L'ARITHMETISATION DES GRANDEURS

Evelyne BARBIN
Irem des Pays de Loire (Nantes)
Centre François Viète et REHSEIS

En 2001, la revue *Repères IREM* proposait un numéro 44 spécial sur « grandeurs et proportionnalité » motivé particulièrement par la disparition de la notion de grandeur dans l'enseignement secondaire. Le constat que nous pouvions faire alors et que nous pouvons faire toujours aujourd'hui est que le rôle et la place des grandeurs dans l'enseignement au collège est confus. Nous en prendrons pour témoin quelques extraits du texte d'accompagnement des programmes du cycle d'orientation, tel qu'il figure dans un livre du professeur de 1999. Ce texte s'intitule « Place des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques au collège » [1]. Nous y lisons : « Il y a d'ailleurs plusieurs raisons qui rendent indispensable, spécialement dans l'enseignement obligatoire, un appui résolu, mais distancié, sur les notions de grandeurs et de mesure. » La mention d'un appui « résolu mais distancié » demande des commentaires. En effet, il est dit plus loin : « En mathématiques, on ne travaille pas *sur* les grandeurs (c'est l'objet d'autres disciplines, comme la physique, la technologie, les sciences de la vie et de la terre ou la géographie et l'économie par exemple), mais *avec* les grandeurs ou *à partir* d'elles ; ici se situe l'interaction entre les mathématiques et les autres disciplines. Une exception : longueurs, aires ou volumes sont des grandeurs appartenant au champ des mathématiques, tandis que la mise en évidence de l'aspect multidimensionnel des deux dernières correspond à un travail *sur* les grandeurs ». Il existerait donc un cas particulier, celui des grandeurs géométriques, qui appartient bien au champ des mathématiques. Mais, il est dit encore plus loin : « En mathématiques, on travaille non dans le domaine des grandeurs mais dans celui des nombres ».

Notre propos, dans cet article, est de montrer que les grandeurs ont une place nécessaire dans l'enseignement, et ce faisant, nous résolvons ce semblant de paradoxe : les grandeurs feraient partie des mathématiques,

1 Math 3ème, collection cinq sur cinq, livre du professeur, Hachette, 1999.

mais les mathématiques ne travailleraient pas dans le domaine des grandeurs.

Pour cela, nous proposons de distinguer, entre ce que nous trouvons massivement dans l'enseignement élémentaire et au collège, à savoir une « numérisation des grandeurs géométriques », et ce que nous appelons une « arithmétisation des grandeurs ». En effet, dans l'enseignement élémentaire et au collège, les grandeurs géométriques sont presque toujours associées à des nombres qui les mesurent. Il s'agit donc d'une numérisation des grandeurs. Tandis que l'arithmétisation des grandeurs est un travail sur les grandeurs, qui consiste à appliquer les opérations de l'arithmétique aux grandeurs, en particulier à introduire un segment unité. La numérisation est souvent confondue avec l'arithmétisation des grandeurs, elle masque ainsi cette dernière et l'empêche d'être effectuée. Or, l'arithmétisation des grandeurs constitue une étape importante dans l'étude des grandeurs géométriques, car la signification de beaucoup de propositions géométriques est de caractériser une situation géométrique par une relation arithmétique entre grandeurs. L'habitude de numériser les grandeurs peut ainsi constituer un obstacle au raisonnement géométrique au collège. Nous analysons ces différents points à partir d'une étude épistémologique se rapportant à l'histoire et à partir d'une analyse d'extraits de manuels scolaires.

La numérisation de la géométrie : d'un manuel à l'autre à propos de Thalès

La géométrie de l'enseignement élémentaire est surtout une géométrie numérisée, c'est-à-dire une géométrie avec des données numériques (3cm, 5,2 cm, 2 ; 7, 45°, etc.). Ce constat n'est pas satisfaisant. En effet, Marie-Jeanne Perrin écrivait à ce sujet : « Dans l'enseignement, les grandeurs géométriques sont assez vite identifiées aux nombres qui les mesurent. Elles ont même été définies comme nombre. Cependant, les recherches que j'ai menées avec R. Douady sur l'enseignement des aires, nous ont convaincues que l'identification, dès le début de l'apprentissage, de la grandeur et du nombre amène des confusions chez les élèves. C'est pourquoi, les distinctions entre ces pôles me paraissent essentielles dans l'enseignement élémentaire, non pour que l'on demande à l'élève de les distinguer mais pour que l'enseignant soit bien au clair sur ces distinctions et soit toujours conscient du niveau où il se place pour analyser correctement son enseignement et les difficultés que peuvent rencontrer les élèves. Comment par exemple comprendre la notion d'unité et les changements d'unité si l'on identifie grandeur et nombre ? Le mathématicien peut fixer une fois pour toutes l'unité pas le physicien ni le professeur de collège. Dans les problèmes, l'élève aura besoin de changer d'unité. Le changement d'unité est une des activités constitutives de la grandeur elle-même pour les élèves »[2].

Les propositions géométriques du collège permettent aux élèves d'affirmer des relations entre grandeurs sans qu'elles soient associées à des nombres. Une géométrie non numérisée devrait donc avoir une place importante en collège, la géométrie numérisée pouvant même créer, nous le verrons, un obstacle. Qu'en est-t-il ? Nous avons examiné et comparé, à titre d'exemples, quelques manuels de géométrie, et nous constatons que la situa-

2 Marie-Jeanne Perrin Glorian, «Les grandeurs à l'école élémentaire et au collège», non publié. Voir Perrin-Glorian, M.J., «L'aire et la mesure»,*Petit x* , n°24, IREM de Grenoble, 1990, pp. 5-36 et Perrin-Glorian, M.J., «Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Le cas des aires» in Dorier, J.-L. .& ali *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques,* Corps, 2001, La Pensée sauvage, Grenoble, 2002, p. 299-315.

tion a beaucoup changé dans les cinquante dernières années et qu'elle n'est pas tout à fait identique d'un manuel à l'autre aujourd'hui. Nous avons examiné particulièrement les chapitres consacrés à « la droite des milieux » et à « la propriété de Thalès ».

Dans le *Transmath de 4ème*, au chapitre « Droite des milieux – Égalité de trois rapports », nous trouvons, parmi les « exercices d'application directe », 15 exercices numérisés sur 38 et, parmi les « exercices d'approfondissement », 1 exercice numérisé sur 9 pour « apprendre à démontrer » et 8 exercices numérisés sur 15 « pour s'entraîner »[3]. Dans le *Dimathème 3ème*, au chapitre « Propriétés de Thalès », il y a 32 exercices numérisés sur 32 pour « appliquer le théorème de Thalès » et 16 exercices numérisés sur 18 « pour aller plus loin »[4]. Dans ce dernier ouvrage de classe de troisième, il s'agit donc d'un presque tout numérisé, alors que dans le manuel de quatrième, moins de la moitié des exercices sont numérisés, et presque aucun pour les exercices destinés à l'apprentissage de la démonstration.

Comparons avec deux ouvrages des années 1960. Dans le *Arithmétique, Algèbre et géométrie* de la classe de 4ème de Lebossé et Hémery[5], à la leçon « Trapèze – Parallèles équidistantes », il y a 0 exercice numérisé sur 13 exercices. Si nous examinons tout le manuel, il y a une dizaine d'exercices numérisés sur environ 320 exercices de géométrie. Dans le *Arithmétique, Algèbre et géométrie* de la classe de 3ème des mêmes auteurs[6], à la leçon « Théorème de Thalès », il y a 0 exercices numérisés sur 8 et à la leçon « Applications du théorème de Thalès », il y a 3 exercices numérisés sur 12. Dans ce dernier manuel, les auteurs ont introduit, dans la première leçon d'algèbre et d'arithmétique, les notions de rapport de deux nombres et celle de rapport de deux grandeurs. La notion de grandeur et les opérations sur les grandeurs ont donc une place importante dans cet enseignement des mathématiques, et la distinction entre nombres et grandeurs y est manifeste. En effet, définir des opérations sur des grandeurs ne signifie pas que l'on confonde nombre et grandeurs.

L'arithmétisation et la numérisation des grandeurs géométriques

Le terme de grandeur désigne tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution. Nous pouvons distinguer deux sortes d'opérations sur les grandeurs géométriques, à savoir les opérations géométriques et les opérations arithmétiques. Les opérations géométriques sur les grandeurs correspondent à des constructions de figures. En effet, une figure de la géométrie est à la fois une forme et une grandeur. La forme peut être une droite, un carré, un triangle, un cercle, etc. La grandeur est une longueur, une aire, ou un volume. Les opérations arithmétiques sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division. Ce sont des opérations auxquelles il faut accorder un sens géométrique pour qu'elles s'exercent sur les grandeurs. Il s'agit alors d'une arithmétisation des grandeurs, c'est-à-dire d'appliquer les opérations arithmétiques aux grandeurs, d'assimiler des opérations géométriques à des opérations arithmétiques. La question est alors : lesquelles et comment ? La numérisation des grandeurs n'est pas du même ordre, il s'agit d'associer des nombres aux grandeurs. La question est alors : quels nombres ?

3 Amiot, M., et ali, *Nouveau transmath 4ème*, Nathan, Paris, 1998.
4 Fourton, J.-L. et ali, *Dimathème 3ème*, Édition pour le professeur, Didier, Paris, 2003.
5 Lebossé, C., et Hémery, C., *Arithmétique, algèbre et géométrie 4ème*, Nathan, Paris, 1962.
6 Lebossé, C., et Hémery, C., *Arithmétique, algèbre et géométrie 3ème*, Nathan, Paris, non daté.

La première construction géométrique à laquelle nous associons une opération arithmétique est la juxtaposition des figures, qui correspond l'ajout de nombres entiers. Dans la figure 1 ci-dessous, nous juxtaposons des segments et des aires.

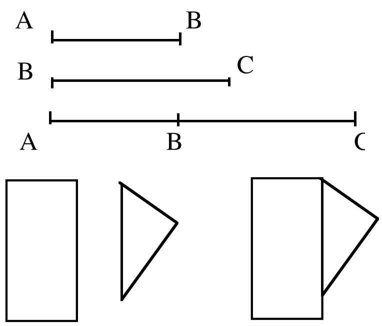


figure 1

Supposons que nous juxtaposons plusieurs fois un segment ou une aire (figure 2).

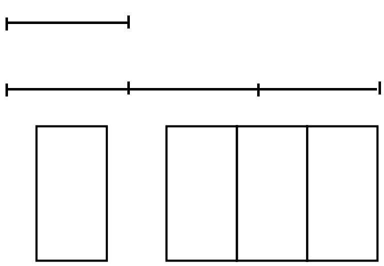


figure 2

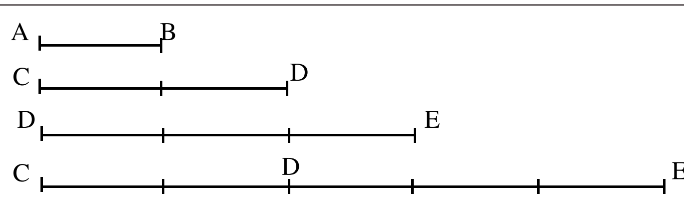
Nous pouvons construire un segment CD, en juxtaposant deux fois le segment AB, et un segment DE en juxtaposant trois fois le segment AB. Alors la juxtaposition de CD à DE est égale au segment obtenu par cinq juxtapositions de AB (figure 3).

Nous avons 2 + 3 = 5, nous convenons d'écrire que CD + DE = CE, et nous écrirons aussi que CD = AB + AB ou encore CD = 2 AB. De la même façon, le retranchement géométrique de deux figures peut être associé à la soustraction de deux nombres entiers.

La comparaison de grandeurs sans numérisation

Beaucoup de propositions géométriques énoncent des relations d'égalité ou de comparaison de deux grandeurs. Ces égalités et ces comparaisons doivent être établies sans aucunement associer des nombres à des grandeurs. Les notions d'égalité et de comparaison de grandeurs ont un sens géométrique. Dans les *Éléments* d'Euclide, les « notions communes » servent à énoncer les axiomes sur l'égalité de deux grandeurs. L'égalité de deux grandeurs s'obtient par la superposabilité de deux figures : deux figures superposables ont des grandeurs égales. La comparaison de deux grandeurs s'obtient aussi par la comparaison de deux figures : une figure est plus grande qu'une figure qu'elle contient. Les propriétés de l'égalité de deux grandeurs sont données par les « notions communes » suivantes : deux grandeurs égales à une même troisième sont égales entre elles, si deux figures ont des grandeurs égales et qu'on leur juxtapose des

figure 3



figures de grandeurs égales, les touts ont des grandeurs égales, etc.

Nous allons voir comment la juxtaposition et le retranchement géométriques de figures permettent d'établir l'égalité de grandeurs en n'utilisant aucun nombre. Nous nous reportons à la proposition 35 du livre I d'Euclide qui énonce que deux parallélogrammes de même base et compris entre les mêmes parallèles sont de grandeurs égales. Il faut démontrer que les parallélogrammes ABCD et EBCF sont égaux en aires (figure 4).

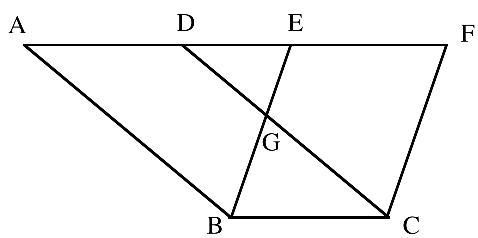


figure 4

Pour cela, Euclide demande de construire le segment DE et il montre que les triangles ABE et DCF sont égaux. En effet, ces deux triangles sont tels que AB est égal à CD, AE est égal DF et l'angle EAB est égal à l'angle FDC. Dans la proposition 4, il a été démontré que deux triangles vérifiant ces égalités sont égaux car superposables. L'égalité de AE et DF résulte d'une notion commune, car on ajoute à AD et EF qui sont égaux une même grandeur DE. L'égalité des angles EAB et FDC résulte de la proposition 29 sur les angles fait par des parallèles et une sécante. Puis Euclide retranche géométriquement de ces deux triangles égaux le triangle DGE, il obtient alors deux quadrilatères ABGD et EGCF d'aires égales, toujours d'après une notion commune sur l'égalité des grandeurs. Enfin, Euclide ajoute géométriquement, c'est-à-dire juxtapose, à ces deux quadrilatères égaux, le triangle GBC, et il obtient, toujours d'après la notion commune utilisée plus haut, que les deux parallélogrammes ABCD et EBCF sont égaux en aire.

Euclide déduit de cette proposition, à la proposition 37 que deux triangles qui ont la même base et qui sont entre les mêmes parallèles sont égaux en aire. Cette proposition sera l'élément primordial de la démonstration du théorème de Pythagore à la proposition 47. Le théorème de Pythagore, rappelons-le, n'est pas un théorème d'arithmétique ou d'algèbre, et il ne nécessite, ni nombre ni identité algébrique. C'est un théorème de géométrie, précisément un théorème sur des grandeurs, qui énonce que le carré construit sur le carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal en aire à la somme géométrique des carré construits sur les côtés de l'angle droit du triangle rectangle. Pour cela, Euclide démontre que le carré construit sur l'hypoténuse est la juxtaposition de deux rectangles qui sont respectivement égaux à l'un des carrés construit sur un côté de l'angle droit du triangle.

Arithmétisation et numérisation des grandeurs : le problème de l'irrationalité

Lorsque nous juxtaposons un carré à lui-même, nous obtenons la figure d'un rectangle. Le problème de la duplication du carré consiste à construire un carré qui ait une aire égale à celle de ce rectangle (figure 5 ci-après). Il s'agit donc de transformer (changer la forme) une figure en une autre de même grandeur.

Dans le dialogue du Ménon, Platon énonce ce problème dans un cadre numérique. En effet, Socrate pose à un esclave le problème de trouver un carré double d'un carré de côté

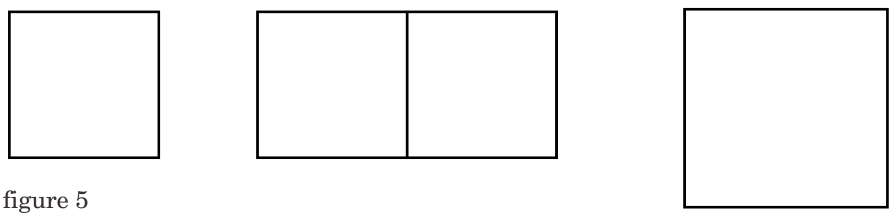


figure 5

2 en ces termes : « Essaies de nous dire quel est le côté de ce nouveau carré » (figure 6). L'esclave « dit » 4 puis 3 pour constater à chaque fois que la réponse est numériquement incorrecte. L'esclave ne peut pas « dire » la réponse, car le côté du carré est irrationnel (il est *alogos,* c'est-à-dire qu'il ne peut pas être dit).

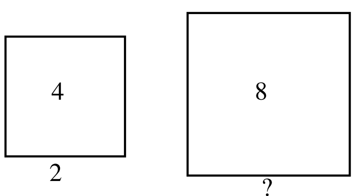


figure 6

Socrate modifie alors la question posée en demandant à l'esclave : « Si tu ne peux pas nous le dire exactement, montres-le nous ». Socrate fait alors une construction géométrique qui consiste à juxtaposer géométriquement quatre fois le carré initial, à construire dans chacun d'eux une diagonale puis à retrancher géométriquement de la figure les quatre triangles rectangles du pourtour (figure 7).

Le carré obtenu est bien double du carré initial en tant que grandeur. Ainsi, ce qui ne peut pas être dit exactement est construit exactement et la numérisation des grandeurs a été remplacée par une construction géométrique. Ce problème de transformation pose le problème de l'irrationalité en ces termes : dans des situations très simples de transformations de figures, il est impossible de numériser les grandeurs dans le cadre des nombres rationnels. En revanche, il est possible de construire des figures et de procéder à une arithmétisation des grandeurs sur les figures de cette construction, ici de pouvoir affirmer que le carré obtenu finalement est bien deux fois le carré initial (par ajout et par

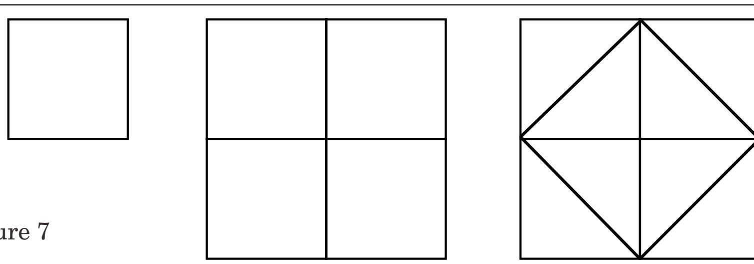


figure 7

retranchement de grandeurs et selon les notions communes sur l'égalité des grandeurs).

Le rapport de deux grandeurs et l'identité de rapports de grandeurs

Le rapport de deux grandeurs suppose, dans les *Éléments* d'Euclide que les deux grandeurs soient homogènes, elles sont toutes deux longueurs, aires ou volumes. Le rapport de deux grandeurs peut être identique à un rapport de deux nombres entiers si les grandeurs sont commensurables. On dit qu'une grandeur AB mesure une grandeur CD si CD s'obtient en juxtaposant un certain nombre (nombre entier) de fois AB. Par exemple, AB est une mesure de CD parce que CD est obtenu en juxtaposant 5 fois AB (figure 8).

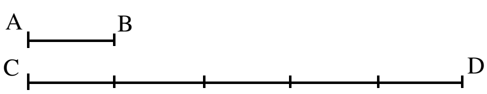


figure 8

Deux grandeurs sont dites commensurables quand elles ont une mesure commune. Par exemple, AB et CD ont une mesure commune M parce que, avec les notations introduites plus haut, AB = 5 M et CD = 2 M (figure 9). Dans ce cas, le rapport de AB à CD est comme le rapport de 5 à 2. Il existe des grandeurs non commensurables, dites incommensurables, comme la diagonale et le côté d'un carré. Le problème de l'irrationalité est que le rapport de ces deux grandeurs est irrationnel (il est *alogos* : il ne peut être dit).

L'existence de grandeurs incommensurables préside, dans la géométrie grecque, à une séparation entre nombre et grandeur, entre arithmétique et géométrie. Dans l'arithmétique, l'unité mesure tous les nombres, tandis que dans la géométrie, il n'y a pas de mesure commune à toutes les longueurs. Le nombre est discret, il est finiment divisible, tandis que la grandeur est continue, elle est infiniment divisible.

Le livre V d'Euclide présente une théorie des grandeurs, qu'on attribue à Eudoxe, avec une définition de l'identité de deux rapports de grandeurs. Considérons quatre grandeurs A, B, C, D, il s'agit de définir l'identité des rapports A : B et C : D. Notons, comme plus haut, mA une grandeur obtenue en juxtaposant m fois A. Des équimultiples de A et de C sont notés mA et mC, d'autres équimultiples de B et D sont notés nB et nD. Il faut que, si on prend ces équimultiples quelconques (avec nos notations, m et n sont quelconques), alors on ait nécessairement l'un des cas suivants :

1. $m\mathrm{A} > n\mathrm{B}$ et $m\mathrm{C} > n\mathrm{D}$;
2. $m\mathrm{A} = n\mathrm{B}$ et $m\mathrm{C} = n\mathrm{D}$;
3. $m\mathrm{A} < n\mathrm{B}$ et $m\mathrm{C} < n\mathrm{D}$.

Les signes modernes > , < , = , désignent des relations entre grandeurs et non entre nombres.

Cette définition est utilisée dans la première proposition du Livre VI d'Euclide pour démontrer que le rapport des aires de deux triangles compris entre les mêmes parallèles est identique au rapport de leurs bases. Considérons deux triangles ABD et ADC, il faut

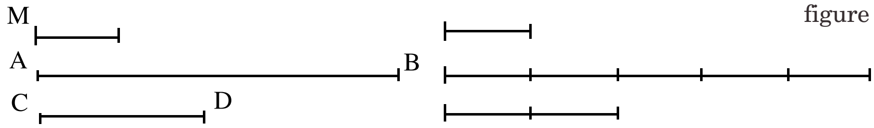
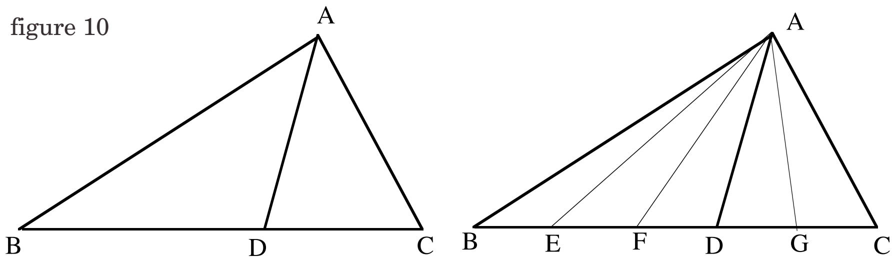


figure 9

figure 10



démontrer que le rapport des aires ABD : ADC est identique au rapport des longueurs BD : BC (figure 10). Dans le cas rationnel, BC et CD sont commensurables et le rapport BC : CD est identique à un rapport de nombres entiers $n : m$. Dans ce cas, les triangles ABD et ADC sont découpés respectivement en n et m triangles de bases égales, donc d'aires égales d'après la proposition indiquée plus haut. Par conséquent, le rapport des aires :

aire ABD : aire ADC

est identique au rapport $n : m$. Dans le cas général, Euclide utilise la définition de l'identité de rapports du Livre V.

Le rectangle de deux segments et l'opération de multiplication

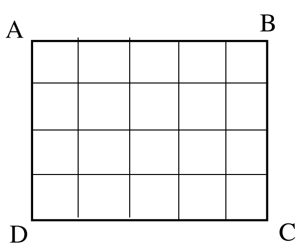


figure 11

Nous allons examiner maintenant comment la construction du rectangle de deux segments, c'est-à-dire du rectangle dont ces deux segments sont les côtés, peut être assimilée à l'opération arithmétique de la multiplication. Examinons d'abord le cas où les deux segments sont commensurables. Si, par exemple, AB et BC ont une mesure commune M, que AB est m fois M et BC est n fois N, alors le rectangle de AB et BC est composé de m fois n carrés construits sur M (figure 11). Dans le cas où les deux segments sont incommensurables, il est impossible de tenir le même raisonnement.

Cependant, que les rapports soient des rapports de nombres ou de grandeurs, que les rapports de grandeurs soient rationnels ou non, nous avons une proposition fondamentale sur l'égalité des rapports qui traduit cette égalité, soit à l'aide de multiplications de nombres, soit à l'aide de rectangles de segments.

Dans le cas de l'égalité des deux rapports de nombres, nous avons que, si quatre nombres a, b, c, d, sont tels que a : b est identique à c : d alors ad = cb. En effet, nous avons que a : b est identique à ad : bd (proposition arithmétique) et que c : d est identique à cb : db (proposition arithmétique). Par conséquent, ad : bd est identique à cb : db et il en résulte que ad = cb.

Nous obtenons une proposition analogue pour les segments. En effet, en conséquence de la proposition 1 du Livre VI énoncée plus haut, nous avons que le rapport des aires de deux rectangles de même hauteur est comme le rapport de leurs bases. Ainsi, le rapport des aires de deux rectangles ABCD : BEFC est identique au rapport de deux segments CD : FC (figure 12)

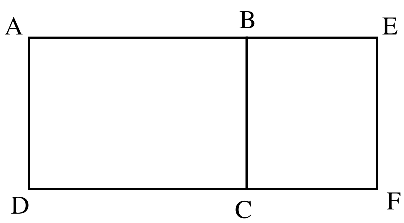


figure 12

De ceci nous pouvons tirer la proposition fondamentale concernant l'égalité de deux rapports de deux segments. Supposons que quatre segments AB, BC, AD, DE sont tels que le rapport de AB : BC est identique au rapport AD : DE. Suivons la démonstration donnée au Livre VI d'Euclide et construisons les rectangles sur les segments considérés (figure 13).

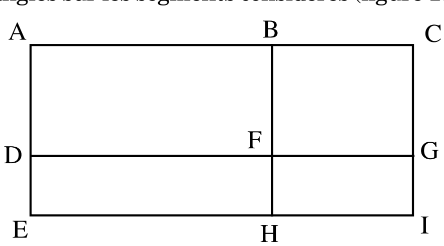


figure 13

Nous avons que le rapport des aires DFHE : FGIH est égal au rapport des segments AB : BC. De même le rapport des aires BCGF : FGIH est identique au rapport AD : DE. Nous en tirons (propositions sur les rapports de grandeurs) que l'aire DFHE est égale à l'aire BCFG, c'est-à-dire encore, que l'aire du rectangle (AB, DE) est égale à l'aire du rectangle (BC, AD).

De tout ceci, il résulte une assimilation possible entre le rectangle de deux segments et la multiplication de deux nombres, lorsque les deux segments sont commensurables. Dans le cas général, la proposition fondamentale sur l'égalité de deux rapports traduit cette égalité, pour les nombres, par une égalité de deux nombres obtenus par multiplication, et pour les grandeurs, par une égalité d'aires de deux rectangles. Mais, dans tous les cas, la multiplication de deux grandeurs n'a immédiatement aucun sens géométrique puisque la multiplication de deux segments est assimilable à un rectangle et non pas à un segment.

Pour donner un sens géométrique à la multiplication de deux segments, il faut introduire un segment unité. C'est ce que fait Descartes dans *La géométrie* de 1637. Dès le début de son ouvrage, Descartes introduit une arithmétisation des grandeurs. Il commence par une déconstruction de la figure géométrique en droites en expliquant que « Tous les problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin de connaître la longueur de quelques lignes pour les connaître ». Puis il écrit : « Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations [...] ainsi n'a-t-on autre chose à faire en Géométrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter, etc. ». Il introduit alors un segment unité : « En ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres ». L'introduction d'un segment unité en géométrie permet que toutes les opérations arithmétiques deviennent des opérations « internes ».

Ainsi, la multiplication de deux segments est un segment. En effet, étant donnés deux segments BD et BC, et AB l'unité, la parallèle à AC menée du point D intercepte le prolongement de BC en un point E et BE est le produit de BD par BC (figure 14). En effet, d'après le théorème de Thalès, le rapport de BD : AB est égal au rapport EB : BC. D'après la proposition fondamentale, nous avons donc que EB est égal au rectangle sur BD et BC. Par conséquent, EB peut être assimilé à la multiplication de deux segments.

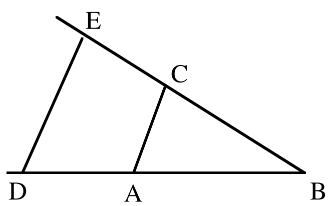


figure 14

Descartes montre aussi comment obtenir la racine carrée d'un segment comme un segment. En effet, étant donnés un segment GH et FG l'unité, construisons un demi-cercle de diamètre FH (figure 15) . Le triangle FIH est rectangle, donc le rapport GH : IG est identique au rapport IG :FG. Par conséquent le carré sur IG est égal au rectangle sur GH et FG, donc égal à GH.

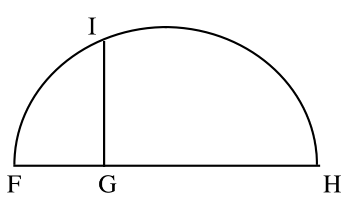
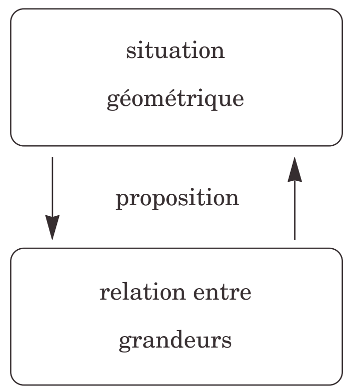


figure 15

L'introduction d'un segment unité joue un rôle essentiel dans la géométrie introduite par Descartes, dans l'arithmétisation des grandeurs, ainsi que dans la géométrie analytique. Ce rôle est souvent méconnu, aussi bien dans les commentaires historiques, que dans l'enseignement des mathématiques.

La géométrie comme étude de grandeurs : le théorème de Thalès

Bon nombre de propositions géométriques consiste à traduire ou à caractériser une situation géométrique à l'aide de relations entre grandeurs.



C'est le cas du théorème dit de Thalès, qui fait l'objet de la proposition 2 du Livre VI d'Euclide.

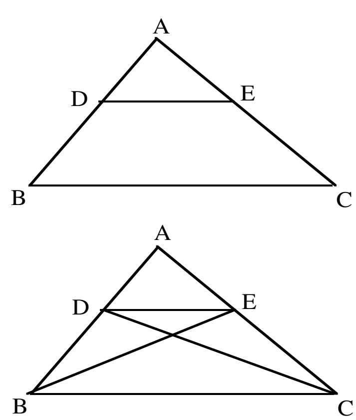
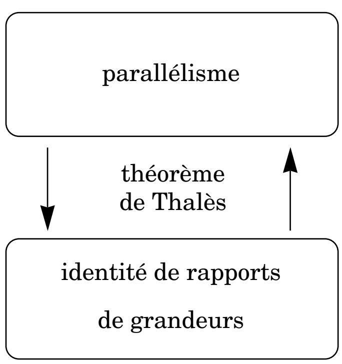


figure 16

Etant donné un triangle ABC, Euclide démontre que ED est parallèle à BC si et seulement si le rapport AD : BD est identique au rapport AE : EC (figure 16). Si DE est parallèle à BC, Euclide construit BE et DC. D'après la proposition 1 du Livre 6, le rapport des aires ADE : DEB est égal au rapport AD : BD et le rapport des aires ADE : DEC est égal au rapport AE ; EC. Or les triangles DEB et DEC ont des aires égales, car ils ont une même base et ils sont compris entre les mêmes parallèles. Par conséquent, le rapport des aires ADE : DEB est identique au rapport des aires ADE : DEC, il en résulte que AD : BD est identique à AE : EC.

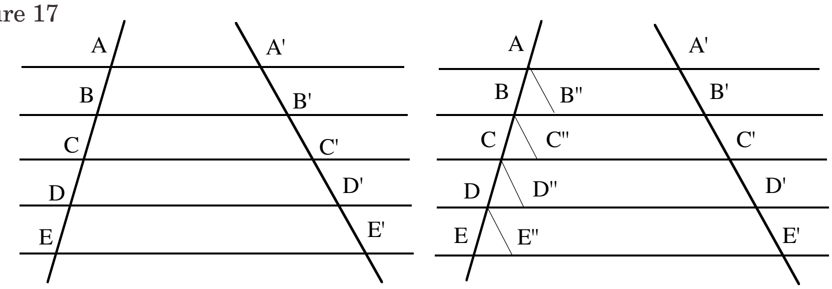


Le théorème de Thalès traduit et caractérise le parallélisme par une égalité de rapports. Une application très intéressante, pour notre propos, est la division d'un segment dans un rapport donné sans numérisation. Elle montre que l'on peut diviser un segment en parties égales sans aucun usage de nombre. Cette application perd tout son sens géométrique si les grandeurs géométriques sont numérisées.

La traduction du parallélisme par des égalités de rapports prend toute sa mesure dans ce qu'on appelle parfois le théorème de Thalès général, car il ne se limite pas à la figure du triangle. Le théorème des droites équidistantes énonce que si des points A, B, C, D, E d'une droite sont tels que AB = BC = CD = DE, et si on mène de ces points des parallèles, alors pour toute sécante à ces parallèles on a A'B' = B'C' = C'D' = D'E' (figure 17). La démonstration consiste à mener AB", BC", CD" etc. respectivement parallèles à A'B', B'C', C'D', etc. et à utiliser l'égalité des triangles ABB", BCC", CDD", etc. entre eux.

Le théorème de Thalès général est énoncé par Arnauld dans ses *Nouveaux éléments de géométrie* de 1667. Il énonce que si des droites parallèles sont coupées par deux sécantes en A, B, C, D, etc. et A', B', C', D', etc. alors les rapports AB : BC et A'B' : B'C' sont identiques, ainsi que les rapports AC : CD et A'C' : C'D' etc. (figure 18). Dans le cas de rap-

figure 17



ports commensurables, cela s'obtient directement à partir du théorème des droites équidistantes. Dans le cas incommensurable, cela résulte du théorème de Thalès dans le triangle.

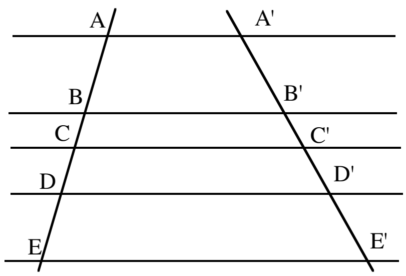


figure 18

Une autre application du théorème de Thalès est énoncée en proposition 3 du Livre VI d'Euclide, il s'agit du théorème de la bissectrice qui énonce que AD est une bissectrice de l'angle BAC d'un triangle ABC si et seulement si le rapport AB : AC est identique au rapport BD : DC (figure 19).

figure 19

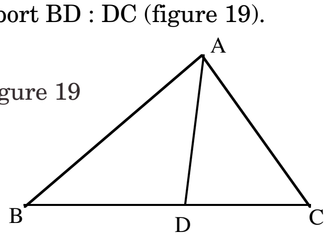
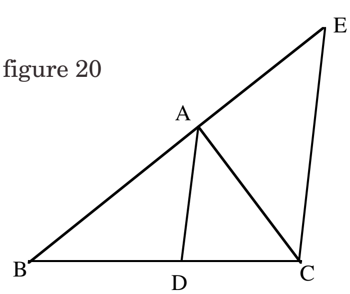
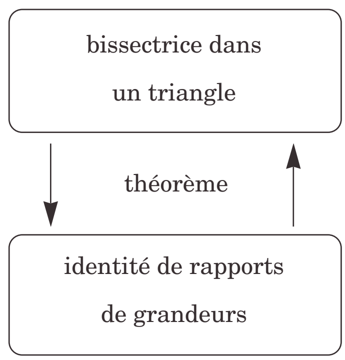


figure 20



Si AD est la bissectrice de BAC, on mène la parallèle EC à AD, alors le triangle EAC est isocèle et AE = AC (figure 20). D'après le théorème de Thalès, AB : AE est identique à BD : DC. Par conséquent, AB : AC est identique à BD : DC.

Ce théorème se présente également comme une traduction ou caractérisation d'une situation géométrique en termes de relations de grandeurs.



La dialectique situation géométrique - grandeur : l'exercice 30 du Lebossé & Hémery (classe de 3ème)

La traduction d'une situation géométrique en termes de relation de grandeurs fonctionne dans les deux sens. Ainsi, par un ou plusieurs allers-retours, nous pouvons obtenir et démontrer des résultats géométriques. C'est ce que propose l'exercice de l'encadré suivant, inspiré de l'exercice 30 de la leçon sur les « applications du théorème de Thalès » du manuel Lebossé et Hémery de la classe de 3ème des années 1960.

On part de la situation géométrique (figure 21) et on la traduit en termes de relations

Soit un triangle isocèle OAB de base AB. On mène les hauteurs AD et BE et la perpendiculaire de B à OB qui coupe OA en F.

1° Comparer les rapports OD : OA et OB : OF et démontrer la relation

$$OA^2 = OE \cdot OF .$$

2° Comparer BE : BF et AE : AF. Que représente BA pour l'angle EBF ?

géométriques. Puisque AD et BF sont parallèles on obtient d'après le théorème de Thalès l'identité des rapports OD : OA et OB : OF, et puisque le triangle OAB est isocèle, on a l'égalité $OA^2 = OE \cdot OF$. A partir de ces relations, on peut faire un calcul de grandeurs, c'est-à-dire utiliser l'arithmétisation des grandeurs, et obtenir l'identité des raisons BE : BF et AE : AF. Ceci se traduit, d'après la proposition plus haut, par une situation géométrique, à savoir que AB est bissectrice du triangle EBF.

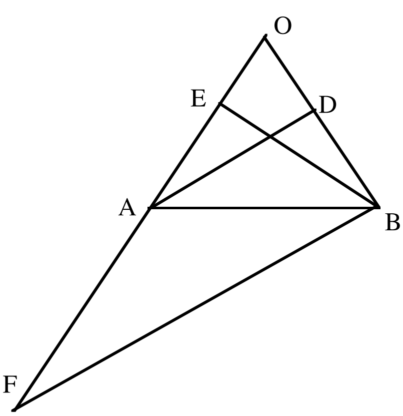
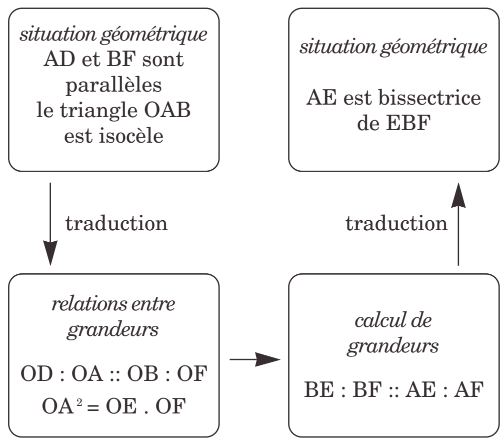


figure 21

La dialectique entre situation géométrique et relations entre grandeurs permet de déduire une situation géométrique d'une autre. Cet exercice est bien une application du théorème de Thalès, il donne sa pleine signification géométrique au théorème de Thalès.



Le théorème de Thalès et le théorème des trois rapports

Dans le manuel de 3ème de Lebossé et Hémery, le théorème de Thalès est énoncé ainsi :

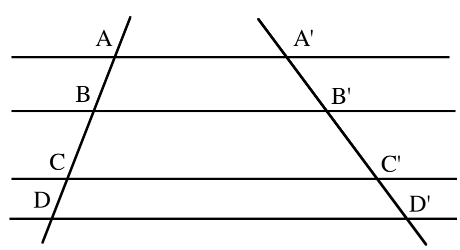


figure 22

si des parallèles sont coupées par deux sécantes (aux points A, B, C, D, et A', B', C', D') alors le rapport A'B' : AB est identique au rapport A'C' : AC', le rapport A'D' : AD est identique au rapport B'C' : BC, etc. (figure 22). Ce théorème est démontré dans le cas rationnel, par application du théorème des droites équidistantes.

Cet énoncé a l'avantage de bien mettre en évidence la signification du théorème de Thalès comme traduction du parallélisme en termes d'identités de rapports. De plus, la formulation permet de comprendre et d'écrire les identités de rapports : le rapport entre un segment de l'une des sécantes à son homologue dans l'autre sécante est toujours identique.

Dans la plupart des manuels d'aujourd'hui, et dans les programmes, on appelle théorème de Thalès un autre théorème, qui n'a pas la même signification (celui de traduction du parallélisme). Il s'agit de ce que certains auteurs appellent plus justement, le théorème des trois rapports. Ce théorème énonce que si ABC est un triangle et si DE est parallèle à BC, alors les trois rapports AB : AD, AE : EC et DE : BC sont identiques, et réciproquement (figure 23).

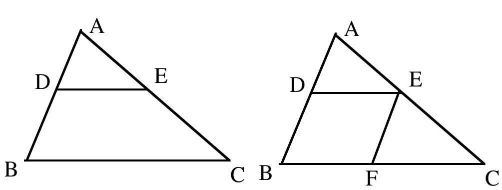
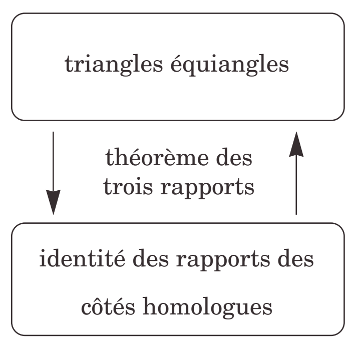


figure 23

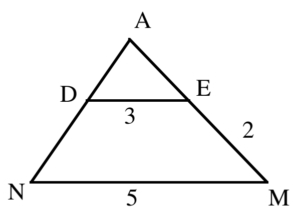
Ce théorème est une conséquence du théorème de Thalès. Euclide démontre dans la proposition IV du Livre VI des *Éléments*, que deux triangles équiangles (c'est-à-dire qui ont leurs angles égaux) ont leurs côtés homologues proportionnels. Nous pouvons adapter sa démonstration générale au cas du théorème des trois rapports. Menons EF parallèle à AB. D'après le théorème de Thalès, puisque DE est parallèle à BC, les rapports AD : AB et AE : AC sont identiques, puisque EF est parallèle à AB, les rapports AE : AC et BF : BC sont identiques. Le quadrilatère DEFB est un parallélogramme, donc DE est égal BF. Par conséquent, les rapports AD : AB, AE : AC et DE : BC sont identiques.

La signification du théorème des trois rapports concerne les triangles semblables. Il dit que pour que des triangles soient semblables il faut et il suffit qu'ils aient les mêmes angles. Nous rappelons que des figures rectilignes sont semblables lorsque elles ont leurs angles égaux et leurs côtés homologues proportionnels. Dans le théorème des trois rapports, les triangles ADE et ABC sont semblables parce qu'ils ont des angles égaux et réciproquement.



Nous savons bien que c'est en pensant à la similitude des triangles que l'on peut écrire correctement les identités de rapports qui en découlent, puisque l'on écrit que le rapport entre un côté et son homologue dans l'autre triangle est toujours identique. Ainsi, si l'on a la signification des théorèmes, qu'il s'agisse du théorème de Thalès dans le triangle ou le théorème sur les triangles semblables, on ne peut pas se tromper dans l'écriture des rapports et de leurs identités. Ces écritures sont soutenues par une pensée.

Il n'en est rien de tel dans les programmes et les manuels actuels. Aussi les élèves se trompent. C'est tellement fatal, que les auteurs prévoient ces erreurs. Nous pouvons lire dans le *Dimathème* de 3ème la mise en garde suivante (figure 24).



$$\frac{AN}{2} = \frac{3}{5}$$

C'EST FAUX !

figure 24

D'après le théorème de Thalès, les rapports de AN : DN et AM : 2 sont identiques. D'après le théorème des trois rapports, les rapports AN : AD et 3 : 5 sont identiques. Les élèves, comme les programmes et les manuels, ont confondus les deux théorèmes. Cette erreur se perpétue dans le temps et se retrouvre de manière importante chez les étudiants de licence de mathématiques. Espérons qu'ils ne la feront plus une fois devenus enseignants.

Aujourd'hui les applications typiques et fort nombreuses du théorème consistent à trouver un segment en connaissant trois autres. De plus, ces segments sont numérisés. Le théorème dit de Thalès devient donc un théorème sur les nombres : trouver un nombre en connaissant trois. Par exemple, c'est le cas des huit exercices pour « appliquer le théorème de Thalès » donnés dans le Dimathème de 3ème. Dans les exercices pour « utiliser le théorème de Thalès dans les problèmes », il s'agit d'utiliser la réciproque, c'est-à-dire d'obtenir des propriétés géométriques de figures qui sont toutes numérisées. La signification géométrique du théorème est du coup grandement absente des manuels.

Conclusion

La signification de bien des propositions géométriques est de traduire des situations géométriques par des relations entre grandeurs géométriques. C'est le cas du théorème de Thalès. C'est aussi le cas du théorème de Pythagore, qui traduit la situation du triangle rectangle (ou l'égalité d'un angle d'un triangle à un droit) par l'égalité de l'aire d'un carré, le carré construit sur l'hypoténuse, et de la somme géométrique (juxtaposition) des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Le théorème de Pythagore est un théorème de géométrie, sur des grandeurs géométriques. J'ai été donc très étonnée le jour où une stagiaire de l'IUFM de Créteil m'a annoncé qu'elle ne pouvait pas traiter du théorème de Pythagore parce qu'elle n'avait pas commencé l'algèbre. Ici encore, c'est la numérisation échevelée des grandeurs qui est au départ de cette confusion. En effet, les côtés du triangle étant dénommés par des lettres, qui seraient remplacées par des données numériques, le théorème de Pythagore devenait un théorème d'algèbre (une identité algébrique ?).

C'est au bénéfice de la signification de ce qui est enseigné que les grandeurs et leur arithmétisation doivent avoir leur place dans l'enseignement. Il n'est pas nécessaire pour cela d'une théorie des grandeurs, mais d'une utilisation des grandeurs. L'arithmétisation des grandeurs doit mettre en évidence l'importance du segment unité dans la géométrie, qui est le grand oublié de la géométrie analytique enseignée dans les collèges et au-delà. Le segment unité n'est pas le 1 de l'arithmétique, mais c'est un objet géométrique qui permet d'écrire, par exemple, les équations de courbes.

Ces réflexions sur l'enseignement se fondent sur une analyse des programmes, des manuels et des pratiques d'enseignement. Mais elles s'appuient aussi sur une lecture historique des textes mathématiques. La lecture des textes anciens est tout à fait enrichissante pour l'enseignement, en particulier, lorsqu'il s'agit de l'enseignement des notions pérennes, des notions élémentaires du collège et de lycée. À condition, bien sûr, de faire une lecture des textes anciens qui ne soit pas téléologique, de ne pas faire une lecture qui trouverait dans les textes de Descartes les nombres réels du XIXème siècle.

Bibliographie.

AMIOT, M., et ali, *Nouveau transmath 4ème*, Nathan, Paris, 1998.
APMEP, *Grandeur. Mesure*, Mots VI, Brochure n°46, 1982.
ARNAULD, A., *Nouveaux éléments de géométrie*, Savreux, Paris, 1667.
BARBIN, E., «Qu'est-ce que faire de la géométrie ?», *Repères IREM*, n°43, 2000, pp. 59-83.
BKOUCHE, R., «La place du numérique dans la construction de la géométrie», *La mémoire des nombres,* IREM de Caen, 1995, pp. 655-688.
DESCARTES, *Discours de la méthode plus La dioptrique, Les météores et La géométrie,* Fayard, Paris, 1987.
EUCLIDE, *Les éléments*, trad. Vitrac, B., PUF, Paris, 1990.
FOURTON, J.-L. et ali, *Dimathème 3ème*, Édition pour le professeur, Didier, Paris, 2003.
FRIEDELMEYER, J.-P., «Grandeurs et nombres : l'histoire édifiante d'un couple fécond», *Repères IREM*, n°44, 2000, pp. 5-31.
IREM de Poitiers, *Périmètres, aires et volumes au collège : comment établir les formules par comparaison de grandeurs ?* à paraître.
LEBOSSÉ, C., et HÉMERY, C., *Arithmétique, algèbre et géométrie 4ème*, Nathan, Paris, 1962.
LEBOSSÉ, C., et HÉMERY, C., *Arithmétique, algèbre et géométrie 3ème*, Nathan, Paris, non daté.
LEBESGUE, H., *L'enseignement Mathématique,* rééd.., Blanchard, Paris, 1975
PERRIN-GLORIAN, M.-J., «L'aire et la mesure», *Petit x,* n°24, IREM de Grenoble, 1990, pp. 5-36.
PERRIN-GLORIAN, M.-J., «Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Le cas des aires» in Dorier, J.-L.,.& ali *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques,* Corps, 2001, La Pensée sauvage, Grenoble, 2002, pp. 299-315.
ROUCHE, N., *Le sens de la mesure,* Didier-Hatier, Bruxelles,1991.
ROUCHE, N., «Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique», *Repères IREM,* n°15, 1994, pp. 25-35.