CHANGEMENTS DE CADRES EN GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Monique PARIES, Aline ROBERT,
Equipe Didirem Paris-Diderot,
IUFM Versailles-Cergy

La géométrie dans l'espace enseignée au lycée permet de proposer aux élèves un certain nombre d'exercices pouvant donner lieu à des changements de cadres en relation avec leurs acquisitions antérieures et ultérieures. Le mot « cadres » est emprunté aux travaux de R. Douady (1987) et, avec elle, nous admettons que ce type d'exercices, qui amène les élèves à travailler des questions dans deux cadres différents au moins, peut être générateur d'apprentissages.

Ce sont des exemples de tels exercices, à rechercher en classe, que nous donnons ici, un peu en vrac, du plan à l'espace d'abord, puis de l'analytique ou du ponctuel au vectoriel et à l'affine. Nous ne présentons ni une réflexion organisée sur le champ ni une réflexion spécifique sur l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique.

Cela dit, la nature du travail organisé avec les élèves sur ces exercices peut modifier beaucoup ce qui en est retiré, même si nous ne ferons que l'évoquer. Signalons que nous avons expérimenté la plupart des exemples cidessous à divers niveaux, notamment plusieurs années de suite en préparation au Capes, en faisant travailler les étudiants en petits groupes, en leur laissant le temps de réaliser que certaines assertions sont fausses, et en les encourageant à discuter longtemps, entre eux, pour trouver des preuves. Cela s'accompagnait toujours de commentaires en partie non improvisés, au moment des corrections, inspirés à la fois de ce qui est attendu *a priori* du travail des élèves (cf. visée) et de ce qui s'est passé en classe. Cependant aucune évaluation formelle n'a été faite de ces séances, qui se déroulaient apparemment de manière conforme aux attentes.

On peut aussi s'interroger sur l'aide apportée par les logiciels, notamment dynamiques, et sur la démarche expérimentale en géométrie dans l'espace – nous indiquerons quelques réflexions très parcellaires à ce sujet en conclusion, faute d'expériences effectives.

1) Les cadres en présence : géométrie affine ou « à la Euclide » [1]

Nous appelons géométrie « à la Euclide » ou ponctuelle la géométrie utilisée au collège, avec les mêmes prémisses que celles d'Euclide [2] (à peu près), les mêmes « manques » (la reconnaissance de la convexité par exemple) [3], des raisonnements analogues mais avec les nombres réels en plus, et les transformations éventuellement.

Une autre manière de modéliser plan et espace consiste à utiliser les espaces affines, éventuellement munis d'un produit scalaire : c'est introduit de manière un peu subreptice au lycée, dans la mesure où la notion d'espace vectoriel n'est pas dégagée. Même si on dispose de la relation de Chasles et de l'unicité du point M tel que, si le point O et le vecteur $\vec{u}$ sont donnés, on a $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Cela permet de travailler dans les cadres vectoriel ou affine.

De plus, jusqu'ici dès le collège et pour l'instant encore au lycée, on a accès à la géométrie analytique, qui certes dérive de la précédente mais est présentée de manière autonome, d'où le travail dans le cadre analytique.

2) Du plan à l'espace [4] : quels « accidents » ? Quelles continuités ? Exemples

a) *Droites et plans de l'espace, travail dans les cadres ponctuel ou affine*

Certaines notions de géométrie dans l'espace, liées aux premières propriétés des droites et des plans, sont des extensions « sans accident » de notions de géométrie plane, alors que pour d'autres [5] il y a des différences importantes entre plan et espace. Cela peut engendrer des exercices variés, soit pour faire prendre conscience aux élèves de certaines ruptures, quitte à les étonner, soit pour exploiter des continuités pour introduire de nouveaux objets ou outils, grâce à un problème où ils peuvent essayer d'utiliser ces continuités.

La petite série des « vrai ou faux » rédigés ci-dessous, qui n'est pas originale, donne des exemples d'occasion, pour des élèves de seconde ou des étudiants de Capes, après avoir eu les définitions de géométrie dans l'espace, d'y réfléchir, d'en discuter et de mettre au point des preuves (contre-exemples ou démonstrations).

Dans l'espace :

Si deux droites n'ont aucun point commun elles sont parallèles (accident !)

Si deux droites sont parallèles, elles sont coplanaires (renforcement du précédent à préciser)

Si une droite D est parallèle à une droite D',

1 Ces idées sont développées dans Robert (2003), sans éclairage particulier sur la géométrie dans l'espace.
2 Évidemment implicites
3 On sait depuis Hilbert qu'une telle démarche est légitime, à condition d'admettre quelques axiomes supplémentaires que, de toute façon, on ne présente pas aux élèves (sans dommage apparemment).

4 Nous donnons un sens élargi à la notion de cadre – cadre plan et cadre espace.
5 C'est une interrogation systématique sur la nature et la fonction des notions à enseigner, leur place dans les programmes, les cadres où elles peuvent intervenir, les problèmes où on peut les utiliser qui nous amène à ces questions.

et si D' est parallèle à une troisième droite D", alors D est parallèle à D" et les trois droites sont coplanaires. (à la fois prolongement et accident)

Si deux droites sont orthogonales à une même troisième elles sont parallèles (accident !).

Par un point on peut mener une droite parallèle à une droite donnée et une seule (axiome encore vrai…).

Deux plans perpendiculaires à un même troisième sont parallèles (accident !).

On peut aussi remarquer que les représentations de l'espace par des figures planes (ou sur des écrans d'ordinateur) sont déjà source de rupture, puisqu'on ne peut plus se fier à la position d'un point sur une droite par exemple pour en inférer quelque chose. L'usage de l'ordinateur peut contribuer à reconstruire une certaine vision de l'espace grâce au mouvement.

b) *Travail dans le cadre vectoriel*

En revanche, les notions comme celles de barycentre ou de produit scalaire s'étendent sans difficultés à l'espace : dès qu'on se place en géométrie affine euclidienne, un certain nombre de notions ont une définition générale valable dans toutes les dimensions finies et ce sont celles qui s'étendent sans difficultés. La même remarque s'applique aux transformations [6].

Cela peut donner lieu à des exercices où les élèves généralisent eux-mêmes les notions, par exemple, sur les barycentres dans l'espace, le fait d'étudier l'isobarycentre de 4 points d'abord coplanaires puis non coplanaires, en changeant juste l'interprétation des résultats, peut illustrer cette continuité.

3) De l'analytique au vectoriel, une préparation à l'algèbre linéaire

Nous suggérons qu'une des manières de préparer l'introduction ultérieure de l'algèbre linéaire est de faire utiliser l'intermédiaire de la géométrie analytique, plus familière des élèves, notamment dans l'espace, où les problèmes ne sont pas immédiats.

Les objets visés sont les vecteurs directeurs ou normaux des droites et plans, par l'intermédiaires de leurs liens (outils) avec les équations correspondantes ; ce sont des exercices d'identification ou d'intersection qui permettent de les faire fonctionner comme outils et en même temps de se familiariser avec le fait qu'une droite a deux équations cartésiennes dans l'espace. Elles peuvent permettre aussi de travailler les liens équations paramétriques/ équations cartésiennes.

Voici quelques exemples voir encadré de la page suivante), inspirés notamment de l'ouvrage de Kletenik (1981) et de la brochure Irem « De la géométrie analytique à l'algèbre linéaire » n°72 (1987).

Pour des raisons de commodités dans les analyses de tâches nous avons regroupé les exercices par types d'objets : plan/ plan, droite/ plan, droite/ droite.

a) Il s'agit de reconnaître les équations de deux plans (connaissance nouvelle) puis d'adapter à l'exercice la comparaison de leurs vecteurs normaux (connaissance nouvelle)

6 De même en Capes, le théorème de Thalès, notamment dans sa version affine démontrée grâce au caractère affine des projections sur une droite parallèlement à un plan, ou sur un plan parallèlement à une droite, se généralise sans accident mais les figures sont difficiles à construire.

L'espace affine $\mathbf{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Parmi les douze groupes d'équations suivants, reconnaître ceux qui correspondent à deux plans (resp. droites, ou droite et plan) parallèles ou perpendiculaires. Préciser le cas échéant s'il y a coplanarité.

a) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$; $\quad 2x + y + 2z - 1 = 0$.

b) $3x - y - 2z - 5 = 0$; $\quad x + 9y - 3z + 2 = 0$.

c) $x - 3z + 2 = 0$; $\quad 2x - 6z - 7 = 0$.

d) $2x - 5y + z = 0$; $\quad x + 2z - 3 = 0$.

e) $\begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0 \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$; $\quad 3x - 2y + z + 1 = 0$.

f) $\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$; $\quad 4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

g) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = 2 - 2t \ (t \in \mathbf{R}) \end{cases}$; $\quad -3x + 2y + 3z - 5 = 0$.

h) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+3}{-2}$ $\quad x - 3y + 6z + 7 = 0$.

i) $\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -t + 2 \\ z = t - 7 \ (t \in \mathbf{R}) \end{cases}$; $\quad x + 3y + z + 2 = 0, x - y - 3z - 2 = 0$.

j) $x = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{3}$; $\quad \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = -6t + 1 \ (t \in \mathbf{R}) \end{cases}$

k) $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = z$; $\quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$

pour revenir à une conclusion concernant la position relative des deux plans. Ces vecteurs ne sont ni colinéaires ni orthogonaux (utilisation du produit scalaire et relation de colinéarité) donc les plans ne sont ni parallèles ni perpendiculaires. Leur intersection est une droite dont les équations données représentent les équations.

b) Les tâches sont identiques à celles de l'exercice précédent mais cette fois ci on trouve que les vecteurs normaux sont orthogonaux donc que les plans sont perpendiculaires.

c) Les tâches sont identiques à celles de l'exercice a) avec des vecteurs normaux colinéaires donc des plans parallèles (si on veut montrer qu'ils ne sont pas confondus il faut exhiber un point n'appartenant qu'à un des deux).

d) Les tâches sont identiques à celles de l'exercice a) avec un résultat analogue.

e) Il s'agit ici de reconnaître les équations cartésiennes d'une droite (connaissance nouvelle) et celle d'un plan. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour résoudre l'exercice (choix)[7].

On peut remarquer que le plan est strictement parallèle un des plans définissant la droite donc la droite est parallèle au plan. Il s'agit alors de mélanger les cadres analytique et géométrique et de réactiver des connaissances de géométrie dans l'espace de première.

On peut aussi, chercher d'abord les équations paramétriques de la droite (étape et adaptation d'une connaissance nouvelle) pour en déterminer un vecteur directeur (adaptation d'une connaissance nouvelle) et comparer vecteur normal du plan et vecteur directeur de la droite (étape). On trouve que ces vecteurs sont orthogonaux donc que la droite est parallèle au plan.

f) Les tâches sont identiques à celles de l'exercice précédent, les résultats analogues avec cette fois ci la droite incluse dans le plan.

g) Il s'agit de reconnaître les équations paramétriques d'une droite (adaptation d'une connaissance nouvelle) et l'équation d'un plan. Un vecteur directeur est immédiatement identifiable puis on le compare à un vecteur normal du plan (adaptation d'une connaissance nouvelle). On trouve que les vecteurs ne sont ni colinéaires ni orthogonaux donc que la droite et le plan sont sécants.

h) On retrouve les équations cartésiennes d'une droite dont les coordonnées d'un vecteur directeur sont immédiates à trouver (adaptation d'une connaissance nouvelle) et d'un plan dont on détermine un vecteur normal. Ces vecteurs sont orthogonaux donc droite et plan sont parallèles.

i) Il s'agit ici de reconnaître les équations de deux droites, paramétriques pour l'une, cartésiennes pour l'autre. Un vecteur directeur de la première peut être déterminé directement alors que pour l'autre une des étapes peut être de déterminer ses équations paramétriques avant d'en exhiber un vecteur directeur (étape et adaptation de connaissances nouvelles). On a alors à comparer les vecteurs directeurs qui sont orthogonaux donc les droites sont orthogonales. On peut poursuivre l'exercice en montrant que les droites ne sont pas coplanaires.

j) Les tâches sont les mêmes que dans l'exercice précédent mais on trouve ici que les vecteurs ne sont ici ni colinéaires ni orthogonaux. On peut pour poursuivre l'exercice montrer que ces droites ne sont pas coplanaires.

k) Il s'agit de reconnaître les équations cartésiennes de deux droites. Pour la première un vecteur directeur est « apparent » (adaptation de connaissance nouvelle), pour la seconde il s'agit d'abord de trouver les équations paramétriques avant de déterminer un vecteur directeur (étape et adaptation de connaissance nouvelle). Les vecteurs directeurs étant colinéaires, les droites sont parallèles.

4) Études des configurations de l'espace : travail dans plusieurs cadres au choix

a) *Tétraèdres orthocentriques*

Dans l'espace la généralisation du triangle, en termes d'invariants remarquables, n'est pas le tétraèdre quelconque mais le tétraèdre orthocentrique, c'est-à-dire le tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes (ou les arêtes deux à deux orthogonales).

Ceci peut alimenter un problème qui peut aller assez loin, avec une variété de méthodes très grande [8] qui peut être source de commentaires en partie non improvisés.

Les premières questions qui peuvent se poser sont les suivantes : Est-ce que le tétraèdre a un isobarycentre et comment généraliser les médianes ? A-t-il une sphère circonscrite ? Est-ce que ses hauteurs se coupent ? Et dans le cas où il y a un orthocentre, ce dernier, le centre de la sphère circonscrite et l'isobarycentre sont-ils alignés (droite d'Euler) ?

Le problème suivant présente une version de ces questions [9], avec la possibilité de faire des démonstrations en vectoriel ou en géométrie « ponctuelle », comme nous allons le montrer sur une question. On peut aussi l'aborder en analytique (on reviendra sur le travail dans ce cadre).

Dans l'espace soit ABCD un tétraèdre.

1) Montrer qu'il existe une sphère circonscrite à ce tétraèdre.

2) Montrer que si les hauteurs du tétraèdre se coupent (propriété 1), les arêtes opposées (AB) et (CD), (AC) et (BD), (AD) et (BC) sont orthogonales.

Montrer qu'il suffit de montrer la propriété pour deux des couples précédents.

3) Trouver un tétraèdre dont les hauteurs ne se coupent pas.

On admet la réciproque de la propriété 1 et on appelle tétraèdre orthocentrique un tétraèdre vérifiant la propriété 1. On appelle orthocentre le point d'intersection des 4 hauteurs.

4) Montrer qu'un tétraèdre ABCD est orthocentrique si et seulement si (i) chaque sommet se projette en l'orthocentre de la face opposée.

(ii) les longueurs des arêtes opposées vérifient $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

(iii) les segments joignant les milieux des arêtes opposées ont même longueur.

8 C'est une réflexion sur les connaissances à mettre en œuvre et leurs adaptations qui inspirent ce paragraphe.

9 Une version plus complète est rédigée intégralement dans un polycopié destiné aux étudiants de Capes de l'Université de Versailles St Quentin. On trouve aussi une étude très complète de ce type de tétraèdre dans Sortais, Géométrie de l'espace et du plan (pp313-329).

5) Montrer que dans un tétraèdre orthocentrique, l'isobarycentre, le centre de la sphère circonscrite et l'orthocentre sont alignés, et donner leur position respective sur cette droite.

6) Montrer qu'un tétraèdre régulier est orthocentrique. Que devient la droite d'Euler ?

Donnons quelques éléments précisant nos intentions.

1) Une idée de point de départ, éventuellement à faire rappeler, peut être la généralisation de la méthode qui sert à démontrer que le centre du cercle circonscrit à un triangle quelconque est le point d'intersection des médiatrices (grâce à l'utilisation de la caractérisation « métrique » de ces droites).

On engage alors le travail sur l'utilisation des plans médiateurs des arêtes.

Les plans médiateurs de [AB] et de [AC] se coupent car les deux segments sont sécants. La droite d'intersection Δ est l'ensemble des points équidistants de A, B et C ; elle est perpendiculaire au plan ABC car elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan, (AB) et (AC) ; et elle coupe le plan ABC en **o**, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Mais ça ne suffit pas, il manque encore D !

On recommence, en veillant à ce que les droites qui devront se couper à la fin soient coplanaires. De même les plans médiateurs de [AC] et [AD] se coupent en Δ', qui est dans le plan médiateur de [AC] comme Δ (on a choisi une arête commune, pour garantir la coplanarité nécessaire). Ces deux droites Δ et Δ' sont sécantes – sinon les plans ABC et ACD seraient confondus (parallèles, avec une droite commune, (AC)). Le point d'intersection est équidistant des quatre sommets et donc centre de la sphère circonscrite cherchée. La démonstration garantit l'unicité de cette sphère.

2) Une idée intéressante pour cette démonstration et aussi pour celles de la question 4) sur lesquelles nous ne reviendrons pas, est le choix entre une méthode vectorielle, assez automatique, et une méthode plus géométrique, qui permet mieux de décomposer les choses.

Appelons A, B, C, D les sommets du tétraèdre et H le point d'intersection des hauteurs (droites menées d'un sommet perpendiculairement à la face opposée).

Montrons que (AB) est orthogonale à (CD). Vectoriellement, on calcule le produit scalaire suivant, en espérant qu'on pourra montrer qu'il est nul !

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}).\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CD}$$

Or (AH) est perpendiculaire au plan BCD donc à la droite (CD) de ce plan ; (BH) est perpendiculaire au plan ACD donc à la droite (CD) de ce plan. Les deux produits scalaires intermédiaires sont nuls d'où le résultat cherché.

Géométriquement, on remarque que pour démontrer que (CD) est orthogonale à (AB) un bon moyen est de démontrer que (CD) est perpendiculaire à un plan contenant (AB). Le plan AHB est tout indiqué : il contient deux droite (AH) et (BH) sécantes orthogonales à (CD).

On peut dégager, mise à part la méthode générale choisie pour démontrer ce type d'orthogonalité (droite/droite), le jeu habituel entre la définition de l'orthogonalité plan/droite (obtenue dès qu'on a deux droites sécantes du plan orthogonales à la droite donnée) et l'utilisation de la propriété (alors toute droite du plan est orthogonale à la droite donnée). D'autre part on peut faire constater a posteriori que ce sont exactement les mêmes démonstrations !

3) Là on est dans le domaine de la production d'un contre-exemple. L'imagination, aidée par des figures, a le beau rôle… Mais plus c'est simple mieux c'est ! On a choisi de se placer en analytique, en prenant des points de coordonnées entières, très simples. L'idée a été de se donner une hauteur dans un plan de coordonnées et de garantir, grâce au choix du 4ème sommet qu'une autre hauteur n'est pas coplanaire à la première.

Deux hauteurs du tétraèdre déterminé par les points A (–1,0,0), B (1,0,0), C (0,1,0) et D (0,0,1) ne se coupent pas : celle issue de D (l'axe (Oz) et celle issue de A (qui ne lui est pas coplanaire). Sinon le point C appartiendrait au plan ABD.

5) On peut indiquer aux élèves qu'une piste classique, qui peut être suivie ici, pour démontrer que trois points sont alignés dans l'espace, quand on n'a pas leurs coordonnées, est de montrer qu'ils appartiennent tous les trois à deux plans sécants : les points sont alors alignés sur la droite d'intersection de ces plans (changement de point de vue : on passe de « l'intersection de deux plans est une droite » à « des points sont alignés s'ils appartiennent à l'intersection de deux plans »). La même idée fournit d'ailleurs une démonstration élégante du théorème de Desargues…

« Reste » à trouver ces plans… Il s'agit des plans perpendiculaires aux faces du tétraèdre et les coupant selon la droite d'Euler du triangle correspondant.

Des questions intermédiaires peuvent être proposées comme :

> Montrer que les points G, H, O (resp. isobarycentre de ABCD, orthocentre de ABCD et centre de la sphère circonscrite à ABCD) appartiennent au plan perpendiculaire à (BCD) et passant par la droite d'Euler de BCD. On laisse les élèves adapter à un deuxième plan.

On peut encore plus préciser en demandant de vérifier que A est dans ce plan (du fait que (AH) est perpendiculaire à BCD et coupe BCD en son orthocentre h, qui est sur la droite d'Euler de BCD ; on demande alors de justifier que G est dans ce plan (dans la mesure où A et g, isobarycentre de BCD sont dans le plan). La démonstration faite dans la première question, adaptée à BCD, entraîne que O est aussi dans le plan, car (Oq) est dedans, où q désigne le centre du cercle circonscrit à BCD (changement de point de vue : on passe de « (Oq) perpendiculaire à BCD en q » à « (Oq) appartient à un plan perpendiculaire en une droite passant par q à BCD »).

On voit qu'on a affaire à une démonstration à étapes, où les connaissances à utiliser, mises à part les définitions des points et droites remarquables, sont des variations autour de la définition de plan perpendiculaire à un autre, changements de points de vue ou adaptations autour des propriétés suivantes : une perpendiculaire à un plan en un point du plan appartient à tout plan perpendiculaire au premier plan passant par ce point ; si une droite est dans un plan tout point de la droite est dans le plan.

Cela peut permettre d'insister sur la nécessité de ces changements de points de vue en géométrie (à tenter en cas de blocage !).

Il y a des pistes pour prolonger ce type de problème : du côté des patrons – et du côté des tétraèdres équifaciaux par exemple.

b) *Un complément sur les tétraèdres orthocentriques :*
petite incursion en analytique

Tout sommet d'un tétraèdre orthocentrique se projette sur l'orthocentre de la face opposée et réciproquement si un sommet se projette sur l'orthocentre de la face opposée, le tétraèdre est orthocentrique, nous venons de le rappeler.

Ceci peut engendrer un problème de résolution de système linéaire avec une infinité de solutions dépendant d'un paramètre, interprétable géométriquement [10].

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On se donne trois points A, B C par leurs coordonnées, non alignés et on demande de trouver l'ensemble des points D tels que le tétraèdre ABCD soit orthocentrique : on doit trouver une droite.

En voici (encadré ci-contre) une version assez simple, les calculs se modifient en changeant les coordonnées de A, B et C, mais la résolution du système est du même modèle.

ABC est un triangle équilatéral (donc AB = AC = BC). On cherche l'orthocentre du triangle ABC. C'est O (on peut remarquer

> L'espace affine $\mathbf{R}^3$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les trois points A, B, C de coordonnées (0, 2, 0), $(\sqrt{3}, -1, 0)$, $(-\sqrt{3}, -1, 0)$.
>
> Montrer que ces points ne sont pas alignés (et forment un triangle équilatéral- facultatif). Chercher tous les points M de coordonnées (x,y,z) tels que le tétraèdre MABC soit orthocentrique.
>
> Chercher les tétraèdres réguliers parmi les solutions.

que O est aux deux-tiers à partir de A de la médiane (segment intérieur au triangle) issue de A).

Les coordonnées cherchées sont solution d'un système obtenu à partir des équations vectorielles traduisant l'orthogonalité de (OM) et du plan ABC :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{i} = 0 \text{ et } \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} = 0 .$$

On trouve tous les points $(0, 0, z)$ – et seulement eux, comme prévu.

On a déjà MA = MB = MC car les points de (Oz) sont équidistants de A, B et C. On vérifie, en égalant MA et AB, qu'il y a deux tétraèdres réguliers parmi ces tétraèdres orthocentriques, obtenus pour $z = \sqrt{2}/2$ et $z = -\sqrt{2}/2$. On a le même type de résultat en faisant chercher les quadrilatères dont les milieux sont donnés (parallélogramme) (cf. Robert, 1995).

c) *Le cube et les polygones réguliers : une animation sur logiciel et encore un grand choix de cadres*

L'exercice suivant est très classique – simplement il peut être l'occasion de revenir

10 Cela a été proposé à des étudiants de première année d'université dans un module de géométrie affine.

aux définitions de polygones réguliers plans. Il s'agit d'étudier l'intersection d'un cube et des plans perpendiculaires à une grande diagonale de ce cube. On peut travailler aussi bien dans le cadre vectoriel que dans le cadre ponctuel qu'en analytique.

Une animation sur un logiciel de géométrie dynamique permet de bien explorer le problème en faisant varier le plan perpendiculaire à la diagonale et en faisant visualiser l'intersection.

C'est au moment de la démonstration du fait que l'hexagone des milieux est régulier qu'on peut revenir sur la définition des polygones réguliers dans le plan.

Conclusion : géométrie dans l'espace, changements de cadres et démarche expérimentale ?

Revenons aux difficultés des élèves et à des modalités de travail sur les exercices qui pourraient aider les élèves, en particulier dans leur recherche. Notamment y a-t-il des exercices qui peuvent être facilités par une animation logicielle ?

Les différents cadres ne sont pas équivalents à cet égard. Autant le travail en analytique et en géométrie vectorielle ne nécessite que peu de recours aux figures, autant le travail dans le cadre ponctuel ou affine s'appuie sur les représentations des configurations, et encore plus s'il faut commencer par énoncer une conjecture.

On peut se demander si les élèves qui se plaignent « de ne pas voir dans l'espace » peuvent modifier cette représentation par un travail sur logiciel - les quelques expériences que nous avons eues en Capes où nous avons utilisé Géospace nous amènent à confirmer que la question se pose tout à fait et n'est pas simple.

Pour ces élèves-là, la possibilité d'un travail sur les cadres algébriques est très importante, cependant on peut espérer que le travail sur des exercices où on peut les amener à faire des changements de cadres avec les cadres ponctuels, facilités par l'usage d'un logiciel « qui dessine bien » et qui illustre les invariances, contribueront à une certaine familiarisation.

Réciproquement, pour les élèves qui se contenteraient de constater sur l'ordinateur, la possibilité de demander une démonstration dans un cadre algébrique ouvre des perspectives d'enrichissement du travail géométrique.

Ainsi la possibilité de disposer d'énoncés d'exercices consistants permettant un travail dans plusieurs cadres reste intéressante y compris dans la perspective d'intégration de logiciels de géométrie dynamique.

Bibliographie

DOUADY R.(1987) Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en didactique des mathématiques* vol 7/2, .5-32.

KLETENIC (1981) *Problèmes de géométrie analytique* Editions de Moscou

KUNTZ G. Dossier sur la démarche expérimentale en mathématiques, Site Educmath de l'INRP

ROBERT A. (1995) *L'épreuve sur dossier à l'oral du Capes de mathématiques, I.* Géométrie, Ellipses.

ROBERT A. (2003) Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissance sen niveaux de conceptualisation, *Petit x* 63, 7-29

ROBERT A. ET ROGALSKI M. (2004) Problèmes et activités d'introduction, problèmes transversaux et problèmes de recherche au lycée *Repères IREM n°54 77-103*

ROBERT A. ET ROGALSKI M. (2003) Comment peuvent varier les activités mathématique des élèves sur des exercices – le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe, *Petit x n°60*, 6-25

ROBERT A., ROBINET J. ET TENAUD I. (1987), De la géométrie analytique à l'algèbre linéaire, *Brochure de l'IREM Paris Sud, n°72.*

SORTAIS Y. ET R. (1988) *Géométrie de l'espace et du plan,* Hermann, Paris.

VANDEBROUCK F. (2008) La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants, Octarès