
EXPERIENCE ALEATOIRE ET SIMULATION : LE JEU DE CROIX OU PILE

Relecture actuelle d'une expérimentation déjà un peu ancienne

Bernard PARZYSZ
Equipe DIDIREM (Université Paris-7)
& IUFM Orléans-Tours

Résumé : Le présent article développe, à la lumière des nouveaux programmes de statistique du lycée, l'analyse d'une séquence réalisée en classe de 1ère ES en 1997 à partir d'un extrait de l'article « croix ou pile » de l'Encyclopédie, dû à d'Alembert, et qui oppose deux modèles, distincts et contradictoires, d'une même expérience aléatoire simple : « obtenir pile en au plus deux lancers d'une pièce ». Conformément à nos attentes, les élèves sont partagés sur le « bon » modèle correspondant à cette expérience (ils en proposent même trois), ce qui conduit à leur faire jouer réellement un certain nombre de parties. Le cumul des résultats les convainc de rejeter deux des trois modèles initiaux et de se prononcer en faveur du troisième, mais sans pouvoir encore le justifier. On leur demande ensuite de simuler le jeu sur calculatrice, ce qui leur permet de comparer les nouveaux résultats obtenus avec les précédents, et ainsi de se persuader de l'intérêt de l'outil « simulation ». Du point de vue cognitif, cette expérimentation a, en particulier, montré l'omniprésence, même chez les élèves de cet âge, du « biais d'équiprobabilité », posant ainsi la question d'une initiation plus précoce des élèves à l'aléatoire.

En décembre 1997, dans le but de mettre en œuvre une courte séquence d'enseignement permettant de tester l'approche « fréquentiste » préconisée par les programmes, j'ai élaboré, conjointement avec Michèle Fabregas-Bechler et dans sa classe de première ES du lycée Robert-Schuman de Metz, une séance de deux heures centrée sur un extrait de l'article – maintenant bien connu – rédigé par Jean Le Rond d'Alembert pour l'*Encyclopédie*, à l'entrée « croix ou pile » (voir Annexe). Cette séance avait donné lieu, à l'époque, à un court article paru dans le *Petit Vert*, bulletin de la régionale APMEP de Lorraine [Parzys & Fabregas-Bechler 1999], mais je voudrais néanmoins y revenir ici.

Certes, les phénomènes d'enseignement sont comme les chantiers de fouilles archéologiques : ce qui n'a pas été vu sur le champ est définitivement perdu. Mais il m'a paru que la situation elle-même, ainsi que les faits pris en compte, pouvaient servir de base, à la lumière des nouveaux programmes de lycée, à une analyse un peu plus approfondie que celle qui avait été faite alors¹.

1. – Le jeu de « croix ou pile »²

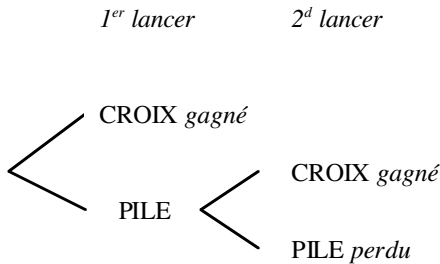
Commençons par rappeler succinctement en quoi consiste ce jeu qui, quoique « très

1 Je remercie Michel Henry et Frédéric Métin pour leurs suggestions.

2 Sur ce sujet, voir aussi [Henry 2001].

EXPERIENCE ALEATOIRE
ET SIMULATION...

connu » à l'époque de d'Alembert, n'est plus guère pratiqué. Deux joueurs y sont opposés ; l'un d'eux lance une pièce — supposée bien équilibrée — et s'il amène « croix » (face) il a gagné la partie ; sinon il relance la pièce et, s'il amène « croix », il a gagné, tandis que s'il amène « pile » il a perdu. Cette situation peut être schématisée de la façon suivante :



La question que pose d'Alembert est celle du pari équitable, c'est-à-dire du rapport des sommes que doit miser chacun des deux joueurs pour que le jeu soit honnête. Il commence par présenter la solution classique, celle « qu'on trouvera dans tous les auteurs » (et qu'on présente actuellement aux élèves), qui consiste à envisager les quatre couples de résultats possibles à l'issue de deux lancers de la pièce et à les supposer équiprobables. Contre-argument de d'Alembert : ce n'est pas ainsi que se pratique le jeu, car si on amène « croix » au premier coup, la partie est finie³. Il avance alors la contre-proposition suivante : si l'on suit à la lettre la façon dont se pratique le jeu, il n'y a que trois cas à envisager (cf. arbre ci-

dessus), car « dès qu'une fois croix est venu, le jeu est fini ». Et c'est sur cet autre espace, comme le font « tous les auteurs » pour le cas précédent, qu'il pose l'équiprobabilité.

Poussant l'idée à sa limite, on pourrait même dire qu'il n'y a en réalité que deux éventualités à considérer : soit on gagne, soit on perd, et que le joueur suppose, par défaut et en l'absence de toute information, que ces deux éventualités ont la même chance de se produire. Cette dernière position peut nous paraître caricaturale, mais 1° c'est ainsi que raisonnent certains de nos élèves qui affirment par exemple qu'il y a une chance sur deux pour qu'il pleuve demain (« soit il pleuvra, soit il ne pleuvra pas »), et 2° c'est aussi ce sur quoi s'appuient les bonneteurs⁴ qui proposent « royalement » au gogo qui les défie de doubler leur mise en cas de succès, alors qu'il n'a qu'une chance sur trois de gagner.

Dans son *Essai philosophique sur les Probabilités*, Simon Laplace affirme ([Laplace 1814] p. 15) qu'« il est clair qu'il peut arriver quatre cas également possibles, savoir : croix au premier coup et pile au second ; croix au premier coup et croix au second ; pile au premier coup et croix au second, enfin pile aux deux coups. ». Il apparaît ici que cette « clarté » provient du fait que Laplace tord, en quelque sorte, le cou à la réalité, en supposant qu'on relance la pièce même si l'on a déjà gagné au pre-

3 Notons au passage que ce recours à des parties fictives avait déjà été utilisé par Fermat dans sa solution du problème des partis, ce qui – dit Pascal – avait fait tiquer Roberval (lettre de Pascal à Fermat du 24 août 1654) : « il ne voyait pas pourquoi on prétendait de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on jouera quatre parties, vu que la condition naturelle du jeu, est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné » ([Pascal 1954] p. 85).

4 Il s'agit des filous qui, dans certains lieux fréquentés par les touristes, proposent à l'un d'entre eux de jouer à un jeu très ancien, appelé bonneteau, dont voici la forme moderne : trois cartes à jouer, deux noires et une rouge, sont retournées sur une table. Après dépôt de la mise par le « client », le bonneteur montre où se trouve la carte rouge, puis il exécute diverses manipulations des trois cartes et défie le naïf de désigner cette carte ; s'il gagne, il récupère deux fois sa mise. C'est un jeu doublement malhonnête car, non seulement le bonneteur triche en manipulant les cartes, mais de plus on voit que la mise n'est pas équitable. Sans parler de l'existence d'un compère qui, pour appâter le chaland, joue contre le bonneteur ... et gagne.

mier coup. Ce qui, on l'a vu laissait d'Alembert sceptique. Le même Laplace, juste après, envisage également le deuxième des modèles ci-dessus : « *On peut ne compter à ce jeu que trois cas différents, savoir : croix au premier coup, pile au premier coup et croix au second ; enfin pile au premier et au second coup. Cela réduirait la probabilité à 2/3, si l'on considérait, avec d'Alembert, ces trois cas comme également possibles. Mais il est visible que la probabilité d'amener croix au premier coup est 1/2, tandis que celle des deux autres cas est 1/4 ; le premier cas étant un événement simple qui correspond aux deux événements composés, croix au premier et au second coup, et croix au premier coup, pile au second. Maintenant si, conformément au second principe⁵, on ajoute la probabilité 1/2 de croix au premier coup à la probabilité 1/4 de pile arrivant au premier coup et croix au second, on aura 3/4 pour la probabilité cherchée, ce qui s'accorde avec ce que l'on trouve dans la supposition où l'on joue les deux coups.* » (ibid. p. 16). Autrement dit, en se plaçant dans le premier modèle, et en « collant » davantage à la pratique réelle du jeu, Laplace montre que le modèle de d'Alembert est incompatible avec le sien (ce dont on était déjà persuadé). Mais il ne prouve pas pour autant la supériorité de celui-ci. Quant à la « visibilité » des diverses probabilités qu'il donne, elle repose en fait sur l'application d'un principe de la théorie.

Alors, plutôt que d'appeler « erreur » la position alternative prônée par d'Alembert, ne peut-on plutôt y voir une incitation à nous faire réfléchir sur les rapports entre théorie et réalité ? Nous nous trouvons, dans le texte qu'il nous présente, en face de deux modèles dont

5 Ce second principe dit que, si un événement résulte de plusieurs cas favorables équiprobables (et disjoints), alors « [sa] probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable. ». (ibid. p. 15).

les événements élémentaires sont, dans chacun, équiprobables, la seule différence entre eux résidant dans la nature de ces événements élémentaires. Puisque ces modèles, s'excluant l'un l'autre, sont tous deux envisageables et que la réalité est unique, sur quel critère peut-on se baser pour opter pour l'un plutôt que pour l'autre ? On peut penser qu'une « bonne » théorie sera une théorie qui concordera – ou plutôt qui ne sera pas en désaccord – avec les faits d'observation. Ainsi, dans le cas présent, il s'agira de discriminer les deux modèles sur la base de savoir lequel rend mieux compte de la réalité. Corollaire : c'est cette réalité qui sera en définitive le juge de paix à qui il reviendra de trancher.

A ce sujet, il est curieux de constater que d'Alembert n'évoque pas le recours à l'expérience, comme l'avait pourtant fait Galilée dès 1620 dans sa résolution du problème du Grand duc de Toscane⁶ : « *la longue observation a fait que les joueurs estiment plus avantageux le 10 et le 11 que le 9 et le 12* ». D'autant que d'Alembert connaissait sans aucun doute le théorème de Bernoulli, dont *l'Ars Conjectandi* fut publié en 1713 [Bernoulli 1713].

2. — Le scénario de la situation-problème.

Notre idée, en 1997, était de voir comment des élèves de première ES recevraient le discours de d'Alembert, qui oppose deux modèles incompatibles pour une même situation « réelle », et quels moyens ils mettraient en œuvre pour déterminer « le bon ». Nous pensions *a priori* que, une fois précisées les règles du jeu, la dévolution s'opérerait assez facilement et que les moyens qu'envisageraient les élèves pour tester les deux modèles en présence consisteraient 1° à réaliser l'expérience et 2°

6 Il s'agit de la somme des points obtenus en lançant trois dés.

à la reproduire plusieurs fois, dans le but de s'appuyer sur la fréquence de parties gagnées. A cet effet, nous avons préparé un certain nombre de pièces de 20 centimes⁷, destinées à d'éventuelles expérimentations.

Notre scénario consistait en dix phases successives.

Phase 1. Présentation du document : la grande aventure de l'*Encyclopédie*, le personnage de d'Alembert⁸ ; puis lecture individuelle du texte par les élèves assortie des questions suivantes, destinées à en orienter la lecture et à en faciliter l'appréhension :

*De quel jeu s'agit-il ?
Avec quoi joue-t-on ?
Comment gagne-t-on à ce jeu ?*

(N.B. Les réponses à ces questions ne sont pas attendues dans cette première phase.)

Phase 2. Répartition des 28 élèves présents en 7 groupes de 4, avec cette consigne : *Dans chaque groupe, mettez en commun vos réponses.*

⁷ Des centimes de francs, vu l'époque.

⁸ Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), fils « naturel » (comme on disait alors) du chevalier des Touches et de Madame de Tencin, est abandonné peu après sa naissance sur les marches de l'église St Jean le Rond à Paris (d'où son prénom). Il est élevé par un artisan vitrier et pensionné par son père « biologique » (comme on dit aujourd'hui), ce qui lui permet de faire de bonnes études, où il se distingue particulièrement en mathématiques, au point qu'il entre à l'Académie des Sciences dès l'âge de 24 ans (1741). En dehors de ses travaux mathématiques, c'est un habitué des salons parisiens, où il rencontre (1746) Denis Diderot qui le recrute pour son projet d'*Encyclopédie* ou dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers. En 1757, les deux associés se fâchent et d'Alembert quitte l'*Encyclopédie*. D'Alembert est élu à l'Académie française en 1754, et il en devient le secrétaire perpétuel (1772). Vendue par souscription, l'*Encyclopédie*, qui se proposait de faire la synthèse des connaissances humaines de l'époque, comprendra finalement 17 volumes (dont un de planches) et sa publication s'étendra sur 21 ans (1751-1772). Beaucoup de grands noms y ont contribué : Montesquieu, Voltaire, Rousseau, Buffon, etc.

La mise en commun demandée est destinée à « homogénéiser » le groupe, c'est-à-dire à faire en sorte que tous ses membres aient bien compris en quoi consiste le jeu, et en particulier qu'ils aient identifié correctement les configurations gagnantes et la configuration perdante.

Phase 3. Poursuite du travail en groupe, avec une consigne supplémentaire : *Quelles sont les différentes thèses en présence ? Quelle est celle qui vous semble correcte ?*

Cette nouvelle consigne a pour objet d'amener les élèves à quitter leur position d'observateurs extérieurs pour prendre parti pour ou contre les deux modèles présentés dans le texte ; il s'agit de poursuivre le travail de dévolution commencé dans les phases précédentes. Mais la prise de position reste encore individuelle, même si nous pensons que des discussions commenceront déjà au sein des groupes.

Phase 4. Dernière consigne : *Dans chaque groupe, mettez en commun une argumentation pour justifier votre point de vue, dans le but de convaincre une personne qui ne le partage pas. Vous pouvez envisager plusieurs moyens : des arguments, des schémas, des tableaux, etc.*

Il s'agit ici, tout d'abord, de confronter les positions individuelles au sein de chaque groupe, ce qui doit conduire en principe à développer et à affiner les argumentations pour et contre, puis — si possible — d'arriver à un consensus dans chaque groupe. La mention explicite d'outils graphiques (schémas, tableaux) est destinée à permettre à des élèves ou à des groupes qui auraient des difficultés à exprimer leurs idées verbalement d'y arriver par d'autres moyens (nous pensons bien sûr, en particulier, à des arbres).

Phase 5. Mise en commun. Il s'agit maintenant, pour chaque groupe, de venir exposer et soutenir sa position devant les autres ; pour cela, un représentant de chacun d'eux vient au tableau. Nous nous attendons à des prises de position différentes, car la solution défendue par d'Alembert (2 chances sur 3) bénéficie de ce que les didacticiens appellent un « effet de contrat », qu'on peut résumer ainsi : puisque c'est ce que pense d'Alembert, dont on vient de nous dire qu'il était un mathématicien reconnu (membre de l'Académie des Sciences, etc.), cela doit être vrai. Nous comptons aussi voir apparaître la solution qu'on trouve « dans tous les auteurs », position qui est, elle aussi, clairement exposée par d'Alembert. Cette situation conflictuelle devrait normalement nous permettre de lancer un débat sur les moyens envisageables pour sortir de cette situation inconfortable, à partir de la consigne (volontairement vague) : *Comment peut-on faire pour savoir qui a raison ?*

Nous espérons fermement voir émerger l'idée de jouer réellement plusieurs parties « pour voir », ainsi que, peut-être, celle selon laquelle, grâce à un « grand nombre » de parties, on verra mieux qu'en jouant seulement quelques parties. Nous pourrions alors passer à la phase suivante.

Phase 6. Expérimentation. Le professeur indique que les élèves vont maintenant jouer réellement au jeu de croix et précise ce qu'ils vont devoir faire : *La règle du jeu est la suivante :*

— *lancer la pièce une première fois : si on obtient face la partie est finie, on a gagné et on marque un point ;*

— *sinon, lancer la pièce une deuxième fois : si on obtient face on a gagné la partie et on marque un point ; sinon, on a perdu.*

La consigne donnée est alors : *Dans chaque groupe, chacun réalisera 20 parties et comptabilisera le nombre de parties gagnées.*

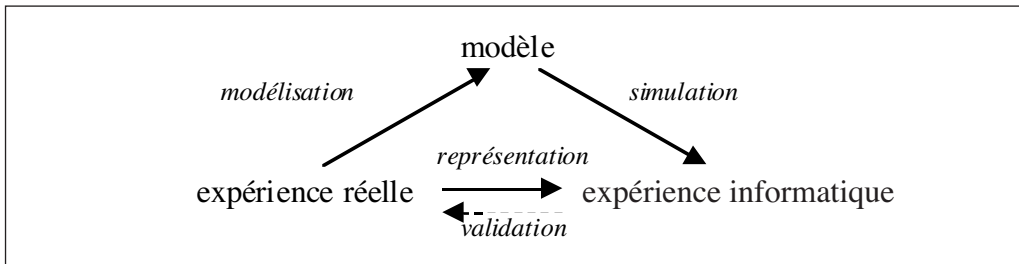
Le professeur procède alors, dans chaque groupe, à la distribution :

— d'une pièce de 20 centimes et d'un gobelet en plastique, destinés à fixer le protocole expérimental en prévision du groupement de résultats envisagé ;

— d'un tableau de relevés à remplir.

Le tableau de relevés porte sur les 80 parties jouées par le groupe ; il y a donc *de facto* un regroupement des résultats au sein de chaque groupe. Les objectifs de cette petite mise en scène sont, d'une part de définir le protocole de l'expérience aléatoire qui va être répétée, et d'autre part de permettre le cumul des résultats de la classe entière. En effet, à l'intérieur de chaque groupe, les objets en jeu sont les mêmes et seuls les opérateurs varient ; on peut alors s'attendre à ne pas rencontrer de réticences pour le cumul des résultats des élèves d'un même groupe. Par analogie, et même si les objets ne sont plus les mêmes, le premier regroupement pourra ensuite servir de levier pour opérer le rassemblement des résultats de l'ensemble des groupes sans susciter trop d'opposition. D'autre part, nous avons opté pour un regroupement des résultats des groupes cumulatif⁹ plutôt que global, afin de faire sentir aux élèves — de façon certes tout intuitive, mais susceptible de justification grâce à la notion de moyenne — que la barycentration ainsi opérée sur les fréquences a pour effet d'opérer un certain « lissage » des données individuelles, c'est-à-dire de relativiser l'écart que peut présenter un grou-

⁹ Dans l'ordre de numérotation des groupes, c'est-à-dire : groupe 1, puis groupes 1 et 2, puis groupes 1, 2 et 3, etc.



pe donné par rapport aux autres et de mettre en évidence une certaine stabilisation de la fréquence. Ceci constituera un premier pas vers la nécessaire transition de la fréquence à la probabilité, pour laquelle il faudra accepter que les fréquences vont progressivement se rapprocher d'une certaine « valeur »¹⁰.

Phase 7. Mise en commun. Il va de soi que 80 parties ne suffiront probablement pas à invalider l'un des modèles et qu'il est vraisemblable, étant donné le faible nombre de parties jouées, que les résultats obtenus par la plupart des groupes ne paraîtront pas suffisamment convaincants.

Phase 8. Nous pensons que l'idée de regrouper tous les résultats de la classe apparaîtra alors, et que la prise en compte du total des 560 parties jouées devrait finalement emporter l'adhésion vers le modèle classique.

Phase 9. Simulation. Le but de cette phase et de la suivante est de persuader les élèves qu'une simulation réalisée à l'aide de la fonction « random » de la calculatrice fournit des résultats comparables à la répétition de l'expérience réelle, et qu'ils sont obtenus avec beaucoup moins d'effort et plus rapidement, ce qui permet d'obtenir un bien plus grand

nombre d'épreuves. La simulation n'était pas, à l'époque, comme elle l'est devenue depuis, un point crucial du programme de probabilités-statistique, mais nous pensons qu'elle pouvait constituer un outil intéressant dans le domaine de l'aléatoire, en particulier pour l'élaboration des conjectures.

Mais tout d'abord, qu'est-ce qu'une simulation ? « *La simulation est la méthode statistique permettant la reconstitution fictive de l'évolution d'un phénomène. C'est une expérimentation qui suppose la construction d'un modèle théorique présentant une similitude de propriétés ou de relations avec le phénomène faisant l'objet de l'étude.* » [Dodge 1993]. Cette définition sous-entend la nécessité d'élaborer, préalablement à la simulation, un modèle théorique de l'expérience aléatoire considérée, car c'est ce modèle qu'on va simuler, et non l'expérience elle-même. On a en fait un schéma ternaire, et non binaire, dans lequel le rôle central est tenu par le modèle de l'encadré ci-dessus.

Dans le cas présent, en s'inspirant des procédures évoquées par d'Alembert, on peut envisager deux modes de simulation :

- soit en simulant systématiquement deux lancers de la pièce ;
- soit en simulant un premier lancer et, selon le résultat obtenu, un second lancer.

¹⁰ Voir ci-après, dans la mise en œuvre de la phase 8.

Dans un cas comme dans l'autre, le modèle supposera que, lors de chaque lancer, les deux côtés de la pièce ont la même chance d'apparaître.

Le professeur donnera la consigne suivante : *Sur votre calculatrice il existe une touche appelée RND, ou RAND, ou RAN#. Appuyez sur cette touche. Qu'observez-vous ?* Nous nous attendons éventuellement à des questions relatives à la touche « random » (sur le principe de la fonction « random » et, plus généralement, des générateurs aléatoires, voir [Parzysz 2005]).

Après constatation du fait que tous obtiennent un nombre compris entre 0 et 1, des explications succinctes seront données par le professeur, du type : le nombre affiché est obtenu « au hasard », c'est-à-dire que chacun des résultats¹¹ affichés, entre 0,000...0 et 0,999...9, a la même chance de sortir, et donc qu'on a, par exemple, autant de chance d'obtenir un nombre inférieur à 0,5 qu'un nombre supérieur à 0,5. Puis la consigne sera précisée par l'enseignant :

Voici la règle que vous allez utiliser pour simuler le lancer d'une pièce :

— un nombre affiché supérieur ou égal à 0,5 correspondra à face ;

— un nombre affiché inférieur à 0,5 correspondra à pile.

Avec la même règle que pour l'expérience réelle, chacun d'entre vous va réaliser 50 parties et remplir le nouveau tableau que je vais distribuer.

Cette procédure n'a pas pour seule fonction de fixer le protocole à mettre en œuvre (même si c'est un aspect à ne pas négliger) ; elle a été préférée à celle consistant à simuler systématiquement deux lancers¹² car elle est « isomorphe » à l'épreuve réelle¹³ : en effet, on ne relance la pièce que si on a obtenu pile lors du premier lancer. Voici en effet ce qui est attendu de l'élève :

1° appuyer sur la touche « random »

2° observer le résultat ;

3° s'il on a gagné, le noter ; sinon, appuyer de nouveau sur la touche « random » ;

4° observer le résultat et le noter.

On constate qu'il suffit, dans le protocole ci-dessus, de remplacer « on appuie sur la touche « random » » par « on lance la pièce » pour retrouver la description de la règle du jeu de croix ou pile. Cet « isomorphisme » recherché n'est pas anodin, car c'est précisément la source de l'objection que fait d'Alembert à la justification qu'on trouve « dans tous les auteurs » : ce qui est décrit ne correspond pas à la façon dont se joue réellement le jeu. On pourra objecter que cela revient au même (cf. citation de Fermat dans la note 1), mais c'est oublier que ce n'est que *par référence à la théorie* qu'on peut l'affirmer (cf. citation de Laplace p. 2) :

— si l'on lance systématiquement deux fois la pièce, on considère qu'il y a 4 éventualités (couples de résultats) que l'on suppose équiprobables¹⁴, dont 3 font gagner ;

— si l'on ne relance la pièce que lorsque l'on n'a pas gagné au premier coup, la probabilité de gagner est la somme de la probabilité de

cer et la deuxième au second lancer.

¹³ Raymond Duval parlerait ici de « congruence ».

¹⁴ En vertu du « principe de raison suffisante » selon lequel, comme les différentes modalités sont obtenues dans les mêmes conditions, aucune n'a plus de chance de se produire qu'une autre.

¹¹ Plus précisément, étant donné qu'il s'agit de nombres calibrés par l'affichage de la machine (0 suivi de n décimales), on admet que chacun de ces nombres a la probabilité 10-n d'apparaître.

¹² Par exemple en considérant les deux premiers chiffres de la partie décimale du nombre affiché (0 à 4 = croix et 5 à 9 = pile), la première décimale correspondant au premier lan-

gagner au premier coup ($1/2$) et de la probabilité de gagner au second coup ($1/2 \times 1/2$), en supposant, outre l'équiprobabilité à chaque lancer, l'indépendance des deux lancers.

Dans un cas comme dans l'autre le *résultat* est le même, mais *pas la manière d'y parvenir*, car les modèles théoriques mis en œuvre, même s'ils sont équivalents (comme par exemple un lancer simultané de deux pièces équilibrées et deux lancers successifs d'une pièce équilibrée, sont en apparence différents et ne seront donc pas perçus comme interchangeables par quelqu'un qui ne les a pas fréquentés. Il me semble donc important de porter beaucoup d'attention à la congruence (au sens de Duval) entre l'expérience et sa simulation¹⁵.

Une difficulté prévisible apparaît ici, qui risque de tourner au cercle vicieux : pour simuler, il faut nécessairement avoir recours à un modèle, mais nos élèves n'ont pas encore de connaissances dans le domaine des probabilités. Le recours à la simulation, à ce niveau, nécessite donc de faire l'hypothèse que les élèves disposent cependant de modèles « naïfs », certes grossiers, mais suffisants pour pouvoir simuler des expériences aléatoires « simples ». C'est sans doute généralement le cas pour le lancer d'une pièce supposée « bien équilibrée », ou d'un dé supposé « non pipé »,

mais il est malgré tout préférable de s'en assurer avant de commencer, car par exemple au niveau du collège on rencontre assez souvent la conception (liée sans doute au « jeu des petits chevaux ») selon laquelle le 6 est plus difficile à obtenir que les autres points d'un dé (cf. [Parzys 2001]).

Un autre point à ne pas négliger est lié à l'indépendance. Dans le protocole décrit ci-dessus, on suppose que la pièce « n'a pas de mémoire », c'est-à-dire qu'au second lancer, comme au premier, on a autant de chances d'amener pile ou face, et de même que le résultat d'une partie ne « dépend » pas (au sens courant comme au sens probabiliste de ce verbe) des résultats précédents¹⁶. Cette hypothèse ne va pas autant de soi qu'on pourrait le penser puisque, sur un grand nombre de parties, le nombre de piles et celui de faces vont avoir tendance à s'équilibrer ; par exemple, si sur les 100 premiers lancers on a obtenu un déficit de piles, on peut penser — à tort, mais c'est une idée très répandue — que si la pièce est bien équilibrée les lancers suivants vont compenser ce déficit en faisant apparaître plus de piles que de faces. La notion d'indépendance risque donc d'être mal acceptée par certains élèves.

Phase 10. Mise en commun. Il s'agira de répéter la même démarche que précédemment, c'est-à-dire de regrouper les résultats de toute la classe. On devrait alors constater 1° que les résultats obtenus sont voisins de ceux donnés

15 Dans un article à paraître [Barragués et al. 2006], les auteurs relatent le cas d'un étudiant espagnol confronté à l'expérience virtuelle consistant à extraire 5 fois, avec remise, une boule d'une urne contenant 10 boules numérotées de 0 à 9. Pour l'amener à admettre l'équiprobabilité d'obtenir tous les quintuplets de chiffres, le professeur lui propose le modèle alternatif consistant à tirer une boule d'une urne contenant 100 000 boules numérotées de 0 à 99 999. Mais, bien que l'étudiant ait déjà les connaissances suffisantes en probabilités pour reconnaître l'équivalence des deux modèles, il est déconcerté lorsqu'on lui pose la question : « Est-ce ou non la même situation ? ». Il trouve en fait que « c'est plus facile quand les nombres sont déjà construits », car il se place, non au niveau des modèles, mais à celui des expériences réelles.

16 En particulier, d'Alembert n'en était pas convaincu : « La variété des événements successifs est un phénomène constant de la nature ; et [...] leur similitude constante ou répétée est au contraire un phénomène qui n'arrivera jamais. » ([d'Alembert 1768a] pp. 79-80, cité par Michel Paty [Paty 1988]). Aussi, à Nicolas de Béguelin qui professait la même conviction [Béguelin 1769], Lagrange proposait-il de remplacer une série de n lancers successifs par un lancer simultané de n pièces numérotées ([d'Alembert 1768b], in [Paty 1988]).

par l'expérience réelle, et 2° que le modèle classique semble mieux « coller » à la réalité que le modèle alternatif proposé par d'Alembert.

3. – La mise en œuvre.

Je reprends ici la succession des phases décrites précédemment, qui ont été réalisées selon l'ordre envisagé *a priori*.

Phase 1. Cette phase de présentation du document se déroule comme prévu. Nous devons répondre à quelques questions visant à préciser certains points relatifs à d'Alembert et à l'*Encyclopédie*, en évitant d'anticiper sur le jeu de croix ou pile mais en indiquant néanmoins que « croix » n'est autre que ce que nous appelons aujourd'hui « face ». Puis le professeur demande aux élèves de lire individuellement le texte du document et donne les consignes de lecture.

Phase 2. Dès que la répartition des élèves en groupes de 4 a été effectuée, les discussions commencent. Grâce aux échanges (animés) à l'intérieur des groupes, les élèves trouvent rapidement que le jeu de croix ou pile consiste à lancer deux fois une pièce. Une petite mise au point s'avère ici nécessaire, suite aux questions de plusieurs groupes qui se sont aperçus qu'on n'est pas toujours obligé d'effectuer deux lancers (« *dès qu'une fois croix est venu, le jeu est fini* »). Le professeur indique alors à l'ensemble de la classe qu'effectivement la partie se joue en un ou deux lancers, selon le résultat du premier jet, et en profite pour s'assurer que le principe du jeu est clair pour tous.

Phase 3. Les groupes s'intéressent maintenant aux deux thèses en présence. Dès cette phase, quelques pièces de monnaie sortent des poches et certains élèves commencent à jouer réellement

quelques parties, dans le but avoué de se faire une idée. En prêtant l'oreille aux discussions, nous nous apercevons que les deux modèles proposés dans le texte ont tous deux des défenseurs convaincus, mais qu'une troisième position apparaît également, selon laquelle on a une chance sur deux de gagner.

Phase 4. Chaque groupe doit maintenant trouver une position commune, ce qui ne va pas sans discussions parfois animées, mais finalement un consensus arrive à s'établir, et on peaufine alors les arguments qui ont emporté l'adhésion des récalcitrants. Nous notons au passage qu'aucun groupe n'a recours à des outils graphiques, de quelque nature que ce soit¹⁷, et que l'argumentation est de nature exclusivement discursive. Nous voyons à ce fait trois explications possibles, non exclusives l'une de l'autre :

1° le problème à résoudre est de nature concrète, alors que les outils graphiques que les élèves connaissent interviennent dans des cadres théoriques ;

2° ils n'ont que rarement – voire jamais – rencontré les outils qui leur seraient utiles ici ; en fait, ils en connaissent peu en dehors des figures de géométrie (dont ils savent, par expérience, qu'il faut se méfier) et des graphiques de fonctions ;

3° de façon générale, ils ont peu l'habitude d'avoir recours aux aides graphiques, qui ont mauvaise presse dans le cadre de l'enseignement des mathématiques (« il faut des démonstrations »).

Phase 5. Chaque délégué vient présenter la synthèse des travaux de son groupe. Nous

¹⁷ Nous pensons en particulier à un arbre du type de celui du § 1, décrivant les divers déroulements possibles d'une partie.

pouvons alors constater la répartition suivante :

- thèse A (on a 1 chance sur 2 de gagner) : 2 groupes ;
- thèse B (on a 2 chances sur trois de gagner) : 3 groupes ;
- thèse C (on a 3 chances sur 4 de gagner) : 2 groupes.

Lors du débat qui suit cette présentation, un argument est mis en avant par les tenants de la thèse B : il s'agit de la règle du jeu selon laquelle on s'arrête lorsqu'on a fait face¹⁸ au premier coup, règle qui n'est pas respectée dans l'exposé de la thèse C (comme l'avait d'ailleurs déjà fait remarquer d'Alembert). Pour eux, il n'y a que trois éventualités possibles : face, pile suivi de face et pile suivi de pile, les deux premières faisant gagner tandis que la troisième fait perdre. Cet argument fait s'effondrer la thèse C, et fait vaciller (mais non disparaître totalement) la thèse A, pour les partisans de laquelle il n'y a que deux cas possibles : soit on gagne, soit on perd, ce qui donne une chance sur deux de gagner. Même si l'objection n'a pas été soulevée dans la classe, cette dernière thèse pourrait cependant être déstabilisée, en arguant par exemple que l'on a *déjà* une chance sur deux de gagner dès le premier lancer, et que le fait qu'on peut *en plus* gagner au second lancer ne peut qu'augmenter les chances de gagner. Mais il me semble que cette contre-argumentation nécessiterait que les élèves aient une idée suffisamment claire de ce que sont les « chances », et que c'est là précisément que le bât blesse, car ils considèrent séparément les « chances » du premier coup et celles du second, et non la partie dans son ensemble.

18 Les élèves ont préféré utiliser la terminologie moderne, à laquelle ils sont habitués.

On a ici, quelle que soit la thèse soutenue, une nouvelle illustration de l'omniprésence chez les élèves du biais d'équiprobabilité, qui affecte systématiquement, dans une expérience aléatoire, les mêmes chances de se réaliser à toutes les modalités en présence (cf. par exemple [Shaughnessy 1983] et [Lecoutre & Fischbein 1998]). Ici encore, on retrouve Laplace : « *La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité.* » (*ibid.* p. 10). La différence étant que Laplace demande de déterminer d'abord un espace dans lequel les événements élémentaires ont tous la même probabilité, tandis que les élèves supposent cette équiprobabilité *a priori* et dans tous les cas. C'est d'ailleurs la présence généralisée de cette conception erronée chez leurs « clients » qui constitue, avec la tricherie, le fonds de commerce des bonneteurs¹⁹.

A ce moment nous nous trouvons donc en présence de deux thèses, reposant toutes deux, d'une façon ou d'une autre, sur le biais d'équiprobabilité : la thèse B (2 chance sur 3) et, ébranlée mais toujours présente, la thèse A (1 chance sur 2). La thèse C a donc *de facto* disparu.

Phase 6. Après la mise en exergue par le professeur du fait que les deux thèses maintenant en présence sont contradictoires, la question de savoir qui a raison est explicitement posée. L'idée de jouer quelques parties

19 On trouvera, dans les deux articles cités plus haut, d'autres exemples de conceptions insuffisantes ou erronées.

— déjà apparue lors de la phase 3, comme on l'a vu —refait surface. Cette idée repose sur la conviction intuitive que, la répétition de l'expérience va permettre de se faire une idée des chances de succès que l'on a, en comptant le nombre de parties gagnées et le nombre de parties perdues.

Le professeur définit de façon assez précise le protocole qui sera mis en œuvre (voir plus haut), ainsi que le nombre de parties à jouer, et distribue le matériel destiné à chaque groupe (pièce, gobelet et feuille de relevés). Les élèves se prêtent volontiers au jeu, d'autant plus qu'ils ont apparemment envie de connaître la « vraie réponse ».

Phase 7. Le professeur récupère les feuilles de relevés remplies et les recopie au tableau sous forme de tableau, en ajoutant une ligne « Fréquence » qui est ensuite complétée (cf. tableau dans l'encadré ci-dessous).

Le résultat obtenu apparaît décevant aux élèves (mais pas pour nous), et ce pour plusieurs raisons :

1° les fréquences obtenues sont très variables selon les groupes : de 0,66 à 0,86. Aucune concentration autour d'une des valeurs prévisibles, quelle qu'elle soit, ne se dégage.

2° Cette grande variabilité ne peut pas être attribuée à une mauvaise mise en œuvre du jeu, puisque d'une part le protocole était bien défini et que d'autre part les lancers étaient effectués sous le contrôle des autres membres du groupe.

Les élèves sont donc ici en présence d'un fait qu'il faut bien accepter comme tel, même s'il ne répond pas à leurs attentes. Il y a malgré tout un aspect positif : la thèse A paraît hors course, car tous les résultats, même pour les groupes les moins « chanceux », affichent une fréquence nettement supérieure à 0,5.

D'autre part la thèse C, qui avait complètement disparu avant l'expérimentation, reprend du poil de la bête.

Contrairement à notre prévision, l'idée de regrouper les résultats de toute la classe n'apparaît pas spontanément.

C'est donc le professeur, à qui il revient de gérer le temps, qui la suggère, et elle est apparemment acceptée sans réticence (ce que nous attribuons au fait qu'un regroupement a déjà été opéré au sein de chaque groupe). Il élabore donc, sous le tableau précédent, un nouveau tableau qui regroupe les résultats progressivement, dans l'ordre de numérotation des groupes (cf. l'encadré page suivante).

Groupe	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de parties gagnées	65	69	53	53	64	58	62
Nombre de parties jouées	80	80	80	80	80	80	80
Fréquence	0,81	0,86	0,66	0,66	0,80	0,72	0,77

Groupe	1	1 + 2	1 à 3	1 à 4	1 à 5	1 à 6	1 à 7
Nombre de parties gagnées	65	134	187	240	304	362	424
Nombre de parties jouées	80	160	240	320	400	480	560
Fréquence	0,81	0,84	0,78	0,75	0,76	0,75	0,76

Phase 8. Le professeur demande alors aux élèves ce qu'ils pensent de ces résultats. Par comparaison avec le tableau précédent, certains remarquent que les fréquences sont « plus groupées » et que, pour l'ensemble de la classe, on obtient une fréquence de 0,77, ce qui élimine définitivement le 0,5 de la thèse A mais s'avère plus proche de 0,75 (thèse C) que de 0,67 (thèse B). Cependant, même s'il semble y avoir maintenant une forte présomption en faveur de la thèse C, tout ceci ne fait pas avancer en direction du « pourquoi », question qui ne sera abordée que dans la séance suivante. On peut aussi remarquer au passage que la répétition de l'expérience ne permet pas d'attribuer une valeur à la probabilité de gagner ; par exemple, on ne peut pas affirmer, au vu du résultat, qu'elle est de 0,77, ne serait-ce que parce qu'une autre série de parties — ou la poursuite de la présente série — fournirait une autre valeur de la fréquence. Tout ce qu'on peut affirmer pour l'instant,

c'est que la thèse C *semble* la meilleure candidate pour rendre compte du jeu de croix ou pile. En allant plus loin, on peut même imaginer qu'on ait trouvé 0,71 comme fréquence sur les 560 lancers²⁰ : il apparaîtrait alors tout à fait illusoire de vouloir trancher en faveur de l'un ou de l'autre modèle²¹.

La question subsiste donc de *justifier* – c'est-à-dire d'expliquer, et non de démontrer – le résultat obtenu, d'autant plus qu'il s'avère contraire à la croyance initiale du plus grand nombre d'élèves. Ceux-ci ne disposent, pour l'instant, d'aucune théorie de l'aléatoire, et c'est au contraire sur la base d'expériences comme celle qu'ils viennent de vivre qu'une telle théorie va pouvoir être construite, en posant comme un « acte de foi » que, à l'issue d'un « grand nombre » de parties, il existe une « valeur » (c'est-à-dire un réel compris entre 0 et 1) de laquelle la fréquence des parties gagnées va être « de plus en plus proche ».

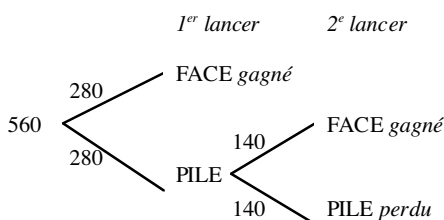
20 Même si un tel résultat est peu probable, il n'est pas impossible.

21 Il s'agit bien sûr de fluctuation d'échantillonnage, mais un tel résultat peut aussi s'obtenir fréquemment avec une pièce légèrement déséquilibrée en faveur de pile : une probabilité de 0,47 pour croix donne une probabilité de gagner à croix ou pile égale à 0,71. Ce biais lié à un déséquilibre de la pièce est évoqué par Laplace, qui propose, pour l'éviter, de changer de pièce entre les deux lancers du jeu de croix ou pile : « Ici se présente la question agitée par quelques philosophes, touchant l'influence du passé sur la probabilité de l'avenir. Supposons qu'au jeu de croix ou pile, croix soit arri-

vé plus souvent que pile : par cela seul, nous serons portés à croire que, dans la constitution de la pièce, il existe une cause constante qui le favorise ... ; si, par exemple, on change de pièce à chaque coup, au jeu de croix ou pile, le passé ne peut répandre aucune lumière sur l'avenir, et il serait absurde d'en tenir compte. » (ibid. p. 20). Si l'on ne dispose pas d'un grand nombre de pièces, on peut cependant rendre parfaite une pièce quelconque, grâce au protocole suivant : on lance systématiquement la pièce deux fois ; si l'on obtient deux piles ou deux faces, on annule le coup ; si l'on obtient « pile-face », on compte « pile » et si l'on obtient « face-pile » on compte « pile ».

Cette question de la justification du résultat sera entreprise dans le cours suivant par le professeur. On peut, pour ce faire, contourner la difficulté en cherchant, non pas les chances qu'on a de gagner, mais celles qu'on a de perdre : on perd au jeu de croix ou pile si – et seulement si – on amène successivement deux piles (sinon, on gagne). Reste alors à se convaincre qu'on a effectivement une chance sur quatre d'amener successivement deux piles²².

On peut également s'appuyer sur l'arbre présenté plus haut, en le quantifiant par des « effectifs idéaux » (cf. Parzysz 1993) et [Parzysz 1997]). Dans l'arbre ci-dessous, on part de 560 parties jouées (comme ce fut le cas dans la classe), et on imagine les résultats « idéaux » basés sur le fait que pile et face apparaissent un nombre égal de fois.



Les 560 premiers lancers se répartissent idéalement en 280 faces (on a gagné) et 280 piles (on rejoue), et les 280 seconds lancers se répartissent eux aussi idéalement en 140 faces (on a gagné) et 140 piles (on a perdu). En définitive, sur les 560 parties « théoriques » jouées, 420 (280 + 140) sont gagnantes, ce qui correspond à une fréquence de 0,75. Ce glis-

sement du réel observé à une idéalité constitue en fait ce qu'on pourrait désigner sous le nom de « modélisation naïve » de la situation, basée sur la conception de l'égalité des chances d'apparition des deux côtés de la pièce. En outre, le fait de s'appuyer sur des effectifs, avec un effectif de départ choisi de telle façon que tous les résultats s'expriment par des nombres entiers, permet d'éviter le recours aux fréquences (même idéales) dès le départ.

Phase 9. Il s'agit maintenant de passer de l'expérience aléatoire réelle à sa simulation sur calculatrice, afin de pouvoir comparer les résultats obtenus. Le fonctionnement de la touche « random » est expliqué par le professeur, avant d'être essayé par les élèves. Aucune question n'est soulevée quant à la « fabrication » des nombres, pas plus que l'on n'en obtient lorsqu'on présente aux élèves la touche « cosinus » ou la touche « logarithme » au moment où ces fonctions apparaissent dans l'enseignement. La tâche à réaliser dans les groupes est indiquée et les élèves se mettent à jouer à croix ou pile, ou plutôt à faire semblant d'y jouer, en notant comme précédemment leurs résultats. Notons qu'aucune difficulté particulière n'apparaît au cours de cette phase.

Phase 10. Après le ramassage des feuilles de relevés remplies, le professeur construit un nouveau tableau, analogue au tableau des « vrais » résultats (cf. encadré, en haut de la page suivante). Les élèves constatent que les résultats obtenus sont comparables à ceux obtenus en jouant réellement avec une pièce, avec ici aussi une dispersion assez grande des fréquences (de 0,71 à 0,86)²³.

22 M. Henry a tenté, auprès de lycéens, d'invalider la position de d'Alembert en considérant une punaise de bureau au lieu d'une pièce de monnaie : étant donné que les fréquences d'obtention de « tête » et de « pointe » sont différentes, les trois modalités envisagées par d'Alembert n'ont pas la même chance d'apparaître. Mais il ne fut pas suivi dans ce raisonnement...

23 La question de la fluctuation d'échantillonnage n'a pas été abordée car, d'une part elle ne figurait pas dans les programmes de l'époque, et d'autre part nous voulions surtout centrer l'attention des élèves sur la stabilisation des fréquences dans le cumul des résultats.

EXPERIENCE ALEATOIRE
ET SIMULATION...

Groupe	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de parties gagnées	149	162	73	162	157	143	172
Nombre de parties jouées	200	200	100*	200	200	200	200
Fréquence	0,74	0,81	0,73	0,81	0,78	0,71	0,86
<i>* Le groupe 3, retardé pour des raisons « techniques », n'a pu simuler que 100 parties.</i>							

Toujours comme précédemment, le professeur réalise un second tableau en dessous du premier, en regroupant progressivement les résultats des groupes (encadré ci-dessous).

De nouveau, l'analogie avec les « vraies » parties est remarquée, en particulier le resserrement des résultats, cette fois autour de 0,77 – 0,78, qui confirme la mise hors course des thèses A et B. Mais certains élèves restent néanmoins déçus de ne pas trouver une confirmation « positive » de la valeur 0,75 correspondant à la thèse C. Cette déception s'explique à la fois par la qualité médiocre du générateur aléatoire des calculatrices de l'époque et par le nombre relativement faible du nombre total de parties (1300 « seulement »). L'ordi-

nateur aurait certes procuré à moindre frais un nombre beaucoup plus grand de résultats²⁴, mais à l'époque, pour des raisons matérielles d'accès à la salle informatique, il ne nous avait pas été possible d'utiliser le tableur de l'ordinateur comme générateur de hasard. Nous le ferions sans doute aujourd'hui, mais seulement *après* avoir travaillé avec la calculatrice. La raison en est que, si avec le tableur de l'ordinateur on peut obtenir très rapidement la simulation d'un nombre beaucoup plus grand de parties, la programmation de cette simulation (la « transposition informatique » de Balacheff²⁵) est plus délicate à réaliser car, si l'on veut respecter la congruence entre l'expérience réelle et sa simulation, on doit faire intervenir deux fois successivement

Groupe	1	1 + 2	1 à 3	1 à 4	1 à 5	1 à 6	1 à 7
Nombre de parties gagnées	149	311	384	546	703	846	1018
Nombre de parties jouées	200	400	500	700	900	1100	1300
Fréquence	0,74	0,78	0,77	0,78	0,78	0,77	0,78

24 À seul titre indicatif, 10 séries de 20 000 lancers sur Excel nous m'ont procuré des fréquences comprises entre 0,7477 et 0,7518, avec une moyenne de 0,7499.

25 C'est-à-dire le « travail sur la connaissance qui en permet une représentation symbolique et la mise en œuvre de cette représentation par un dispositif informatique. » ([Balacheff 1994] p. 16).

la fonction aléatoire et la fonction logique d'implication, par exemple sous la forme suivante :

Case A1 : écrire (nombre au hasard 1)

Case B1 : si (case A1) > 0,5, écrire 1 ; sinon écrire (nombre au hasard 2)

Case C1 : si (case B1) > 0,5, écrire 1 ; sinon écrire 0.

Après avoir « tiré » ces trois cases pour étendre les opérations ci-dessus jusqu'à la ligne N, il suffira de faire totaliser, dans une case vierge, les nombres de la colonne C pour obtenir le nombre de parties gagnées sur N parties jouées.

En outre, avec l'ordinateur, tout se fait automatiquement dès que l'on a terminé le petit travail de programmation ci-dessus, tandis qu'avec la calculatrice on « joue » réellement, même si ce n'est pas avec une pièce. Cette intervention d'une action réelle me semble également un élément important à prendre en compte, et c'est pourquoi je pense que le premier contact des élèves avec la simulation gagne à être effectué avec la calculatrice, même si, dans un deuxième temps, il est bien sûr souhaitable de travailler sur ordinateur pour des raisons évidentes d'efficacité.

4. — En guise de conclusion.

Nous avons pu voir, dans ce qui précède, que même une expérience aléatoire « simple » comme le jeu de croix ou pile était susceptible de servir de support à des activités de classe permettant d'aborder avec les élèves diverses idées contenues dans le programme actuel de statistique du lycée. Le fait de partir d'un texte historique nous a paru intéressant, mais on pourrait également envisager d'autres mises en oeuvre, comme par exemple poser le

problème du jeu de croix ou pile sans se référer à d'Alembert, afin de ne pas biaiser l'accès aux conceptions des élèves sur le hasard. Une étude statistique de la « force de conviction » des différentes justifications envisageables pourrait aussi nous renseigner sur ces conceptions. Quoi qu'il en soit, nous avons pu constater, comme nous nous y attendions, que l'équiprobabilité des diverses éventualités est de règle chez pratiquement tous les élèves, et que le problème réside en fait dans les modalités sur lesquelles elle porte.

Quoi qu'il en soit, cette « relecture », à la lumière des nouveaux programmes, d'une expérimentation déjà un peu ancienne m'aura tout d'abord permis d'explicitier certains points de notre démarche qui ne l'avaient pas été à l'époque, dans ce qui était un simple compte rendu d'expérimentation. Depuis ce temps, la mise en place des nouveaux programmes de lycée, et notamment leur composante de statistique et probabilités, a suscité chez les enseignants de mathématiques une nécessaire réflexion sur ce domaine nouveau. Mais cette réflexion est cependant nettement moins avancée que dans d'autres secteurs de l'enseignement des mathématiques comme la géométrie, l'algèbre ou l'analyse. En particulier, le fait qu'on ne puisse s'expliquer clairement sur le problème posé par d'Alembert sans faire appel à la notion de modèle pose la question de la prise en compte de la relation de l'expérience au modèle théorique. D'autres questions, comme celle de l'articulation entre expérience et simulation informatique, qui n'ont ici été qu'évoquées, gagneraient aussi à être étudiées plus en profondeur et de façon plus générale. Quant à la question des modèles « spontanés » présents chez les élèves, elle a déjà fait l'objet de plusieurs études, qui ont toutes montré que des conceptions fausses ou insuffisantes se construisent très tôt et

qu'elles sont déjà bien installées au lycée, perdurant même au-delà, au niveau universitaire. Ceci suggère un autre thème d'étude et de recherche : un enseignement de l'aléa-

toire gagnerait-il à être entrepris plus tôt qu'il ne l'est chez nous, c'est-à-dire dès le collège, comme c'est déjà le cas chez la plupart de nos voisins européens ?

ANNEXE

*Extrait de l'article « Croix ou pile »
de l'Encyclopédie (Jean Le Rond d'Alembert)*

Ce jeu, qui est très connu et qui n'a pas besoin de définition, nous fournira les réflexions suivantes :

On demande combien il y a à parier qu'on amènera croix en jouant deux coups consécutifs. La réponse qu'on trouvera dans tous les auteurs, et suivant les principes ordinaires, est celle-ci. Il y a quatre combinaisons :

<i>Premier coup</i>	<i>Second coup</i>
Croix	Croix
Pile	Croix
Croix	Pile
Pile	Pile

De ces quatre combinaisons, une seule fait perdre et trois font gagner ; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce. S'il pariait en trois coups, on trouverait huit combinaisons, dont une seule fait perdre et trois font gagner ; ainsi, il y aurait 7 contre 1 à parier.

Cependant, cela est-il bien exact ? Car, pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent crois au premier coup ? Car, dès qu'une fois crois est venu, le jeu est fini, et le second coup est compté pour rien. Ainsi, il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles :

Croix, premier coup
Pile, Croix, premier et second coup
Pile, pile, premier et second coup.

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier. De même, dans le cas de trois coups, on trouvera :

Croix
Pile, croix
Pile, pile, croix
Pile, pile, pile.

Donc il n'y a que 3 contre 1 à gagner.

Ceci est digne, ce me semble, de l'attention des calculateurs, et irait à réformer bien des règles unanimement reçues sur les jeux de hasard.

Bibliographie

Alembert, J. le Rond d' :

1768a : Extraits de plusieurs lettres de l'auteur sur différents sujets, écrites dans le courant de l'année 1767. 23e mémoire. *Opuscules mathématiques* vol. 4. Ed. Briasson, Paris.

1768b : Extraits de lettres sur le calcul des probabilités, et sur les calculs relatifs à l'inculcation. 27e mémoire. *Opuscules mathématiques* vol. 4. Ed. Briasson, Paris.

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 14, pp. 9-42. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Barragués, J.I., Guisasola, J, Morais, A. (2006). Which event is more likely ? Estimating probability by university engineering students. *Recherches en Didactique des mathématiques* (à paraître). Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Béguelin, N. de (1769) : Sur l'usage du principe de la raison suffisante dans le calcul des probabilités. *Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, pp. 382-412. Ed. Harde & Spener, Berlin.

Bernoulli, J. (1713). *Ars conjectandi*. 4ème partie traduite du latin par N. Meusnier. Ed. IREM de Rouen 1987.

Dodge, Y. (1993). *Statistique. Dictionnaire encyclopédique*. Ed. Dunod, Paris.

Grangé, J.-P., Henry, M. (2006). Introduction à la simulation en seconde. *Statistique au lycée* vol. 2 (à paraître). Chaput, B. & Henry, M. (éds). Ed. APMEP, Paris.

Henry, M. (2001). Le problème « croix ou pile » de d'Alembert. *Autour de la modélisation en probabilités*. Commission inter-IREM de statistique et probabilités, pp. 219-224. Ed. Presses Universitaires Franc-comtoises, Besançon.

Laplace, S. (1814, 1819, 1825). *Essai philosophique sur les probabilités*. Ed. Chiron, Paris 1920.

Lecoutre, M.-P. & Fischbein, E. (1998). Évolution avec l'âge de « misconceptions » dans les intuitions probabilistes en France et en Israël. *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 18, pp. 311-331.

Parzys, B. (1993). Des statistiques aux probabilités: exploitons les arbres. *Repères-IREM* n° 10, pp. 91-104.

Parzys, B. (1997). L'articulation des cadres et des registres en probabilités: le cas des arbres et des tableaux. *Enseigner les probabilités au lycée*. Commission inter-IREM de Probabilités et Statistique, pp. 225-238. Ed. IREM de Reims.

Parzys, B. et Fabregas-Bechler, M. (1999). Une introduction aux probabilités à partir d'une « erreur historique ». *Petit Vert* n° 58, pp. 7-12.

Parzys, B. (2001). Peut-on envisager un enseignement de l'aléatoire au collège? *Le métier d'enseignant de mathématiques au tournant du XXIe siècle*. Actes de l'université d'été APMEP de Marseille (juillet 1999). Ed. APMEP.

Parzys, B. (2005). Quelques questions à propos des tables et des générateurs aléatoires. *Statistique au lycée* vol. 1, pp. 181-199. Chaput, B. & Henry, M. (éds). Ed. APMEP.

Pascal, B. (1654). *Œuvres complètes*. Coll. de la Pléiade. Ed. Gallimard, Paris.

Paty, M. (1988). D'Alembert et les probabilités. *Sciences à l'époque de la Révolution française. Recherches historiques*, pp. 203-265. Rashed, R. (éd.). Ed. Blanchard, Paris.

Shaughnessy, J. M. (1983). Misconceptions of probability, systematic and otherwise: Teaching probability and statistics so as to overcome some misconceptions. *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*, pp. 784-801. Grey, D.R. et al. (eds.) Teaching Statistics Trust, Sheffield (UK).

BREVE MULTIMEDIA

Rencontre internationales : les études d'ICMI¹

La seizième étude d'ICMI² s'est tenue en juin et juillet dernier à Trondheim (Norvège) sur le thème «Challenging mathematics, in and beyond the classroom».

Les études d'ICMI traitent de questions importantes d'enseignement, parvenues à maturité au plan international. Elles sont pourtant largement ignorées des enseignants et des chercheurs français. Pour mieux les faire connaître et pour y intéresser ceux qui sont très engagés dans l'enseignement de cette discipline, les quatre participants français de la rencontre de Trondheim ont raconté leur expérience, au contact de chercheurs du monde entier.

Ce texte est en ligne sur Educmath³, à l'adresse⁴

<http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherches/actes%20en%20ligne/icmi-16/>

Son actualité est soulignée par la parution du document préparatoire⁵ d'ICMI 18⁶ dont le thème a beaucoup occupé les enseignants et chercheurs français dans les années passées : « *Statistics Education in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education* ».

Ces travaux auront-ils un écho lors de cette rencontre?

1 http://www.mathunion.org/ICMI/ICMIstudies_org.html

2 <http://www.cfem.asso.fr/ICMI16fr.html>

3 <http://educmath.inrp.fr/Educmath>

4 **EducMath**, rubrique **Recherches**, puis **Actes**, puis **ICMI 16**

5 http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/Discussion_Document.pdf

6 http://www.ugr.es/~icmi/iase_study