LES TICE EN GEOMETRIE DE L'ESPACE : LOGICIELS 3D OU LOGICIELS 2D ?

François COLMEZ
Irem de Paris 7, équipe DIDIREM

Résumé : Au moment où se met en place l'épreuve pratique de mathématiques au baccalauréat en section S, il est légitime de comparer l'apport des logiciels 2D et 3D à l'enseignement de la géométrie de l'espace. A travers des exemples, cet article tente de montrer que les logiciels 2D demandent aux élèves davantage de réflexion géométrique que les logiciels 3D, qui jouent plutôt le rôle de maquettes. Il explique aussi comment construire avec un logiciel 2D un cadre adapté pour simuler un logiciel 3D.

En accompagnement de cet article, huit illustrations sont manipulables dans une page web avec un navigateur. Elles se trouvent dans un dossier accessible à partir du sommaire en ligne du numéro sur le site de Repères IREM :

Portail des IREM : http://www.univ-irem.fr/spip.php

sous la rubrique «Document annexe» figurant au dessous du titre de l'article.

On sait que les examens ont une rétroaction sur l'enseignement qui y prépare. L'introduction d'une épreuve pratique en terminale S est l'occasion d'aborder la question suivante : on dispose maintenant de logiciels dynamiques de géométrie de deux sortes, 2D (comme Cabri II ou GeoGebra)[1] et 3D (comme Cabri3D ou Geospace) ; quels sont leurs apports respectifs dans l'enseignement de la géométrie de l'espace ?

1 Pour les dessins que nous voulons réaliser ; le logiciel Geoplan est moins commode.

1. Exemple

Nous allons préciser le sens de cette question en étudiant comment aborder le sujet expérimental n°29 de l'année 2008, avec un logiciel 3D, puis avec un logiciel 2D. L'énoncé donné ci-dessous résume celui de l'épreuve :

L'espace est rapporté au repère orthonormé (O,i,j,k). *Placer les points* A(0,6,0) *;* B(0,0,8) *;* C(10, 0, 8). M *est un point du segment* [0B]. *Le plan* V *passant par* M *et perpendiculaire* *à la droite* (OB) *coupe la droite* (AC) *en* P*, la droite* (OC) *en* N *et la droite* (AB) *en* Q.

Dessiner la figure et étudier la variation de l'aire du quadrilatère MNPQ *en fonction de la position du point* M *sur* [OB] *; en particulier, déterminer son maximum.*

Utilisation d'un logiciel 3D

Quand on ouvre un logiciel 3D, la fenêtre présente le dessin d'un RON (Repère Ortho-Normé). Pour dessiner les points A, B, C il suffit d'écrire leurs coordonnées dans la fenêtre ouverte par la macro ad hoc. Après avoir tracé les six segments joignant les quatre points O, A, B, C on place le point M variable sur le segment [OB].

On peut alors définir le plan V en notifiant qu'il passe par M et qu'il est perpendiculaire à la droite (OB). On obtient les points N, P et Q en demandant l'intersection de ce plan avec les droites (OC), (CA), (AB). Il reste à dessiner le quadrilatère MNPQ pour terminer le dessin.

Le logiciel fournit l'aire du quadrilatère MNPQ. En déplaçant le point M sur le segment [OB], on constate que ce quadrilatère est aplati et que son aire est nulle quand M est en O ou en B ; cette aire semble maximale quand M est au milieu de [OB].

Bilan de cette activité

S'il faut une bonne familiarité avec le logiciel pour conduire cette construction, par contre aucune connaissance mathématique n'est mise en œuvre par l'exécutant.

Cependant le logiciel peut «montrer» certaines propriétés de la figure, à condition d'avoir l'occasion de s'y intéresser.

De plus, il est possible de faire bouger l'ensemble du dessin, pour observer la figure de l'espace sous différents angles. On dispose ainsi d'une maquette virtuelle.

Des mathématiques, cependant

L'utilisation du logiciel n'obligeant pas l'exécutant à faire preuve de connaissances mathématiques, si l'on veut qu'il fasse intervenir de telles connaissances, il devient nécessaire de lui demander une démonstration pour laquelle, si possible, l'utilisation du logiciel apporte des éléments heuristiques.

Voici un exemple de question qui semble répondre à cette exigence.

> «Le logiciel indique que si le point M est au milieu de [OB] l'aire du quadrilatère MNPQ est 15 cm^2. Justifier cette valeur.»

En effet, si on fait tourner la figure on peut «voir» que le quadrilatère MNPQ est un rectangle, ce qui facilite le calcul de son aire. Il faudra le démontrer en faisant appel aux théorèmes sur les droites et les plans parallèles ou perpendiculaires utilisés plus bas. En outre les droites (MN) et (MQ) sont des «droites des milieux» dans les triangles OBC et BOA.

Utilisation d'un logiciel 2D [2]

Il est possible d'obtenir la même mobilité du dessin qu'avec un logiciel 3D, en procurant à l'exécutant le dessin en projection orthogonale d'un RON [3] (voir sa construction, § 2)

2 Huit figures manipulables sont disponibles sur le site Repères Irem
(Portail des Irem : http://www.univ-irem.fr/spip.php).
3 dessin numéro 01 (Repere 3D)

Pour que le dessin soit cohérent et suive la transformation du RON, il faut que tous les éléments de l'objet à dessiner soient repérés par rapport à ce RON.

Alors que les logiciels 3D procurent des outils de construction, avec un logiciel 2D il faut traduire en dessin 2D la construction de l'espace qu'on veut réaliser, ce qui fait intervenir des connaissances géométriques.

Un logiciel 2D nécessite donc l'utilisation explicite de propriétés mathématiques, ainsi que nous le détaillons maintenant.

Mise en place des données [4]

Nous utilisons le fait que la projection orthogonale est une application affine de l'espace sur le plan du dessin, si bien que toutes les propriétés affines de la figure de l'espace sont conservées sur la figure projetée.

Placer le point A de coordonnées (0,6,0), c'est traduire la propriété : $\overline{OA} = 6\,\overline{Oj}$; la méthode la plus simple est la construction du transformé du point j par l'homothétie de centre O et de rapport 6.

Pour le point B de coordonnées (0,0,8), même méthode.

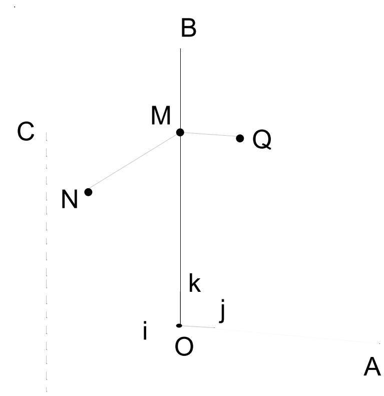
Pour le point C de coordonnées (10,0,8), il faut d'abord construire le point de coordonnées (10,0,0), puis construire le dernier sommet d'un parallélogramme [5]. La droite (BC) est parallèle à la droite (Oi), dans l'espace et sur le dessin.

Construction raisonnée du dessin du quadrilatère MNPQ

Le plan V est perpendiculaire à la droite (Ok) ; il est donc parallèle au plan Oij. Son intersection (MQ) avec le plan OAB est parallèle à (OA). Son intersection (MN) avec le plan OBC est parallèle à (Oi), donc à (BC).

En projection parallèle sur le plan du dessin ces deux parallélismes sont conservés, ce qui permet de construire les points Q et N en utilisant l'outil «droite parallèle».

Puisque le plan V est parallèle à la droite (BC), son intersection avec le plan ABC est parallèle à (BC). De même, son intersection avec le plan OAC est parallèle à (OA).



dessin 1

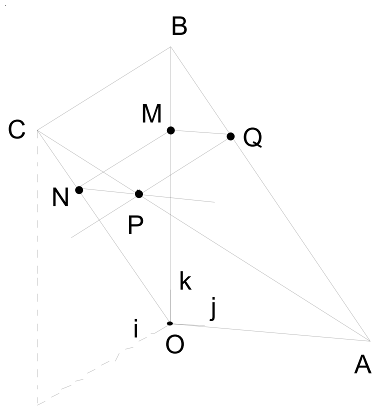
4 dessin numéro 02 (RON pour figures)

5 Il est possible, en vue d'une utilisation dans d'autres figures, de définir une macro qui, à partir de trois nombres, construit l'image d'un point dans un RON, avec comme intermédiaires trois homothéties et deux parallélogrammes. On retrouve alors une commodité voisine de celle d'un logiciel 3D. Mais cette macro est le résultat d'une réflexion sur le passage d'une figure de l'espace à sa projection affine sur un plan ; de plus chacune de ses utilisations réactive les connaissances en jeu, car les objets initiaux sont les données du RON (4 points ou 1 point et 3 vecteurs, au choix) et les 3 coordonnées.

Le point P doit être commun à la droite (AC) et à ces deux intersections, ce qui permet de n'en construire qu'une

Le quadrilatère MNPQ est donc un parallélogramme (dans l'espace et sur le dessin) et comme dans l'espace (Oi) et (OA) sont perpendiculaires, c'est un rectangle de l'espace.

Mais une réflexion plus poussée, qui sera d'ailleurs utile pour l'étude de l'aire du quadrilatère, conduit à une autre méthode, plus économique en tracés.



dessin 2

En appliquant le théorème de Thalès ou la conservation des rapports par projection on montre que :

$$\frac{OM}{OB} = \frac{ON}{OC} = \frac{AP}{AC} = \frac{AQ}{AB}$$

Cela permet la construction suivante : on mesure avec la macro «distance» OM et OB sur le dessin ; on calcule le nombre k, rapport OM / OB ; ce rapport est le même sur le dessin et dans l'espace, puisque la projection parallèle est une application affine. Le point P peut être construit comme l'image de C dans l'homothétie de centre A et de rapport k.

Il est intéressant d'enregistrer cette construction comme macro car elle sert très souvent. (cf. *Macros de report*, plus bas). Cette macro permet évidemment de construire les points N et Q.

La variation de l'aire du polygone MNPQ [6]

Le dessin obtenu grâce au logiciel 2D est une projection parallèle de l'objet de l'espace. Le rapport de l'aire du dessin d'un polygone de l'espace à l'aire de ce polygone est un nombre qui ne dépend que de l'angle du plan du polygone avec le plan du dessin (en fait le cosinus de cet angle). Ce qui veut dire que si des polygones de l'espace sont situés dans des plans parallèles entre eux, leurs aires sont proportionnelles aux aires de leur dessins.

On n'a pas besoin de connaître ce rapport pour étudier la variation de l'aire du rectangle de l'espace MNPQ, car il suffit d'étudier la variation de l'aire du parallélogramme MNPQ du dessin, qui lui est proportionnelle. Cette dernière aire est donnée par le logiciel 2D .

On peut dessiner un graphique dans un coin de la fenêtre, de manière coordonnée avec le dessin principal, en portant k (i.e. OM / OB) en abscisse et l'aire du parallélogramme en ordonnée. Comme avec un logiciel 3D, on y voit un maximum, pour la valeur 1/2.

6 numéro 03 (sujet29airedessin)

Justification par le Calcul

On pose, comme plus haut, k = OM / OB. L'aire du parallélogramme MNPQ est :

MN.MQ.sin($\widehat{NMQ}$).

Or l'angle NMO ne varie pas et le théorème de Thalès dans les triangles OBC et COA donne MN = k BC et NP = $(1 - k)$ OA . Il en résulte que l'aire de MNPQ est le produit d'une aire constante par $k.(1 - k)$.

En fait, le même raisonnement appliqué directement à la figure de l'espace donne pour l'aire du rectangle MNPQ : 10 cm × 6 cm × $k(1 - k)$; et, pour k = 1/2, on obtient : 15 cm². Ensuite, soit en appliquant des connaissances sur les paraboles, soit en calculant la dérivée, on montre la véracité de la conjecture.

2. Indication pratique (numéro 1) :

Dessin d'un RON mobile avec un logiciel 2D [7]

Il s'agit de construire le dessin en projection orthogonale d'un RON Oijk. Les trois dessins présentés ici sont des dessins coordonnés à l'intérieur d'une même fenêtre Cabri 2D ou GeoGebra.

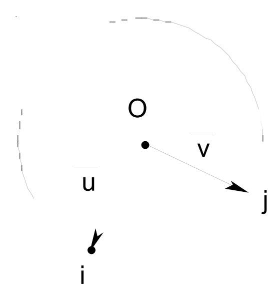
Les dessins 3 et 4 permettent de piloter la position du RON par rapport au plan du dessin, qu'on peut imaginer vertical. Le dessin 3 permet de faire tourner le RON autour de son axe (Ok), en déplaçant le point i.

Le dessin 4 est fait dans un plan perpendiculaire au plan du dessin principal, dans lequel se trouve la droite (Ok). Il montre également la trace du plan Oij dans ce plan. Il permet de régler l'angle a de (Ok) avec le plan du dessin, en déplaçant le point k. Cet angle est ici de 32°.

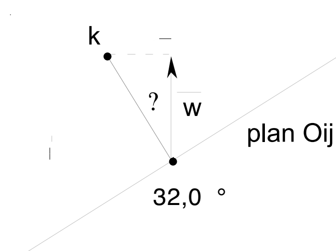
Les deux cercles des dessins 3 et 4 ont pour rayon l'unité de longueur du RON. Le dessin 5 montre comment est obtenu le dessin du RON. On construit les images du point O par les trois translations de vecteurs : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Les points i et j sont les transformés des points M et N par l'affinité dont l'axe est la droite perpendiculaire à (Ok) passant par O et le rapport est le sinus de l'angle α.

Il reste à masquer les constructions.

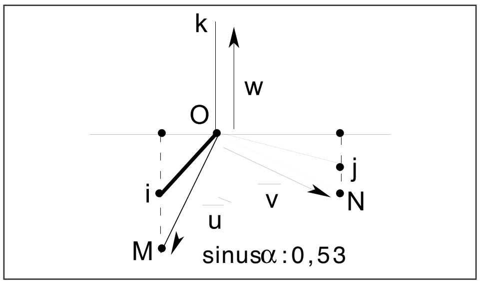


dessin 3



dessin 4

7 dessin numéro 04 (RON construction)



dessin 5

Si l'angle α est nul les segments [Oi] et [Oj] sont portés par la droite perpendiculaire au segment [Ok] qui a la longueur unité ; si de plus le point i (resp. j) est confondu avec le point O le plan Ojk (resp.Oik) est dessiné en vraie grandeur. Si l'angle α est droit le point k est en O et le plan Oij est dessiné en vraie grandeur.

Le rapport de projection orthogonale du plan Oij sur le plan du dessin est sin α. En conséquence, si un polygone est contenu dans un plan parallèle au plan Oij (comme le quadrilatère MNPQ de l'exercice), l'aire de ce polygone de l'espace est obtenue en divisant par le nombre sin a l'aire du dessin de ce polygone qui est fournie par le logiciel 2D. [8]

3. Utilité du travail avec un logiciel 2D à partir d'un tel repère.

Il n'est pas question de demander d'emblée à des élèves de Lycée de construire le dessin d'un RON avec Cabri ou GeoGebra. Mais on peut le leur fournir comme cadre de départ à l'instar de ce que font les logiciels 3D

La différence fondamentale est que le logiciel 2D nécessite des constructions raisonnées mettant en oeuvre des propriétés géométriques, tandis qu'un logiciel 3D fait les constructions sans qu'on ait à les maîtriser d'un point de vue géométrique.

La mobilité du repère permet de savoir si la construction est cohérente, c'est-à-dire si la figure se déplace en bloc avec le repère. C'est la rétroactivité du dispositif 2D qui n'existe pas avec un logiciel 3D pour lequel tous les éléments construits suivent le repère, que la construction soit correcte ou non.

Réussir à faire le dessin avec un logiciel 2D, c'est résoudre une suite de questions plus ou moins élémentaires qui peuvent même aboutir à la solution de l'exercice lui-même, ou en tout cas donner des indications heuristiques pour le résoudre.

Cette démarche se rapproche de celle que nous avions suivi au début des années 80, avec Bernard Parsysz, quand nous avions commencé à étudier l'enseignement de la géométrie de l'espace.

Nous fournissions aux élèves une maquette sur laquelle la propriété à démontrer devenait évidente ; la difficulté pour les élèves consistait à réaliser un dessin sur lequel s'appuyer pour écrire la démonstration.

Il n'y avait pas alors de logiciels de dessins géométriques et les dessins se faisaient aux instruments. Aujourd'hui on peut remplacer les dessins aux instruments par l'utilisation d'un logiciel 2D et les maquettes par l'utilisation d'un logiciel 3D qui donne un modèle du dessin à obtenir. Quand on travaille sur les polyèdres, on peut même facilement avoir recours à une maquette maté-

8 dessin numéro 05 (sujet29airespace)

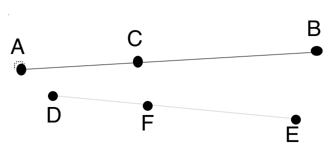
rielle car les logiciels 3D fournissent des patrons.

Bref, les logiciels 3D sont remplis de mathématiques cachées, qu'il n'est pas facile de débusquer. Les utilisateurs d'un logiciel 2D doivent apporter leurs connaissances de géométrie de l'espace.

4. Indications pratiques (numéro 2) : Macros de report

Report d'une droite sur une autre

Le problème est le suivant : étant donné deux points A et B et un point C de la demi-droite [AB) on veut reproduire la disposition relative de ces trois points pour les points D, E et F ; les points D et E sont donnés et jouent les rôles de A et B ; il faut construire F.



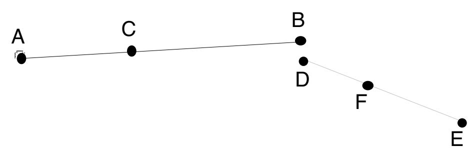
dessin 6

Dire que les dispositions relatives des points (ou que les configurations) A, B, C et D, E, F sont les mêmes, c'est dire que les homothéties de centre A transformant B en C, et de centre D transformant E en F, ont le même rapport k. Pour calculer k on mesure AB et AC et on calcule AC/AB ; on obtient ensuite F par la seconde homothétie.

Les éléments initiaux de cette macro sont A, B, C, D, E et l'unique élément final est F.

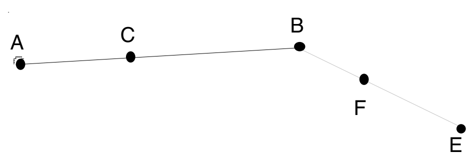
Remarque d'utilisation

Les trois premiers points à cocher sont nécessairement distincts (et alignés). Pour que la macro fonctionne, il faut que les deux derniers points soient distincts des précédents.



dessin 7

Comment faire si, par exemple, le quatrième point est le même que le deuxième ? Il suffit de marquer temporairement un quatrième point distinct du deuxième, puis quand la macro a fait son office de redéfinir le quatrième point en l'assimilant au deuxième.



dessin 8

Adaptations

Pour faire un report dans le plan (passer d'un repère affine à un autre repère affine, en conservant les coordonnées) il faut pouvoir repérer des points sur la droite entière et traiter le cas où le rapport d'homothétie est négatif. Cela se fait en utilisant l'angle BAC.

Avec Cabri il suffit de multiplier AC/AB par cos(BAC). Mais cette macro ne fonctionne pas si C est en A .

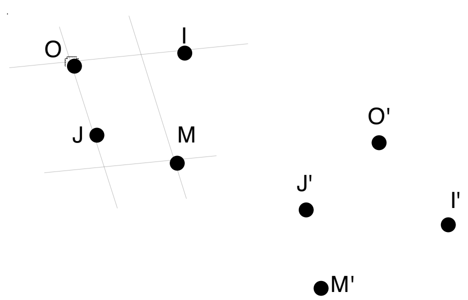
Avec GeoGebra on utilise une condition. Après avoir créé les variables angle ABC, b (=AB) et c (=AC), on écrit :

si[angleBAC < 90°, c/b, – c/b].

Une nouvelle variable est alors créée qui vaut AC/AB quand C est sur la demi-droite [AB) et – AC/AB sinon.

Report d'un plan sur un plan

Pour passer du point M repéré par rapport à OIJ au pont M' repéré par rapport à O'I'J', on projette M sur (OI) et (OJ), on reporte les points obtenus sur (O'I') et (O'J'), puis on termine le parallélogramme en construisant le symétrique de O' par rapport au milieu des deux points obtenus.



dessin 9

Attention !

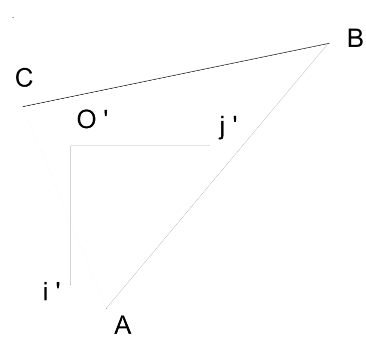
Si on construit la macro du plan en utilisant la macro de la droite, les deux logiciels ne se comportent pas de la même façon. Cabri intègre la première macro dans la deuxième, qui peut donc être chargée et fonctionner indépendamment de la première. GeoGebra n'intègre pas le premier outil dans le second, si bien que ce dernier ne peut pas être chargé tant que le premier ne l'est pas.

On peut avoir intérêt à construire un outil GeoGebra d'un bout à l'autre, sans faire appel à des outils déjà définis.

Nous avons déjà utilisé la première macro pour construire les points N, P, Q de l'exercice. Donnons des exemples de l'utilisation de la deuxième macro

Pour dessiner un triangle ABC dans le plan Oij du RON, on dessine (dessin 10) ce triangle en vraie grandeur dans un coin de la fenêtre accompagné d'un repère orthonormé plan O'i'j'.

On applique la macro aux deux repères O'i'j' et Oij et, successivement, aux trois sommets A, B, C.

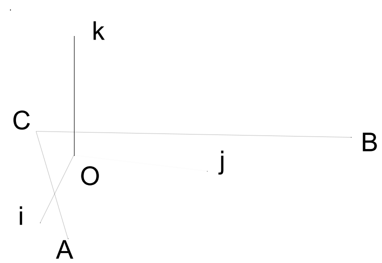


dessin 10

En dessinant le triangle dont les sommets viennent d'être construits par la macro, on obtient le dessin 11 dans lequel le triangle se déplace avec le RON Oijk.[9]

9 dessin numéro 06 (objetduplan)

A l'inverse, en utilisant la macro pour passer du dessin 11 au dessin 10 on peut savoir si un point est bien dans le plan Oij : son image par la macro doit rester fixe quand le RON Oijk varie.



dessin 11

5. Deuxième exemple : projeté orthogonal d'un point sur un plan

Le premier exemple mettait en scène des théorèmes sur le parallélisme ; celui-ci met en scène l'orthogonalité. Les propriétés utilisées tournent toutes autour du théorème fondamental cité ci-dessous ; on retrouvent ces propriétés dans les trois autres épreuves de géométrie de l'espace de la session expérimentale 2008 de l'épreuve pratique.

Théorème : *Si une droite D est orthogonale à deux droites non parallèles entre elles d'un plan P, elle est alors orthogonale à toutes les droites de ce plan.*

Énoncé de l'exercice :

Étant donné un RON Oijk *on marque le point* A *sur* [Oi)*, le point* B *sur* [Oj) *et le point* C *sur* [Ok)*. construire le projeté orthogonal* H *du point* O *sur le plan* ABC.

Utilisation d'un logiciel 3D

Si on utilise un logiciel 3D, après avoir défini le plan ABC, on demande au logiciel de construire la droite perpendiculaire à ce plan passant par O, puis l'intersection H des deux objets.

Utilisation d'un logiciel 2D

Analyse mathématique

Avant de construire un dessin avec un logiciel 2D, il y a lieu d'analyser une figure telle que celle qui est représentée par le dessin 12 [10], dans lequel on a marqué les points O, A, B, C et le point H.

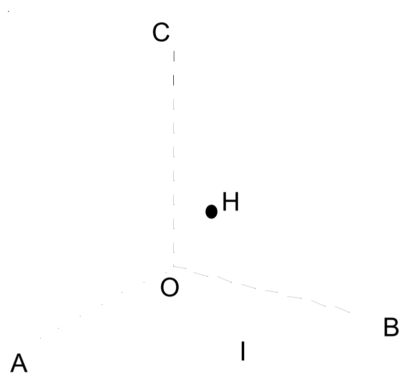
Soit Q le plan déterminé par les trois points O, C, H. Ce plan contient les deux droites sécantes (OC) et (OH). La droite (OC) est perpendiculaire au plan OAB, donc orthogonale à la droite (AB). La droite (OH) est perpendiculaire au plan ABC, donc orthogonale à la droite(AB). Il en résulte que la droite (AB) est perpendiculaire au plan Q.

L'intersection I du plan Q et de la droite (AB) se construit en traçant la doite (CH).

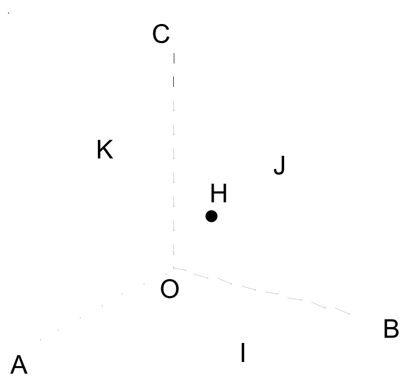
Finalement, les droites (CI) et (OI) sont les intersections du plan Q avec les plans ABC et OAB ; ces droites sont donc perpendiculaires à la droite (AB) ; ce sont des hauteurs respectivement du triangle ABC et du triangle OAB. Dans le dessin 13 on a construit les points J et K analogues à I. H est l'orthocentre du triangle ABC ; I, J, K sont les pieds des hauteurs issues de O des triangles respectifs OAB, OBC et OCA.

10 La disposition des points est arbitraire ; mais, comme il résultera de l'étude en cours, elle fixe les rapports des longueurs de l'espace : OA, OB, OC.

En sens inverse, on montre que pour construire le dessin à partir du RON Oijk et des longueurs OA, OB, OC de l'espace, il suffit de construire deux des points I, J ou K, comme pieds des hauteurs issues de O dans les triangles rectangles OAB, OBC ou OCA.



dessin 12



dessin 13

On peut bien sûr construire aussi le troisième point, à titre de contrôle.

Recherche expérimentale du projeté orthogonal avec un logiciel 2D [11]

L'expérimentation présentée ci-dessous permet de mettre en évidence les propriétés utilisées dans le paragraphe précédent.

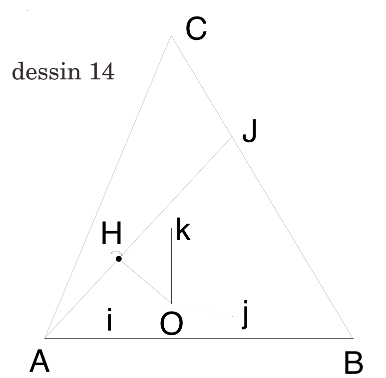
On met en place la figure évoquée dans le paragraphe précédent, en plaçant les points A, B, C sur les trois demi-droites [Oi), [Oj), [Ok). Le tâtonnement utilise le fait que si le plan ABC est parallèle au plan du dessin, le triangle ABC est dessiné en vraie grandeur et les dessins du point O et de son projeté sont confondus

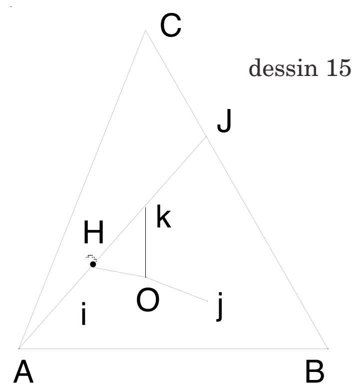
On prépare la manipulation en marquant un point J sur [BC] et un point H sur [AJ]. On vérifie que le point H ainsi marqué reste bien en place dans le plan ABC, quand on fait varier le RON mobile.

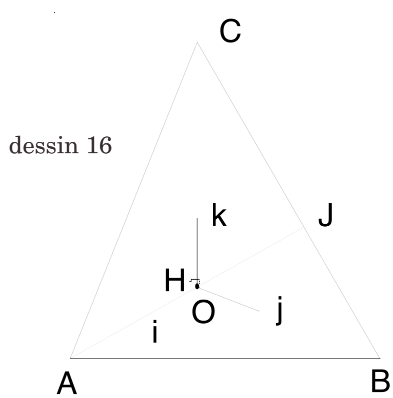
A partir des coordonnées des points A, B, C on calcule les longueurs AB, BC, CA des segments de l'espace. On demande au logiciel d'indiquer les longueurs des segments correspondants du dessin. Il s'agit de faire coïncider ces mesures.

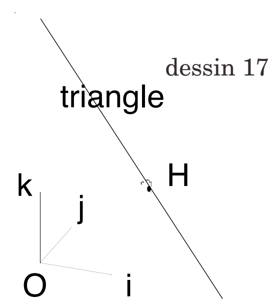
On commence par AB, en faisant tourner le RON autour de l'axe (Ok) (dessin 14). La coïncidence des mesures est obtenue quand le segment [AB] sur le dessin est horizontal, c'est-à-dire perpendiculaire à (Ok). Puis on fait pivoter le RON par la deuxième commande. La longueur AB ne varie pas. Les deux autres longueurs coïncident en même temps (dessin 15). Le triangle est bien placé ; on déplace J pour que [AJ] passe par O, puis on fait glisser H jusqu'en O (dessin16).

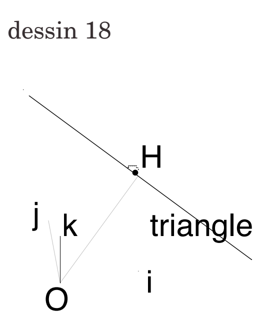
11 Dessin numéro 07 (tatonnement)

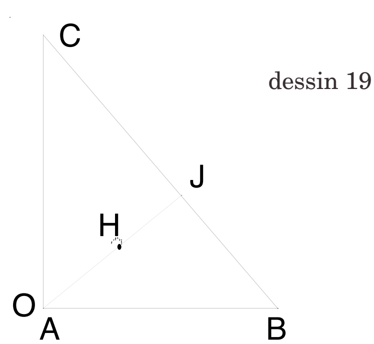

dessin 14
C
J
H
k
i
O
j
A
B


C
dessin 15
J
H
k
O
i
j
A
B


C
dessin 16
k
J
H
O
j
i
A
B


dessin 17
triangle
H
k
j
O
i


dessin 18
H
j
k
triangle
O
i


C
dessin 19
J
H
O
A
B

On constate alors que la droite (AJ) est hauteur du triangle ABC, puis en déplaçant le RON (dessins 17 et 18) que la droite (OH) est bien perpendiculaire au plan ABC et enfin (dessin 19) que (OJ) est hauteur du triangle OBC.

La manipulation est assez précise ; en effet, les angles marqués comme droits ont un écart de moins de 1° avec 90°.

Cette manipulation et les propriétés qu'elle montre donnent des indications heuristiques pour l'analyse mathématique du paragraphe précédent.

Voici deux méthodes pour construire le point I.

La première méthode (cf. dessin 20) consiste à marquer les points A' et B' tels que OA' = OA et OB' = OB, grâce à la macro de report ; la diagonale du parallélogramme représentant le rectangle OA'PB' est la hauteur issue de O.

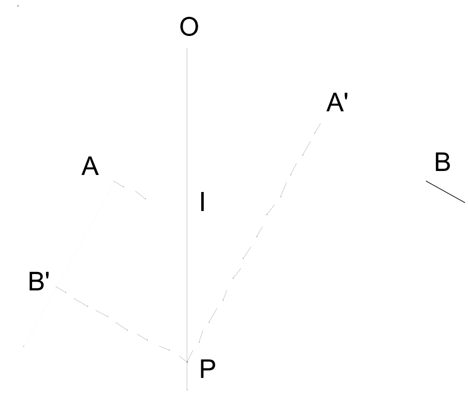
Mais le point I étant déterminé comme intersection de deux droites, la construction échoue quand les points O, A, B sont alignés (ie $\alpha = 0$).

La deuxième méthode consiste à construire le point I comme image du point B par l'homothétie de centre A et dont le rapport k [12] se calcule, à partir des longueurs OA et OB :

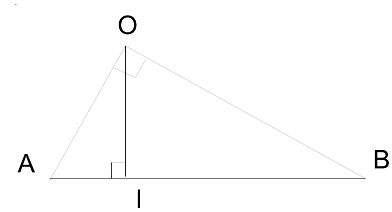
$$k = \frac{AI}{AB} = \frac{AI}{AO} \times \frac{AO}{AB} = \frac{OA^2}{AB^2} = \frac{OA^2}{OA^2 + AB^2},$$

car $\frac{AI}{AO} = \frac{AO}{AB}$.

12 le calcul qui suit montre que $\frac{AI}{IB} = \frac{OA^2}{OB^2}$, ce qui justifie la note précédente.



dessin 20



dessin 21

Cette deuxième construction est préférable, car elle est valable pour toutes les positions du RON.

6. Considérations heuristiques

Il y a encore d'autres façons d'aborder le problème du projeté orthogonal d'un point sur un plan. On peut ainsi commencer par l'étude du cas particulier d'un triangle ABC équilatéral. Voici un texte d'exercice qui est inspiré du sujet 62 de la session expérimentale 2008.

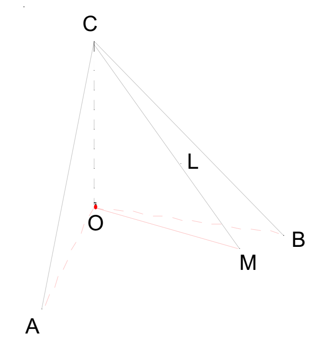
L'espace est rapporté au RON (O,i,j,k).
En choisissant le nombre positif a pour que

la figure soit lisible, placer les points A(a,0,0) *;* B(0,a,0) *;* C(0,0,a). *M est un point du segment* [AB]. *le point L est le projeté orthogonal du point* O *sur la droite* (CM). *L'objectif est de déterminer le lieu du point* L *quand* M *décrit le segment* [AB].
En s'appuyant sur un dessin papier-crayon, réfléchir aux questions suivantes
— Comment montrer que $CO^2 = CL.CM$ *?*
— Le point I étant le milieu de [AB], *on appelle* H *le projeté orthogonal de* O *sur* [CI].
Quelle est la nature du triangle CLH *? Conséquence pour le lieu de* L *?*
— Comment montrer que la droite (OH) *est perpendiculaire au plan* ABC *? Quel est le rôle du point* H *pour le triangle* ABC *?*
— Utiliser ces propriétés pour dessiner avec un logiciel 2D*, à partir d'un RON mobile, le triangle* ABC *et le point* H.
— Quel est le lieu du point L *?*

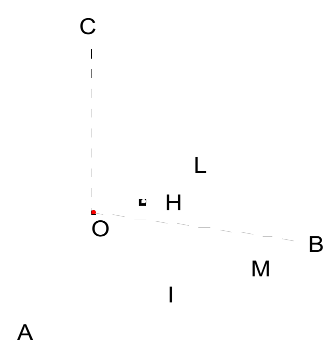
Dessin avec le logiciel 2D [13]

Il est facile de montrer que le point H, projeté orthogonal de O sur le plan ABC est un point L particulier, de même que les milieux J et K des côtés [CB] et [CA]. En s'appuyant sur les considérations heuristiques de l'expérimentation et les éléments développés en début du paragraphe 5 on montre que le point H est l'orthocentre du triangle ABC. Il est donc en même temps centre de gravité, centre du cercle circonscrit et centre du cercle inscrit ; on le construit aisément, en tant que centre de gravité (propriété affine).

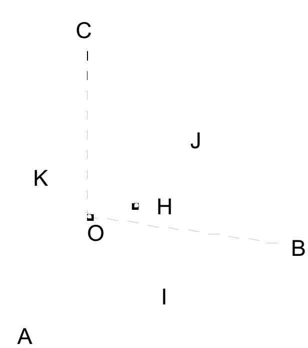
D'autre part, le fait que le triangle LCH est un triangle rectangle en L montre que le point L se trouve sur le cercle de diamètre [CH]. Son lieu est l'arc de ce cercle contenu dans le triangle. Ceci se traduit en dessin :



dessin 22



dessin 23

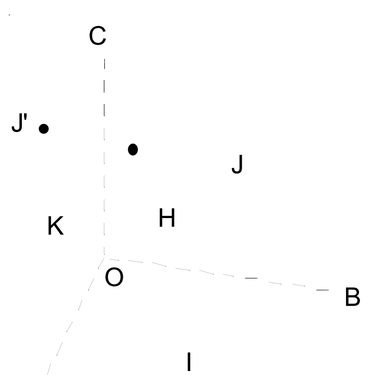


dessin 24

13 Dessin numéro 08 (lieu de L)

On peut dessiner l'ellipse représentant le cercle complet ; en effet on en connaît déjà quatre points : C, H, J et K ; on peut en construire un cinquième, par exemple le symétrique J' de J par rapport au milieu de [CH], qui est le centre de l'ellipse.

On construit alors le point L comme intersection de cette ellipse avec le segment [CM], puis le lieu de L quand M varie sur [AB].



dessin 25

Dessin avec un logiciel 3D

Si on exécute le même dessin avec un logiciel 3D, on peut construire directement le point M comme intersection du segment [CM] avec le plan perpendiculaire à (CM) passant par O et demander son lieu. On n'a aucune raison de construire le point H. C'est sans doute la raison pour laquelle le sujet n°62 demande de s'intéresser au maximum de la longueur CL, qui est CH

L'importance du point H, projeté orthogonal du point O sur le plan ABC

Comme nous l'avons vu plus haut, il existe une autre raison d'introduire le point H, projeté orthogonal de O sur le plan ABC comme intersection du plan ABC avec la perpendiculaire à ce plan passant par O. Si on fait pivoter le RON mobile de façon que, sur le dessin, les point O et H coïncident, le plan ABC est alors parallèle au plan du dessin ; cela signifie que les éléments contenus dans le plan ABC sont dessinés en vraie grandeur.

On peut aussi réaliser la coïncidence des dessins des points O et H avec un logiciel 3D, ce qui permet de formuler certaines des conjectures que nous avons vues avec le logiciel 2D.

Si on revient ensuite au cas général d'un triangle ABC acutangle quelconque, les manipulations avec le logiciel 3D restent les mêmes. Pour le logiciel 2D, il faut faire intervenir les considérations développées au début du paragraphe 5, car le problème est alors de construire l'orthocentre du triangle ABC, donc les hauteurs issues de O de deux des triangles OAB, OBC et OCA.

7. Conclusion

Nous pensons, à travers ces deux exemples, avoir montré à quel point l'utilisation des logiciels 2D ou 3D conduisent à des activités différentes.

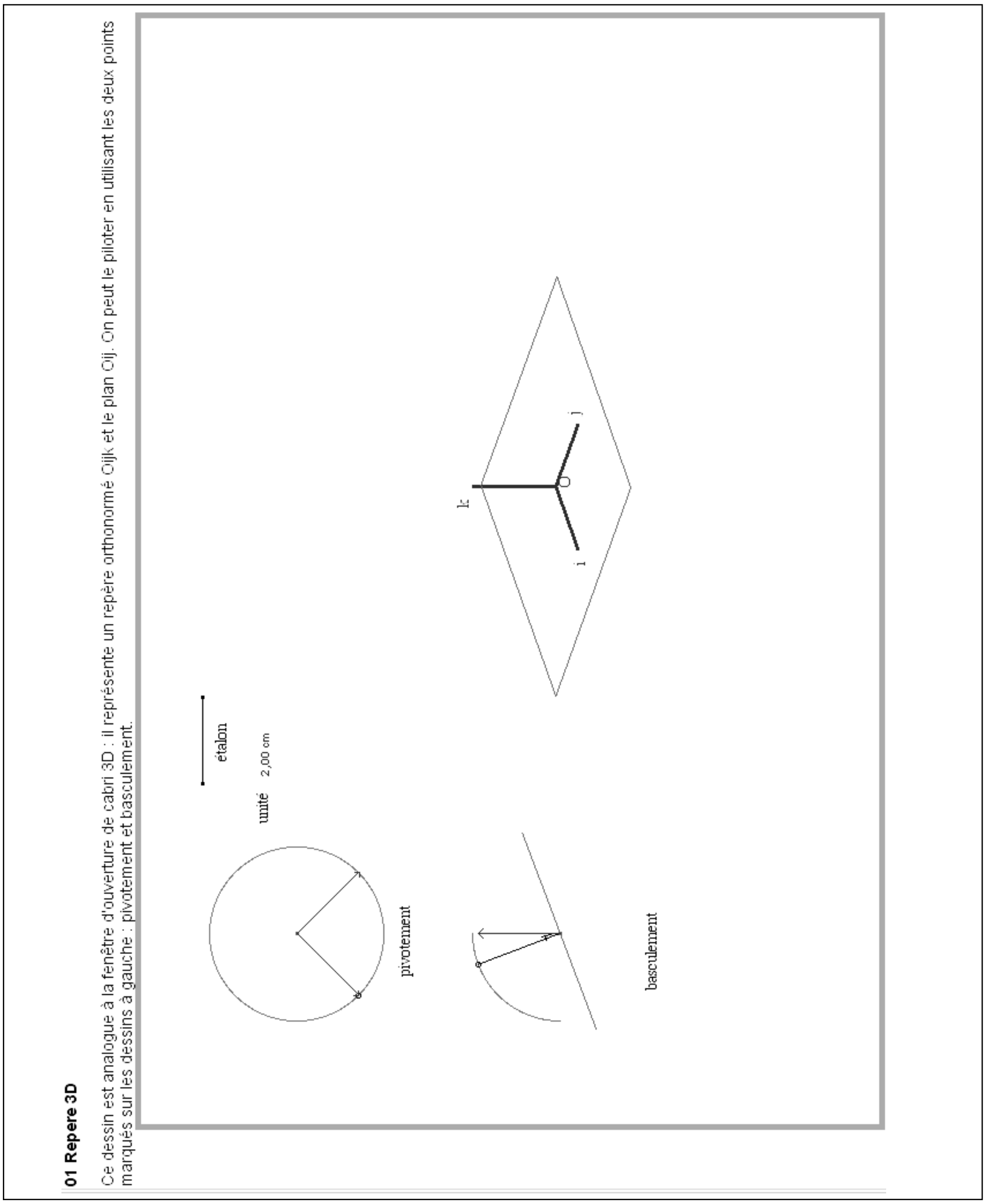
Les logiciels 3D contiennent beaucoup de mathématiques, mais elles sont cachées et ne se révèlent pas facilement. Un tel logiciel peut conduire à des conjectures, mais sans réellement mettre sur la voie d'une démonstration.

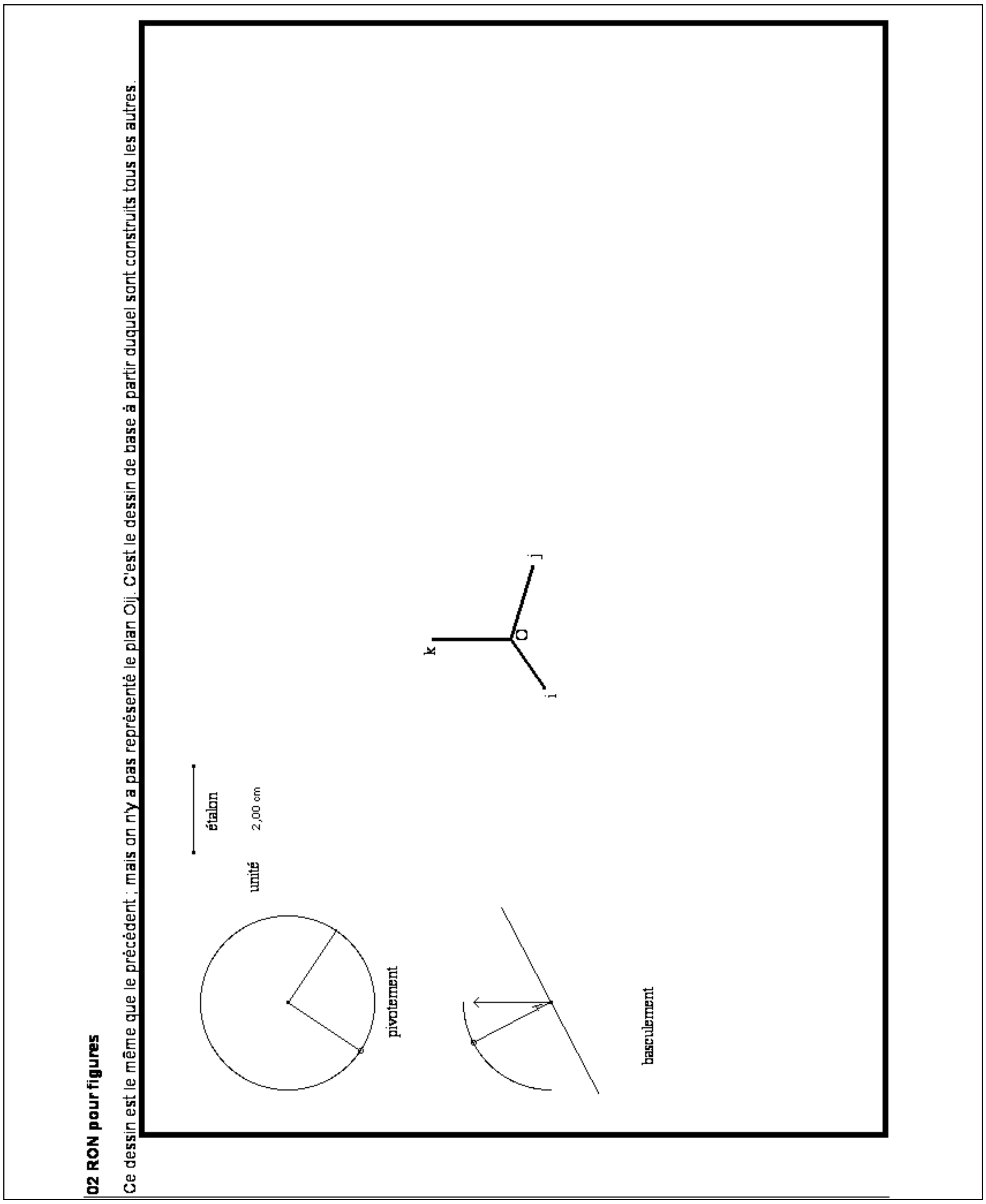
Les logiciels 2D ne contiennent évidemment pas les propriétés de la géométrie de l'espace ; c'est à l'utilisateur de les apporter. Nous pourrions prolonger cette analyse aux deux autres exercices de géométrie de l'espace (n°33 et n°72) de la session expérimentale 2008.

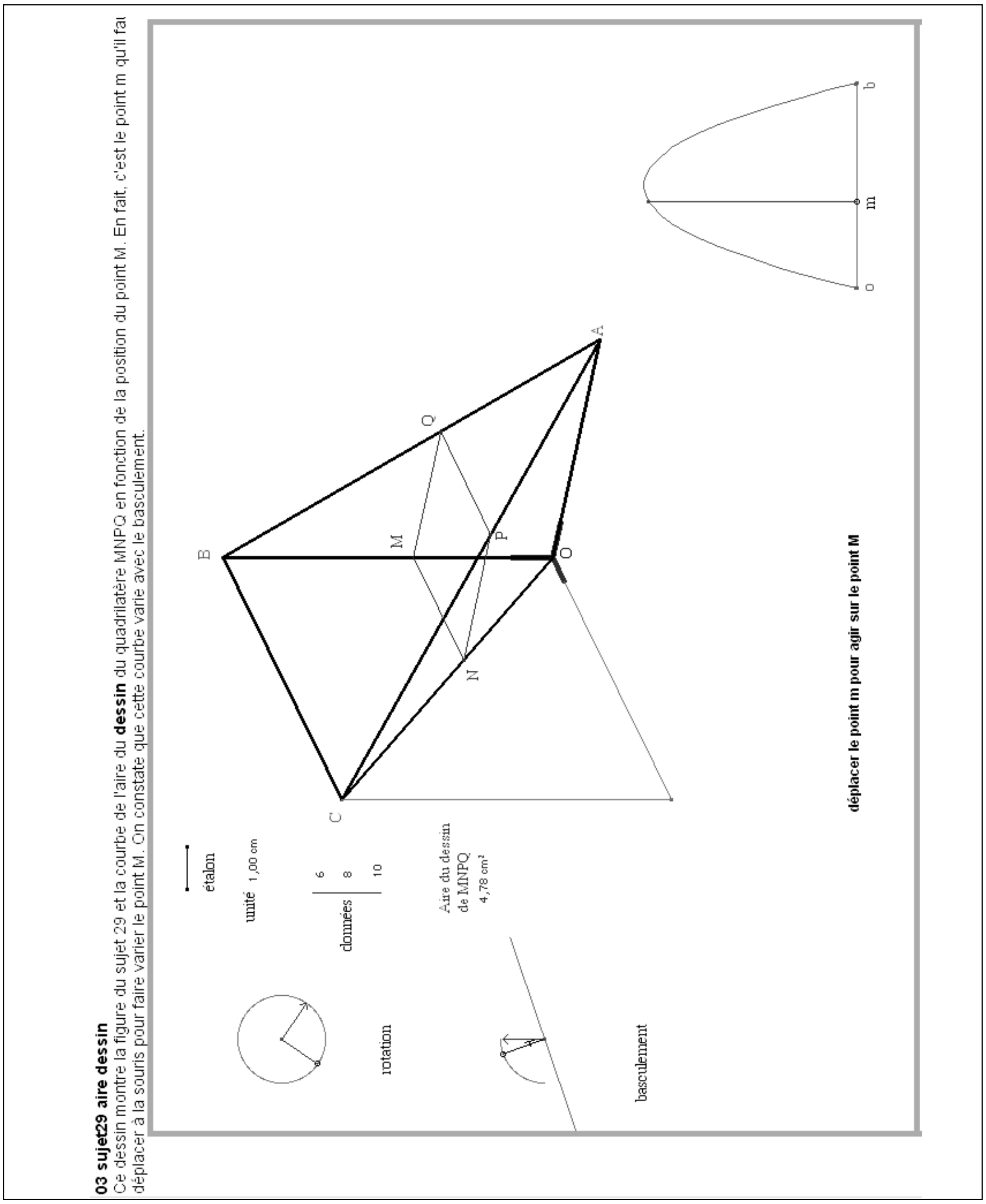
Dans ces exercices, comme d'ailleurs dans beaucoup d'exercices de géométrie de l'espace (mais aussi du plan), il semble que le logiciel ne soit utilisé que pour construire un dessin et faire émerger des conjectures. Le côté dynamique n'est pas suffisamment utilisé pour attirer l'attention des élèves, parfois par tâtonnement, sur des éléments et des propriétés utiles à la démonstration. Certes, ce n'est pas simple et les exercices qui donnent une rétroaction ne sont pas faciles à bâtir. Cependant nombre d'exercices proposés dans la littérature pourraient être améliorés en ce sens.

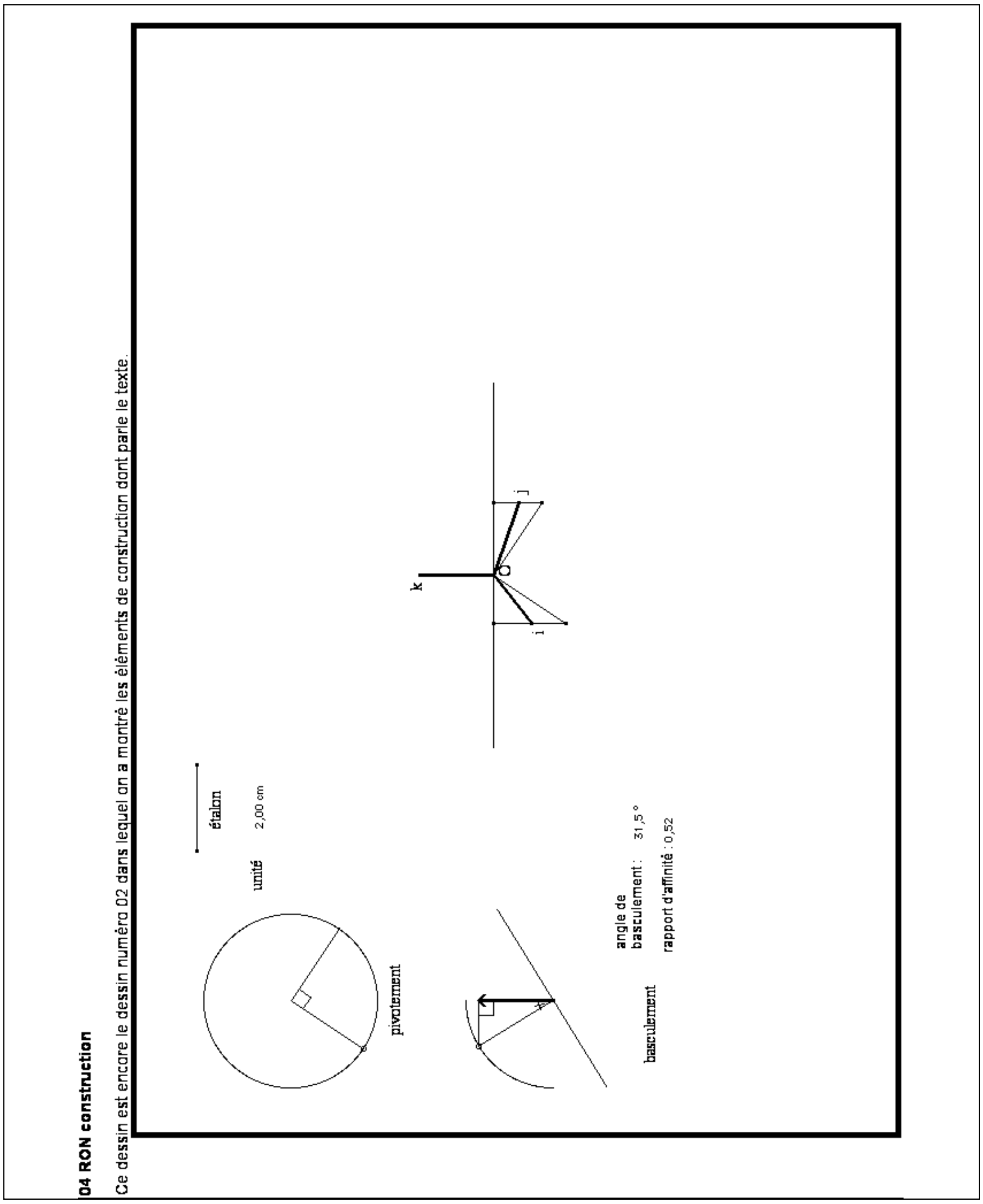
ANNEXES

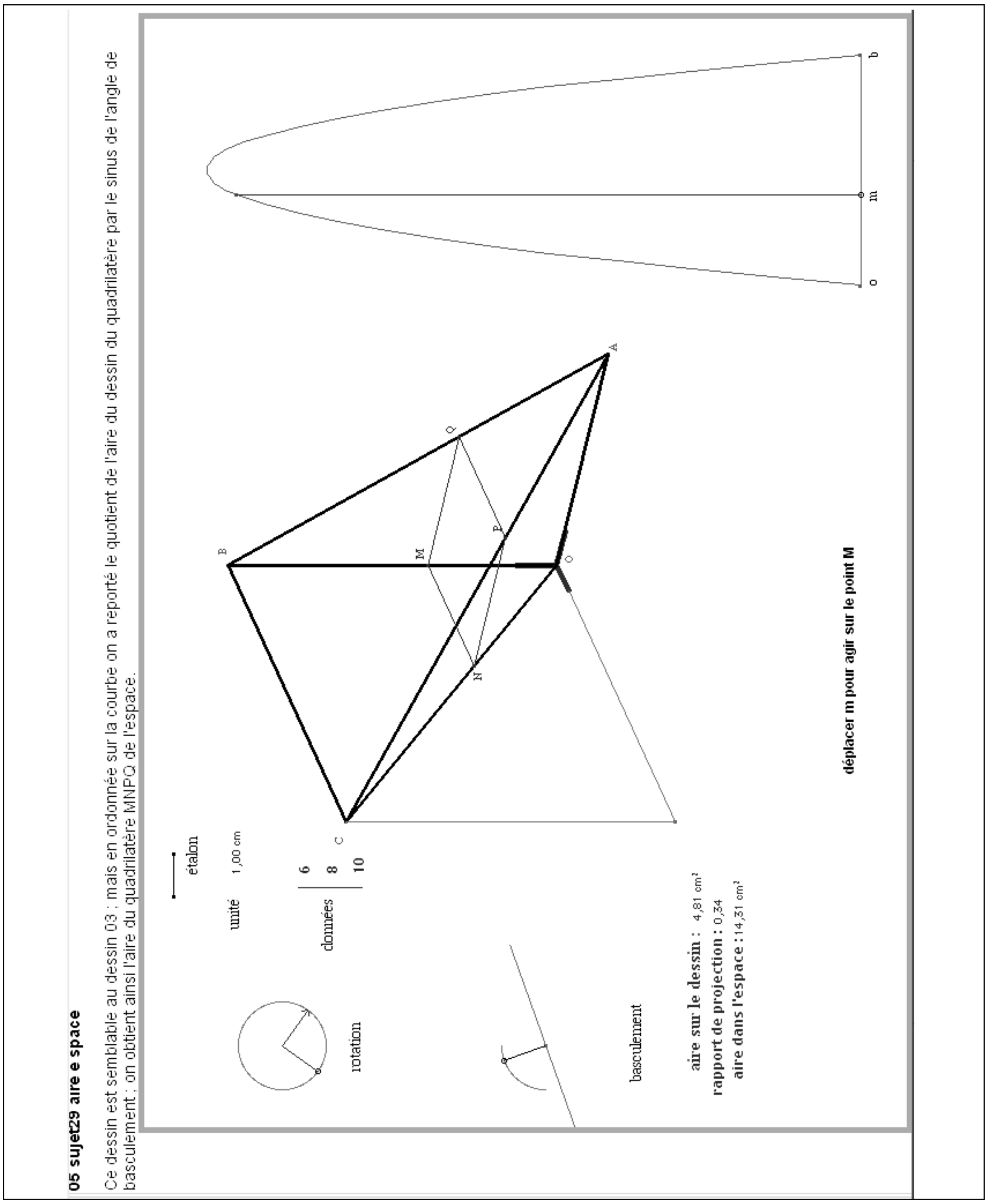
Les figures du site

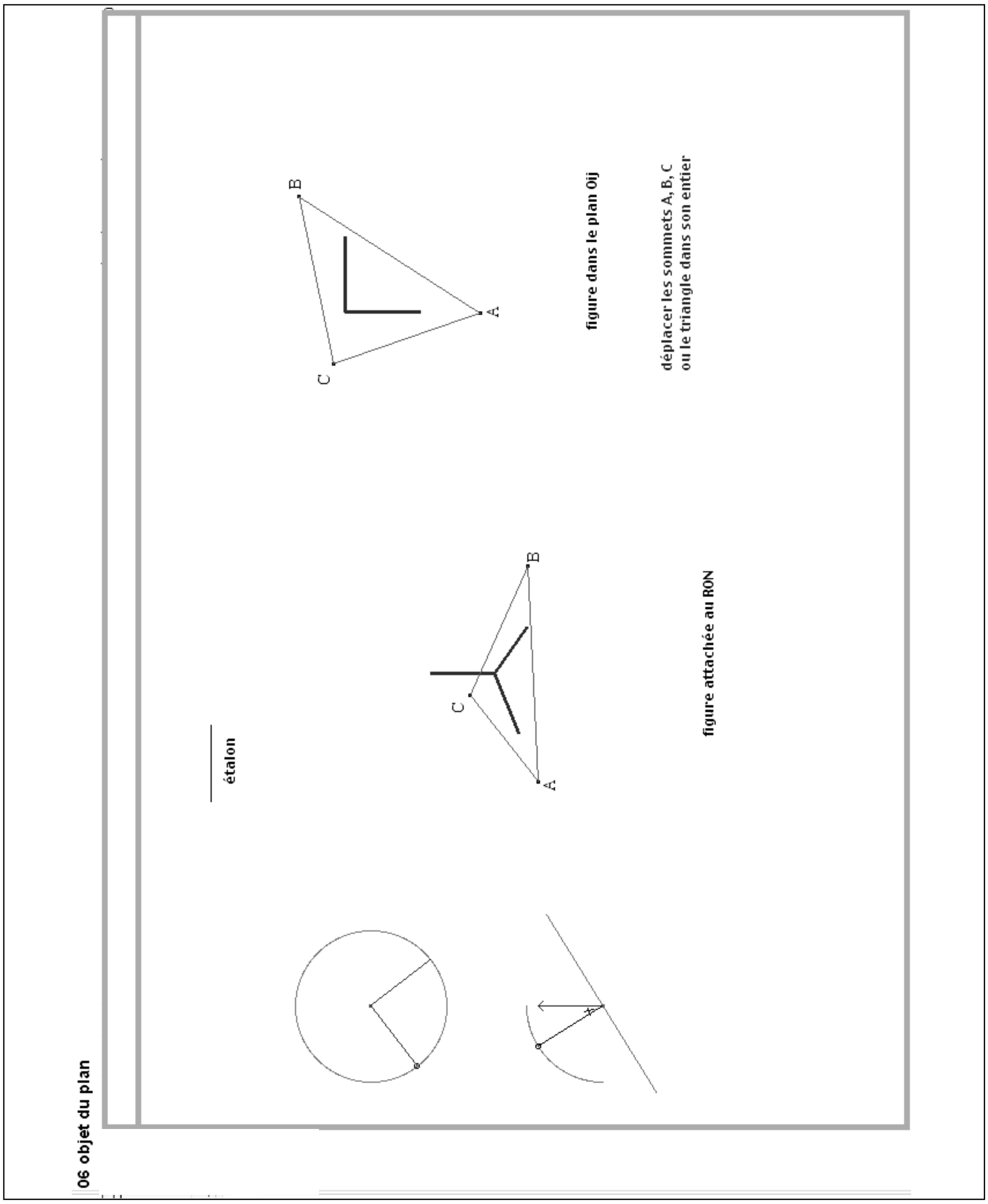



02 RON pour figures
Ce dessin est le même que le précédent ; mais on n'y a pas représenté le plan Oij. C'est le dessin de base à partir duquel sont construits tous les autres.
unité
étalon
2,00 cm
pivotement
basculement
k
O
i
j


03 sujet29 aire dessin
Ce dessin montre la figure du sujet 29 et la courbe de l'aire du **dessin** du quadrilatère MNPQ en fonction de la position du point M. En fait, c'est le point m qu'il fau
déplacer à la souris pour faire varier le point M. On constate que cette courbe varie avec le basculement.
étalon
unité 1,00 cm
données 6 8 10
Aire du dessin de MNPQ 4,78 cm²
rotation
basculement
A
B
C
O
M
N
P
Q
o
m
b
déplacer le point m pour agir sur le point M

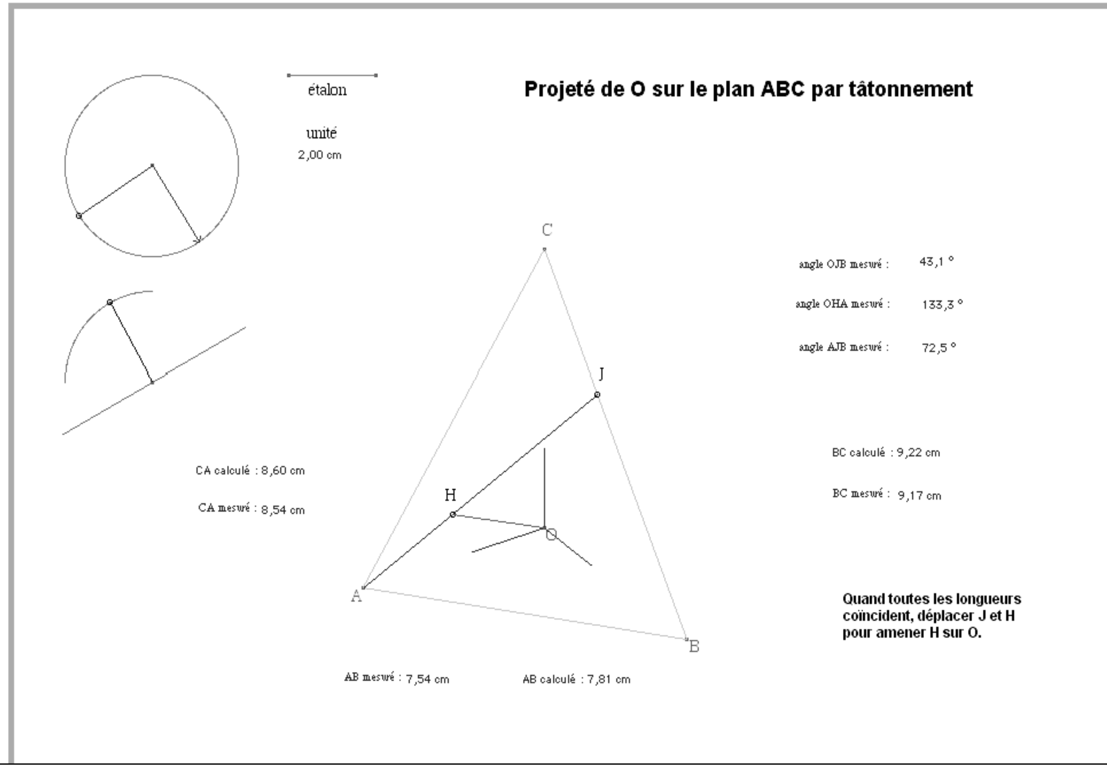

04 RON construction
Ce dessin est encore le dessin numéro 02 dans lequel on a montré les éléments de construction dont parle le texte.
étalon
unité 2,00 cm
pivotement
basculement
angle de basculement : 31,5 °
rapport d'affinité : 0,52
k
i
j
O

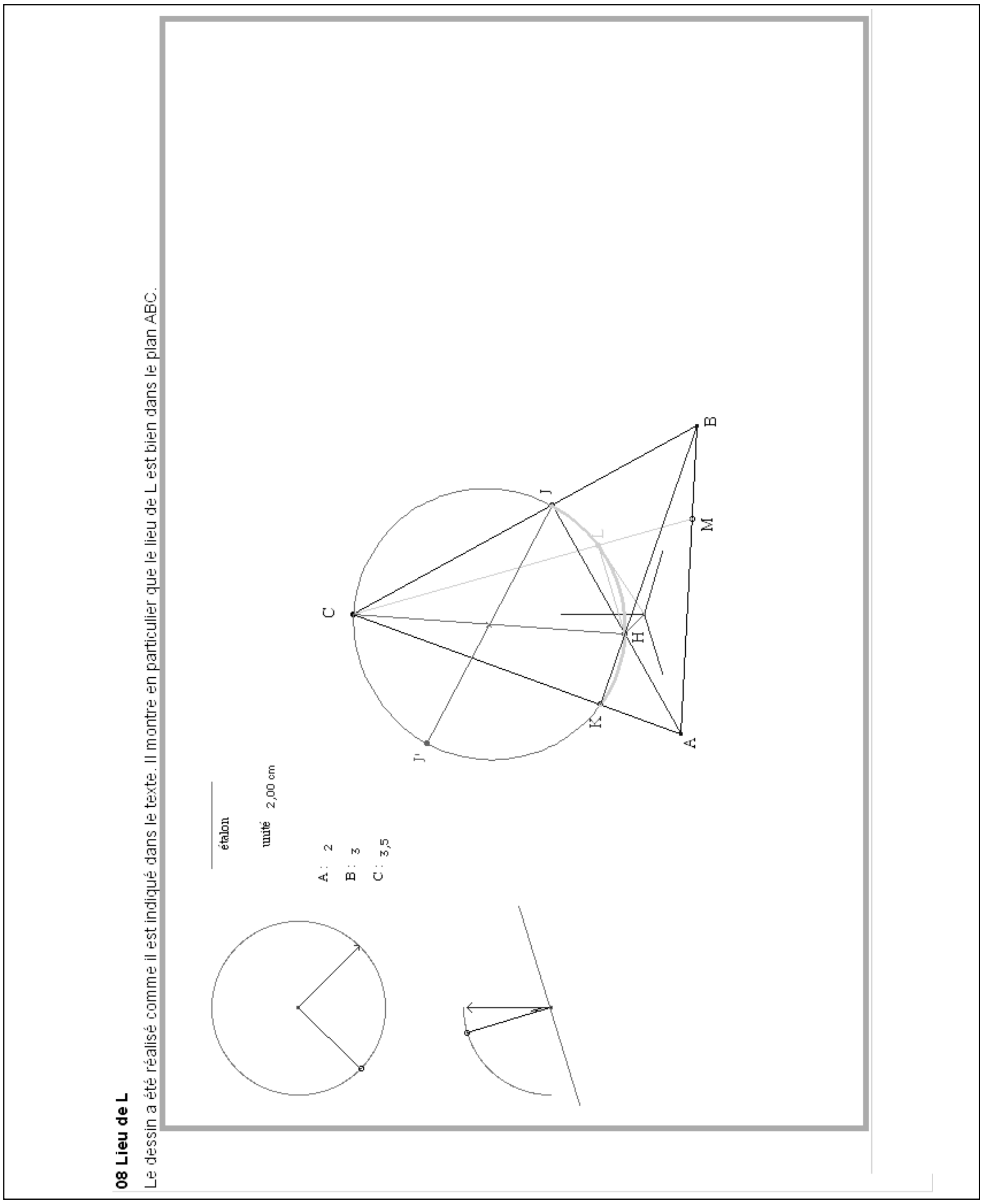

05 sujet29 aire e space
Ce dessin est semblable au dessin 03 ; mais en ordonnée sur la courbe on a reporté le quotient de l'aire du dessin du quadrilatère par le sinus de l'angle de basculement ; on obtient ainsi l'aire du quadrilatère MNPQ de l'espace.
rotation
unité
étalon
1,00 cm
données
6
8
10
basculement
aire sur le dessin : 4,81 cm²
rapport de projection : 0,34
aire dans l'espace : 14,31 cm²
A
B
C
O
M
N
P
Q
déplacer m pour agir sur le point M
o
m
b


06 objet du plan
étalon
B
C
A
figure dans le plan Oij
déplacer les sommets A, B, C
ou le triangle dans son entier
B
C
A
figure attachée au RON

07 tatonnement

Pour contrôler que le plan du triangle ABC est parallèle au plan du dessin, il faut s'assurer que les longueurs des côtés du **dessin** du triangle sont bien les longueurs réelles ; elles ont été calculées à partir des coordonnées. Le tâtonnement est facilité par le fait que le côté [AB] doit être horizontal sur l'écran (utilisation du pivotement) ; le basculement permet ensuite d'obtenir toutes les égalités de longueurs à la fois.
Le point J est attaché au segment [BC] ; il se déplace donc avec le RON. Si on modifie à la souris la position de J sur [BC], cette modification est conservée dans la mouvement du RON. Il en est de même du point H sur le segment [AJ].
Une fois que le plan ABC est parallèle au plan du dessin, en amenant le dessin du point H à coïncider avec celui du point O on place en fait la droite (OH) perpendiculaire au plan ABC.




08 Lieu de L
Le dessin a été réalisé comme il est indiqué dans le texte. Il montre en particulier que le lieu de L est bien dans le plan ABC.
étalon
unité 2,00 cm
A : 2
B : 3
C : 3,5
A
B
C
J
J'
K
H
L
M