

---

## LE REVE DE PTOLEMEE REALISE

---

Francis JAMM  
Irem de Strasbourg

*« Il faut, autant qu'on le peut, adapter les hypothèses les plus simples  
aux mouvements célestes ; mais si elles ne suffisent pas,  
il faut en choisir d'autres qui les expliquent mieux »*

Claude PTOLÉMÉE, *Almageste*, XII, 2

Depuis belle lurette l'astronomie n'est plus enseignée en cours de mathématiques ; l'homme a posé le pied sur la Lune et la conquête spatiale ne semble plus faire rêver les jeunes. Et pourtant cet article relate une activité pluridisciplinaire sur fond d'astronomie. Le point de départ est un TPE, en Terminale Sciences de l'Ingénieur, intitulé : Le rêve de Ptolémée réalisé. Il s'agit de modéliser et de faire tourner (c'est le cas de le dire !), grâce à la CAO, le système géocentrique de Ptolémée. Cet article est directement tiré des documents élaborés par les élèves.

Quel est le problème ?

1) Comprendre le mouvement réel des planètes et leur mouvement apparent vu depuis la Terre.

2) Comprendre les principes du système de Ptolémée et replacer ce dernier dans son contexte historique.

3) Passer du qualitatif au quantitatif. C'est-à-dire trouver les valeurs numériques qui font tourner le système de Ptolémée d'une façon qui corresponde aux observations.

4) Réaliser, grâce à la CAO, la « machine » imaginée par Ptolémée.

### QUE VOIT-ON DANS LE CIEL ?

Nous savons que les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe un des foyers. De plus la gravitation accélère les planètes lorsqu'elles se rapprochent du Soleil.

Mais, vues depuis la Terre, les planètes zigzaguent dans le ciel, en formant parfois des

---

\* Cet article est paru dans l'OUVERT :  
<http://irem.u-strasbg.fr/irem/structure/frameouvligne.html>

boucles, avec des vitesses et un éclat variables. C'est le *mouvement rétrograde*. Cette illusion s'explique facilement par le schéma ci-dessous.

**LE CONTEXTE HISTORIQUE**

**Pythagore** (VIème s. av. J.C.) La Terre est au centre de l'univers. Les cinq autres planètes connues (Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne), le Soleil et la Lune tournent autour de la Terre sur des orbites circulaires et à vitesse constante. Leurs distances à la Terre sont proportionnelles à la longueur des cordes d'une lyre ; de façon à tourner en produisant une musique harmonieuse à l'oreille des dieux.

**Philolaos** (Vème s. av. J.C.) Elève de Pythagore, il fait tourner les corps célestes, Terre comprise, autour d'un feu central, invisible depuis la Terre car masqué par une contre-Terre.

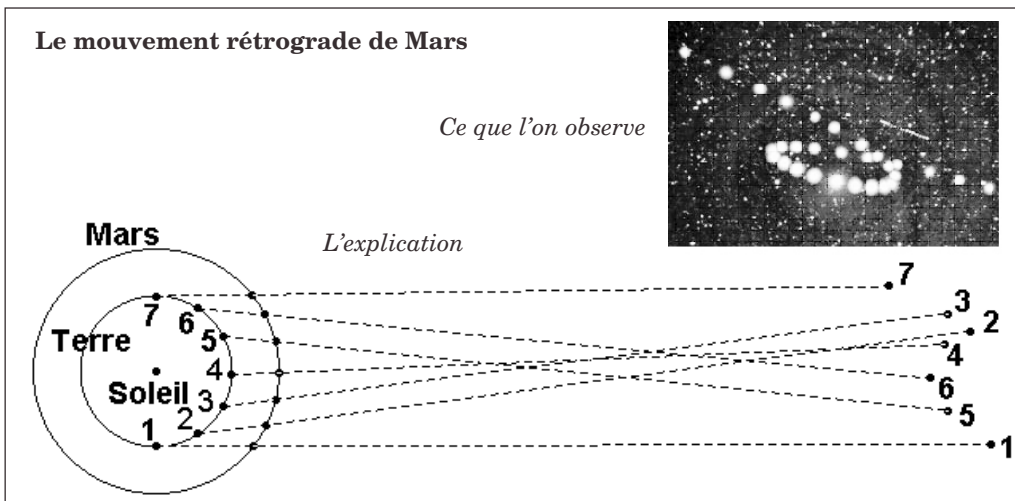
**Héraclide** (Vème s. av. J.C.) La Terre est située au centre du monde et tourne sur son

axe, ce qui explique l'alternance jour-nuit. Les autres corps tournent autour de la Terre ; mais Vénus et Mars tournent autour du Soleil.

**Aristarque** (IIIème s. av. J.C.) Il décrit un système héliocentrique animé de mouvements circulaires uniformes. Aristarque est contemporain d'Apollonios et de son traité sur les coniques. Pourtant son système ne fut pas accepté. D'une part il heurtait des convictions philosophiques (Platon) puis religieuses (christianisme). D'autre part, on aurait dû, à six mois d'intervalle observer un phénomène de parallaxe sur les étoiles (la sphère des fixes), or il n'en était rien (avec les mesures de l'époque) et de plus on attendait une parallaxe importante à cause d'une sous estimation de la distance de la Terre aux étoiles.

*Le mouvement rétrograde comme préoccupation majeure*

**Eudoxe** (IVème s. av. J.C.) Il imagine un système de 27 sphères différentes ( 4 par



planète et 3 pour le Soleil et la Lune), immatérielles, concentriques mais avec des axes de rotation différents. Leurs mouvements entraînent les planètes et expliquent la rétrogradation. **Aristote** perfectionnera ce système avec 55 sphères. Mais ce système ne rend pas compte de la variation de luminosité et de taille des planètes puisque leur distance à la Terre reste constante.

**Apollonios** (IIIème s. av. J.C.) Il introduit le système des épicycles qui explique le mouvement rétrograde et la variation de

vitesse. Ptolémée reprendra cette idée dans l'Almageste.

**Ptolémée** (IIème s. ap. J.C.) Il expose son système du monde dans l'Almageste. Son titre grec est *Compositio Mathematica*. Mais il fut bientôt désigné par *La très grande syntaxe* ; « très grand » se dit meigistoV en grec, ce qui donna en arabe *al-midjisti* puis Almageste. [Les élèves se procurent une version de l'Almageste (<http://gallica.bnf.fr>) . 800 pages en version bilingue, dans une traduction datant de 1813-1816.]

314

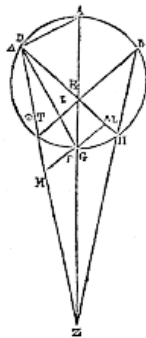
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΒ.

Néanmoins nous exposerons en passant, et même d'une manière plus commode, cette proposition, en nous servant d'une hypothèse mixte et composée des deux précédentes, pour faire voir leur ressemblance et leur accord dans les rapports qu'elles donnent.

Car soit l'épicycle ABGD autour du centre E, et son diamètre AEG prolongé en Z, centre du cercle milieu du zodiaque, c'est-à-dire le point d'où notre œil regarde. Prenant de part et d'autre du point G perpendiculaire les arcs égaux GH et GT, menez du point Z par les points H et T, les droites ZHB et ZTD, et joignez DH et BT qui s'entre-coupent en K qui tombera

sur le diamètre AG. Nous disons que comme la droite AZ est à la droite ZG, ainsi la droite AK est à la droite KG. En effet, joignons AD et DG, et par G menons à AD la parallèle LGM qui sera perpendiculaire sur DG, puisque l'angle ADG est droit. Actuellement, l'angle GDH étant égal à l'angle GDT, et la droite GL égale

φαντασίαν ποιήσεται. Καὶ ἡμῖς δὲ οὐδὲν ἥττον ἔξ ἐπιδρομῆς εὐχερησύτερον παραστήσομεν τὸ προκείμενον, καινῇ καὶ μεμιγμένην δείξει χρυσάμενοι κατ' ἀμφοτέρων τῶν ὑποθέσεων πρὸς ἐνδειξίν τῆς καὶ ἐν τούτοις αὐτῶν τοῖς λόγοις συμφωνίας καὶ ὁμοιότητος.



Εσὼ γὰρ ἐπίκυκλος ὁ ΑΒΓΔ, περὶ κέντρον τὸ Ε, καὶ διάμετρος αὐτοῦ, ἡ ΑΕΓ, ἐκβεβλημένη ἐπὶ τὸ Ζ κέντρον τοῦ διαμέσου τῶν ζωδίων κύκλου, τούτῃσι τὴν ὄψιν ἡμῶν, καὶ ἀποληψθεῖσάν ἐφ' ἐκάτερα τῶν περιγείου περιφερειῶν ἴσαν τῆς τε ΓΗ καὶ τῆς ΓΘ· διηχθεῖσαν ἀπὸ τοῦ Ζ, διὰ τῶν Η καὶ Θ σημείων ἢ τε ΖΗΒ καὶ ἢ ΖΤΔ, καὶ ἐπεζεύχθεσαν ἢ τε ΔΗ, καὶ ἢ ΒΘ τέμνουσαι ἀλλήλας

κατὰ τὸ Κ σημείον, ὃ δῆλον ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ διαμέτρου πεισῖται λέγομεν ὅτι ὡς ἡ ΑΖ εὐθεία πρὸς τὴν ΖΓ, οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΓ. Ἐπεζεύχθεσαν γὰρ ἢ τε ΑΔ καὶ ἢ ΔΓ, καὶ διὰ τοῦ Γ παράλληλος ἔχθω τῇ ΑΔ ἡ ΑΓΜ ὀρθῶν γωνιῶν δῆλον ὅτι πρὸς τὴν ΔΓ, ἐπὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία ὀρθή ἐστιν. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ

*L'épicycle*

La suite de l'histoire est connue, Copernic, et surtout Kepler et Newton...

**LES PRINCIPES DU  
SYSTEME DE PTOLEMÉE**

Le système cosmologique de Ptolémée repose sur trois principes, **les épicycles, l'excentrique et l'équant**. Ils visent à conserver les deux dogmes du géocentrisme et du mouvement circulaire uniforme tout en correspondant aux observations.

*L'épicycle* (cf. ci-contre)

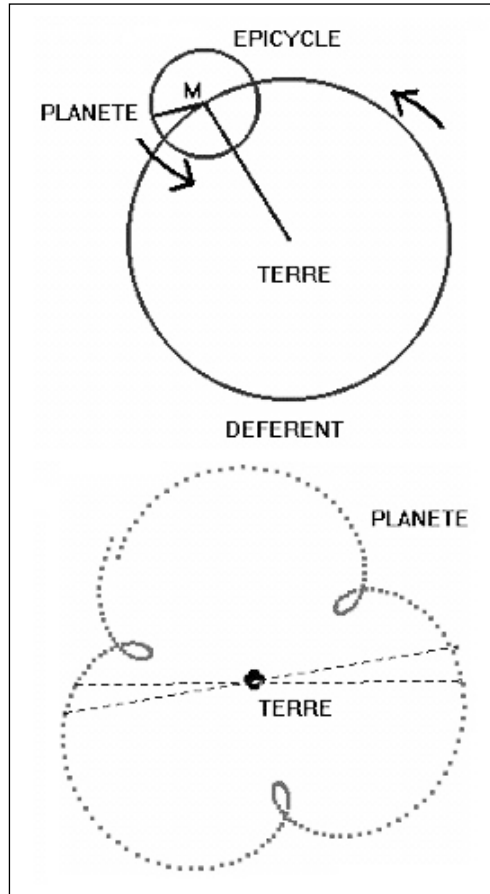
La planète se déplace sur un petit cercle, l'épicycle, dont le centre M tourne lui-même sur la circonférence du grand cercle, dit déferent, centré sur la Terre. Cette construction permet d'expliquer le mouvement rétrograde des planètes. Mais il n'explique pas les variations de vitesse hors des boucles de rétrogradation. [Sur les figures ci-contre : En bas on a le mouvement apparent de la planète, vu depuis la Terre, et en haut le système qui l'engendre.]

*L'excentrique* (cf. figures de la page suivante)

La terre est décalée du centre du déferent. Dans *l'Almageste*, le déferent sera ainsi nommé excentrique. On remarque que ce principe est une entorse au dogme du géocentrisme. L'excentrique permet d'expliquer les variations de vitesse linéaire, vues depuis la Terre, et complète ainsi l'épicycle.

*L'équant* (cf. verso de la page suivante)

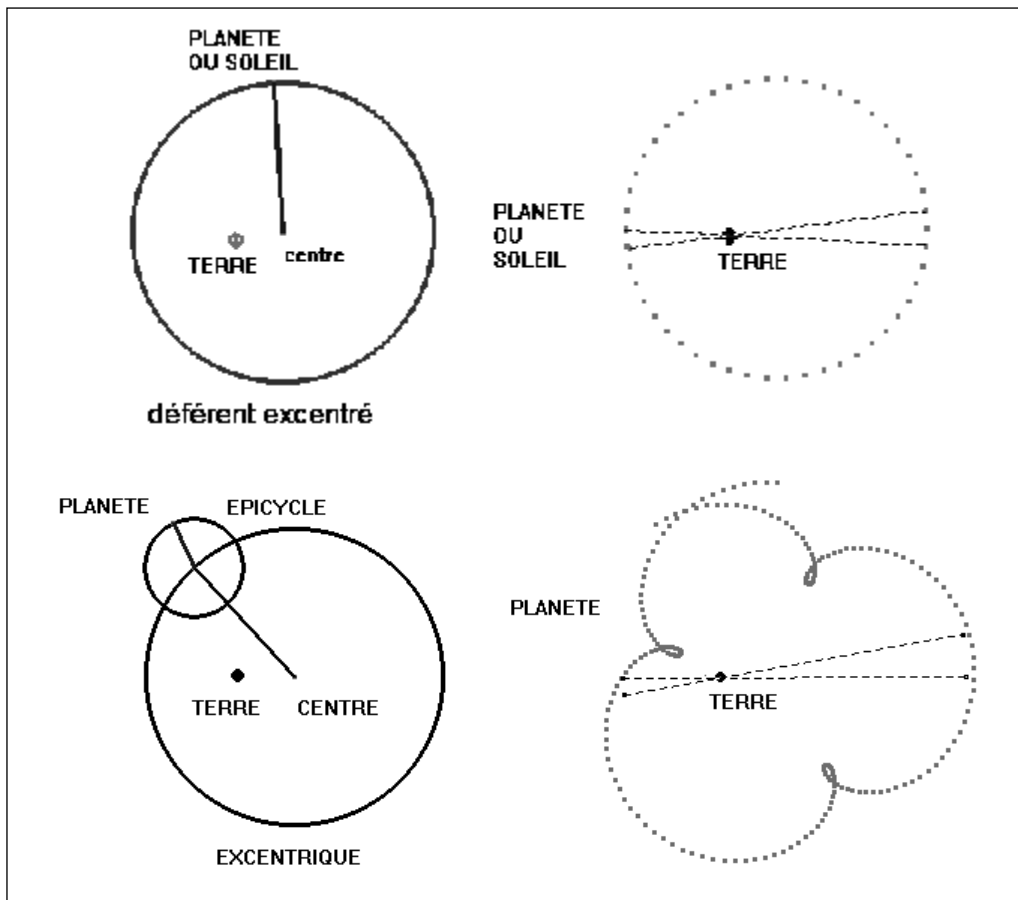
Malgré la complexité de leurs propriétés conjuguées, déferent, excentrique et épicycles ne décrivent pas les mouvements planétaires avec suffisamment de précision.



Ptolémée a donc ajouté à son système la notion d'équant ; qui est le point par rapport auquel le mouvement de l'épicycle est uniforme en vitesse angulaire.

Dans le système complet (cf. verso de la page suivante), le centre de l'excentrique C, l'équant E et la Terre T sont donc distincts. La combinaison des propriétés de ces trois principes rend compte à la fois des variations

*L'excentrique*



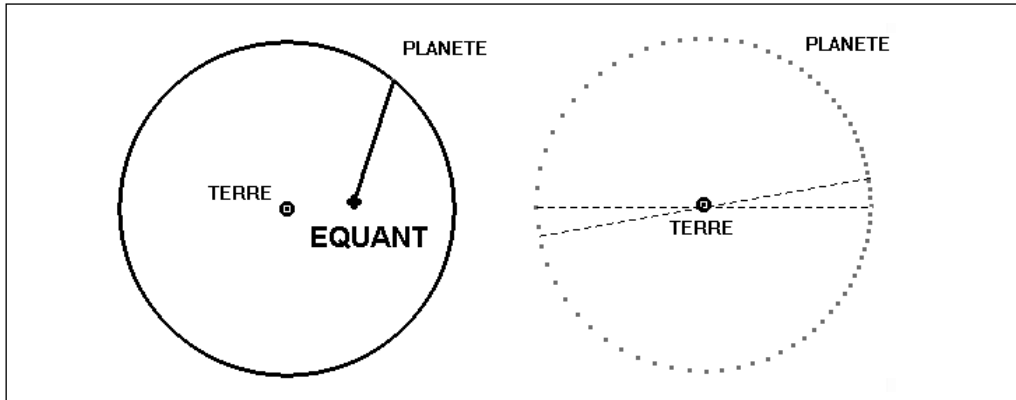
de vitesse et du mouvement rétrograde. Les successeurs de Ptolémée rajouteront d'autres épicycles pour mieux coller aux observations (jusqu'à 20 par planète). Cette méthode préfigure la décomposition en série de Fourier.

**QUE FAUT IL OBTENIR ?**

Sur le site de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides

(<http://imcce.fr>) les élèves utilisent un générateur d'éphémérides. Ils choisissent des coordonnées rectangulaires, écliptiques et géocentriques. Ils ne tiennent pas compte de la cote, considérant ainsi les trajectoires des planètes projetées sur le plan de l'écliptique. Ils prennent les positions des planètes de semaine en semaine pour les planètes proches et de quinzaine en quinzaine pour Jupiter et Saturne. Pour Saturne ils considèrent deux

*L'équant*

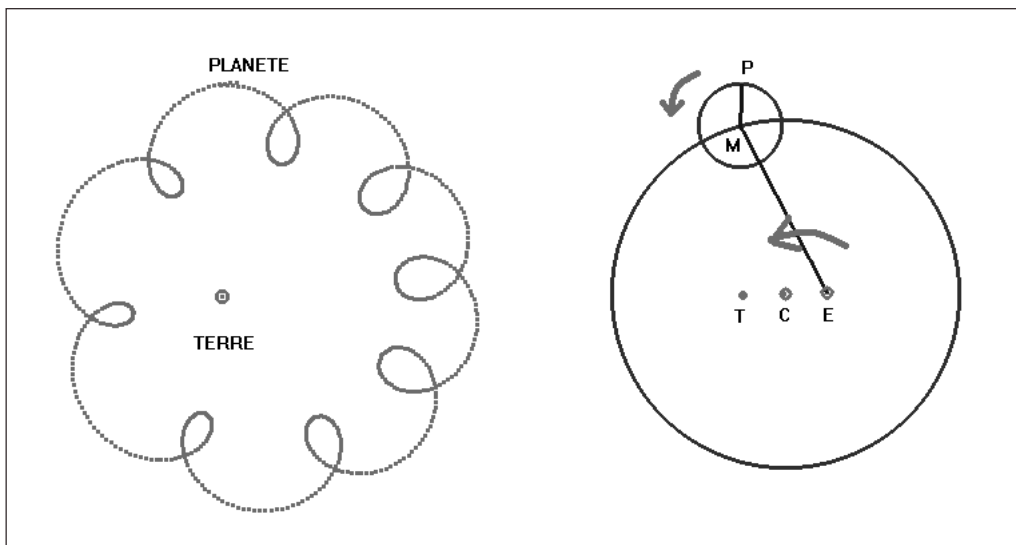


révolutions, soient 59 ans terrestres, ce qui fait beaucoup de quinzaines ! Il y a un gros travail de saisie des données car ils ne trouvent pas le moyen de les recopier automatiquement. Le copier-coller a encore des progrès à faire !

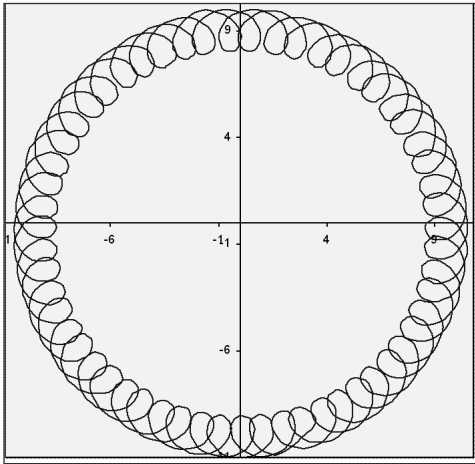
Ensuite ils font tracer les courbes correspondantes sous Excel.

Et ce sont ces trajectoires que doit reproduire la machine de Ptolémée, qui reste à modéliser.

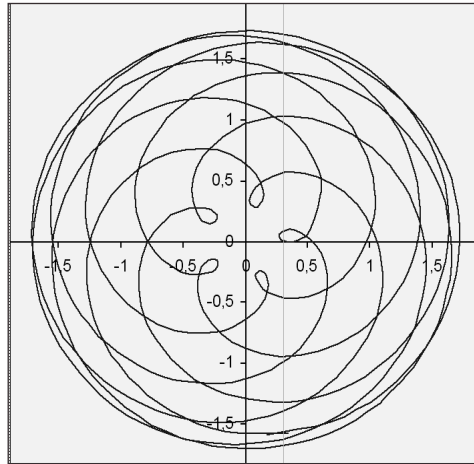
*Système complet*



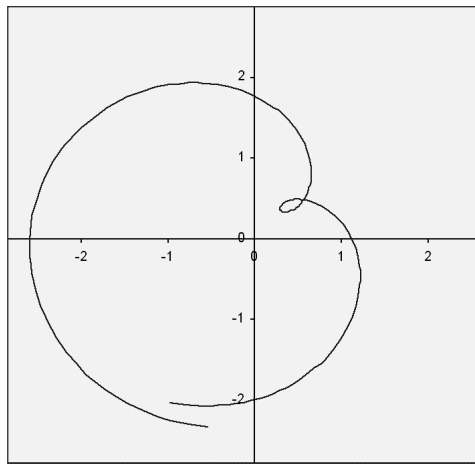
**Trajectoire de Mercure sur 4 ans  
par rapport à la Terre**



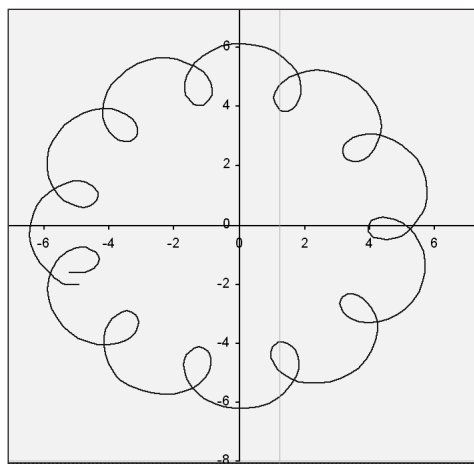
**Trajectoire de Vénus sur 7 ans  
terrestres par rapport à la Terre**



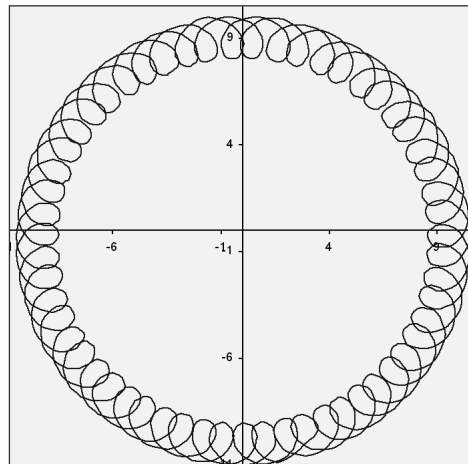
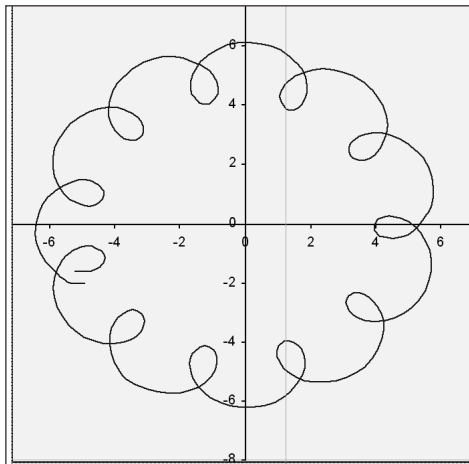
**Trajectoire de Mars sur 2 ans  
par rapport à la Terre**



**Trajectoire de Jupiter sur 12 ans**



**Trajectoire de Saturne sur un an saturnien (10752 jours) puis sur deux ans (21504 jours), soient respectivement 29 ans terrestres et demi, et 59 ans terrestres**



Ensuite pour se faire la main il simulent le mouvement apparent des planètes à l'aide de Cabri Géomètre. Cela leur permet de se familiariser avec les distances et les vitesses de révolution.

[cf. figures de la page ci-contre : A droite on a le système héliocentrique à l'échelle pour les distances et les vitesses. A gauche on reporte le vecteur Terre-Planète avec la Terre fixe.]

### DISTANCES ET VITESSES CHEZ PTOLÉMÉE

Tout cela est très joli mais découle de l'héliocentrisme. Il serait temps d'aborder le cœur du TPE. A savoir, dans le système géocentrique de Ptolémée, quels sont les rapports entre les rayons du déferent et de l'épi-

cycle, idem pour l'excentrique et l'équant ; quelles sont les vitesses de rotation de la planète sur l'épicycle, et du centre de l'épicycle sur le déferent ? C'est très facile il suffit de lire l'Almageste !

#### Les distances

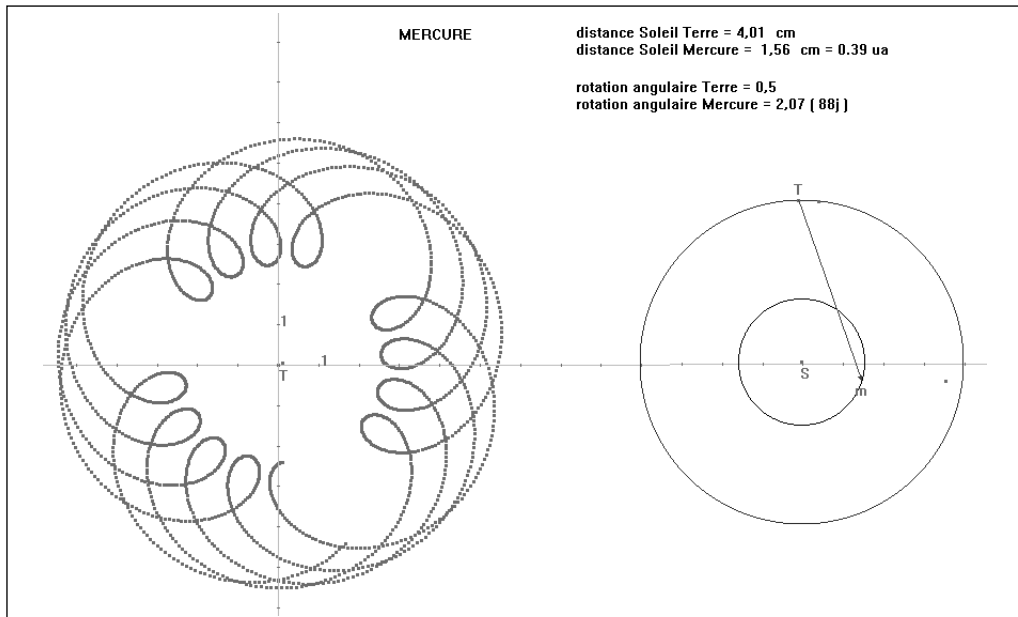
Les élèves découvrent que lorsque Ptolémée écrit :

quent, l'hypoténuse EB en a 56° 4'. Si donc la droite EB est de 120, EL en aura 17° 28', et l'arc soutendu par celle-ci aura

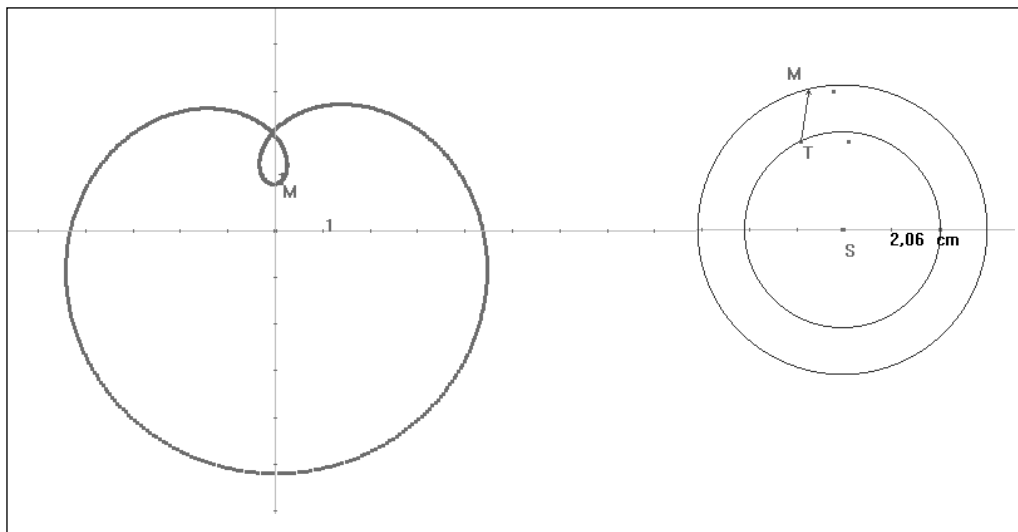
Il faut comprendre que  $EL = (17 + \frac{28}{60}) \times \frac{EB}{120}$

Sachant que EB est elle-même la 56°4' partie d'une autre longueur.

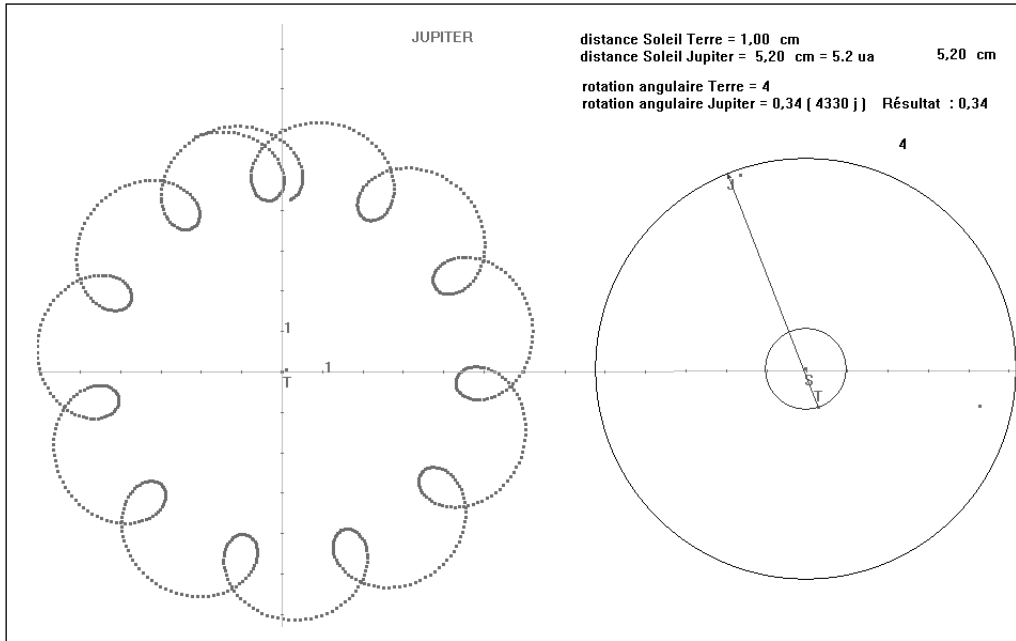




Trajectoire de Mars pour un an martien (685 jours)



Trajectoire de Jupiter pour un an jupitérien (4330 jours)



Chaque chapitre de l'Almageste, consacré à une planète, se termine par la détermination de la grandeur de l'épicycle.

de  $6^{\circ} \frac{1}{2}$  environ. Ainsi donc, il nous est démontré que l'apogée de Saturne, au commencement du règne d'Antonin, étoit sur le  $23^{\circ}$  degré du scorpion, et que le rayon de l'excentrique qui porte l'épicycle, étant de  $60^{\circ}$ , et la droite entre les centres du zodiaque et de l'excentrique qui rend le mouvement uniforme, de  $6^{\circ} 50'$ , le rayon de l'épicycle est de  $6^{\circ} 50'$ . C'est ce qu'il falloit trouver.

Ils obtiennent le tableau suivant pour un déferent mesurant 60 parties :

	Epicycle		Excentrique et équant	
	Parties	Rapport	Parties	Rapport
Mercuré	22 <sup>p</sup> 30'	0.375	3 <sup>p</sup>	0.05
Vénus	43 <sup>p</sup> 10'	0.7194	1 <sup>p</sup> 15'	0.0208
Mars	39 <sup>p</sup> 30'	0.6583	2 <sup>p</sup> 39'	0.0442
Jupiter	11 <sup>p</sup> 30'	0.19167	5 <sup>p</sup> 50'	0.0972
Saturne	6 <sup>p</sup> 30'	0.1083	6 <sup>p</sup> 50'	0.1139

*Les vitesses*

Ptolémée ignorait les notions de vitesse angulaire et radiale. Il se servait du zodiaque pour déterminer le mouvement des planètes. Voici ce que cela donne :

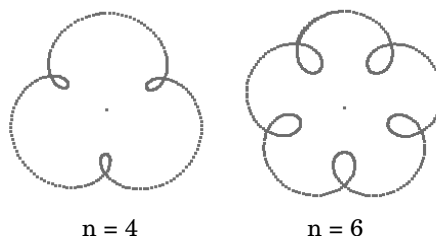
au lieu moyen du soleil. Nous avons observé la première, par le moyen de l'astrolabe, au soir du 7 au 8 du mois égyptien Pachom de la onzième année d'Adrien, en  $1^d 13'$  des serres; et la seconde, le 18 du mois égyptien Epiphi de la 17<sup>e</sup> année d'Adrien. Nous avons calculé, d'après les observations que nous fîmes lors de cette opposition, que l'instant de l'opposition juste, fut à quatre heures après midi, et le lieu en  $9^d 40'$  du sagittaire. Enfin nous avons observé la troisième le 24 du mois égyptien Mesor, la 20<sup>e</sup> année d'Adrien, et nous avons trouvé de la même manière le temps de l'opposition vraie à midi du 24, et le lieu en  $14^d 14'$  du capricorne.

Or, de ces deux intervalles, celui de la première opposition à la seconde comprend 6 années égyptiennes, 70 jours et 22 heures, et pour le mouvement apparent de l'astre,  $68^d 27'$ . L'intervalle de la seconde à la troisième, renferme trois années égyptiennes, 35 jours et 20 heures et  $34^d 34'$  de mouvement. Mais on trouve pour mouvement moyen en longitude, pendant le premier intervalle pris en nombres ronds,  $75^d 43'$ ; et pendant le second  $37^d 52'$ . Avec ces distances, nous

Un tel texte étant incompréhensible aux élèves ils se sont débrouillés autrement. Ils ont constaté qu'en faisant tourner la planète  $n$  fois plus rapidement que le centre de l'épicycle ils obtenaient  $n - 1$  boucles.

En prenant un rapport non entier on obtient des boucles qui ne se referment pas.

Par exemple avec  $n = 10,5$  on obtient deux séries de 9 boucles alternées.



Expérimentalement, et en se référant aux trajectoires obtenues avec Excel, ils obtiennent le rapport des vitesses angulaires entre l'épicycle et la planète. Ils supposent que tous les épicycles tournent à un tour par minute :

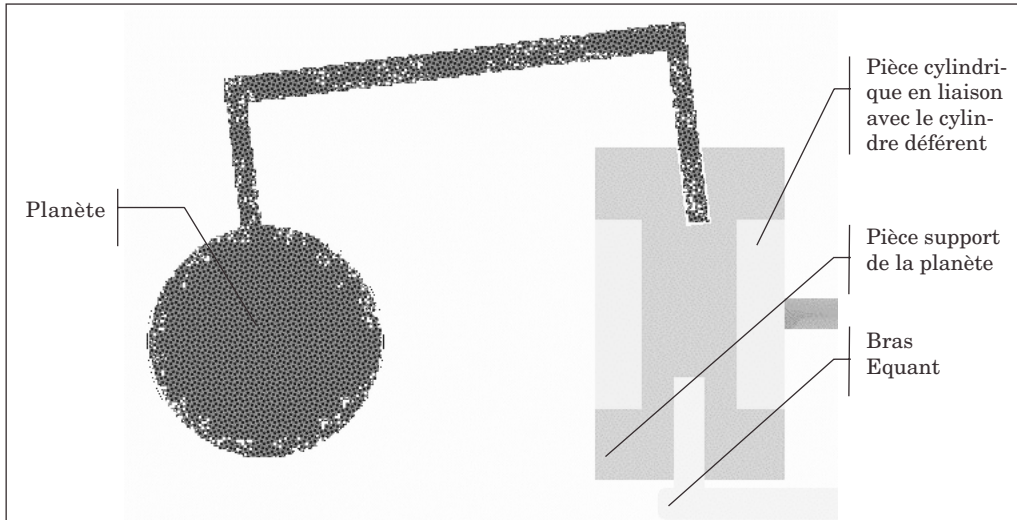
Planète	Vitesse (tours.min <sup>-1</sup> )
Mercure	4,1
Vénus	$14/9 \approx 1.55555556$
Mars	2
Jupiter	12
Saturne	29,5

### LA MODELISATION

Elle a été réalisée sous Solidworks et Méca3D. Elle était facile car ne demandant pas une multitude de mesures précises ni de formes complexes. Elle était difficile en l'absence de plans ou documents auxquels les élèves sont habitués.

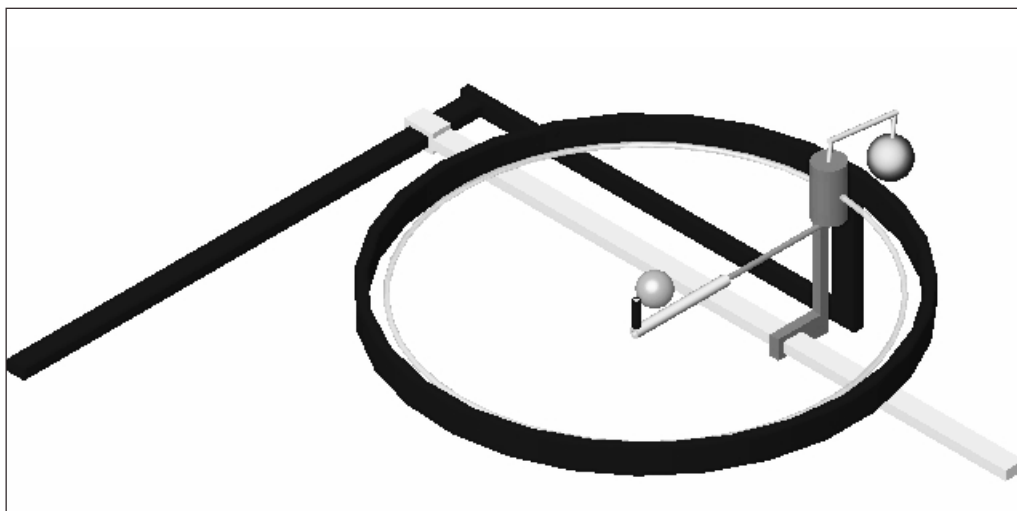
Le centre de l'épicycle se déplace sur un cercle dont le centre n'est pas le centre du mouvement, qui est l'équant. Ce problème a été résolu avec un vérin reliant l'équant au centre de l'épicycle,

Planète et assemblage du centre de l'épicycle

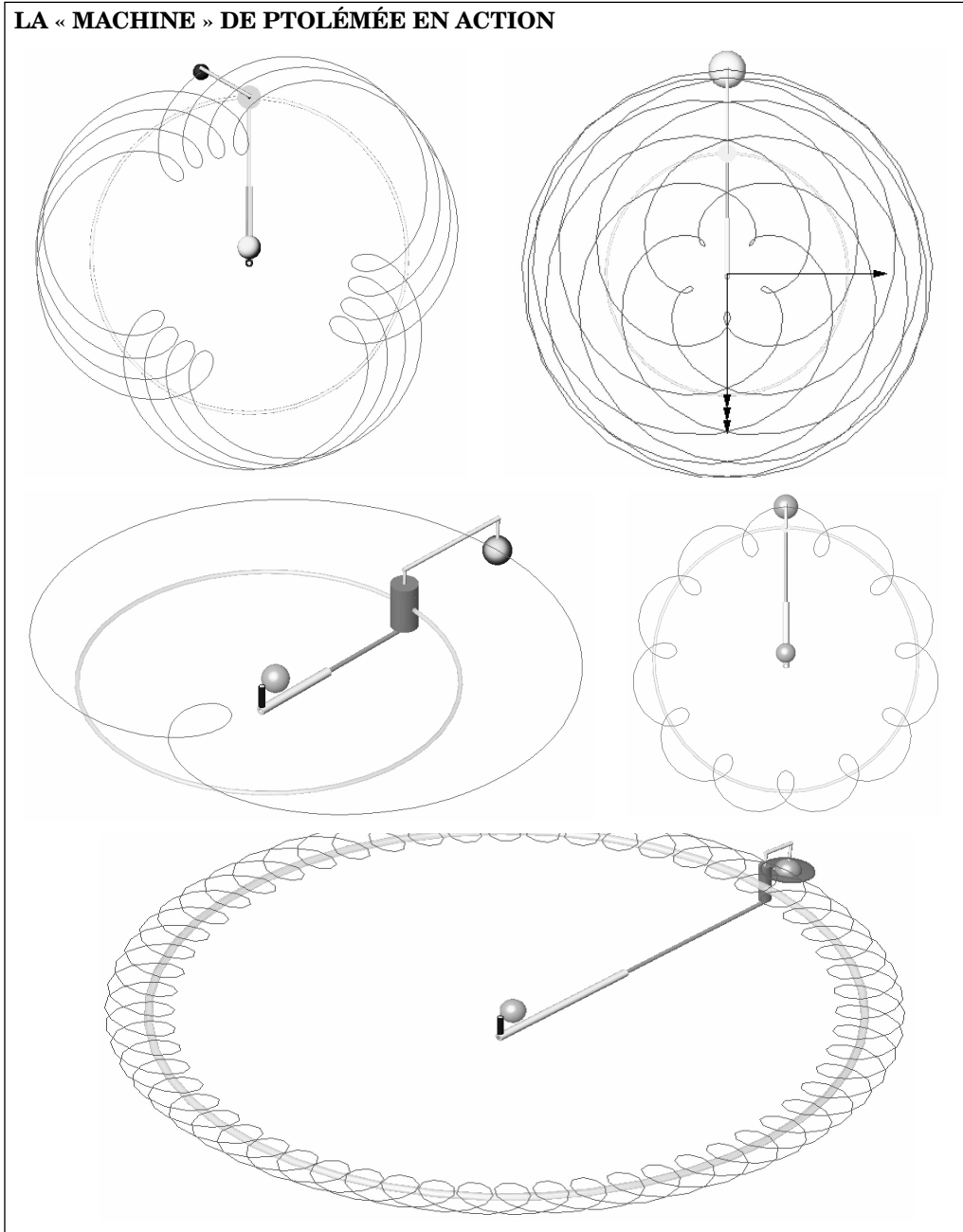


ce dernier se déplaçant sur un cylindre correspondant au déférent. La lecture de l'Almageste montre que Ptolémée avait incliné l'épicycle de façon à respecter les variations angulaires des rétrogradations. Le problème a été résolu en créant une pièce intermédiaire

re en liaison pivot. Puis un système de liaisons glissières a été introduit pour contraindre cette nouvelle pièce par rapport à laquelle tournait l'axe de la planète à ne pas tourner sur elle-même. Et voici le système complet, pour une planète :



**LA « MACHINE » DE PTOLÉMÉE EN ACTION**



On notera la grande variation de distance entre Vénus et la Terre, de 0,3 à 1,7 unités astronomiques. Il en va de même pour Mars. Ceci montre que la variation de la luminosité des planètes est loin d'être anecdotique.

Le lecteur remarquera les anneaux de Saturne, qui n'ont pas été sans poser des problèmes techniques. Dans le cas général le mouvement apparent d'une planète est défini par :

$$\begin{cases} x(t) = 2a + R \cos(\Omega t) + r \cos(\omega t) \\ y(t) = R \sin(\Omega t) + r \sin(\omega t) \end{cases}$$

$a$  = distance de l'équant, et de la Terre, au centre du déférent

$R$  = rayon du déférent,  $r$  = rayon de l'épicycle

$\Omega$  = vitesse angulaire du centre de l'épicycle par rapport à l'équant

$\omega$  = vitesse angulaire de la planète par rapport au centre de l'épicycle

Le Soleil décrit une ellipse, sans rétrogradation. Elle est obtenue en faisant tourner le Soleil et le centre de l'épicycle à la même vitesse mais dans le sens opposé. Pour faire face aux questions vicieuses du jury les élèves avaient appris à démontrer que si  $\Omega = -\omega$  alors on obtenait une ellipse.

Faut il rappeler que l'étude des courbes paramétrées n'est plus au programme des lycées ?

### ET APRES ?

Le TPE fini les élèves ont décidé de présenter leur travail au concours Exposcience. Cette préparation s'est faite dans le cadre

d'un club scientifique où se sont rajoutés d'autres élèves.

Dans un premier temps ils ont réalisé une vidéo. Le final montrait le mouvement, selon le système de Ptolémée, de la totalité du système solaire, Soleil compris. Le rêve de Ptolémée était enfin réalisé !

Dans un deuxième temps ils ont réalisé une maquette illustrant le principe des épicycles. Au début c'était du bricolage de bric et de broc ; un cercle de tonneau pour le déférent, un moteur Légo pour faire tourner la planète, une tringle de rideau coulissante pour le bras reliant l'équant au centre de l'épicycle etc. Les choses se sont corsées pour l'alimentation du moteur qui, à partir de l'équant, faisait tourner l'épicycle. En effet les frottements étaient importants. Après avoir essayé plusieurs solutions, dont un moteur de barbecue, ils ont du se résoudre à prendre une alimentation en 220 V. Se posait alors le problème de la sécurité de l'installation en vue d'Exposcience. Après avoir tutoyé l'astronomie, l'histoire, les mathématiques, la mécanique, l'informatique ils allaient se plonger dans le génie électrique pour mettre leur installation aux normes de sécurité.



Leur travail fut primé à Exposcience puis présenté à d'autres manifestations( Fête de la Science, Rencontres de Clubs d'Astronomie du Nord Est).

Il va sans dire que le TPE fût noté 20. L'un des protagonistes a commencé des études d'histoire, peut-être de la future graine d'historien des sciences ?

*Les informations pour le colloque Espace Mathématique Francophone 2009 sont maintenant disponibles sur le site du colloque :*

[http://fastef.ucad.sn/emf2009/presentation\\_emf2009.htm](http://fastef.ucad.sn/emf2009/presentation_emf2009.htm)

*Ce congrès se tiendra à Dakar du 6 au 10 avril 2009.*

GT 1 : Formation mathématique des enseignants : contenus et pratiques

GT2 : Analyse de dispositifs de formation initiale et continue des enseignants

GT3 : Rôle et place de l'arithmétique et de la géométrie dans la formation des élèves et des professeurs

GT4 : Dimensions linguistique, historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques

GT5 : Interactions entre mathématiques et autres disciplines dans les formations générale et professionnelle

GT6 : Technologie et enjeux de développement : formation à distance, ressources numériques, plate-forme, multimedia...

GT7 : Enseignement des mathématiques dans l'enseignement supérieur et post-secondaire

GT8 : Adaptation de l'enseignement des mathématiques en fonction des spécificités des publics et des contextes

GT9 : Pratiques d'enseignants dans les classes et apprentissage mathématique des élèves

GT10 : Les différentes pensées mathématiques et leur développement

*Projets spéciaux*

Spé1 : La désaffection des mathématiques : entre problématiques curriculaires et didactiques

Spé2 : Évaluations internationales: impacts politiques, curriculaires et place des pays francophones

Spé3 : La parole aux jeunes enseignants francophones : formation et entrée dans le métier