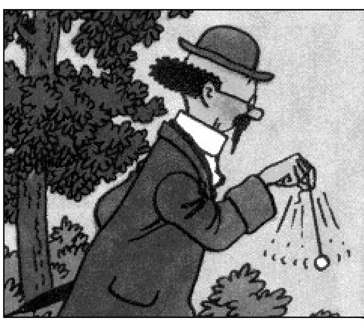
DU PENDULE AU VELO : RENCONTRES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Marie-Odile SAUVANAUD (partie II),
Jean-Pierre DAROU (parties I et III)
Irem de Strasbourg



Hergé, les 7 boules de cristal.

Présentation :

Nous faisons partie d'un groupe Irem appelé groupe TPE où nous avons cherché à développer des activités adaptées aux travaux personnels encadrés. Nous nous sommes inspirés de productions réalisées alors par nos élèves de terminale en les améliorant et en les complétant au besoin. Cet article présente deux T.P.E. qui, l'un et l'autre, conduisent à la résolution d'équations différentielles : le mouvement du pendule simple puis l'amortissement d'une fourche de VTT.

Les méthodes présentées étaient accessibles à un élève de terminale mais sont plus éloignées des T.P.E. demandés maintenant aux élèves de première, il est cependant encore possible d'en trouver des applications, notamment dans les sections sciences de l'ingénieur.

L'ensemble des travaux de notre groupe avait été présenté dans le numéro 111 de l'Ouvert, journal de l'APMEP d'Alsace et de l'Irem de Strasbourg, d'où provient cet article.

1. — Etude du pendule simple

1. *Introduction*

Dans le domaine des sciences appliquées, en mécanique, en physique, en chimie, en biologie, etc., on sait que la modélisation conduit souvent à la résolution d'une équation différentielle. L'élève qui prépare un T.P.E. sera donc assez fréquemment confronté à une telle résolution, ce qui lui donne l'occasion de présenter une activité mathématique de réel intérêt.

En terminale les élèves ne sont en mesure de résoudre de manière exacte que quelques cas très simples ; on sait que les situations effectivement rencontrées, même en les simplifiant, sont beaucoup plus complexes et se ramènent rarement aux seules équations linéaires, du premier ordre, à coefficients constants, qui sont au programme de la section S.

Toutefois, dès le début de l'année scolaire, les élèves ont eu l'occasion de découvrir la méthode d'Euler, ils ont ainsi eu également la possibilité de travailler avec un tableur, ils disposent donc de tous les outils nécessaires pour résoudre de manière approchée des équations différentielles plus compliquées que l'équation $y' = \mathrm{k}y$ qui figure au programme. On verra qu'il n'est pas très difficile d'utiliser aussi la méthode d'Euler pour des équations différentielles du second ordre.

Evidemment, et c'est là le point faible de ces méthodes qu'il est honnête, je pense, de leur signaler, ils ne sont pas en mesure d'apprécier les erreurs commises et la fiabilité (convergence, stabilité) de la méthode. Au mieux pourra-t-on leur montrer, sur des exemples où la solution est connue, les écarts entre la solution exacte et la solution approchée obtenue.

Lors de la première année d'existence des TPE, mes élèves de terminale s'étaient intéressés au mouvement du pendule. C'était de bons élèves qui avaient été primés l'année précédente au rallye mathématique, ce qui leur avait valu d'être invités à l'Hôtel du Département où se tenait une exposition mathématique. Ils y avaient découvert un pendule muni à son extrémité d'un stylet qui décrivait des ellipses dans le sable. Je crois me souvenir qu'il avait été baptisé pendule de Kepler, sans doute à cause des trajectoires obtenues, mais ce nom n'est pas usuel, je ne l'ai ensuite plus retrouvé. Ce mouvement est celui pris par un pendule simple ou par un pendule de Foucault lorsque, avoir l'avoir écarté, on lui donne une impulsion initiale dans une direction quelconque.

Mes élèves avaient d'abord voulu l'étudier, mais ils s'étaient vite aperçus de la complexité du travail. Cette situation est fréquente en TPE où une des tâches du professeur est souvent d'amener les élèves à des objectifs plus raisonnables sans pour autant qu'ils abandonnent leur sujet.

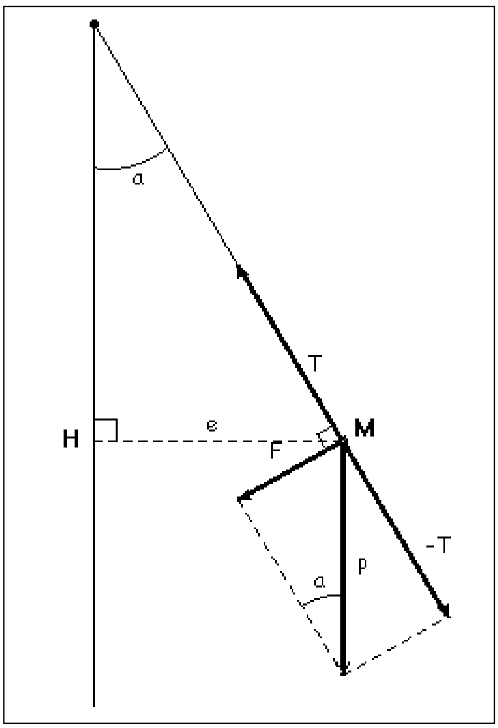
Ils ont finalement choisi l'étude classique du pendule simple et je leur ai suggéré d'utiliser la méthode d'Euler pour résoudre l'équation différentielle qu'ils avaient obtenue. Ils ont pu ensuite prendre en compte un amortissement proportionnel à la vitesse et ils auraient pu essayer, en salle de physique, de déterminer expérimentalement la valeur de la constante de proportionnalité, mais le temps leur a manqué.

2. *Equation du mouvement.*

Le pendule simple est formé d'une masse ponctuelle m suspendue en un point M par un fil sans déformation de longueur l et de masse négligeable.

Notons :

a l'élongation du pendule,
a'' l'accélération angulaire ($l \times a''$ étant l'accélération tangentielle),
P le poids,
T la tension,



F la force de rappel,
N le moment des forces exercées
I le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation.

On a les relations suivantes :

$$F = T + P = N \times l\ ,\quad P = mg\ ,\quad I \times a'' = N\ .$$

Si on ne prend en compte que le poids du pendule en négligeant la poussée d'Archimède due à l'air et les diverses forces de frottement :

$$I = m \times l^2 \text{ et } N = -\, m \times g \times l \times sin(a)$$

(ce moment et l'élongation sont de signes contraires) d'où :

$$m \times l^2 \times a'' = -\, m \times g \times l \times sin(a)$$

et $a'' = -\,(g\,/\,l)\, sin(a)$.

On note e = HM = $l \times sin(a)$ l'écart du pendule avec la verticale qu'il sera plus intéressant de visualiser sur le graphique du tableur.

Les conditions initiales sont la valeur de l'angle a et celle de a' qu'on peut choisir égale à 0, ce qui est le cas lorsqu'on laisse osciller le pendule sans donner d'impulsion.

Pour pouvoir se ramener à une équation qu'on sait résoudre (mais qui n'est plus actuellement au programme de terminale), on confond souvent $sin(a)$ et a, ce qui est licite pour des angles suffisamment petits. L'équation devient alors : $a'' = -\,(g\,/\,l) \times a$, l'élève peut vérifier qu'une solution est :

$$a(t) = a_M \cos\left(\sqrt{(g/l)} \times t\right)$$

et que cette solution correspond bien aux conditions initiales : amplitude maximum a_M pour $t = 0$ et vitesse initiale nulle.

On peut affiner l'étude et montrer que l'équation différentielle : $a'' = -\,\omega^2 \times a$ admet pour solution générale :

$$y = A\cos(\omega\, t) + B\sin(\omega\, t)$$

(en admettant que ce sont les seules).

En prenant $\omega = \sqrt{(g/l)}$ et compte tenu des conditions initiales qui donnent A = a_M et B = 0, on retrouve bien :

$$y = a_M \cos\left(\sqrt{(g/l)} \times t\right)$$

Ainsi $a(t)$ est une fonction périodique de période : $T = 2\pi\, \sqrt{(l/g)}$.

Avec la méthode d'Euler, il n'est pas nécessaire d'approcher $sin(a)$ par a, ce qui fait que cette méthode approchée conduit finalement à des résultats plus exacts que ceux obtenus en résolvant l'équation différentielle : $a'' = -(g / l) \times a$. La méthode s'applique avec un angle initial quelconque.

3. *Utilisation du tableur*

Toutes les grandeurs sont exprimées dans le système SI, les masses sont donc exprimées en kg, les longueurs en m et les temps en secondes.

On place dans des cellules du tableur la valeur h (exemple : $h = 0{,}01$ seconde) du pas choisi, la valeur l (exemple : $l = 2$ m) de la longueur du pendule, la valeur de g (exemple : g = 9,81 N) et la valeur initiale de a en radians (on peut par commodité la donner d'abord en degrés, puis faire la conversion). Il est enfin commode de placer dans une cellule que j'ai nommée k la valeur de g/l. Je donne à ces cellules les noms : g, h, k, l et a.

On utilise 5 colonnes B à F contenant les valeurs de t (temps écoulé), a'', a', a et e .

En première ligne (par exemple dans cellules B3 à F3) on porte les valeurs initiales. En deuxième ligne (cellules B4 à F4) on applique la méthode d'Euler : la nouvelle valeur de a' est

$$a'_{n+1} = a'_n + a''_n \times h ,$$

la nouvelle valeur de a est

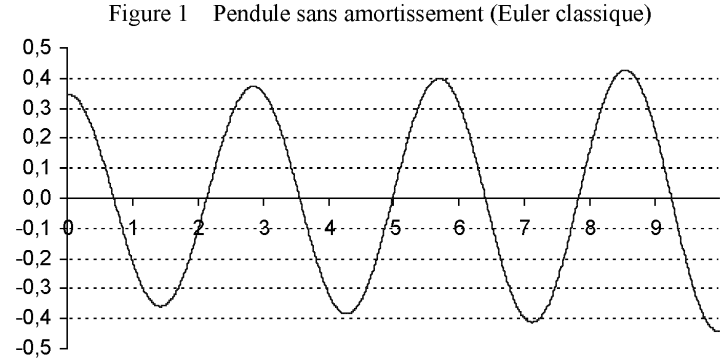
$$a_{n+1} = a_n + a'_n \times h,$$

enfin la nouvelle valeur de a'' est $a'' = -\, k\, a$ d'après l'équation différentielle.

Les lignes suivantes s'obtiennent immédiatement en sélectionnant les 5 cellules B4 à F4 et en tirant vers le bas avec la souris (jusqu'à la ligne 1003 pour une étude sur 10 secondes). La figure 1 ci-dessous donne le résultat obtenu avec une valeur de l égale à 2 et un angle initial de 10°, on est alors dans

	Colonne B : t	Colonne C : a''	Colonne D : a'	Colonne E : a	Colonne F : e
Ligne 3	0	= – k∗SIN(E3)	0	= a	= l∗SIN(E3)
Ligne 4	= B3 + h	= – k∗SIN(E4)	= D3+C3∗h	= E3+D3∗h	= l∗SIN(E4)

Figure 1 Pendule sans amortissement (Euler classique)



le cas dit des petits angles et on devrait obtenir une sinusoïde. On constate que c'est à peu près le cas mais que l'amplitude qui, en l'absence de frottements devrait rester constante, est amplifiée, en revanche la période est stable, un examen de la table des valeurs conduit aux valeurs successives de 0,75 ; 3,59 ; 6,43 et 9,28 secondes (écart égal à 0) donc à une période de 2,84 secondes alors que $2\pi \times \sqrt{(l/g)} \approx 2{,}837$. La précision sur la période est excellente !

Sans en faire une étude approfondie, j'ai constaté qu'on corrige de manière très satisfaisante l'erreur sur l'amplitude en modifiant un peu la façon d'appliquer la méthode d'Euler. L'habitude et la méthode préconisée dans les programmes scolaires consistent à appliquer la formule :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \times y'(x_n)$$

On peut cependant prendre plus généralement : $y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \times y'(\xi_n)$ avec $x_n \leq \xi_n \leq x_{n+1}$, c'est d'ailleurs la définition que j'ai retrouvée dans R. Theodor, initiation à l'analyse numérique page 242.

a'_{n+1} ayant déjà été déterminé en D4, on peut facilement choisir $\xi_n = x_{n+1}$ et donc calculer : $a_{n+1} = a_n + a'_{n+1} \times h$, la cellule E4 contient alors : = E3 + D4 × h .

Ainsi, lorsque la fonction a ne change pas de concavité, les erreurs sur a' et sur a se compensent. Il resterait bien sûr à approfondir l'étude des erreurs mais je ne suis pas assez compétent pour cela.

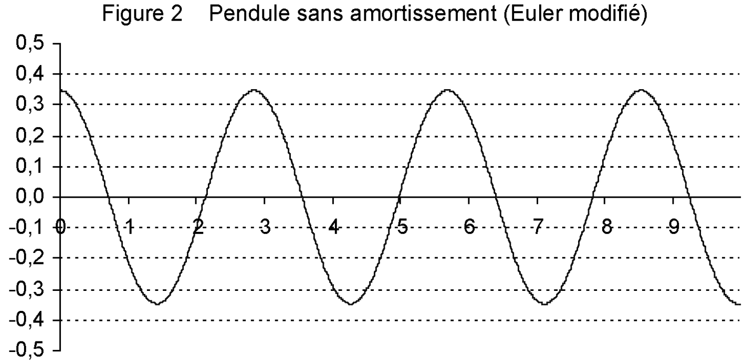
La figure 2 où les conditions sont les mêmes que dans l'exemple précédent montre l'amélioration obtenue.

On sait que les oscillations ne sont plus isochrones pour de grandes valeurs initiales de l'élongation. En fait on en obtient une meilleure valeur approchée en appliquant la formule dite de Borda :

$$T = 2\pi \times \sqrt{(l/g)}\ (1 + a^2/16 + 11a^4/\ 3072 + \ldots)$$

qui montre que la période augmente légèrement avec l'élongation.Cette formule est inaccessible aux élèves et je n'en propose pas

Figure 2 Pendule sans amortissement (Euler modifié)



de justification me contentant des donner des références pour ceux qui souhaiteraient approfondir :

- Un site : http://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_simple (assez vague)
- Un livre : « L'analyse au fil de l'histoire » édité chez Springer par Hairer et Wanner où on trouve page 143, exercice 7.2 la méthode conduisant à la période du pendule simple sous forme d'une série numérique. Je remercie mon collègue Stephan Czerniak qui m'a signalé cet ouvrage.

On s'arête généralement à l'ordre deux :

$$T = 2\pi \times \sqrt{(l/g)}\ (1 + a^2/16)$$

Le tableur confirme cette formule avec une très bonne précision. Par exemple avec $l = 2$ et pour un angle de 80°, la formule de Borda à l'ordre 2 donne T = 3,03 secondes au lieu de 2,84 alors que la valeur donnée par le tableur est de 3,05 secondes.

Un complément intéressant consiste à prendre en compte un amortissement μ de l'amplitude des oscillations proportionnel à la vitesse angulaire (modèle envisagé lorsque la vitesse est faible). La relation $I \times a'' = N$ donne alors :

$$m \times l^2 \times a'' = - m \times g \times l \times sin(I) \ - \mu \times a',$$

soit : $a'' = - c\ a' - (g\ /\ l)\ a$, en notant $c = \mu / ml^2$. Le coefficient μ est inconnu mais pourrait être déterminé expérimentalement. Ce travail n'avait pas été fait par les élèves, faute de temps.

Pour ce qui est du tableur, à part la donnée de μ et le calcul de c, la seule modification à apporter concerne la cellule C4 (nouveau calcul de a'') qui devient :

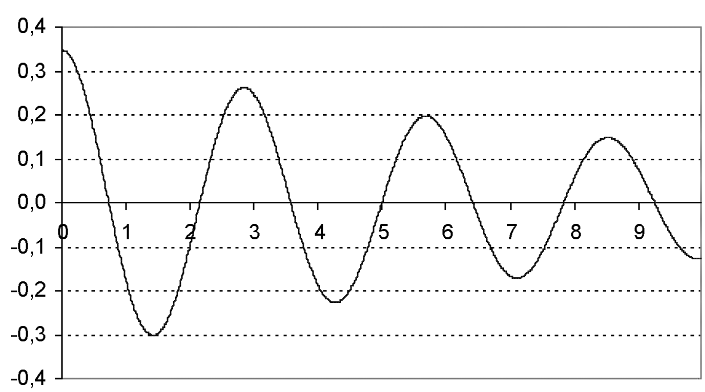
= – k ∗ SIN(E4) – c ∗ D4.

La figure 3 donne les résultats constatés avec un angle initial de 10° et un coefficient c égal à 0,2.

Conclusion

En présentant cette partie je n'ai pas résisté à l'envie d'aller au-delà du travail

Figure 3 Pendule avec amortissement :



effectivement réalisé par les élèves, leur travail s'était arrêté à l'étude très classique du pendule sans amortissement, mais il ne faudrait surtout pas croire que c'est peu.

Il y a eu, en physique, l'étude du bilan des forces et toutes les activités expérimentales que je n'ai pas évoquées. Il y a eu la prise en mains du tableur, théoriquement abordé au collège, mais dont il ne restait que peu de souvenirs. Il a fallu des rappels sur la méthode d'Euler, étudiée pour introduire la fonction exponentielle en début d'année, mais déjà bien oubliée. Il a fallu étudier d'abord des exemples plus simples puis expliquer comment en venir aux équations du second ordre.

Enfin, au début des TPE, pas de site « clefs en mains » qu'il suffit de recopier, le travail ne pouvait être que personnel !

2. — Les T.P.E. du vélo

1. *L'option sciences de l'ingénieur*

Depuis 2000, année de la création des T.P.E., je fais partie d'une équipe encadrant des T.P.E. en première et terminale S, option Sciences de l'ingénieur. Depuis la rentrée 2005, les terminales option SI ne font plus de TPE mais un PFE (projet de fin d'études) qui compte coefficient 2 pour le bac. L'inspecteur doit valider les sujets. L'esprit est le même ; les PFE prolongent ainsi les TPE.

Les T.P.E. sont des « Projets pluridisciplinaires à caractère scientifique et technique ». Le sujet doit être dans le référentiel des Sciences de l'ingénieur et dans les thèmes nationaux fixés par le Bulletin officiel.

Nous sommes quatre, deux professeurs de Sciences de l'ingénieur : électronique et mécanique, un professeur de sciences physiques et un professeur de maths. Les séances de T.P.E. ont lieu pendant les heures de Sciences de l'ingénieur et dans le laboratoire de Sciences de l'ingénieur. Les professeurs d'enseignement général sont « invités » et se partagent 30 heures-années.

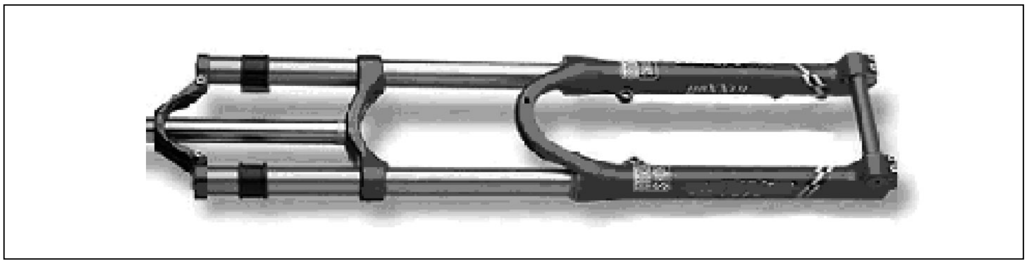
Je travaille dans un lycée polyvalent, il n'y a qu'une seule première S et une seule terminale S, recrutant essentiellement sur les quatre secondes du lycée. Nous invitons les élèves de seconde qui envisagent de faire une S à assister à des oraux blancs de T.P.E. en Terminale ou en 1ère. Aussi ont-ils une idée de ce qu'est un oral de T.P.E. Nous leur demandons ensuite de réfléchir à un futur T.P.E. qui soit en rapport avec une de leurs activités favorites ou avec un projet professionnel.

2. *Amélioration du vélo*

A la rentrée de première nous commençons nos T.P.E ., chaque année un groupe de deux ou trois élèves souhaite travailler sur l'amélioration d'une partie de leur V.T.T. Le feu vert est donné par l'équipe encadrant. Ce choix n'a que des avantages.

Le premier trimestre est consacré au cahier des charges, à l'analyse fonctionnelle et technique et à la recherche documentaire. Les élèves peuvent, comme leurs camarades en lycée d'enseignement général passer trop de temps sur Internet. Ils trouveront les sites des fabricants, moins avares d'indications techniques que les fabricants d'hélicoptères ou de moteurs de voitures de course qui intéressent traditionnellement nos élèves.

Je leur indique le site de l'E.N.S. Cachan, sur lequel ils peuvent lire les questions que d'autres élèves ont posées en étudiant les



mêmes systèmes et les réponses qui leur ont été données. Ces réponses englobent des adresses de sites universitaires respectables et des références à des problèmes théoriques.

La présence des professeurs d'enseignement général va bientôt se justifier pleinement. Ils pourront aussi poser des questions aux étudiants qui collaborent à ce site. Mais l'équipe encadrant et surtout notre documentaliste leur demandent d'analyser l'avancement de leurs recherches documentaires pour limiter les pertes de temps.

Nos élèves ont d'autres ressources pour se documenter : les marchands de VTT, les revues spécialisées, les notices des constructeurs. Ils peuvent aussi aller dans un lycée professionnel et y rencontrer des professeurs des sections cycles qui forment les futurs professionnels de la vente et de l'entretien des cycles. Ceux-ci leur proposent même de les aider à fabriquer leurs nouvelles pièces en grandeur réelle. Ils ont surtout la ressource d'étudier leur propre V.T.T. soit dans leur garage, soit même au lycée en apportant les pièces qu'ils souhaitent améliorer.

Notre groupe souhaite améliorer les suspensions du V.T.T et le lycée a même les moyens d'acheter une fourche avant ! Les élèves vont la démonter et comprendre qu'il y a deux éléments : la pompe et le ressort.

La pompe va exercer un frottement proportionnel à la vitesse et le ressort une force de rappel proportionnelle à l'allongement dû aux chocs. Les professeurs savent qu'en Terminale le principe fondamental de la dynamique permettra d'établir une équation différentielle et de la résoudre. En première les élèves modélisent les pièces sur Solidworks, trouvent dans les notices techniques la formule donnant le coefficient de raideur du ressort en fonction de ses caractéristiques : diamètre des spires, nombre de spires, matériaux. De même pour le frottement de la pompe. Les élèves font spontanément des tableaux sur Excel pour recenser les différents modèles existant, leurs prix et guider leurs choix. Les professeurs d'enseignement général connaissent bien Excel et peuvent aider les élèves. Ensuite on peut représenter sur Excel les fonctions donnant les coefficients en fonction de telles ou telles données. Les études de fonctions sont maîtrisées dès la fin du premier trimestre de la première et l'on peut déjà utiliser des maths pour optimiser les choix. En fin de première l'étude des pièces et du système statique est présentée.

3. *Les données*

k le coefficient de raideur du ressort :

$$k = Gd^4/8\mathbf{N}_a D^3.$$

— G correspond au module d'élasticité trans-

Deux types d'amortisseurs

Amortisseur à ressort

Atouts principaux :

souplesse
nombreux réglages.

Inconvénients :

poids élevé
pompage lors du pédalage.

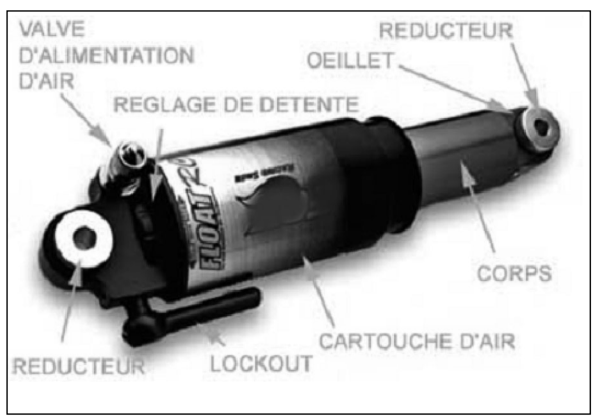
Amortisseur à air

Atouts principaux :

légèreté
rendement.

Inconvénients :

manque de souplesse
et de réactivité
sur les petits chocs.



versal du matériau. L'amortisseur à notre disposition est en acier et pour les aciers $G = 80000 \ N/mm^2$.

— d est le diamètre du fil du ressort et son unité est le millimètre. On mesure d **=** 3 mm.

— $\mathbf{N}_a$ correspond au nombre de spires actives, c'est-à-dire qu'il ne faut pas prendre en compte les spires qui sont meulées. Dans notre cas $\mathbf{N}_a = 29{,}5$.

— D représente le diamètre d'enroulement et s'exprime en mm. Dans notre cas : D = 18.3 mm.

Par conséquent : $k = 80000 \times 3^4 / 8 \times 29{,}5 \times 18{,}3^3$ donc $k \approx 4.81 \ N/mm$, pour simplifier les prochains calculs, on prendra : $k = 5$ N/mm.

Comme les deux amortisseurs sont parallèles et identiques, on prendra :

a = 10 N/mm = 10000 N/m.

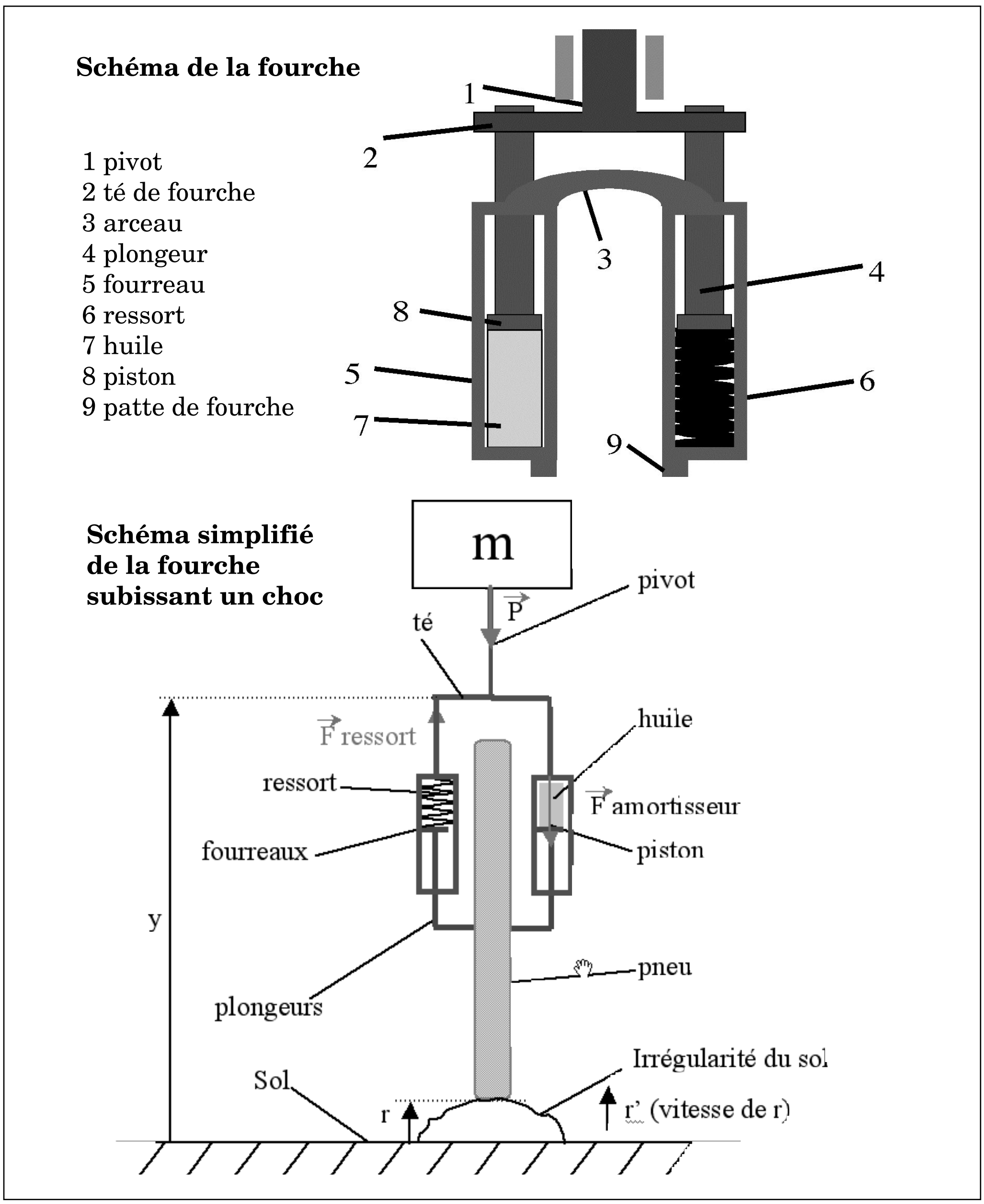


Schéma de la fourche
1 pivot
2 té de fourche
3 arceau
4 plongeur
5 fourreau
6 ressort
7 huile
8 piston
9 patte de fourche
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Schéma simplifié
de la fourche
subissant un choc
m
P
pivot
té
F ressort
huile
ressort
F amortisseur
fourreaux
piston
y
pneu
plongeurs
Irrégularité du sol
Sol
r
r' (vitesse de r)

b est le coefficient d'amortissement de la fourche. Les élèves n'ont pas pu déterminer sa valeur expérimentalement. Le professeur de mécanique leur a donné b = 500 N/(m/s).

4. *Equations différentielles*

En terminale les élèves sont rapidement initiés aux équations différentielles, aussi bien en Sciences de l'ingénieur, qu'en physique, qu'en mathématique. Trois profs qui leur parlent de la même chose, presque en même temps et en T.P.E. il faudra s'en servir. L'affaire devient intéressante !

Nos élèves écrivent le principe fondamental de la dynamique avec les valeurs numériques définies par les pièces créées et tentent de la résoudre avec leur T.I.89.

En notant y_0 la hauteur de la fourche rigide, r la hauteur de la route (par rapport à la valeur initiale) et y la hauteur de la fourche sous l'effet de l'amortissement, l'équation différentielle s'écrit :

$$a(r + y_0 - y) - b(y' - r') - mg = my''$$

Ce qui donnera :

$$y'' + b/m \times y' + a/m \times y = b/m \times r' + a/m \times r + a/m \times y_0 - g$$

La résolution sur T. I.89 est en principe possible mais avec leurs valeurs numériques c'est illisible. Nous allons donc utiliser DERIVE et la fonctionnalité :

D-SOLVE IV (p,q,r,xo,yo,y¢o).

Le professeur de mécanique me demande de faire un rapide exposé à toute la classe, d'autant plus que d'autres groupes ont besoin d'équations différentielles linéaires d'ordre deux. Celles-ci ne sont pas au programme mais n'en sont pas loin. Les élèves savent que les équations $y' = ay + b$ ont pour seules solutions les fonctions :

$$y(t) = k \exp(at) + b\ ,$$

en physique ils ont vu que les équations $y'' = -\omega^2 y$ ont pour solutions :

$$y(t) = a \cos(\omega t + \varphi).$$

Ils connaissent aussi l'écriture exponentielle des complexes. Il leur paraît donc tout naturel que je cherche les solutions de cette équation différentielle linéaire d'ordre deux sous forme d'exponentielle, puis de tomber sur une équation caractéristique de degré deux et de calculer son discriminant. Celui-ci sera négatif, les solutions seront deux nombres complexes conjugués et les solutions seront données explicitement.

Le principe étant compris, nous passons à la résolution sur DERIVE. Les élèves tiennent beaucoup à leurs valeurs numériques précises. Avec ces valeurs :

$$y'' + 50/3\, y' + 1000/3\, y = 500/30\, \pi \sin(20\pi t) - (-0{,}05\cos(20\pi t) + 0{,}05) - 10$$

Sur DERIVE on rentrera :

DSOLVE2_IV(50/3,1000/3, 50/3×π×sin(20πx) – 50/3×*cos*(20π*x*) + 20/3,*x*,0,0.97,0)

Je peux à peine négocier une précision à 10^{-2} ! Mais, si les solutions sont illisibles, les courbes obtenues sont intéressantes. Les élèves acceptent enfin un exemple simple fictif et du coup les solutions sont lisibles. J'ai réalisé là que les exemples simples fictifs qui illustrent nos cours de maths sont aussi abstraits pour eux que des exemples littéraux et de fait pas du tout simples !

Les élèves obtiennent donc différentes solutions en modifiant les coefficients de raideur du ressort ou celui des frottements de la pompe. Ils les comparent avec succès avec celles obtenues sur leurs logiciels MECA 3 D. Et c'est vraiment un grand succès de voir que deux approches différentes d'un même problème donnent les mêmes courbes.

Mais le problème a une suite. Le choc auquel est soumis la suspension de V.T.T. a une fin, qui se traduit par la fin de l'allongement du ressort et une nouvelle équation différentielle. DERIVE n'accepte pas un second membre d'équation différentielle d'ordre deux avec une fonction définie par morceaux. Les élèves peuvent comprendre que cette fonction n'est pas de classe C - infini mais je ne pense pas que ce soit le problème de DERIVE. Je leur propose d'appliquer la méthode d'Euler en calculant la vitesse à la fin du choc, qui sera la vitesse initiale de notre nouvelle équation différentielle. Nous obtenons ainsi une nouvelle fonction, puis nous recollons nos deux morceaux pour obtenir une solution, puis d'autres solutions en changeant les valeurs de k. Ces solutions sont plus régulières que celle qui simule le choc et c'est justement ce qui mérite le nom d'amortissement.

Nous constatons enfin que les valeurs numériques des pièces des fabricants sont bonnes et ne peuvent pas être vraiment améliorées. En utilisant trois méthodes différentes, les élèves ont pu répondre à leur problématique : Peut-on améliorer la suspension d'un V.T.T. ?

Conclusion

En encadrant ces T.P.E. j'ai constaté que les élèves comprenaient aisément les formules de maths nécessaires mais avaient du mal avec leurs applications numériques et que les fautes les plus fréquentes proviennent des unités choisies et de formules qui ne sont pas homogènes. Ils ont appris ainsi à repérer ces erreurs.

3. — La méthode d'Euler dans le cadre du vélo.

Cette étude, contrairement aux autres, n'est pas une adaptation d'un travail d'élèves. Le travail qu'ils ont réalisé est celui présenté par Marie-Odile dans la partie II. J'ai voulu reprendre moi-même la méthode d'Euler pour proposer une solution moins mystérieuse que celles fournies par les logiciels DERIVE ou MECA 3 D qui fonctionnent comme des boîtes noires.

L'étude théorique a été présentée dans la partie II, j'ai gardé les notations et je rappelle l'essentiel : on note y_0 la hauteur de la fourche rigide, r la hauteur de la route (par rapport à la valeur initiale) et y la hauteur de la fourche sous l'effet de l'amortissement. Les forces qui s'exercent sur la fourche sont :

- Le poids mg dirigé vers le bas.
- La force du ressort, dirigée vers le haut, égale à $a(r + y_0 - y)$ où la constante a est la raideur du ressort.
- La force due à l'amortissement, dirigée vers le bas pour $y' - r' > 0$, égale à $-b(y' - r')$ où la constante b est le coefficient d'amortissement de la fourche.

Le principe fondamental de la dynamique conduit à l'équation différentielle :

$$a(r + y_0 - y) - b(y' - r') - mg = my''$$

En prenant $y_0 = 1$, on obtient :

$$y'' = -b/my' - a/my + a/mr + b/mr' + a/m - g$$

Pour bien mettre en évidence l'effet de l'amortissement, je superpose deux graphiques : celui qui donne les variations de la hauteur y de la fourche et celui qui donne les variations de la fonction $c(t) = r + y_0 - mg/a$ où j'ai gardé l'effet du poids qui comprime le ressort et baisse donc la hauteur $r + y_0$ qu'aurait une fourche rigide, mais où je ne prends pas en compte les effets de l'amortissement.

On portera les paramètres :

- La masse m (par exemple m = 30kg)
- Le coefficient a (par exemple a = 5000)
- Le coefficient b (par exemple b = 500)
- Le pas h (par exemple h = 0,001)

dans des cellules de même nom.

Il est également commode de porter dans des cellules les valeurs qu'on gardera fixes : y_0 = 1, pi = pi() et g = 9,8 N.

Je reprends d'abord le travail des élèves en modélisant l'irrégularité de la route par un dos d'âne d'équation :

$r(t) = 0{,}05 \times (1 - \mathrm{COS}(20 \times \mathrm{pi} \times t))$

avec t compris entre 0 et 0,1 seconde.

Si le cycliste roule à 18 kmh^{-1}, on vérifiera que ce dos d'âne s'étend sur 50 cm et a une hauteur maximale de 10 cm. Pour t supérieur à 0,1 seconde, la route redevient horizontale et $y_2(t) = 0$.

La feuille de calcul comporte 8 colonnes avec dans l'ordre :

- La valeur de t (temps écoulé) en colonne E.
- Les valeurs de y'', de y', de y en colonnes F, G et H.
- La valeur du second membre : $f(t) = a/mr + b/mr' + a/m - \mathrm{g}$, en colonne I
- Les valeurs de $r(t)$, fonction dérivable modélisant la variation de la hauteur de la route et de $r'(t)$ en colonnes J et K.
- La valeur de c(t) en colonne L .

Voici, présentées en colonnes, les contenus de la ligne initiale (ligne 57) et de la ligne 58. Dans la ligne 58 seules la cellule E58 ainsi que les cellules G58 et H58, où on applique la méthode d'Euler, sont à réécrire, les autres peuvent être obtenues en tirant les cellules correspondantes de la ligne 57.

En sélectionnant l'ensemble et en tirant avec la souris on obtient immédiatement les lignes suivantes, cependant il faudra penser à modifier l'expression de $f(t)$, celle de $r(t)$ et

Ligne 57		Ligne 58	
Cellule	Formule	Cellule	Formule
E57	0	E58	= E57 + h
F57	= – b/m*G57 – a/m*H57+I57	F58	= – b/m*G58 – a/m*H58+I58
G57	0	G58	= G57 + h*F57
H57	1 – m*g/a	H58	= H57 + h*G57
I57	= b/m*K57+a/m*J57+a/m – g	I58	= b/m*K58+a/m*J58+a/m – g
J57	= 0,05*(1 – cos(20*π*E57))	J58	= 0,05*(1 – cos(20*π*E58))
K57	= π * sin(20*π*E57)	K58	= π * sin(20*π*E58)
L57	= 1 – m*g/a + J57	L58	= 1 – m*g/a + J58

celle de $r'(t)$ pour les valeurs de t supérieures à 0,1. On a alors $f(t) = a/m - g$, alors que $r(t) = r'(t) = 0$.

On peut enfin prévoir de représenter la situation pendant les quelques fractions de seconde précédant l'obstacle, il n'y aura à remplir alors que les colonnes :

E (valeurs négatives), H (= 1 – mg/a)
et L (= 1 – mg/a).

Voici quelques graphiques obtenus en faisant varier m (la charge étant moindre à l'avant qu'à l'arrière, on peut choisir environ le tiers de la masse totale du cycliste et du vélo), la raideur a du ressort et le coefficient b d'amortissement de la fourche.

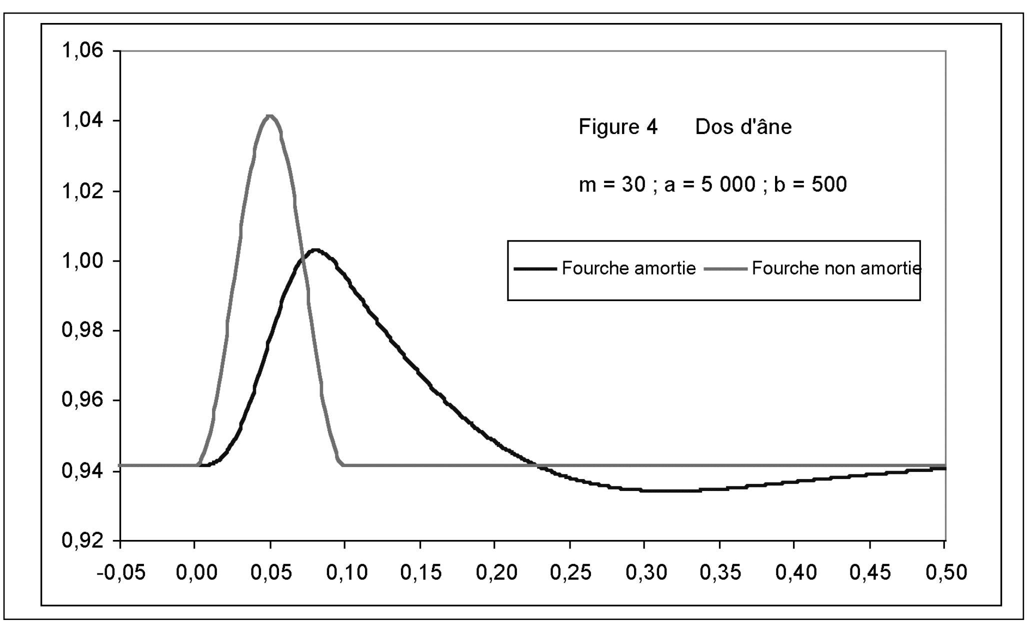
Le dernier graphique montre que les effets peuvent être néfastes lorsque les constantes sont mal choisies !

On peut très aisément modifier la fonction qui modélise l'obstacle, il faut cependant qu'elle soit dérivable.

Essayons par exemple de simuler la rencontre brutale avec un trottoir de 10 cm de hauteur. La fonction $r(t) = 0{,}1 \times sin(250 \times \text{pi} \times t)$ convient bien. La hauteur de 0,1 m est atteinte pour $t = 0{,}002$, ce qui correspond à une distance horizontale d'environ 1 cm seulement si le cycliste roule à 18 kmh^{-1}.

On peut reprendre la feuille précédente où il suffit de modifier r et r', on pensera aussi à donner à ces deux fonctions les valeurs 0,1 et 0 lorsque t est supérieur à 0,002.

Le graphique de la dernière page montre l'efficacité de l'amortissement. Je dois reconnaître que l'exemple de la fourche est sensiblement plus compliqué que celui du pendu-



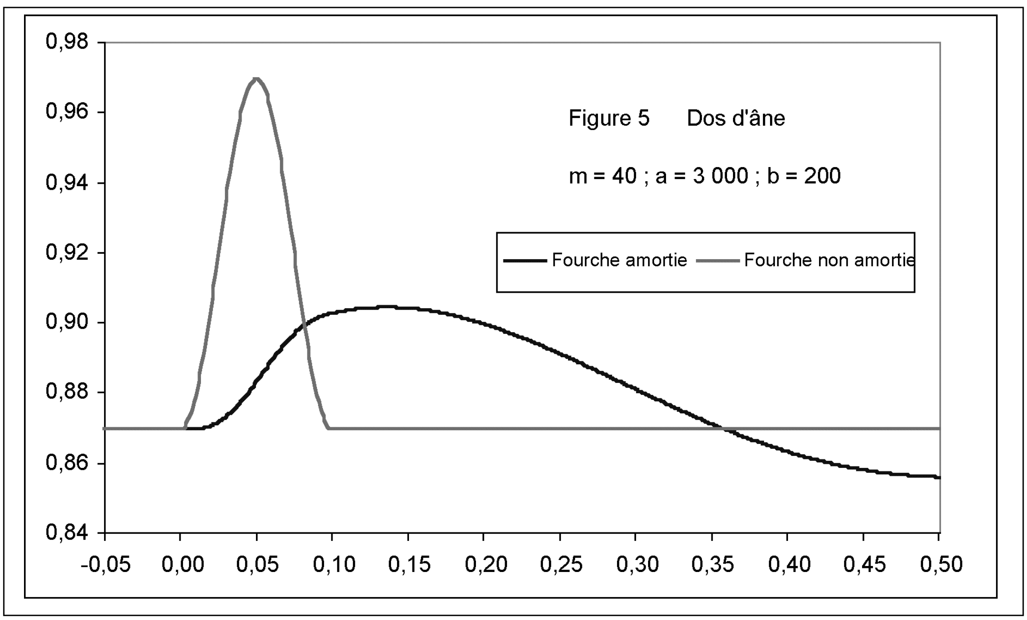


Figure 5 Dos d'âne
m = 40 ; a = 3 000 ; b = 200
Fourche amortie
Fourche non amortie
0,98
0,96
0,94
0,92
0,90
0,88
0,86
0,84
-0,05 0,00 0,05 0,10 0,15 0,20 0,25 0,30 0,35 0,40 0,45 0,50

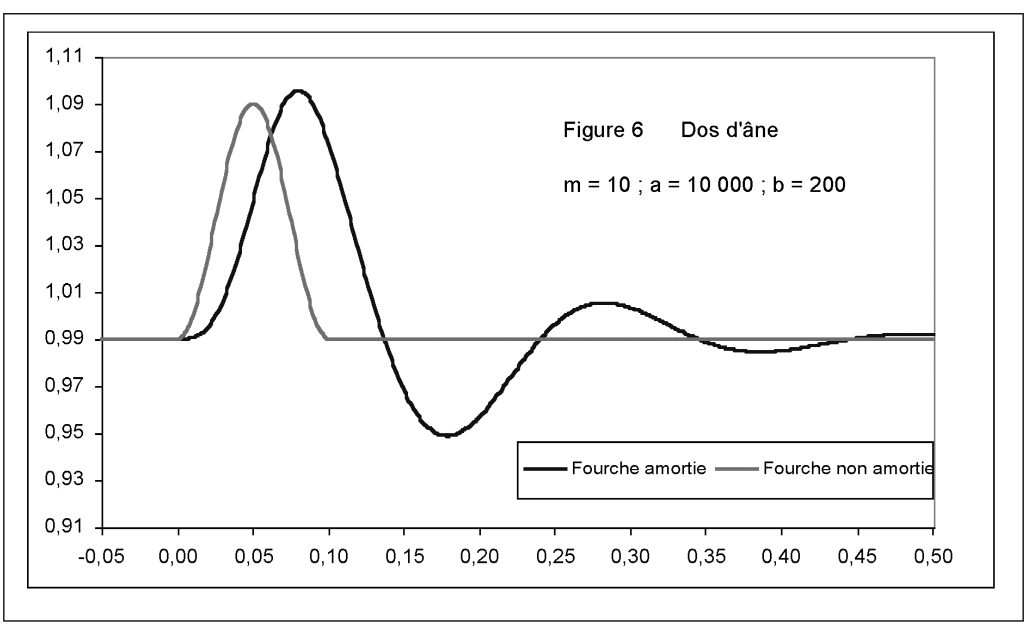
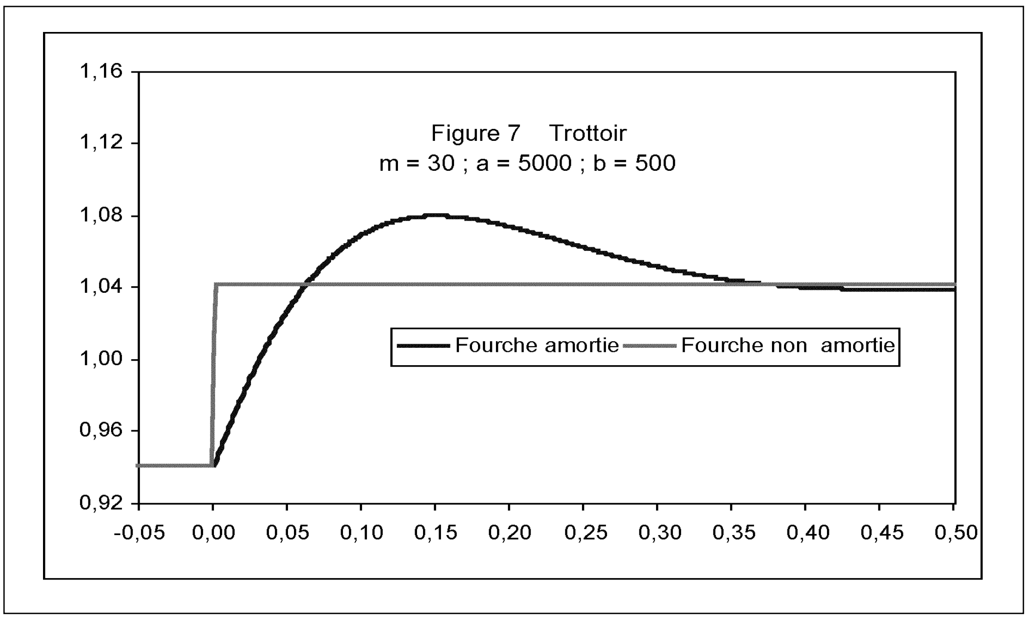


Figure 6 Dos d'âne
m = 10 ; a = 10 000 ; b = 200
Fourche amortie
Fourche non amortie
1,11
1,09
1,07
1,05
1,03
1,01
0,99
0,97
0,95
0,93
0,91
-0,05 0,00 0,05 0,10 0,15 0,20 0,25 0,30 0,35 0,40 0,45 0,50



le, il aurait certainement fallu donner une aide importante aux élèves pour qu'ils puissent le traiter, mais j'espère qu'ils se seraient amusés comme je l'ai fait en étudiant diverses situations et en observant les effets plus ou moins favorables. Cela leur permettrait peut-être de se convaincre et de convaincre leurs camarades de l'utilité si souvent mise en doute des mathématiques.

Conclusion

Nous avons essayé de donner dans cet article quelques pistes pour les TPE. Actuellement leur report à la fin de la classe de première ne permettra sans doute pas de réutiliser tels quels les exemples proposés, mais on trouvera d'autres manières d'associer élèves et professeurs dans un travail d'équipe nécessitant des compétences variées.

Un travail d'équipe pour les élèves d'abord, mais aussi pour leurs professeurs. L'occasion pour eux, et même la nécessité, de discuter avec des collègues qu'ils avaient auparavant moins l'occasion de rencontrer, comme celui de physique ou ceux des sciences de l'ingénieur.

Des compétences variées pour les élèves, mais également des apprentissages à rafraîchir ou à découvrir pour leurs professeurs. Ici l'étude théorique ne suffit pas, elle doit être complétée par l'outil informatique et par des aspects expérimentaux, sans compter, au-delà du travail des élèves, les nombreuses ouvertures qu'on sera certainement tenté d'explorer.