lors qu'on sait que f est *continue*), donc dire que leur différence (l'erreur absolue) tend aussi vers 0 n'apporte aucune information ! La négligeabilité de l'erreur absolue devant Δx est l'information supplémentaire qui va permettre de dire que la forme d'une loi locale $\Delta f = K(x, f(x))\Delta x + o(\Delta x)$ signifie très précisément que la fonction f est dérivable en x et que sa dérivée a pour valeur $K(x, f(x))$. Et par conséquent que la fonction f inconnue doit vérifier *l'équation différentielle* $y' = K(x, y)$.

Il y a là de plus une autre difficulté dans le rapport entre mathématiques et physique. A proprement parler, pour le physicien, le caractère relatif de l'erreur devrait être à rapporter à Δf , surtout si il y a des mesures : on devrait donc avoir $\Delta f = K(x, f(x))\Delta x + o(\Delta f)$. Ceci n'est équivalent à la formulation précédente que dans le cas où $K(x, f(x))$ n'est pas nul, c'est-à-dire en un point x où la dérivée $f'(x)$ n'est pas nulle. Nous verrons que la même difficulté se présente pour la mesure d'une grandeur par une intégrale.

Fondamentalement, le concept mathématique qui sous-tend cette interprétation en erreur relative est la négligeabilité du reste dans le point de vue concevant la dérivabilité comme l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 :

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + r(\Delta x).$$

Si on ne dit pas que $r(\Delta x) = o(\Delta x)$, on n'a absolument pas une dérivabilité. Citons à ce propos une activité susceptible d'entraîner une certaine prise de conscience des élèves de ce fait. On propose un calcul approché de $\sin(46^\circ)$

sans calculatrice. Une fois arrivés au point où il faut évaluer $\sin(\pi/180)$, les élèves se souviennent de la formule $\sin x \approx x$ quand x est petit. Devant une demande de précision, ils proposent en général unanimement une formule $\sin x = x + \varepsilon$, avec ε tendant vers 0 avec x . Si on leur demande si ε pourrait être de l'ordre de \sqrt{x} , ou de $3x$, ils sentent confusément qu'il y aurait quelque chose qui n'irait pas, mais il faut un certain temps de discussion pour que la formulation « ε doit être négligeable devant x » soit adoptée.

I.2.2.b. *La procédure physique de l'accroissement différentiel (PPAD)*

En l'absence de ces précisions sur l'erreur relative, on voit que la PPAD consiste donc à essayer d'évaluer Δf quand on accroît x de Δx , en *admettant* en fait que le terme du premier ordre en Δx donné par un raisonnement physique est correct. Ce raisonnement consiste en général à utiliser ou supposer une loi physique dans une version *locale*. Implicitement, la relation approchée obtenue est supposée « exacte au second ordre près », alors qu'un tel fait est difficile à prouver directement sans utiliser le résultat qu'on cherche. Un exemple classique, qu'on voit chaque année en préparation au CAPES, est l'exercice où l'on fait « retrouver » l'aire du cercle de rayon R en évaluant l'accroissement ΔA de l'aire $A(r)$ entre r et $r + \Delta r$ en confondant ΔA avec $2\pi r \Delta r$, « au deuxième ordre près » (ce qui est exact avec la formule $A(r) = \pi r^2$... qu'on cherche à prouver !).

Le problème de l'évaluation de l'erreur dans la PPAD est encore plus compliqué lorsque la relation locale est obtenue à partir d'une expérimentation physique. C'est particulièrement le cas dans l'énoncé 4 : outre qu'on ne dit rien de la précision des mesures, il s'y

ajoute la difficulté du passage d'une situation qui est microscopique discrète et probabiliste à une situation macroscopique continue et déterministe : les intervalles de temps sur lesquels on fait des mesures doivent être assez grands pour qu'on obtienne des moyennes, mais assez petits pour que le mot « local » ou « différentiel » ait un sens. Il est clair que les enseignants de mathématiques n'ont aucun moyen d'évaluer les erreurs commises dans ce contexte.

Certes, la PPAD permet souvent de découvrir des lois physiques par MED. Mais elle demande l'apprentissage d'un « métier de physicien modélisateur » qui s'appuie sur une bonne technique du calcul différentiel, et demande une *intuition physique* pour sentir ce qui, dans une mise en équation, peut être négligé. Cette intuition ne va pas de soi, et même des physiciens peuvent se tromper. Par exemple, si dans le problème 3 on remplace la canalisation cylindrique par un tuyau de révolution dont la méridienne a pour équation $y = 1/x$, avec entrée d'eau au point d'abscisse $a > 0$ et sortie au point d'abscisse $b > a$ (avec la même loi locale), il n'est pas si intuitif de trouver la bonne équation différentielle...

Dans la pratique la PPAD s'apprend en général, en physique, en deuxième année d'université ou de classes préparatoires, et peu d'étudiants la dominent déjà à ce niveau. Il paraît donc illusoire d'en attendre une pratique sérieuse en terminale. De plus, il n'est pas sûr que les enseignants de mathématiques soient bien placés pour apprendre aux élèves l'intuition physique nécessaire : depuis plus de dix ans, le parcours universitaire des étudiants de mathématiques est malheureusement devenu bien pauvre en physique ! Bref, l'apprentissage de la PPAD doit revenir aux enseignants de physique, sans se faire trop d'illu-

sions sur la possibilité de lui faire acquérir, en terminale, un caractère véritablement opérationnel.

I.2.2.c. *La procédure mathématique de l'accroissement différentiel (PMAD)*

Il paraît donc plus raisonnable, en ce qui concerne la contribution de l'enseignement des mathématiques à cette question de la MED, en terminale, d'abord de n'aborder que des problèmes ne nécessitant pas d'expérimentation physique, en se bornant donc à des « expériences de pensée » ; ensuite de se centrer sur la nécessité de *préciser les conditions* sous lesquelles les relations locales obtenues vont bien signifier une *dérivabilité* de la fonction f cherchée.

Il s'agit donc d'institutionnaliser une *procédure mathématique de l'accroissement différentiel* (PMAD) où l'accent sera mis sur les *moyens de mettre en évidence le caractère négligeable devant Δx de l'erreur absolue commise*, ou au moins de prouver que le rapport $\Delta f / \Delta x$ a bien *la limite* espérée quand Δx tend vers 0.

L'énoncé 5 est à cet égard instructif : il ne fait appel à aucune loi physique, ce qui fait qu'un raisonnement mathématique est nécessaire pour la MED. L'idée est de partir de l'hypothèse de la décroissance de la fonction cherchée $S(t)$, quantité de sel à l'instant t (physique du bon sens !). On peut alors en déduire (par *encadrement*) que S est continue, l'encadrer entre $S(t) + \varepsilon$ et $S(t) - \varepsilon$ sur un petit intervalle Δt , et en déduire une majoration de l'erreur :

$$|\Delta S + S(t) \frac{v}{V} \Delta t| \leq \varepsilon \frac{v}{V} |\Delta t|,$$

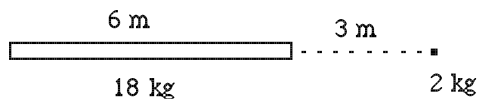
ce qui prouve bien la *négligeabilité de l'erreur*

absolue devant Δt . Une autre solution est d'encadrer $S(u)$, pour u variant dans $[t, t+\Delta t]$, entre $S(t)$ et $S(t+\Delta t)$. La continuité de S permet alors de montrer, par *encadrement*, que le rapport $\Delta S / \Delta t$ tend, quand Δx tend vers 0, vers $-(v/V)$. $S(t)$ (on a noté V le volume du bassin et v le débit de l'arrivée d'eau et de l'écoulement du mélange). Nous étudierons plus loin de façon détaillée comment utiliser l'énoncé 5 avec les élèves comme situation d'introduction à la PMAD.

Ce qu'il importe de voir ici, c'est que la méthode développée sur l'exemple précédent est générale dans la PMAD : on utilise *un argument de monotonie et/ou de continuité*, permettant d'écrire des *encadrements* ou des *majorations*, qui seront parfois explicites, et parfois, soit *avec un ε non précisé* (mais arbitraire), soit en utilisant *le maximum M et le minimum m* d'une (ou de plusieurs) fonction sur l'intervalle $[x, x + \Delta x]$ (la continuité de cette fonction impliquant que $M - m$ tend vers 0 avec Δx).

I.3. *Situations de mesure d'une grandeur par une intégrale*

6) *Force d'attraction gravitationnelle d'un barreau ([8])*



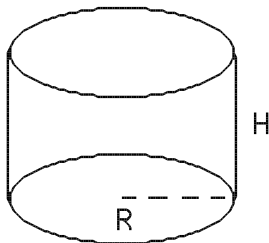
On rappelle que la force d'attraction gravitationnelle exercée par une masse ponctuelle m' sur une masse ponctuelle m située à une distance r de la première est dirigée de m vers m' et a pour intensité :

$$F = G \frac{mm'}{r^2}, \text{ où } G \text{ est la constante univer-}$$

selle de la gravitation. On considère un fin barreau de longueur 6 m, homogène, de masse 18 kg, et, située dans son prolongement à 3 m, une masse ponctuelle de 2 kg. Quelle est la force d'attraction gravitationnelle exercée par le barreau sur la masse ponctuelle ?

7) *Moment d'inertie d'un cylindre de révolution homogène par rapport à son axe*

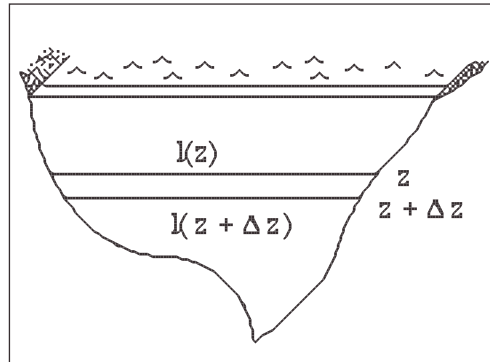
Un cylindre de révolution de rayon R et hauteur H a une masse volumique ρ . Calculer son moment d'inertie par rapport à son axe de révolution.



On rappelle qu'une masse ponctuelle m située à une distance d d'un axe a pour moment d'inertie par rapport à cet axe md^2 . On pourra étudier la fonction $r \rightarrow I(r)$, moment d'inertie de la portion du cylindre formée des points à une distance de l'axe au plus r .

8) *Force exercée par la pression de l'eau sur un barrage plan*

Un barrage vertical plan a la forme dessinée ci-contre, où la fonction $z \rightarrow l(z)$ est supposée continue sur $[0, h]$. On rappelle que la pression p à la profondeur z est ρgz , où ρ est la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur. Déterminer la force totale exercée par la pres-



sion de l'eau sur le barrage. Etudier les cas d'un barrage semi-circulaire et celui d'un barrage triangulaire.

I.4. *Analyse des problèmes de mesure d'une grandeur par intégrale : la procédure dérivée-primitive*

Il y a deux manières d'approcher le problème de la mesure d'une grandeur. La plus intéressante pour la constitution du sens de l'intégrale est la *procédure intégrale*, telle qu'on peut la trouver exposée dans [8] par Marc Legrand : si on veut évaluer un nombre $I(\Omega, f, m)$ qui mesure une grandeur attachée à la donnée d'une fonction f sur un domaine Ω muni d'une mesure m de ses parties « simples », il s'agit de *découper, encadrer, sommer, passer à la limite*. C'est la problématique de l'approche par l'intégrale des fonctions étagées (voir [7]). Mais cela nous semble dépasser le niveau de terminale, mis à part quelques utilisations de sommes de Darboux dans des cas simples.

Ceci peut se faire pour des calculs d'aires à la manière d'Archimède ou de Cavalieri, pour motiver au théorème liant aire sous la courbe et primitive, et pour faire prendre conscience aux élèves qu'on peut effectivement

attacher une aire à un domaine « curviligne », *ce qu'ils n'ont jamais vu dans leur scolarité*, sauf par la donnée de la formule de « l'aire » du disque... en fait non définie, et qu'on pourrait aussi bien appeler « tarababoum du disque », dit Lebesgue dans [2]. Pour des exemples, on peut voir [6] et [7]. Un autre cas où l'on peut utiliser des sommes de Darboux en terminale est celui où l'on a en vue l'évaluation numérique d'intégrales qu'on ne sait pas calculer.

Mais en terminale, ces activités, quoique souhaitables, ne peuvent sans doute qu'être limitées à trois ou quatre exemples. Il semble donc préférable de se centrer, dans cette classe, sur *la procédure dérivée-primitive*, qui va relever aussi de la PMAD (voir [7], ch. 7). Il s'agit de mesure de grandeurs dans des cas où l'on va *pouvoir décrire la situation au moyen d'une seule variable*. C'est le cas des trois problèmes proposés.

Le problème 6, qui a donné lieu à une excellente situation fondamentale pour la procédure intégrale (voir [7], [8]), est adapté aussi à la mise en évidence de la procédure dérivée-primitive avec utilisation de la PMAD. Si on note x l'abscisse d'un point de la barre comptée à partir de la masse ponctuelle, on désigne par $F(x)$ la force exercée sur celle-ci par la portion de la barre située entre les points d'abscisses 3 et x . On peut encadrer ΔF , la contribution de l'ensemble des points de la barre dans l'intervalle $[x, x + \Delta x]$:

$$G \times 2 \frac{18}{6} \frac{\Delta x}{(x+\Delta x)^2} \leq \Delta F \leq G \times 2 \frac{18}{6} \frac{\Delta x}{x^2} .$$

En passant à la limite quand Δx tend vers 0 on obtient la dérivée de F : $F'(x) = \frac{6G}{x^2}$. Par suite, la force totale est la primitive de cette

fonction prise entre les valeurs $x = 3$ et $x = 9$.

La symétrie de révolution des données de l'énoncé 7 permet de proposer directement la fonction $I(r)$ à laquelle appliquer la PMAD, en évaluant $I(r + \Delta r) - I(r)$. Là encore, un argument de monotonie en fonction de r permet un encadrement qui va donner la dérivée $I'(r)$: tous les points de la tranche sont à une distance de l'axe comprise entre r et $r + \Delta r$, et leur masse totale est :

$$\Delta m = rH\pi(r + \Delta r)^2 - rH\pi r^2 ;$$

on en déduit un encadrement de ΔI entre $\Delta m r^2$ et $\Delta m (r + \Delta r)^2$. Si on réfléchit bien, on voit d'ailleurs que le passage de l'objet théorique imaginaire « masse ponctuelle » à cet encadrement est un raisonnement physique qui ne va pas de soi... (c'est déjà le cas dans le problème précédent). On obtient l'évaluation $\Delta I = 2\pi r H r^3 \Delta r + o(\Delta r)$, ce qui prouve bien que $I'(r) = 2\pi r H r^3$.

L'énoncé 8 est plus intéressant : le caractère général, non explicite, de la fonction $l(z)$ *oblige à utiliser un argument abstrait de continuité*. On peut, soit encadrer les valeurs de $l(u)$ entre $l(z) + \varepsilon$ et $l(z) - \varepsilon$ pour u dans $[z, z + \Delta z]$, soit utiliser les maximum M et minimum m de la fonction l sur cet intervalle : la continuité signifie précisément que $M - m$ tend vers 0 avec Δz . Nous verrons plus loin que le même type de situation serait fourni par la mesure du volume d'un solide de révolution à méridienne $r(z)$ continue (voir I.5 ci-dessous, et [7]).

En définitive, on voit que c'est bien la PMAD qui s'applique pour la MGI dans le cas de la procédure dérivée-primitive, avec les mêmes méthodes, selon les cas, de négligeabilité, encadrement, continuité, passage à la limite, que pour la MED.

Terminons en citant une éventualité où une activité conçue à l'origine comme une MED est détournée vers une procédure d'intégration : dans la situation 3.2°, lorsque la modélisation locale a été écrite sous la forme $\Delta d \approx -k2\pi r d(x) \Delta x$, des élèves peuvent être tentés de la globaliser sous la forme :

$$\frac{d(0) - d(x)}{k2\pi r} = \int_0^x d(t)dt .$$

Ce n'est là que la version « équation intégrale » de l'équation différentielle attendue, donc parfaitement correcte. Elle laisse les élèves perplexes (comment conclure, puisque la fonction d inconnue est dans les deux membres ? voir [1] pour l'exemple de l'absorption des rayons X), mais retrouver l'équation différentielle en dérivant ou en prenant comme fonction in-

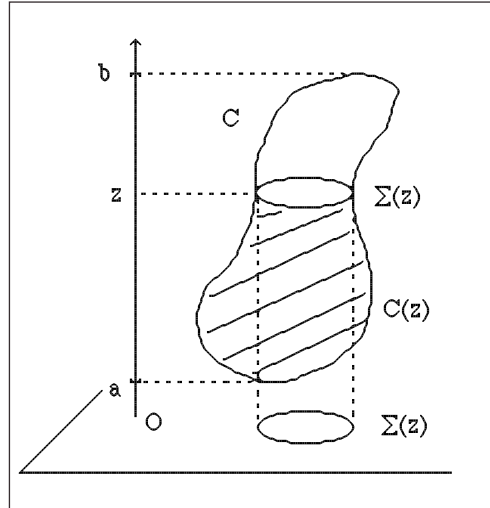
connue $\int_0^x d(t)dt + \frac{d(0)}{k2\pi r}$ ne permet pas plus de conclure... tant que la fonction exponentielle n'est pas connue...

I.5. La formule de terminale pour le volume des solides

Nous avons en vue ici la formule donnée et admise en terminale scientifique, sous l'hypothèse que la fonction $z \rightarrow S(z)$ soit continue :

$$(**) \quad V(a,b) = \int_a^b S(z)dz .$$

On s'est donné un « corps solide » C , un axe qui permet de repérer les cotes z des points de l'espace, sur lequel C se projette selon un intervalle $[a, b]$, et chaque plan orthogonal à l'axe, de cote z , coupe le solide C selon une section $\Sigma(z)$ qui a une aire $S(z)$. On note $C(z)$ l'ensemble des points de C de cotes au plus z , et $V(z)$ le volume de cet ensemble (voir la figure).



Ce que nous voulons analyser ici, c'est en quoi cette situation diffère profondément du calcul des aires planes, même si des techniques analogues peuvent s'y appliquer, et voir comment la justification de cette formule peut se faire dans certains cas en utilisant la PMAD.

I.5.1 Le cas des aires planes

La formule $A(f,a,b) = \int_a^b f(t)dt$ est prise

comme définition de l'intégrale de $f \geq 0$ continue sur $[a,b]$, en admettant une notion naïve d'aire $A(f,a,b)$ pour le sous-graphe. Mais ce qui est dessous, ce sont les sommes de Riemann ou Darboux qui représentent un découpage en tranches verticales approchant l'aire sous le graphe de f , qu'on veut calculer. Mais comme f est réelle, le rapport entre la dérivée de l'aire $A(f,a,x)$ et $f(x)$ est facile à obtenir car on peut encadrer ΔA entre $\Delta x f_+$ et $\Delta x f_-$, maximum et minimum de f sur $[x, x + \Delta x]$.

Du coup l'erreur entre ΔA et $f(x)\Delta x$ est $o(\Delta x)$, car majorée en valeur absolue par $\Delta x |f_+ - f_-|$, et la limite de $|f_+ - f_-|$ est 0 par continuité de f en x .

Ainsi la formule $\frac{d}{dx} A(f,a,x) = f(x)$ se démontre *par encadrement de nombres*, et c'est clairement la PMAD qui est à l'œuvre ici.

I.5.2 Le cas des volumes

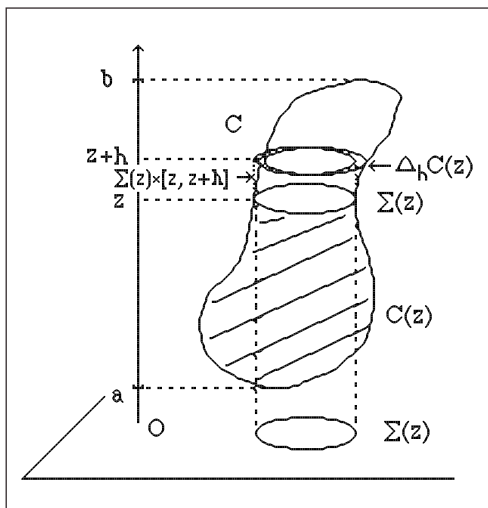
Pour les volumes, cela ne marche plus, sauf dans certains cas particuliers. L'idée de base est que si S est une fonction continue, le fait que la formule (***) pour le volume soit vraie sur chaque intervalle $[a, z]$, est équivalent au fait que la fonction V soit continue sur $[a, b]$, et de classe C^1 sur $[a, b]$, de dérivée $S(z)$ (à droite en a , à gauche en b).

Que signifie géométriquement la relation $V'(z) = S(z)$? Écrivons-la sous la forme $V(z+h) - V(z) = hS(z) + h\varepsilon(h)$, avec $\varepsilon(h)$ qui tend vers 0 quand h tend vers 0. Cette relation signifie donc (dans le cas $h > 0$) que le volume de la tranche « infinitésimale »

$$\Delta_h C(z) = (C(z+h) \setminus C(z)) \cup \Sigma(z) \times [z, z+h] = C \cap \mathbf{R}^2 \times [z, z+h]$$

est égal au volume du « tout petit » cylindre droit $\Sigma(z) \times [z, z+h]$ à un terme négligeable devant h près. Prouver la relation $V'(z) = S(z)$, c'est donc montrer que la PMAD va pouvoir s'appliquer.

Remarquons que du point de vue de la mesure des grandeurs, l'erreur $h\varepsilon(h)$ a la dimension d'un volume. Sauf aux points z où $S(z) = 0$, on pourrait aussi bien écrire $\Delta V = hS(z) + o(\Delta V)$. Dans la pratique, par encadrement de volumes, on va bien constater que l'erreur est un volume négligeable devant ΔV .



I.5.2.a. Les corps de révolution

Pour un corps de révolution, à méridienne $r = f(z)$ continue ≥ 0 sur $[a, b]$, pas trop de problèmes, la surface $S(z)$ est $\pi f^2(z)$, et la continuité de cette fonction S permet de faire le même raisonnement que pour les aires

pour montrer que $\frac{d}{dz} V(f,a,z) = S(z)$, et donc que $V(f,a,b)$ est bien l'intégrale de $S(z)$ entre a et b .

Ce qui marche est qu'on peut encadrer « physiquement » la tranche $\Delta_h C(z)$ entre deux volumes calculables simples : des cylindres (formés avec f_+ et f_- , maximum et minimum de f sur $[z, z+h]$), et faire ainsi surgir le $o(h)$ (qui est bien un volume négligeable devant ΔV) qui

assure la dérivée cherchée $\frac{d}{dz} V(f,a,z) = S(z)$.

La preuve se simplifie par des encadrements élémentaires si on suppose de plus f monotone par morceaux.

Cela peut tout à fait se faire en terminale, c'est une bonne illustration de la PMAD. On trouvera aussi dans [7] un cas un peu plus général.

I.5.2.b. Le cas général

Ce cas est bien plus difficile : si on sait seulement que $S(z)$ est continue, on n'a aucun moyen d'encadrer physiquement (inclusions) ΔV entre deux cylindres. Même pour le cas du cône de base un convexe B et de hauteur h , il n'est pas facile du tout de coincer la tranche entre z et $z + \Delta z$ entre deux cylindres si le sommet O du cône ne se projette pas orthogonalement sur B , bien qu'on ait une formule explicite pour $S(z)$ par homothétie de B .

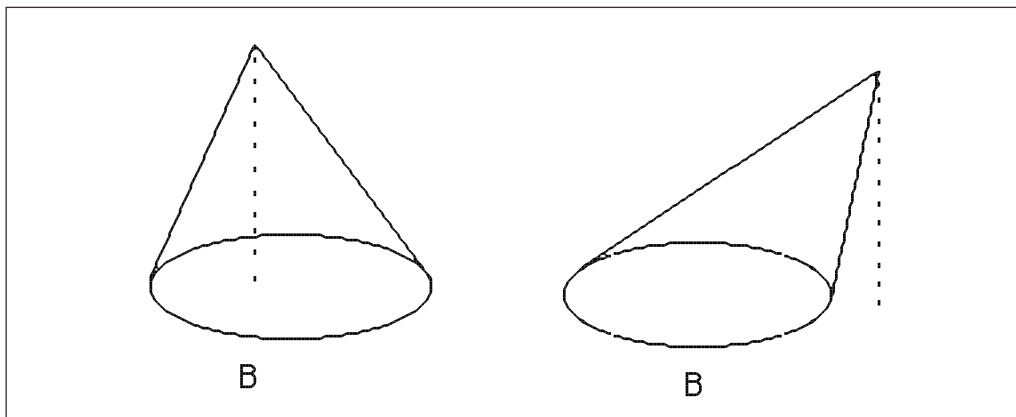
On peut s'en tirer élémentairement si le solide C est convexe, mais c'est trop subtil au niveau terminale (voir [7]). Dans certains cas (cônes convexes) on peut utiliser l'image de la mesure de Lebesgue par des applications affines (avec un déterminant). Le cas général se traite avec le théorème de Fubini à condition de raisonner avec l'intégrale de Lebesgue. Avec des solides non convexes, voir le résultat par une méthode élémentaire est quasi sans

espoir. Et tout cela est bien loin de la terminale...

I.5.3 L'intégrale double

Le problème est tout autre pour le calcul du volume $V(f, D)$ sous le graphe d'une fonction de deux variables $f(x,y) \geq 0$ sur un domaine du plan. La *procédure intégrale* revient à découper D , par exemple par un quadrillage du plan, en morceaux plus ou moins disjoints $D_{p,q}$, et à encadrer dans chaque $D_{p,q}$ le volume par celui de deux cylindres de base $D_{p,q}$ et de hauteur f_+ et f_- , max et min de f sur $D_{p,q}$, ceci grâce à une véritable inclusion des volumes physiques. De là à passer à l'intégrale double de f sur D , il y a encore de la marge, selon la nature de D ... Les problèmes peuvent venir de la frontière de D , qui peut ne pas avoir une aire nulle... (les mathématiciens sont friands de ce genre de « monstres élémentaires » qui défient l'intuition). De toute façon, on est là bien au-delà du programme de terminale.

Cela étant, on peut, avec les formules donnant les sommes des puissances (petites) des n premiers entiers, calculer effectivement



de façon élémentaire, par la procédure intégrale, certains volumes simples. Par exemple, calculer le volume de l'ensemble défini par $0 \leq z \leq 2 - y^2 + 3x^2$ et $0 \leq x, y \leq 1$, est parfaitement possible en terminale (on encadre la fonction de (x, y) sur chaque petit carré $p/n \leq x \leq (p+1)/n$, $q/n \leq y \leq (q+1)/n$, on encadre les volumes, on somme, et on fait tendre n vers l'infini).

Mais ce qu'il faut bien voir, c'est que la méthode de l'intégrale double avec *procédure intégrale* n'est pas celle qui est à l'œuvre dans le calcul de V par l'intégrale de $S(z)$, qui relève de la *procédure dérivée-primitive* et de la PMAD.

II. Quelques propositions didactiques

II.1. Quels objectifs ?

Nous pensons que certaines des situations brièvement analysées ci-dessus peuvent s'agencer en *une ingénierie dans la classe de mathématiques*, en liaison avec l'enseignement de physique, et dont l'objectif serait double.

Il s'agirait, d'une part, de faire *comprendre et assimiler la PMAD* et les manières variées de la mettre en œuvre, de façon à effectivement *coordonner* les points de vue physique et mathématique sur la MED et la MGI. Ce serait là l'objectif interdisciplinaire appelé par les programmes, mais réalisé d'un point de vue mathématique. La liaison temporelle avec le déroulement des enseignements de physique serait bien sûr à discuter avec l'enseignant de physique.

Il s'agirait, de l'autre, de *valoriser certains aspects de l'analyse* assez minorés dans la

pratique des programmes : la notion de négligeabilité et son lien avec le concept de dérivée (en rapport avec la notion d'erreur relative dans la MED), la pratique des encadrements et majorations, une meilleure conception de la notion de continuité (y compris parfois l'usage d'un ϵ arbitrairement petit), l'usage de paramètres permettant de faire varier les objets soumis à l'étude.

Il est clair que ce deuxième objectif ne peut être atteint uniquement par le biais de situations de MED ou MGI. Il y faudrait un travail spécifiquement mathématique (sans doute à démarrer dès la classe de première). Mais le travail sur des problèmes de physique tels ceux proposés ici peut aider à donner du sens, voire des motivations, à ces aspects techniques mais essentiels de l'analyse.

II.2. Organiser l'ingénierie

Donnons quelques propositions ébauchant ce que pourrait être l'ingénierie envisagée, sous la réserve bien sûr que seule une expérimentation en vraie grandeur pourrait en garantir la viabilité ou amener à une autre organisation.

En ce qui concerne la liaison avec la physique, on peut par exemple laisser d'abord l'enseignant de cette discipline introduire la nécessité de la recherche d'une fonction inconnue vérifiant une équation différentielle par diverses situations physiques, dont l'énoncé 2.

Le problème 3 pourrait se traiter alors, sous forme de travail en petits groupes (3 ou 4 élèves), d'abord en physique, puis en mathématiques, chacun des enseignants se proposant de faire apparaître la procédure différentielle spécifique de sa discipline, en utilisant d'autres problèmes si nécessaire.

L'enseignant de mathématiques devrait, pour sa part, se centrer sur une *demande aux élèves de préciser le sens de l'écriture physique* $\Delta d \approx -k2\pi r d(x) \Delta x$, dans le problème 3.2°, en utilisant aussi dans la même séance *la situation du calcul de $\sin(46^\circ)$ sans calculatrice*. L'objectif serait là de faire réfléchir les élèves au lien : dérivabilité-négligeabilité-erreur relative dans un accroissement différentiel. On peut, du point de vue spécifiquement mathématique, utiliser aussi des recherches de dérivabilité en 0 de fonctions comme $2 + 3x + x\sqrt{1 - \cos x}$, ou comme $1 - x + x\sqrt{|\sin x|}$, ou encore comme $5 + 2x - |x|(1 - \sin x) \dots$

Le mode de travail en petits groupes a ici pour but de favoriser les échanges entre les élèves. Selon la durée disponible, on peut éventuellement traiter dans la même séance l'étude d'un autre phénomène par MED dans une situation où l'on donne la *loi locale physique* (par exemple, la loi de refroidissement d'un corps dans un milieu, ou l'absorption de la lumière dans un milieu homogène semi-transparent, voir [1]).

L'étape suivante en mathématiques serait une ou deux séances de travail en petits groupes consacrées entièrement au problème 5, avec comme objectif de *faire apparaître les techniques* permettant dans la procédure mathématique de l'accroissement différentiel de s'assurer que le terme négligé est bien en $o(\Delta x)$. Rappelons qu'il s'agit d'utiliser une monotonie pour avoir des encadrements, ou une continuité sous les deux formes : avec un ε arbitraire, ou avec les maximum et minimum d'une fonction au voisinage d'un point. Cette étape demandera un renforcement ultérieur dans le cadre purement mathématique : pratiques diverses de majorations et encadrements, utilisation de la procédure en $\varepsilon - h$ dans quelques cas, ou

de la proximité des maximum et minimum d'une fonction sur un voisinage d'un point.

Mais nous verrons qu'en fait cette étape, organisée autour du problème 5, va faire surgir aussi *la question de la discrétisation* ; c'est ce qui obligera sans doute à la faire travailler sur deux séances.

Une deuxième partie de l'ingénierie devrait se situer après l'introduction de l'intégrale (avec, comme on l'a dit, quelques calculs par sommes de Darboux utilisant les sommes de puissances d'entiers, voir [6]), et avoir pour but de faire saisir comment la PMAD va se réinvestir dans diverses situations de mesure de grandeurs. On peut là organiser deux séances autour des problèmes 6, 7, 8 et autour de la formule de calcul des volumes par intégration de l'aire des tranches. Il est évidemment souhaitable de ne pas laisser trop de temps entre l'étape consacrée à la MED et celle consacrée à la MGI... et évidemment de se concerter avec l'enseignant de physique.

II.3. *Etude plus détaillée de la situation de la dissolution du sel*

Evidemment, chacune des situations développées dans les diverses étapes de l'ingénierie demanderait à être soigneusement étudiée. Nous allons juste, ici, détailler un mode de travail possible sur la situation de l'énoncé 5 de dilution du sel. Travaillée en petits groupes, elle a été testée à plusieurs niveaux, de la première année d'université à la préparation au Capes, et même auprès d'étudiants en thèse, et d'universitaires mathématiciens ou physiciens, il est donc possible de l'analyser avec plus de fiabilité.

Cette situation permet en fait d'introduire deux questions : non seulement la

PMAD, mais aussi le processus de discrétisation d'une « méthode d'Euler physique » pouvant conduire à une suite de fonctions candidate à converger vers l'exponentielle. En effet, chaque fois que ce problème a été posé à des étudiants, la première procédure qu'ils ont mis en œuvre a été une discrétisation du problème. Cette situation va donc se développer selon deux branches successives, une première menant à une discrétisation, et une deuxième menant à l'équation différentielle.

II.3.1. La procédure de discrétisation

Les élèves sont d'emblée gênés par l'impossibilité de ramener le problème à une loi physique qu'il suffirait d'appliquer. Compte tenu des unités choisies dans l'énoncé (débit en litres par minutes, durée de 60 mn : il s'agit là des valeurs d'une « variable didactique »), la réaction spontanée est de raisonner par étapes d'une minute. Mais comment surmonter le caractère toujours variable de la concentration en sel de la solution ?

Les étudiants procèdent donc par étapes d'une minute, pendant laquelle *ils supposent la quantité de sel constante*. On constate souvent (et le travail en petits groupes est essentiel pour voir surgir ce phénomène) que pour justifier ce fait ils imaginent deux expériences de pensée (EP pour abrégé). Dans la première (EP1), ils arrêtent le robinet d'eau pure au début de la minute, laissent couler le robinet de vidange pendant une minute, puis complètent de façon instantanée avec 10 l d'eau pure. Dans la seconde (EP2), ils font l'inverse : arrêt de la vidange, puis vidange instantanée. En fait, EP2 est plus rarement évoquée, alors qu'elle justifie mieux l'hypothèse faite de constance de la quantité de sel pendant le temps de l'écoulement (ici réduit à rien), évidemment fausse dans EP1.

Il est facile de voir que EP1 débouche sur le résultat final pour le sel restant : $S(60) = 10(0,9)^{60}$, alors que EP2 débouche sur

$$S(60) = 10\left(\frac{10}{11}\right)^{60},$$

ce dernier résultat étant presque le double du premier.

Si cette divergence ne suffit pas à augmenter la conscience que la méthode n'est qu'approchée et entachée d'erreur, on peut faire tracer aux élèves la courbe donnant la quantité de sel $S(t)$ en fonction du temps. L'hypothèse de la constance de $S(t)$ pendant chaque minute, qui donne un graphe en escalier dont les marches ont des hauteurs en décroissance géométrique, contredit fortement le sentiment des élèves que la fonction S est continue (« le sel est évacué peu à peu »). De plus, dans le cas de EP1, cette même hypothèse de la quantité de sel constante donne une diminution affine de cette quantité de sel pendant chaque minute (donc un graphe affine par morceau), ce qui est auto-contradictoire.

L'idée de diminuer la durée de chaque étape pour diminuer les erreurs devrait alors surgir d'elle-même, mais elle n'est productive que si, « pour y voir plus clair », on passe du cadre numérique (100 l, 10 l/mn,...) au cadre symbolique (volume V , débits v , sel initial S_0 , durée t , n étapes de durée t/n). Il faut là, certainement, *une intervention de l'enseignant pour proposer ce changement de registre*, et il faut pouvoir en convaincre les élèves ; on peut par exemple dire que c'est le seul moyen de comprendre précisément d'où viennent les erreurs, quels facteurs les déterminent ; on peut aussi évoquer le besoin de généralité dans la compréhension du phénomène étudié (voir aussi I.2.1).

On obtient alors, dans le cas de EP1 :

$$S(t) = S_0[1 - (v/V).(t/n)]^n$$

et
$$S(t) = \frac{S_0}{[1 + (v/V).(t/n)]^n}$$

dans le cas de EP2.

L'*institutionnalisation* de cette première branche de la situation devrait alors être, au plan particulier du phénomène étudié, une *conjecture* : les deux fonctions précédentes devraient, pour chaque valeur de t , converger quand n tend vers l'infini, vers une quantité $S(t)$ qui devrait être la *vraie* quantité de sel à l'instant t .

Un *double saut épistémologique* se profile là :

— d'une part, l'idée qu'un phénomène réel ne peut parfois être modélisé que par un procédé de passage à la limite propre aux mathématiques, et plus précisément à l'analyse ; quelque chose de réel, de concret, n'est ainsi explicable qu'à travers des concepts abstraits et non algébriques ;

— de l'autre, le fait qu'une fonction *a priori* inconnue, comme $t \rightarrow S(t)$ dans notre problème, ne peut parfois être obtenue que comme limite (ici pour l'instant ponctuelle) d'une suite de fonctions connues plus simples (des polynômes ou fractions rationnelles).

Si ce deuxième aspect ne pourra guère être développé en terminale (la preuve proposée par exemple dans [5] pour l'exponentielle a du mal à passer même auprès des étudiants de CAPES), par contre le premier est *l'un des enjeux philosophiques de la collaboration entre mathématiques et physique*. De nombreux textes ont été publiés sur cette question, et nous n'y reviendrons pas ici, mais nous insistons

sur le fait qu'il ne faut absolument pas éluder cette question dans les classes : *pas de confrontation mathématiques-physique sans réflexion épistémologique*.

Pour conclure sur cette première branche de la situation, nous voudrions évoquer le problème de la méthode d'Euler. Dans la discrétisation mise spontanément en œuvre par les élèves, il n'y a ni équation différentielle, ni solution d'une équation différentielle qu'on souhaiterait approcher par une méthode numérique : aucune « méthode d'Euler mathématique ». Il n'apparaît qu'une *méthode d'Euler physique*, qui consiste à discrétiser un phénomène réel en le regardant évoluer de façon approchée à petits pas (ici, de temps). A notre avis, c'est la seule discrétisation qu'on devrait s'autoriser en terminale, où la méthode d'Euler mathématique n'a pas sa place. Elle est bien trop difficile à comprendre. L'expérience montre ainsi que même les étudiants préparant l'agrégation de mathématiques en ont une idée fautive : ils croient que la fonction affine par morceau associée à cette méthode a ses « sommets » sur le graphe de la solution cherchée, alors qu'en fait elle saute de solution en solution. Ce fait est difficile à imaginer sans un théorème d'existence et unicité, et sans concevoir la notion de « champ de pentes » associé à une équation différentielle, deux idées loin d'un programme de terminale se contentant d'effleurer la notion d'équation différentielle à l'occasion de l'équation linéaire à coefficients constants.

II.3.2. La mise en équation différentielle

A l'issue de l'étape constituée par la première branche de la situation, il faut maintenant introduire la deuxième branche, qui doit se recentrer sur la PMAD. La motivation de départ peut être d'évaluer l'erreur faite dans

le raisonnement de discrétisation pendant une petite durée Δt (une minute d'abord, puis t/n). Les élèves ont pris conscience de l'existence de cette erreur, ils savent que les formules obtenues ne sont pas exactes, la question a du sens pour eux. Comment évaluer l'erreur entre le véritable accroissement (négatif) ΔS et celui utilisé dans la discrétisation : $-(v/V).S(t).\Delta t$?

Le point de départ peut être d'*anticiper sur le comportement de la fonction S* : que nous dit la physique (ou le bon sens) la-dessus ? La réponse est implicite dans les constats de la première étape : ΔS est négatif, S est continue. On peut inciter les élèves à *tracer un « graphe qualitatif »* pour la fonction S (ils peuvent d'ailleurs y penser seuls, puisque ce changement de registre a déjà été utilisé dans la première étape). On peut parier que tous les graphes proposés vont faire apparaître une fonction décroissante, tendant vers 0 en $+\infty$, et continue. On peut alors faire discuter les élèves sur ces trois propriétés : la première n'est guère contestable, la deuxième l'est plus *a priori*. Pour la troisième, on peut l'accepter d'emblée, mais il paraît préférable, *pour préparer la suite et pour mettre en valeur des techniques d'analyse*, de demander aux élèves : « entre t et $t + \Delta t$, peut-il partir beaucoup de sel, si Δt est petit ? ».

Evaluer la quantité de sel qui part dans le volume $v \Delta t$ est délicat, puisque la concentration du sel $C(u) = S(u)/V$ est variable avec $u \in [t, t + \Delta t]$. Peut-on majorer $C(u)$, c'est-à-dire $S(u)$? Oui par la propriété de décroissance : pour tout u de l'intervalle, on a $C(u) \leq S(t)/V$. La variation ΔS de la quantité de sel entre t et $t + \Delta t$ (d'ailleurs négative) vérifie donc l'inégalité :

$|S(t + \Delta t) - S(t)| = |\Delta S| \leq S(t)/V.v.\Delta t$,
et par suite ΔS peut être rendu aussi petit qu'on

veut en prenant Δt assez petit : c'est la continuité de la fonction S (au moins à droite, on peut omettre la continuité à gauche et la laisser à faire en exercice ultérieur).

On peut alors passer à l'évaluation de l'erreur entre le véritable accroissement ΔS et celui utilisé dans la discrétisation : $-(v/V) S(t) \Delta t$. L'idée de majorer et minorer la concentration $C(u)$ pour tous les u de $[t, t + \Delta t]$ devrait être naturelle, puisque la moitié vient d'être fait. Une première méthode devrait ainsi apparaître : par décroissance de S, on a un encadrement :

$$S(t + \Delta t) / V \leq C(u) \leq S(t) / V,$$

et par suite :

$$- [S(t) / V].v.\Delta t \leq \Delta S \leq - [S(t + \Delta t) / V].v.\Delta t.$$

L'erreur entre ΔS et $-(v/V).S(t).\Delta t$ vérifie donc :

$$0 \leq \Delta S + [S(t)/V].v.\Delta t \leq v.[(S(t) - S(t + \Delta t))/V].\Delta t.$$

La continuité de la fonction S prouve alors que cette erreur est $o(\Delta t)$, ce qui est exactement ce qu'il faut pour conclure que S est dérivable en t et qu'on a $S'(t) = -(v/V).S(t)$ (en fait il s'agit de la dérivée à droite...). Cet argument final sera d'autant plus aisé pour les élèves qu'ils auront tiré le bilan de l'étape précédente de l'ingénierie sur les liens entre négligeabilité, dérivabilité et erreur relative dans un accroissement différentiel.

La conclusion en ce qui concerne le problème physique posé est que la fonction inconnue $t \rightarrow S(t)$ vérifie une *équation différentielle* $S'(t) = -(v/V).S(t)$, et qu'on peut *conjecturer* que les deux suites de fonctions obtenues à l'issue de la première branche de la situation convergent, quand n tend vers l'infini, vers une solution de cette équation différentielle.

Un pas supplémentaire reste à faire : l'enseignant devrait présenter à l'issue de la méthode précédente une variante utilisant un ε , pour *améliorer la compréhension de la continuité*, et montrer que *la monotonie de la fonction cherchée n'est pas essentielle*, même s'il est plus simple de s'en servir.

Il s'agit de prouver que, pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut rendre l'erreur $|\Delta S + (S(t)/V) \cdot v \cdot \Delta t|$ plus petite que $\varepsilon \Delta t$. La fonction $(v/V)S$ étant continue, elle varie peu sur $[t, t + \Delta t]$ si Δt est assez petit, donc pour u dans cet intervalle on a l'encadrement :

$$(v/V) \cdot S(t) - \varepsilon \leq (v/V) \cdot S(u) \leq (v/V) \cdot S(t) + \varepsilon.$$

On a donc un encadrement de $v \cdot C(u)$, et par suite de ΔS :

$$-[(v/V) \cdot S(t) + \varepsilon] \cdot \Delta t \leq \Delta S \leq -[(v/V) \cdot S(t) - \varepsilon] \cdot \Delta t,$$

c'est-à-dire $|\Delta S + (S(t)/V) \cdot v \cdot \Delta t| \leq \varepsilon \cdot \Delta t$, ce qui est l'inégalité cherchée exprimant la négligeabilité de l'erreur devant Δt .

Une variante peut utiliser le maximum et le minimum de $S(u)$ pour $u \in [t, t + \Delta t]$.

Evidemment, ce type de raisonnement n'est pas immédiat au début. Ce qui le motive ici est la recherche de la taille d'une erreur dans une évaluation d'un petit accroissement d'une grandeur en jeu dans un problème de physique. C'est lui qu'il faut institutionaliser, avec sa variante utilisant la monotonie, à l'issue des deux situations sur le problème 3.2° et le problème 5. C'est essentiellement la PMAD. On la retrouvera dans la suite de l'ingénierie avec le calcul du volume d'un solide de révolution à méridienne $r = f(z)$ continue, et avec le problème 8 du barrage.

III. Faire évoluer la pratique des programmes ?

L'approche que nous avons proposée demande à être confrontée à la pratique des programmes actuels (plus sans doute qu'à leur contenu littéral). Deux questions se posent.

- (1) Peut-on vraiment faire de façon profitable de la physique en classe de mathématiques sans s'en donner les moyens mathématiques, si on veut apporter aux élèves autre chose que ce que l'enseignement de physique peut déjà leur apporter ? Quels sont alors ces moyens ?
- (2) Inversement, la confrontation avec la physique peut-elle permettre de construire des savoirs et des habiletés mathématiques que la lecture des seuls programmes mathématiques rend improbables ?

Il nous semble avoir montré que la réponse à la question (1) consiste essentiellement en la prise de conscience d'une procédure mathématique de l'accroissement différentiel, apport spécifique des mathématiques à ces questions de MED et de MGI, et que cela demandait une pratique de certains aspects de l'analyse : négligeabilité, liens avec la dérivabilité et la notion d'erreur relative dans une procédure différentielle, majorations et encadrements, un peu d'usage de la continuité avec des ε , usage de notations symboliques permettant un certain jeu avec des paramètres.

L'ingénierie proposée, et en particulier les situations autour des problèmes 3.2° (la canalisation poreuse) et 5 (dilution du sel), nous semble indiquer (sous réserve de sa viabilité

dans les classes) qu'une réponse affirmative à la question (2) est possible.

Cela est d'autant plus intéressant que, pour faire intervenir ces techniques d'analyse, on est pratiquement obligé de travailler avec des fonctions non précisées, encore inconnues en début de problème, ce qui est exactement le cas des problèmes de physique. Or le contenu des programmes mathématiques actuels de la terminale ne propose et ne permet probablement aucune situation permettant le jeu sur ces techniques : il y a juste quelques théorèmes du cours sur la continuité ou la dérivabilité automatique de fonctions non précisées (somme, produit...), mais seules les preuves de ces résultats obligeraient à ce jeu, et elles sont hors programmes — et sans véritable motivation. Il y avait à une époque la fonction réciproque, mais elle a disparu des programmes...

En définitive, l'intervention des mathématiques sur les problèmes de MED et de MGI exige un approfondissement des savoirs et pratiques des élèves en analyse, et en même temps c'est le seul lieu où, en l'état actuel de la lettre des programmes, cet approfondissement puisse être développé.

Ainsi, *faire de la physique en classe de mathématiques* peut être l'occasion de *faire évoluer la pratique des programmes mathématiques*, et peut-être de *préparer les évolutions futures de la lettre de ces programmes*, sans doute inévitables si on veut que les liens mathématiques-physique souhaités se développent de façon durable.

Remerciements

Les idées présentées dans ce texte ont leur origine dans un enseignement expérimental donné en Deug première année à l'université de Lille 1 entre 1984 et 1995, portant en particulier sur les équations différentielles. Je remercie ici les collègues qui ont participé à cette expérience.

Ces idées ont beaucoup profité, outre du travail pionnier de [1], [4], [8], des échanges et discussions qui ont eu lieu en 2004-2005 à la Commission Inter-Irem Université et à la Commission Inter-Irem second cycle. Dans ce dernier cadre, ce texte a bénéficié des échanges nombreux qui ont eu lieu avec notre collègue physicien Jacques Treiner et avec notre collègue mathématicien Jean-Pierre Ferrier (sans bien sûr qu'ils partagent nécessairement les thèses émises ici).

Bibliographie

- [1] M. Artigue, *Procédures différentielles dans la mise en équation de problèmes*, Ann. de Didactique et de Sciences Cognitives, Strasbourg, vol 2, 1989, 173-190.
- [2] H. Lebesgue, *La mesure des grandeurs*, Albert Blanchard, Paris, 1975.
- [3] R. Noirfalise, *Modélisation et équations différentielles en TS : utilisation d'un modèle praxéologique pour poser des questions didactiques*, Petit x 66, 6-17, 2004.
- [4] *Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire*, Rapport du GRECO du CNRS : «Didactique et acquisition des connaissances scientifiques», groupe mathématiques et physique-enseignement supérieur ; document Irem Paris 7 et LDPES, 1989.
- [5] *Radioactivité*, document interdisciplinaire d'accompagnement des programmes de terminale S.
- [6] Robert A. et Rogalski M., *Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée*, Repères-IREM, 54, janvier 2004, p. 77-103.
- [7] Rogalski M. et all., *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*, Ellipses, 2001.
- [8] *Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale ; L'interdisciplinarité ; Annexe*, trois textes dans « Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année », brochure de la Commission Inter-Irem université, 1990

ANNEXE

*L'exponentielle comme « débouché »
de la situation de la dilution du sel*

Il se peut que des élèves curieux aiment en savoir plus sur *la conjecture globale qui conclut la situation 5* :

Conjecture : les fonctions :

$$G_n(t) = S_0 [1 - (v/V).(t/n)]^n \quad \text{et} \quad H_n(t) = \frac{S_0}{[1 + (v/V).(t/n)]^n}$$

convergent, quand n tend vers l'infini, et pour $t \geq 0$, vers une même fonction $t \rightarrow S(t)$ qui vérifie l'équation différentielle $S' = -(v/V) S$, et est donc la solution du problème physique de dilution du sel.

En voici une preuve simple (le lecteur jugera lui-même si elle est plus simple que celle de [5], en tout cas elle paraît plus naturelle, voir la remarque finale).

Quatre énoncés mathématiques

Lemme 1. Si $x \geq 0$, la suite $e_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ converge, quand n tend vers $+\infty$ vers un nombre noté $exp(x)$, et $exp(x) \geq 1$.

Lemme 2. Si x est réel, et $u_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} - (1 + \frac{x}{n})^n$, on a $|u_n(x)| \leq [x^2 exp(|x|)]/n$, et par suite $u_n(x) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Lemme 3. Si $x \geq 0$, la fonction exp est dérivable, et $exp'(x) = exp(x)$.

Lemme 4. Si $x \geq 0$, la fonction $x \rightarrow f(x) = 1 / exp(x)$ est dérivable, et $f'(x) = - f(x)$.

Retour à la physique et à la conjecture

Par les lemmes 1 et 2, $H_n(t) \rightarrow S(t) = \frac{S_0}{exp(tv/V)}$ quand $n \rightarrow +\infty$. Par le lemme 4 et la dérivée d'une fonction composée, $S'(t) = -\frac{v}{V} S(t)$.

Reste à montrer que $G_n(t) \rightarrow S(t)$ quand $n \rightarrow +\infty$. On prend $n > t \frac{V}{v}$. Alors on a :

$$\frac{G_n(t)}{H_n(t)} = [1 - (v^2/V^2).(t^2/n^2)]^n \leq 1,$$

et par suite :

$$0 \leq 1 - \frac{G_n(t)}{H_n(t)} = 1 - [1 - (v^2/V^2).(t^2/n^2)]^n = \frac{v^2 t^2}{V^2 n^2} [1 + (1 - \frac{v^2 t^2}{V^2 n^2}) + \dots + (1 - \frac{v^2 t^2}{V^2 n^2})^{n-1}] \leq \frac{v^2 t^2}{V^2 n^2}$$

On en conclut bien que $G_n(t) \rightarrow S(t)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Preuve des lemmes mathématiques

1) La suite $e_n(x)$ est croissante, il suffit de montrer qu'elle est majorée à partir d'un certain rang. En notant $[x]$ la partie entière de x , on a $[x] + 2 > x$, et en majorant, pour $n > [x]$, après y avoir mis en facteur $\frac{x^{[x]+1}}{([x]+1)!}$, les termes de la somme d'indices entre $[x] + 1$ et n

par ceux d'une progression géométrique de raison $\frac{x}{[x] + 2}$, on a la majoration :

$$e_n(x) \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{[x]+1}}{([x]+1)!} \cdot \frac{[x]+2}{[x]+2-x} = m(x), \text{ indépendant de } n.$$

2) On a : $|u_n(x)| = \left| \sum_{k=2}^n \frac{|x|^k}{k!} \left[1 - \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \right] \right| \leq \sum_{k=2}^n \frac{|x|^k}{k!} \left[1 - \left(\frac{n-k+1}{n} \right)^k \right]$

$$= \sum_{k=2}^n \frac{|x|^k}{k!} \frac{k-1}{n} \left[1 + \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) + \dots + \left(1 - \frac{k-1}{n} \right)^{k-1} \right] \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \frac{|x|^k k(k-1)}{k!}$$

$$= \frac{x^2}{n} \sum_{p=0}^{n-2} \frac{|x|^p}{p!} \leq \frac{x^2 \exp(|x|)}{n} .$$

3) Une utilisation de la formule du binôme donne facilement la relation, pour $x \geq 0$ et $h \neq 0$:

$$[(e_n(x+h) - e_n(x)) / h] - e_{n-1}(x) = h \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{k-1} C_k^p x^p h^{k-p-1} \right] ;$$

on en déduit, pour $|h| \leq 1$, la majoration :

$$\left| [(e_n(x+h) - e_n(x)) / h] - e_{n-1}(x) \right| \leq |h| \sum_{k=1}^n \frac{(x+1)^k}{k!} \leq |h| \exp(x+1) .$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $\left| [(exp(x+h) - exp(x)) / h] - exp(x) \right| \leq |h| \exp(x+1)$.

On obtient donc le résultat en faisant tendre h vers 0.

4) Le lemme 4 est un corollaire immédiat du lemme 3. On peut ensuite définir $exp(x)$ pour $x \leq 0$, trouver les propriétés de l'exponentielle, etc.

Remarque. En écrivant $(1 + \frac{x}{n})^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k}$, on voit bien que

pour k fixé le coefficient de $\frac{x^k}{k!}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Il est donc assez *natural*

de comparer la somme précédente à $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.