LA RUBRIQUE « POINT DE VUE » :

Un lieu de débat pour les enseignants de Mathématiques

La rubrique « POINT DE VUE » *est destinée à être un lieu de débat et un outil de réflexion pour les enseignants de mathématiques sur tous les sujets qui concernent leur profession.*

Elle accueille dans ce numéro un texte de Roland Charnay, membre du groupe « Sciences » chargé de l'élaboration des programmes de collège, qui pose la question des contenus mathématiques pour la scolarité obligatoire.

Cette rubrique est ouverte à tous et destinée à recevoir des articles courts, d'environ trois pages…

Nous attendons vos propositions.

Le Comité de Rédaction

Point de vue

QUELLE CULTURE MATHEMATIQUE COMMUNE (OU PARTAGEE) AU TERME DE LA SCOLARITE OBLIGATOIRE ?

Eléments de réflexion et contribution à un nécessaire débat

Roland CHARNAY

*Le présent texte a servi de support à une intervention faite à la demande de l'*ADIREM *au cours des journées du séminaire de travail qui s'est déroulé à Roscoff en mars 2005. Sa seule ambition est d'apporter une contribution au débat sur ce qu'on appelle le socle commun. Il ne prétend pas y apporter une réponse complète, simplement un point de vue destiné à alimenter la discussion sur un sujet important pour l'avenir de l'école.*

La réponse à la question évoquée dans le titre devrait résulter d'un large échange qui ne concerne pas seulement les mathématiciens professionnels ou les didacticiens ou les enseignants de mathématiques, même si toutes ces personnes ont vocation à y apporter leur contribution.

Plus largement, elle ne peut que se situer dans un débat beaucoup plus large sur l'école que nous voulons, sur ce que nous en attendons, sur la place des différentes disciplines (enseignées actuellement ou non…), pour autant que le découpage en disciplines soit reconnu comme le plus pertinent ou comme le seul pertinent…

Il faut aussi la situer par rapport aux finalités du collège qui voit se cristalliser les difficultés de certains élèves en échec ou en refus scolaire. Le collège pour quelques uns a été transformé en collège pour tous, sans que ses finalités (préparer au lycée d'enseignement général) n'aient fondamentalement été modifiées.

Il faudrait y ajouter les polémiques qui se développent actuellement entre tenants de l'instruction et tenants de l'éducation ou autour de la « baisse de niveau »… Cet affrontement ne permet pas de bien poser le problème, car on voit bien que instruction et éducation sont difficilement séparables, l'une étant la condition de l'autre… et réciproquement.

Il n'est pas sûr d'ailleurs que le terme de « culture mathématique commune » soit reconnu par tous comme pertinent, à la fois par l'usage du mot « culture » et par celui du mot « commune » qui déjà, assume le parti pris d'une école qui réunit tous les élèves jusqu'à 16 ans comme c'est encore le cas.

Cette contribution n'a donc pas la prétention de répondre à la question, tout juste l'audace d'apporter un point de vue qui peut paraître manquer d'originalité et qui, pour moi, est destiné à la controver-

1 Roland Charnay a été membre du groupe d'experts pour les programmes de l'école primaire et responsable de la commission Mathématiques. Il est également membre du groupe «Sciences» chargé de l'élaboration des programmes de collège.

se…, en ajoutant que l'expression « culture mathématique commune » est celle qui rend le mieux compte du point de vue que j'essaie de préciser.

I – Une réflexion qui n'est pas nouvelle

La question est évidemment d'actualité… même si elle n'est pas nouvelle, comme en témoigne un petit rappel de quelques faits, sans remonter trop loin dans le passé et en ne citant que quelques éléments (les IREM, l'APMEP n'ayant pas manqué non plus de réfléchir à ces questions). Il faut y ajouter les réflexions conduites à l'étranger (par nos collègues belges du CREM par exemple) ou au plan international (PISA parle de « culture mathématique » et prétend même la mesurer… en la définissant comme « *l'aptitude d'un individu à identifier et comprendre le rôle des mathématiques dans le monde, à porter des jugements fondés à leur propos, et à s'engager dans des activités mathématiques en fonction des exigences de sa vie, en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi* », ce qui, de mon point de vue, limite un peu cette culture à un aspect utilitariste : dirait-on la même chose de la culture artistique ?).

En 1989, Dacunha-Castelle publie un rapport sur l'enseignement des mathématiques (à la demande du Ministère de l'Education Nationale) dont voici quelques extraits :

> p.2 : *Des choix éthiques et idéologiques sont étroitement liés aux critères scientifiques pour décider du temps à consacrer aux mathématiques dans l'enseignement obligatoire et aussi pour préciser les méthodes et les contenus. (…)*
>
> p.3 : *Il est donc indispensable de prévoir ce que sera le bagage minimum en mathématiques des citoyens-adultes, hors de toute considération professionnelle. Il s'agit d'un but à atteindre au prix d'un travail opiniâtre.*

Plus loin sont précisés des contenus que j'ai pris en considération dans la suite de ma réflexion.

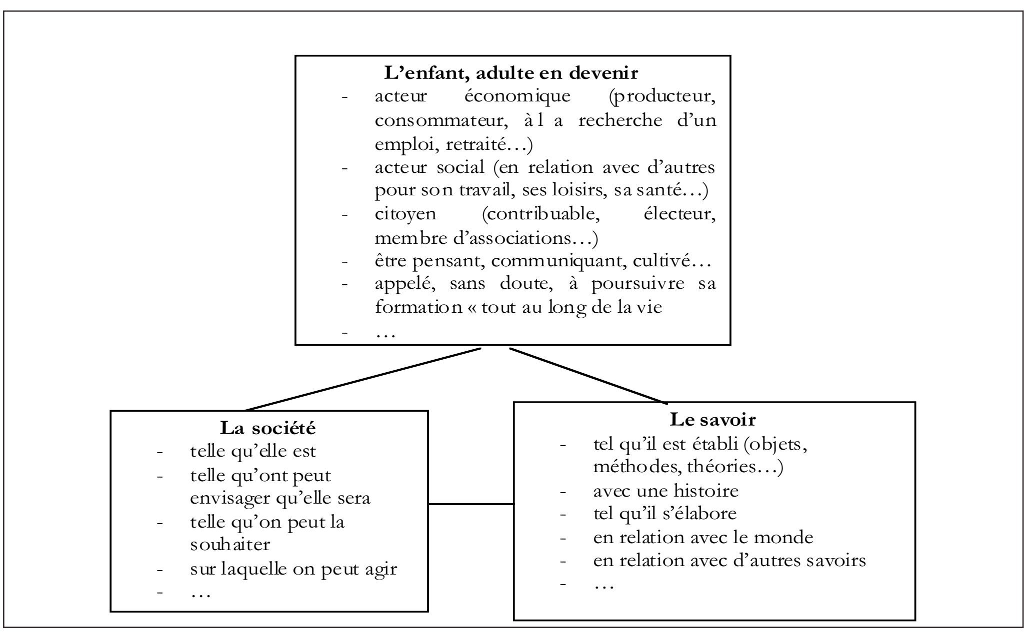
En 1999, la Commission Kahane (Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques) est mise en place et produit plusieurs rapports sur divers thèmes, notamment : géométrie, informatique et enseignement des mathématiques, calcul, probabilités et statistique. L'ensemble de ces rapports indique une multitude de voies où l'enseignement des mathématiques peut se renouveler. Ils sont accompagnés d'une note de présentation du professeur Kahane.

En 2002, le Conseil National des Programmes publie: « Qu'apprend-on au collège ? » (le CNP est présidé par Luc Ferry et l'ouvrage est préfacé par Jack Lang, alors ministre de l'Education Nationale). Y sont évoquées les idées de « *culture scolaire partagée* », de *« socle commun »* et « *d'enseignements choisis* ». Concernant les mathématiques, sont mentionnés les « *objets et concepts mathématiques comme outils de représentation et de compréhension du monde* » et « *un socle de savoirs et savoir-faire de base le plus souvent ancrés dans des situations empruntées à la vie quotidienne* », en précisant que « *les mathématiques ont leur autonomie propre, c'est ce qui leur permet d'intervenir dans les domaines aussi divers que les sciences physiques, les sciences de la vie et de la Terre, la technologie, la géographie…* » et que « *au collège, l'enseignement des mathématiques entraîne les élèves à la pratique d'une* *démarche scientifique, en développant progressivement les capacités d'expérimentation, de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique* ».

La même année sont publiés de nouveaux programmes pour l'école primaire qui affichent deux priorités : la résolution de problèmes et le calcul mental.

En 2004, le rapport Thélot, faisant suite à la consultation sur l'école précise, à propos du socle commun, que *la définition de son contenu ne relève pas de l'évidence, pour deux raisons au moins :* il correspond aux besoins de la société *et ceux-ci évoluent dans le temps ; à tout instant un certain nombre d'options se présentent, parmi lesquelles il est nécessaire de choisir au nom des valeurs que l'on veut promouvoir* (…). Les mathématiques y sont évoquées de la façon suivante : *Les mathématiques aident à penser avec rigueur ; elles fournissent des outils pour agir, pour choisir, pour décider dans la « vie courante ». L'acte de poser et de résoudre des problèmes doit être au coeur des apprentissages, à la fois comme but de l'acquisition des connaissances et comme moyen permettant cette acquisition. L'enseignement des mathématiques dans chacun des trois domaines que sont le calcul, la géométrie et la gestion des données participe aussi à la maîtrise de la langue. L'emploi d'un vocabulaire spécifique à chacun de ces trois domaines ne doit pas être un frein à cet apprentissage et doit au contraire l'enrichir au travers d'activités de lecture, d'écriture et de raisonnement.*

En 2005, de nouveaux programmes sont publiés pour les classes de sixième, cinquième et quatrième de le collège. Les travaux sur la définition et le contenu du socle commun sont en cours…



II – Un cadre pour une réflexion qui prend appui sur 3 pôles

Les relations entre les différents pôles du schéma précédent permettent de préciser nos interrogations sur cette culture partagée.

A propos de l'axe Individu / société : On dit souvent que l'école doit préparer l'individu à s'insérer dans une société complexe (cf. rapport Thélot). On peut tout aussi bien soutenir qu'il faut le préparer à contribuer à la façonner telle qu'il la souhaite, donc à la faire évoluer. En résumé, comme le dit une brochure de nos voisins belges du CREM (*Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*) : vivre dans la société et contribuer à son évolution.

A propos de l'axe Individu / savoir : En quoi et à quelles conditions le travail sur le savoir peut-il contribuer à la construction de la personne ? Comment aider l'individu à percevoir qu'il peut devenir lui-même producteur de savoir ? Les savoirs futiles (en apparence) sont-ils moins nécessaires que les savoirs utiles ?

A propos de l'axe Société / savoir : Quels sont les savoirs « utiles » à la société, à court terme, à long terme ? (ce qui renvoie aux débats actuels sur l'investissement dans la recherche fondamentale ou dans la recherche « productive »). En quoi la société est-elle aussi le résultat des savoirs qu'elle produit ?

Ces questions (philosophiques ?) sont en apparence loin du sujet traité… Je pense qu'elles sont, au contraire, au cœur de la réflexion sur la culture commune ou partagée ? Et de ce point de vue, l'opposition entre « élève au centre » ou « savoir au centre » favorise les polémiques et les crispations, mais ces slogans réducteurs ne sont sans doute pas les plus propices pour avancer dans ce débat.

III – Regard rapide sur le devenir des élèves à l'issue de la scolarité commune

L'analyse de l'orientation des élèves à l'issue de la scolarité commune apporte un éclairage supplémentaire (données 2002/2003 pour la 3ème et 2003/2004 pour la Seconde, source ONISEP)

— 60 % des élèves de 3ème vont en 2nde générale et technologique :

- 56 % d'entre eux iront ensuite en 1ère générale (soit un tiers des élèves de 3ème)
- 22 % vont en 1ère technologique (soit environ 13 % des élèves de 3éme)
- 16 % redoublent la classe de 2nde (soit près de 10 % des élèves de 3éme)

— 35 % des élèves de 3éme rejoignent une voie professionnelle (31 % vers un BEP, 4 % vers un CAP ou en apprentissage)

— 5 % redoublent la classe de 3éme.

On voit les limites d'un collège principalement pensé dans la seule perspective du lycée d'enseignement général. Comme le dit Guy Brousseau (L'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire : micro et macro-didactique, in La matematica et la sua didattica, n° 1 – 2001) : *Il faut penser la formation mathématique des cinq premières années dans la perspective des dix ans de la scolarité obligatoire et non plus comme la formation mathématique de l'école primaire. (La formation mathématique de la scolarité obligatoire n'a pas pour unique objet de préparer tous les élèves aux épreuves des baccalauréats scientifiques, et leur entrée dans les facultés de mathématiques).*

IV - Trois entrées possibles pour définir cette culture mathématique partagée (à la fin de la scolarité commune, donc en fin du collège) et quatre approches pour proposer des éléments de réponse

Trois entrées peuvent être retenues pour envisager cette culture partagée :

- les contenus enseignés (dont certains en lien avec d'autres disciplines ou avec des repères historiques) ;
- les méthodes spécifiques ou non prises en charge par l'enseignement des mathématiques (résolution de problème, preuve…) ;
- les modalités d'enseignement utilisées

« Que doit-on enseigner à tous ? » est une question importante, mais indissociable d'une autre « Dans quelles conditions ? » abordée rapidement dans la suite, en retenant trois termes :

- **expérimentation**, terme qui s'applique aussi bien à l'appropriation des connaissances qu'à leur utilisation ;
- **diversité** des modes de résolution d'un même problème ;
- **niveaux de conceptualisation** pour évoquer l'idée qu'un même concept doit être repris et enrichi plusieurs fois au cours de la scolarité et que la présentation d'un savoir définitif et figé n'en permet l'appropriation que pour quelques uns.

Ces trois entrées peuvent être croisées avec quatre approches permettant d'envisager des réponses possibles, l'importance donnée à chacune d'elles n'étant pas dénuée de dimensions idéologiques. Dans la suite, ces quatre approches sont appelées :

- approche « économique »
- approche « citoyenne »
- approche « formation de la personne »
- approche « épistémologique » (j'ai longtemps hésité sur le terme… et je ne suis pas sûr que ce soit le plus approprié).

Le découpage adopté ne constitue évidemment pas une partition… et il est sans doute contestable, tout comme les dénominations utilisées ! De plus, l'inventaire proposé est destiné à être complété, critiqué….

1) L'approche « **économique** » conduit à se demander de **quels outils mathématiques chacun doit disposer pour être « à l'aise » dans sa vie quotidienne, s'insérer dans le monde du travail** et pouvoir aborder **d'autres domaines de formation**.

Du point de vue de cette approche, la scolarité commune ne peut pas envisager les connaissances et les compétences spécifiques de chaque situation à laquelle pourra être confronté un individu. Elle doit, en revanche, s'intéresser au « fonds commun » indispensable à tous… et susceptible d'être ensuite « démultiplié » (en reprenant une expression du CREM). En effet, une approche « économique » intelligente se doit de considérer que tout individu devra sans doute être en mesure de compléter sa formation au cours de sa vie, et pour cela doit disposer d'une base de connaissances solides plus large que celle qui lui sera nécessaire dans un premier temps.

Les connaissances énumérées ci-dessous, qui relèvent de cette approche, ont peu de pertinence si elles ne permettent pas aux individus de les utiliser pour **comprendre et traiter des situations et d'être capable d'interpréter les résultats des traitements mis en œuvre**. [En gras, ce qui, de mon point de vue, semble « incontournable ».]

Nombres, calcul et gestion de données

- Maîtriser **les nombres entiers naturels** et les **nombres décimaux** (en écriture à virgule) : système d'écriture, dénomination orale, ordre

Du point de vue abordé ici, une « théorisation » des nombres décimaux n'est pas indispensable : l'interprétation d'écritures décimales dans divers contextes de mesure suffit.

- **Calculer mentalement** : résultats et procédures mémorisées et calcul réfléchi, résultat exact et approché (ordre de grandeur)
- **Utiliser une calculatrice « 4 opérations** » et un tableur-grapheur
- Utiliser le calcul posé (dans des cas « raisonnables ») : concernant les outils de calcul, une approche purement économique conduirait sans doute aujourd'hui à considérer que la maîtrise des « techniques opératoires » (opérations posées) est devenu superflue, dans la mesure où la plupart des calculs réalisés dans la vie courante comme dans le monde professionnel le sont soit mentalement soit en ayant recours à une machine (calculatrice, ordinateur).
- Savoir quand utiliser les opérations élémentaires dans un problème : ce qu'on appelle souvent **le « sens des opérations** » (Les travaux de G Vergnaud ont montré la complexité de cette question)
- Connaître la signification de la notation puissance et maîtriser différentes désignations des nombres l'utilisant
- Reconnaître les situations relevant de **la proportionnalité** et les traiter en choisissant le moyen le plus adapté (il s'agit là d'un domaine central dont l'importance était sous-estimée par les précédents programmes de collège).
- Utiliser les **pourcentages** (et les taux d'intérêt) (il serait sans doute également utile de savoir dans quelles situations on peut les additionner, les multiplier, les comparer)
- Utiliser les échelles
- Lire et interpréter un tableau de données, un graphique, un diagramme (éventuellement les construire)
- **Utiliser une formule**
- Mettre en œuvre un algorithme mobilisant des connaissances mathématiques maîtrisées.

Espace et géométrie

- **Se situer et se déplacer dans l'espace ordinaire**
- Utiliser une **carte, un plan, un schéma**, un système de coordonnées, le repérage sur une sphère
- Connaître les **propriétés géométriques élémentaires** permettant de décrire, reconnaître et caractériser les formes élémentaires (figures planes, solides)
- Effectuer des **tracés à l'aide des instruments usuels** (règle, équerre, compas, rapporteur)
- Lire un schéma coté (notamment dans le cas où un objet est représenté en perspective)
- Utiliser et réaliser un patron

Grandeurs et mesure

- Connaître les **principales grandeurs** : longueurs, aires, contenances, volumes, masses, angles, durées
- Les **mesurer par différents moyens** (mesurage, calcul – quelques formules sont à connaître, dans d'autres cas le recours à un formulaire doit être rendu possible)
- Avoir une idée de l'incertitude liée au mesurage
- Connaître le **système métrique,** en particulier des unités usuelles
- **Changer d'unité**
- Connaître **les grandeurs-quotients les plus utilisées** : vitesse, masse volumique, nombre de tours par seconde…
- **Calculer sur les grandeurs** (donc sur des nombres « avec unités »)

J'ai hésité à ajouter une rubrique consacrée au calcul algébrique et, finalement, j'y ai renoncé (à tort ou à raison) dans l'approche envisagée ici.

En abordant cette « approche économique » de manière étroite, on court le risque de s'arrêter à l'enseignement de règles ou de techniques et de quelques problèmes qu'elles permettent de traiter, en invoquant l'urgence. Pourtant, l'efficacité et la portée pratique de ces techniques, leur portabilité dépendent de leur ancrage dans un système théorique qui permet de les comprendre et de les justifier.

J'ajoute donc un point, important à mes yeux : le caractère « démultiplicatif » des connaissances est largement lié au niveau de compréhension qu'en a construit l'élève. Pour reprendre un élément de l'approche de Chevallard, met-on l'accent sur :

- le couple : tâche – technique (qui privilégie la mise en place de savoir-faire locaux) ;
- le couple : technique – technologie (qui seul permet la mise en évidence de connaissances généralisables)

Exemple 1 : multiplication d'un naturel par 100 : Le couple tâche-technique incite à enseigner le fait que multiplier un nombre par 100 revient à écrire 00 à droite (ce qui n'est pas valide pour les décimaux). Le couple technique-technologie incite à enseigner que multiplier un naturel par 100 revient à donner une valeur 100 fois plus grande à chacun de ses chiffres (ce qui est généralisable au cas des nombres décimaux).
Exemple 2 : le fameux « produit en croix » : Commode en apparence, il n'apprend rien sur la proportionnalité et les raisonnements qui la sous-tendent… Seule sa justification (en relation avec l'égalité de rapports) permet l'ancrage théorique évoqué plus haut.

2) L'approche « **citoyenne** » amène à prendre en compte ce qu'un citoyen doit maîtriser pour, par exemple, **exercer pleinement sa lucidité** face au flot d'informations chiffrées auxquelles il se trouve confronté et **participer au débat politique et social** Une forme d'analphabétisme mathématique peut être source de bien des confusions et faire la place belle aux marchands d'illusion.

Un récent article d'un journal du matin, peu amène vis à vis des IUFM, en fournit un exemple. L'auteur de l'article soulignait que 50 % des étudiants préparant un concours à l'IUFM échouaient à ce concours (ce qui déjà a peu de pertinence si on ne met pas en relation cette donnée avec le rapport nombre de places / nombre de candidats) et qu'ensuite 30 % de ceux qui avaient réussi n'étaient pas titularisés à l'issue de la deuxième année, ce qui, selon l'auteur de l'article, conduisait à 80 % de déperdition par rapport au nombre de candidats ayant préparé un concours en IUFM.

Au-delà du fait que les données fournies sont contestables, des connaissances élémentaires sur les pourcentages permettent de déterminer que si 30 % des 50 % d'étudiants qui ont franchi le cap du concours sont éliminés à la fin de l'année de formation professionnelle, ils ne représentent en réalité que 15 % de ceux qui ont passé le concours. Le pourcentage « d'exclus » rapporté à ceux qui ont présenté le concours serait alors de 65 % et non de 80 % comme l'affirme l'auteur de l'article… qui gagnerait en crédibilité s'il n'avait pas oublié certains fondamentaux !

On pourrait multiplier les exemples. Ce qui conduit à élargir le champ des connaissances évoquées précédemment, en ajoutant, à l'usage de certaines d'entre elles, une dimension critique dont l'enseignement des mathématiques ne saurait se dispenser.

Nombres, calcul et gestion de données

- Connaître **les rudiments de la statistique descriptive** : concepts de position et de dispersion, outils de calcul (moyennes, pourcentages…) et de représentation (histogrammes, diagrammes divers, graphiques)
- **Relativiser l'information apportée par un pourcentage, une moyenne**
- Connaître les opérations pertinentes sur les pourcentages
- Interpréter de façon critique l'information apportée par un regroupement en classes, une représentation graphique, comparer différentes représentations

Il serait, par ailleurs utile à tout citoyen, de connaître les conditions dans lesquelles les statistiques sont utilisées (sondages, enquêtes…), et avec quelle marge d'incertitude, par exemple en fonction de la taille ou de la représentativité de l'échantillon. Les mathématiques ont sans doute ici à contribuer, avec d'autres disciplines, à l'éducation citoyenne sur des questions de sécurité (routière, par exemple), de santé, d'économie sociale, d'environnement, de développement…

J'ai hésité à placer ici la connaissance du fait que le hasard peut être quantifié et la conscience d'une différence entre situation déterministe et situation aléatoire (qui, toutes deux peuvent cependant être objet d'anticipations…). J'ai finalement choisi de le situer dans une autre approche, mais il aurait toute sa place ici.

Comme transition avec l'approche suivante, il faudrait également évoquer ici ce que peut apporter **l'apprentissage de la rationalité et de la pratique du débat scientifique** à la vigilance de chacun quant aux arguments échangés et à leur articulation dans le débat citoyen.

3) L'approche orientée vers les apports des mathématiques à la « formation de la personne ». Quel type d'activité intellectuelle, l'apprentissage des mathématiques contribue-t-il à développer plus particulièrement ?

La contribution de la pratique mathématique à la **formation de la pensée**, de la « personnalité », en particulier de la « personnalité rationnelle » vient immédiatement à l'esprit… On évoque souvent à ce propos le développement des **capacités de raisonnement et de l'esprit de rigueur**, ce qui est difficilement contestable. On reconnaît moins facilement que le travail mathématique est aussi affaire **d'imagination, de créativité, d'initiative et va de pair avec le développement de l'autonomie** (cf. les faiblesses relevées, de ce point de vue, par l'enquête PISA pour les élèves français) ;

L'apprentissage des mathématiques apporte également sa pierre à une **formation à la communication** : expliquer une démarche, s'expliquer sur cette démarche, entrer dans une controverse, chercher à convaincre un interlocuteur en envisageant son répertoire de connaissances et en utilisant des moyens logiques, évitant le recours à d'autres procédés (autorité, séduction, menace…). Cette pratique d'un certain type d'argumentation qui prend la forme particulière de la démonstration au cours du collège contribue tout à la fois à forger un être rationnel et à fonder des rapports sociaux. La contribution des mathématiques est ici essentielle et doit être revendiquée… et envisagée très tôt, dès les débuts de la scolarité.

Ici, ce sont moins les contenus qui sont à mettre en avant que les « méthodes » développées par les mathématiques et par leur pratique. Les modalités d'enseignement, les conditions d'appropriation et de mobilisation du savoir sont également concernées.

D'abord, **la résolution de problèmes**.

Quelle idée du mot « chercher » est développée chez les élèves par l'enseignement des mathématiques ? L'utilisation exclusive ou privilégiée du problème d'application ou du problème « à résolution guidée » met l'accent sur un aspect de la recherche de solution, dirigée vers la production de la résolution experte. L'initiative y a parfois sa place (oser une sur-figure ou un tracé non donné en géométrie, par exemple), mais de façon limitée. Le recours à des « problèmes ouverts », des « situations-défis » permet de développer d'autres comportements : prendre des initiatives, chercher une voie originale, explorer, essayer, corriger, raisonner… On peut ajouter que le travail en équipe, favorable dans le cas de telles situations, contribue à la socialisation. Plus généralement, quelque soit le type de problème, il devrait être admis, valorisé et exploité le fait que la réponse peut être trouvée par des voies diverses, par une pluralité de méthodes.

La pratique du débat, ensuite : argumenter, défendre une position, mettre en doute une affirmation…

Les mathématiques offrent pour cela un terrain privilégié pour un travail dont les aspects sociaux (écoute d'autrui, prise en compte de ses propositions…) sont évidents, de même que l'établissement d'un autre rapport à la vérité et à la rationalité. Les mathématiques sont ce lieu où il est possible de comprendre et de se mettre d'accord en échappant au rapport de force et à l'argument d'autorité.

Un autre rapport à l'erreur

Là aussi, l'étude PISA semble souligner une attitude particulière des élèves français qui, plus nombreux que d'autres, s'abstiennent de répondre lorsqu'ils ne sont pas sûrs de la réponse. Accepter l'erreur et la travailler, sans l'assimiler immédiatement à l'échec, devrait être partagé par les enseignants et élèves. L'autonomie commence par le fait d'oser affronter l'inconnu, d'errer avant de trouver ou de construire un chemin acceptable.

Le travail sur la preuve

Il découle des deux points précédents. De l'argumentation à la démonstration en passant par les premiers pas dans le raisonnement déductif, il y a une opportunité essentielle de travail sur la rigueur, à condition de savoir distinguer la phase d'élaboration d'une preuve (qui est de l'ordre de la résolution de problème) de celle de communication de cette preuve. La prise de conscience du rôle du contre-exemple, de l'insuffisance de la multiplication des exemples pour prouver fait partie de ce travail.

Pour être complet, l'apport des mathématiques à la « formation de l'intelligence » (pour dire les choses très vite) doit donc tenir un équilibre entre rigueur et imagination (même si ces deux termes s'opposent moins que ne peut le laisser supposer ce développement sommaire). Ere capable de penser, c'est aussi être capable de « penser mathématiquement ».

4) La dernière approche peut être qualifiée « d'épistémologique ». Elle correspond à plusieurs ambitions :

a) sensibiliser ou initier les élèves à une activité humaine, plusieurs fois millénaire, qu'on peut résumer, au niveau de l'école, par un ensemble **de connaissances** (qui dépassent celles qui sont ou seront directement utiles) et par une idée aussi correcte que possible de ce qu'est une « **pratique mathématisante** » ;

b) permettre la construction d'une **idée correcte de l'origine et de l'évolution des connaissances mathématiques**, de leur origine problématique et du fait que leur inscription dans un cadre théorique est une œuvre de longue haleine ;

c) envisager, dans le parcours scolaire, **différents niveaux de conceptualisation**, pour un même concept ou un même champ conceptuel, en assumant la nécessité de rendre explicite, dans l'enseignement, les continuités, les ruptures et les réorganisations qui en découlent. En ce sens, il me semble peu pertinent de parler de « culture du primaire » et de « culture du collège ».

d) faire comprendre comment **les mathématiques sont en relation avec de nombreux autres domaines de la culture humaine**, aussi bien **scientifique** qu'**artistique** et envisager ce qui dans les méthodes utilisées par chacune d'elles, peut être commun et ce qui est différent (notamment pour ce qui touche à la preuve) ;

e) éviter que « **l'intelligensia mathématique** » (terme non péjoratif) **ne soit totalement coupée des adultes « non mathématiciens** » ;

Ces différentes ambitions impliquent un élargissement des connaissances envisagées jusque là. Je pense notamment à quelques points **parmi lesquels il faudrait sans doute faire des choix** :

Nombres, calcul et gestion de données et initiation aux probabilités

- Connaître et savoir manipuler les rationnels (en écriture fractionnaire) et les relatifs
- Connaître des éléments d'arithmétique, incluant quelques démonstrations
- Savoir qu'il existe des irrationnels
- Effectuer des calculs à l'aide des notations « puissance » et « racine carrée » (dans des cas simples)
- « Pratiquer » la combinatoire
- Savoir que le hasard peut être quantifié et distinguer entre situation déterministe et situation aléatoire.

Espace et géométrie

- Distinguer objet réel, dessin et figure
- Quelques « grands théorèmes » accompagnés de repères historiques qui permettent d'en montrer l'intérêt (Thalès, Pythagore…)
- Peut-être quelques éléments de trigonométrie (mais cela est à discuter !)
- Une organisation permettant de travailler la démonstration
- Quelques transformations au moins du point de vue de leur utilisation pour analyser et produire des éléments décoratifs ou artistiques (sans nécessairement les « théoriser » ?)
- Géométriser des situations « non géométriques »

Algèbre

- Résolution de problèmes par mise en équation (sur des exemples qui montrent la puissance de ce type de résolution)
- Eléments de calcul littéral, identités remarquables
- Mathématisation d'une situation à l'aide d'une fonction simple (ce point est à discuter)

Les ambitions évoquées plus haut nécessitent également de confronter les élèves à quelques aspects du travail mathématique, en particulier :

- **mathématiser une situation**, c'est-à-dire en

traduire certains aspects en langage mathématique de façon à élaborer des réponses qui anticipent celles que fournirait l'expérience ou même qui évitent le recours effectif à l'expérience ;
- **chercher à mieux connaître certains « objets mathématiques »** (par exemple de nature arithmétique, ou curiosité géométrique amenant à chercher les solides de Platon…) ;
- **approfondir la question de la preuve ou de la justification** (en mettant en évidence quelques méthodes de démonstration) ;
- à partir d'exemples historiques ou de travaux communs, montrer **comment les mathématiques s'utilisent dans d'autres domaines** (plutôt que s'appliquent) **et inversement comment d'autres domaines renvoient des questions de nature mathématique.**

Les quatre approches retenues me semblent nécessaires pour tenter de définir ce qu'il est fondamental de travailler, en mathématiques, au cours de la scolarité obligatoire, en soulignant qu'une tête bien faite ne s'oppose pas à une tête raisonnablement pleine…, les deux étant même indissociables.

V — Une autre approche, davantage orientée vers le savoir

Elle consisterait, pour définir cette culture mathématique partagée, à chercher les connaissances mathématiques qui ont le plus grand « pouvoir applicatif et explicatif » pour d'autres connaissances mathématiques ou dans d'autres domaines. Elle conduirait également à prendre en compte « l'épistémologie scolaire » des savoirs enseignés (ce à quoi s'attache d'ailleurs des travaux en didactique).

1) Prenons l'exemple du système d'écriture des nombres décimaux à l'aide d'une virgule. Au cycle 3 de l'école primaire, le programme énonce plusieurs compétences à acquérir, sans réellement les hiérarchiser. Les évaluations à l'entrée en Sixième proposent des exercices permettant de tester la capacité des élèves à passer de la désignation orale à la désignation chiffrée, à comparer ou ranger des nombres, à associer des décompositions du type 30 + 0,04 ou 3 x 10 + 4 x 0,01 ou 30,04. On demande parfois de reconnaître le chiffre des dixièmes d'un nombre. Mais, la compétence essentielle, celle qui permet de justifier un grand nombre de procédures utilisées à propos des nombres décimaux, est rarement testée. Il s'agit de la connaissance qu'a l'élève de la valeur prise par un chiffre en fonction du rang qu'il occupe dans l'écriture à virgule et des relations de valeurs qui existent entre les différents rangs : dans 3,33, chaque chiffre 3 « n'a pas la même valeur » (celui de gauche vaut 3 unités et celui de droite ne vaut que 3 centièmes d'unité), le 3 de gauche vaut dix fois plus que celui du milieu et cent fois plus que celui de droite.

Tant que ces différentes connaissances ne sont pas assurées, il est impossible, par exemple, de pouvoir expliquer la technique de l'addition posée, avec le principe des retenues. De même, la compréhension de la règle usuelle de comparaison de deux nombres comme 3,49 et 3,6 ou celle qui donne le résultat d'une multiplication par 10, 100… est fondée sur cette connaissance. Si ces règles sont apprises sans être éclairées par les connaissances qui permettent de les comprendre et de les justifier, risquent d'être vite oubliées ou mélangées avec d'autres… sans pouvoir alors être reconstruites.

2) Autre exemple. Si on considère, l'enseignement des fractions, on peut actuellement distinguer deux temps dans leur première approche :

- un temps « pratique », à l'école élémentaire : des problèmes de mesurage à l'aide d'une unité conduise à envisager un fractionnement de l'unité : 4/3 est utilisé comme 4/3 u (4 tiers d'unité), c'est-à-dire comme 4 fois le tiers de l'unité ;

- un temps « théorique », en sixième : la division de 4 par 3 « ne se terminant pas », on décide qu'il existe un nombre qui multiplié par 3 donne pour résultat4 et on le désigne par 4/3. La fraction 4/3 rencontré à l'école primaire (avec sa signification particulière) est-elle la même que la fraction 4/3 ainsi présentée au collège ? Cette question est rarement traitée explicitement, laissant l'élève seul face à cette interrogation…

D'autres questions sont ainsi laissées dans l'ombre. Pourquoi, par exemple, « prendre 4/3 d'un nombre revient-il à multiplier ce nombre par 4/3 ? La culture mathématique devrait permettre de relier les connaissances entre elles, de les tisser… au lieu, parfois ou souvent, de les empiler… Peut-être s'agit-il simplement de redonner un primat aux connaissances sur les compétences, sans pour autant abandonner celles-ci.

VI – Esquisse de conclusion

Faire l'économie de ces cheminements qui s'appuient sur quelques connaissances « fondamentales » pour aller trop vite à l'apprentissage de règles sans justification revient à tenter de gagner du temps avec l'assurance de perdre de la compréhension… et priver les élèves de tout travail mathématique.

Retenons deux idées force.

Une connaissance fondamentale est une connaissance qui a un fort potentiel d'explications et d'applications ou encore une connaissance dont une maîtrise insuffisante constituera un handicap pour le compréhension d'autres phénomènes par les élèves. A cet égard, il faut sans doute ne pas confondre les « connaissances fondamentales » et les « connaissances de base » pointées dans les évaluations.

L'activité « mathématisante » apprend plus à l'élève que des connaissances mathématiques tout en en assurant une meilleure maîtrise et une plus grande disponibilité.

Une dernière remarque pour dire que, de mon point de vue, le collège ne peut être conçu que comme école pour tous dont on doit attendre :

- qu'il fournisse à tous cette culture mathématique ;
- qu'il permette à ceux qui le choisissent d'aller plus loin dans l'appropriation de cette culture, par exemple dans le cadre d'une option scientifique (dont les mathématiques ne seraient pas absentes !).

*Il faudrait y ajouter une réflexion sur **l'évaluation** et ses conséquences sur le travail mathématique des élèves orienté vers la réussite aux contrôles, examens… (par tous les moyens disponibles) plutôt que vers l'acquisition de cette culture mathématique. Les méthodes d'enseignement, les contenus et les modalités de l'évaluation ont un impact sur la possibilité et la réalité de cette acquisition.*