EXISTENCE ET CONSTRUCTION DE L'ICOSAEDRE

Luc SINEGRE
Irem de Rouen,
CII Géométrie

Introduction

On donne souvent la démonstration *spatiale* du théorème de Desargues comme un exemple d'une situation où passer de la dimension $n = 2$ à $n = 3$ est simplificatrice. *A contrario* il est très fréquent de faire la démarche inverse. Par exemple pour analyser un objet spatial on commence par étudier les configurations planes formées par certains des points. Ce travail qui est purement analytique s'avère très utile lorsqu'on *ne voit pas bien dans l'espace* puisque repérer des faces ou savoir déterminer des sections revient à connaître le solide. Mais cette analyse n'est pas en général suffisante pour remplacer la synthèse, c'est-à-dire la recomposition totale de l'objet.

L'inversion spatiale qui est une transformation de l'espace privé d'un point sur lui-même peut envoyer une configuration de points cosphériques sur une configuration de points coplanaires et permet, quant à elle, après analyse, une synthèse *globale*. Hélas très peu de problèmes ressortent de cette démarche. Mais comme les sommets des solides réguliers sont cosphériques on peut utiliser cette inversion pour donner de cette manière *une preuve entièrement plane* de l'existence des deux polyèdres réguliers les plus sophistiqués, l'icosaèdre et le dodécaèdre.

Je traite ici le cas de l'icosaèdre régulier. L'existence du dodécaèdre s'en déduit alors par dualité (on place les sommets du dodécaèdre sur les centres des faces de l'icosaèdre dual) mais le lecteur pourrait aussi bien appliquer cette méthode dans ce cas.

Une définition *générale* et *rigoureuse* d'un polyèdre régulier n'a pas sa place[1] ici mais on pourra s'en passer dans un premier temps. Je donne une preuve intuitive et naturelle de l'existence de l'icosaèdre qui repose sur une configuration plane simple. Le solide platonicien est extrait du plan par une projection stéréographique inverse, c'est-à-dire une transformation[2].

Voici comment on peut présenter le problème.

> Le polyèdre en carton que l'on réalise avec des triangles équilatéraux identiques en mettant cinq triangles autour de chaque sommet se referme apparemment d'un manière parfaite. Mais cette propriété n'est peut-être qu'une approximation ? Si l'on peut construire, à partir d'une figure plane, 12 sommets cosphériques qui s'ordonnent de manière à ce que autour de chaque sommet on trouve cinq triangles équilatéraux adjacents et tous identiques la question sera tranchée.

Pour commencer nous analyserons la figure que produirait la projection stéréographique appliquée à un icosaèdre, s'il existait. Nous terminerons par une construction *effective*.

Analyse de l'icosaèdre

Rappelons pour commencer quelques propriétés élémentaires qui sont utiles.

Proposition
L'icosaèdre, s'il existe, a un centre de symétrie qui est équidistant de tous ses sommets.

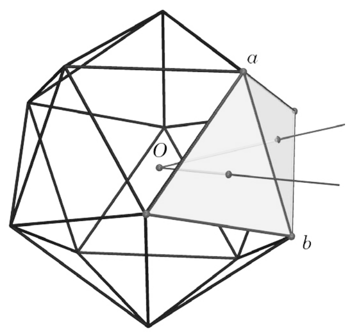


Figure 1

En effet les deux axes de deux faces triangulaires ayant une arête $[a,b]$ commune sont coplanaires puisque situés dans le plan médiateur de $[a,b]$ (*cf.* figure 1). Ils ne sont pas parallèles car les faces ne sont pas coplanaires. Leur point d'intersection O est donc équidistant de chacun des sommets des faces. En résumé les sommets de l'icosaèdre sont situés sur une sphère de centre O.

Le point O est aussi centre de symétrie. En effet notons $a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ cinq sommets adjacents à un sommet donné S de l'icosaèdre

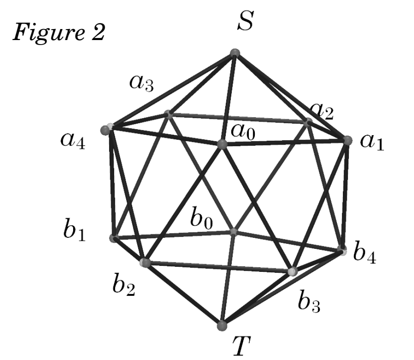
1 Arnaudiès (Les cinq polyèdres réguliers de $\mathbf{R}^3$ et leurs groupes, CDU-SEDES. 1969) pose la définition suivante :
Soit P une partie finie de la sphère S_2 contenant au moins quatre points non coplanaires ; nous dirons que P est un polyèdre régulier si les propositions suivantes sont vérifiées
• Pour tout sommet x de P le nombre d'éléments de $P - \{x\}$ non situés à une distance minimum δ de x ne dépend pas de x. Ces k éléments forment un polygone régulier.
• le symbole δ qui précède vérifie en outre que pour tout x et y de P il existe des points tels que $x_0 = x, x_1, \dots x_n$ tels que $x_i \in P$ et $|x_i x_{i+1}| = \delta$ pour tout i.

2 Ou mieux comme écrivait Chasles une *déformation*.

(*cf*. figure 2). Les points $a_0\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ appartiennent à la sphère de centre O et de rayon Oa_0 et à la sphère de centre S et de rayon Sa_0. Ils sont donc coplanaires et cocycliques. Comme on retrouve entre eux la longueur du côté du triangle équilatéral qui sert de base à notre construction, ils forment ainsi les sommets d'un pentagone régulier.

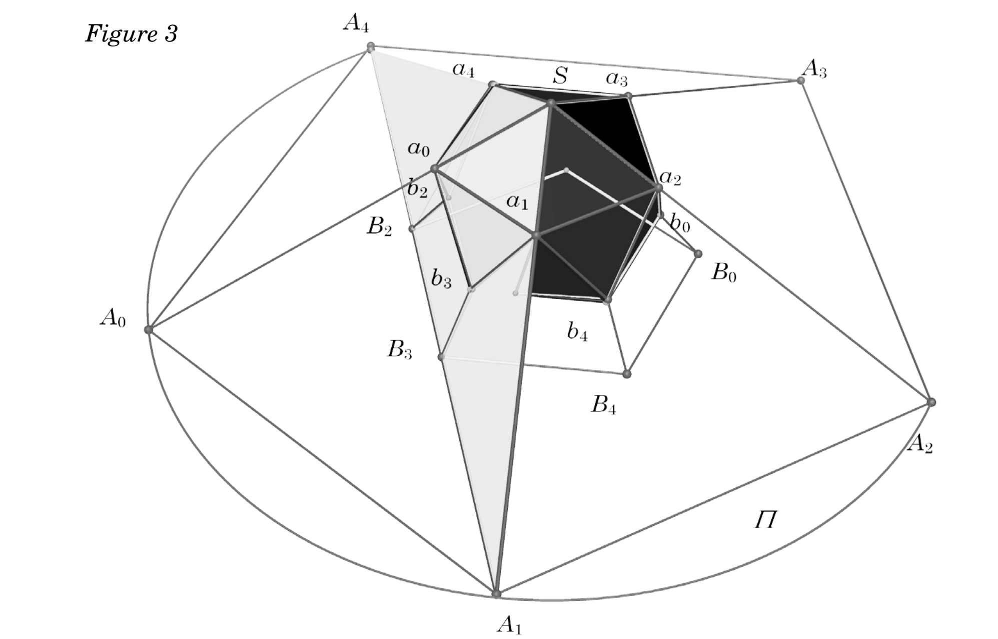
L'isobarycentre de la pyramide $(S\,a_0\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4)$ appartient à l'axe du cercle circonscrit à $a_0\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ tout comme O. Cet axe contient également, par le théorème du barycentre partiel l'isobarycentre des sommets $(T\,b_0\,b_1\,b_2\,b_3\,b_4)$ qui n'ont pas encore été considérés. Finalement les plans des pentagones $(a_0\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4)$ et $(b_0\,b_1\,b_2\,b_3\,b_4)$ sont donc parallèles et S et T sont symétriques par rapport à O. Cette situation se reproduit donc pour tous les sommets adjacents à un sommet donné.

Figure 2



On considère désormais (*cf*. figure 3) la projection stéréographique de pôle S de la sphè-

Figure 3



re circonscrite au polyèdre sur le plan tangent en T, Π . Comme le plan $(a_0\, a_1\, a_2)$ est perpendiculaire au plan Π la projection stéréographique se confond pour les points du cercle circonscrit à $(a_0\, a_1\, a_2)$ avec l'homothétie de centre S qui envoie le plan $(a_0\, a_1\, a_2)$ sur Π. Les images $(A_0\, A_1\, A_2\, A_3\, A_4)$ de $(a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4)$ forment donc un pentagone régulier.

Les sommets S $a_1\, b_3\, b_2\, a_4$ adjacents à a_0 sont coplanaires. Les points $A_1\, B_3\, B_2\, A_4$ *sont donc alignés.*

La projection stéréographique de l'icosaèdre, relativement à l'un de ses sommets S et donc donnée par la figure plane suivante (cf. figure 4) qui est formée d'un pentagone régulier et du pentagramme formé par ses diagonales ; on dit encore, pentacle ou étoile à cinq branches.

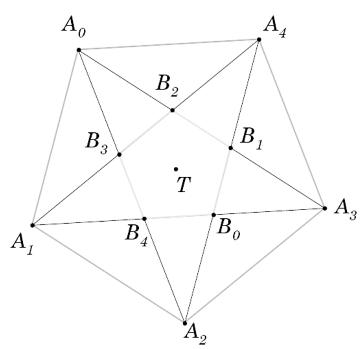


Figure 4

Notons pour finir ce paragraphe que dans un pentacle les points $A_0\, B_2\, B_4\, A_1\, T$ sont cocycliques.

Les quatre premiers points le sont par symétrie par rapport à la médiatrice de $(A_0\, A_1)$. L'angle au centre $(A_0\, TA_1)$ vaut le double de $(A_0A_3A_1)$ soit 2α et comme les diagonales découpent des angles égaux α sur chaque sommet, l'angle en B_2 lu dans le triangle $A_0\, B_2\, A_1$ est supplémentaire de 3α. Comme 5α est plat, (A_0TA_1)= $(A_0\, B_2\, A_1)$ et le point T appartient lui aussi au cercle circonscrit à $A_0\, B_2\, B_4\, A_1$.

Construction de l'icosaèdre à partir du pentacle

On s'est donné un plan Π et δ une droite perpendiculaire en T à Π. Pour tout point A de Π on construit le pentagone d'axe δ de centre T et de sommet A, et son pentagramme associé, c'est-à-dire l'étoile à cinq branches qui lui correspond. On *pose* alors un triangle équilatéral de sommet S sur l'un des côtés AA' du pentagone de manière que S appartienne à δ. Plus précisément S est à l'intersection de la sphère de centre A et de rayon AA' avec l'axe δ (*cf*. figure 5). La sphère de diamètre [ST] rencontre les demi-droites [SA) et [SA') en a et a'. Le triangle équilatéral (Saa') est l'une des faces recherchées. Nous construisons ainsi à partir de l'étoile à cinq branches (pentacle) les douze sommets par projection de sommet S du plan sur la sphère.

Synthèse

La figure 6 est une copie de la figure précédente qu'on a un peu nettoyée. On regarde désormais le côté [AA'] de face.

Comme on a construit le point S sur l'axe de manière à ce que le triangle SAA' soit équilatéral, sur la sphère le triangle Saa' l'est aussi.

La pyramide supérieure de sommet S ainsi construite à partir du grand pentagone de base $AA'A''$etc. est donc constituée de triangles équilatéraux puisque ses faces se

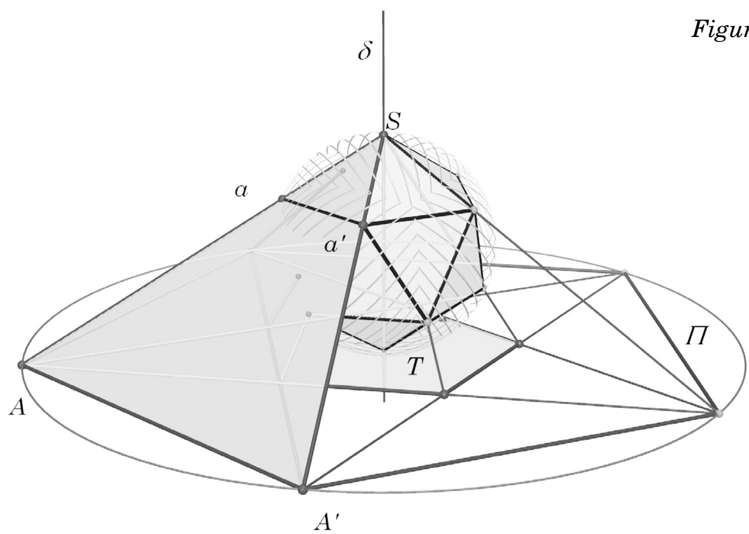


Figure 5

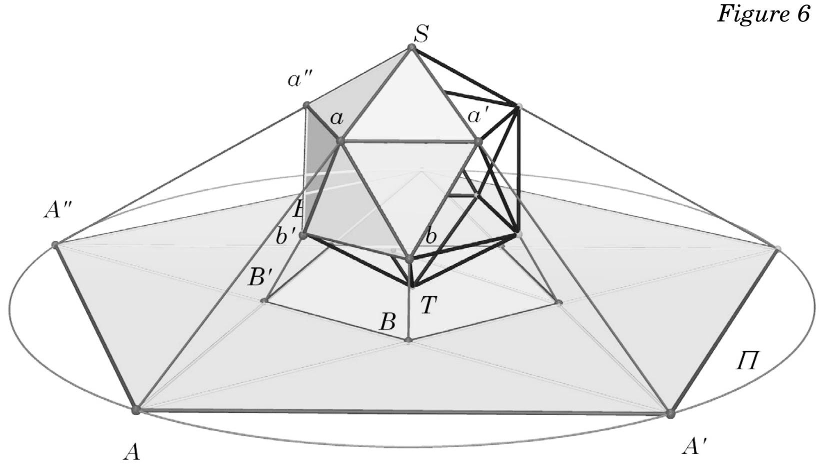
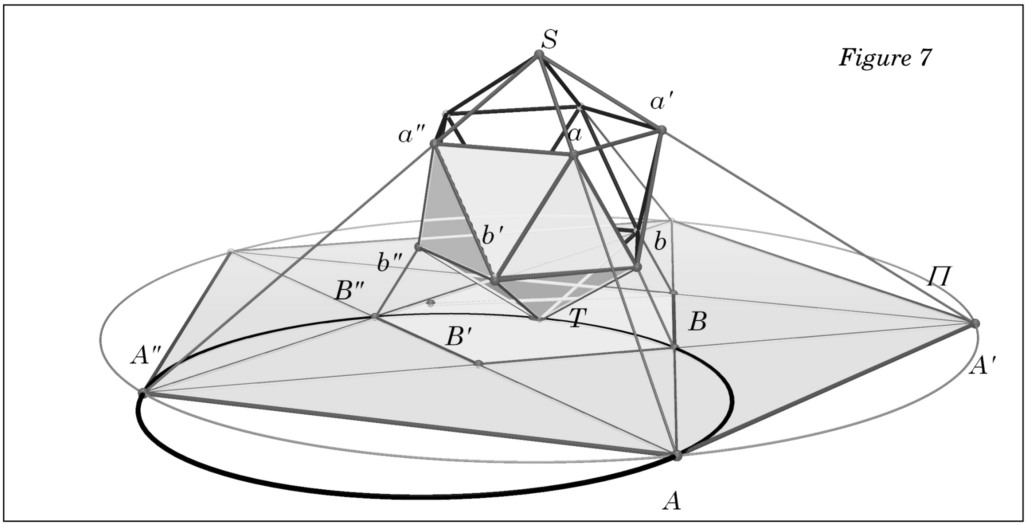


Figure 6



déduisent du triangle équilatéral Saa' par la rotation d'axe (ST) et d'angle $2\pi/5$.

La pyramide inférieure de sommet T est la projection du petit pentagone de base $BB'B''$etc. Elle est aussi constituée par des triangles *a priori* isocèles puisque la projection se réduit dans ce cas à une homothétie du pentagramme vers la sphère. Il faut démontrer que ces triangles sont aussi équilatéraux, tous comme ceux qui forment la couronne intermédiaire.

Considérons la pyramide oblique de sommet a et de base $Sa'bb'a''$ de la figure 6 et montrons qu'elle est régulière. Les points $a'bb'a''$ images de $A'BB'A''$ sont coplanaires et cosphériques, ils appartiennent donc à un cercle. Le point a qui est équidistant de a', de S et de a'' appartient donc à l'axe de ce cercle. On a donc bien $aa' = ab = ab' = aa'' = aS$.

En effectuant une rotation d'axe (ST) et d'angle $2\pi/5$ on obtient la même propriété pour la pyramide de sommet a' : $a'S = a'a = a'b$. Le triangle $aa'b$ est ainsi équilatéral, et avec lui, par rotation, tous ceux de la couronne centrale.

Considérons maintenant la pyramide oblique de sommet b' dont la base, $a''\ a\ b\ T\ b''$, est l'image des points $A''\ A\ B\ T\ B''$ du pentacle qui sont cocycliques. Pour aider le lecteur on a de nouveau changé de point de vue pour mettre AA'' de face sur la figure 7 .

Les points $a''\ a\ b\ T\ b''$ sont donc sur un même cercle dont l'axe contient b' qui est, comme nous venons de le voir, équidistant de a'' a et b. Finalement $b'b = b'T = b'c = b'c'$, et par rotation le polyèdre construit est bien un icosaèdre.

Le contrat est bien rempli. Nous venons de construire douze points sur la sphère, et vingt triangles équilatéraux égaux qui se répartissent cinq par cinq autour des sommets.