
L'ENSEIGNEMENT DE L'ARITHMETIQUE AU COLLEGE

Eléments de comparaison entre la France et la Syrie

Maha MAJAJ
Université Lyon 1
LEPS- LIRDHIST¹

Résumé : Dans cet article, nous nous intéressons à la place de l'enseignement de l'Arithmétique au collège en Syrie et en France. Une première étude des programmes et d'une collection de manuels français et des manuels officiels syriens montre des différences significatives entre les deux pays concernant les contenus et les méthodes. Une comparaison plus systématique entre les deux systèmes scolaires offre des pistes pour éclairer les choix faits dans chacun des deux pays.

I. Introduction

Nous considérons dans notre travail l'Arithmétique au sens de Théorie des Nombres, à savoir le domaine mathématique qui étudie les différentes questions relatives aux nombres entiers : division euclidienne, divisibilité, ppcm, pgcd, nombres premiers entre eux, nombres premiers et décomposition en facteurs premiers. L'Arithmétique joue un rôle important pour l'algorithmique et l'informatique ; en outre, elle permet dans les domaines numériques de pratiquer une démarche scientifique : conjecture, recherche de contre-exemple, construction d'une argumentation.

Alors qu'en Syrie, l'Arithmétique est présente de manière continue dans les programmes, après plusieurs années de quasi-disparition dans les programmes français, elle a fait depuis quelques années sa réapparition au collège et au lycée en France². Il nous est alors apparu pertinent de conduire une étude comparative pour tenter d'éclairer les choix faits dans chacun des deux pays.

¹ Laboratoire d'Etude du Phénomène Scientifique, EA 4148, équipe de Didactique et d'Histoire des Sciences et des Techniques, La Pagode, 38 Bd Niels Bohr, 69622 Villeurbanne Cedex.

² Il faut noter cependant que l'arithmétique vient de disparaître des nouveaux programmes de seconde mis en place en France à la rentrée 2009.

A notre connaissance, aucune étude n'est disponible pour la Syrie. Pour la France, nous avons retenu quatre études récentes. Concernant le lycée, dans le cadre de cette réintroduction, Battie (2003a, 2003b) a conduit une étude mettant en lumière les potentialités de l'Arithmétique pour l'apprentissage du raisonnement mathématique en classe de terminale scientifique, l'étude conduite par Ravel (2002, 2003) mettant par ailleurs en évidence le fait que l'aspect algorithmique mis en avant par les programmes était peu visible dans les manuels de 1998. Concernant le collège, l'Irem de Lyon a publié en 2004 une brochure sur l'enseignement de l'arithmétique au collège (Anselmo & al., 2004), qui se compose de deux parties. La première partie est consacrée à une réflexion sur les objectifs de l'enseignement de l'arithmétique et sur la place du calcul au collège. La seconde partie propose des activités analysées pour les différents niveaux de classe. Ces activités qui prennent des formes variées (résolution de problèmes, construction d'algorithme, recherche de preuve, jeu) ont toutes fait l'objet d'expérimentation. L'Irem de Toulouse a également publié en 2005 une brochure concernant un suivi en arithmétique de la troisième à la terminale à travers des tests posés dans des classes de troisième, seconde générale et première (Destainville & al., 2005).

Dans le travail que nous présentons ici, nous avons choisi d'étudier la place occupée par l'Arithmétique au collège après les changements intervenus dans les deux systèmes éducatifs. Notre corpus d'étude se compose des manuels officiels syriens en cours - que nous avons traduit de l'Arabe au Français, des programmes français (2005) et de la période précédente (1997), des documents d'accompagnement des programmes français et d'une collection de manuels français de collège en

cours. La différence entre les deux corpus tient à une différence concernant les instructions officielles entre les deux pays. En effet, en Syrie, les auteurs de programmes sont aussi les auteurs des manuels, qui sont des manuels officiels, et ce sont ces derniers qui fixent ce qui doit être enseigné.

En Syrie, depuis 2002, des modifications importantes ont été apportées aux manuels scolaires de l'École primaire jusqu'au Lycée. À la suite de ce changement, la taille des manuels a diminué, ce qui a entraîné un changement significatif pour la partie Arithmétique. Nous présentons plus loin la place et les fonctions de l'Arithmétique dans ces nouveaux manuels.

En France, la place de l'arithmétique a diminué dans les années quatre-vingt. À partir de la rentrée 1996, elle fait progressivement retour dans les programmes de l'enseignement secondaire français après une quinzaine d'années d'absence. En particulier les notions de PGCD et de nombres premiers entre eux ont été réintroduites en troisième en 1999, tandis que les notions de nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers ont été réintroduites à la rentrée 2001 en seconde.

Dans la brochure publiée par l'Irem de Lyon en 2004 (Anselmo & al., 2004), les auteurs signalent que le document d'accompagnement du programme (1998) de la classe de 3ème laisse entrevoir deux raisons du retour de l'arithmétique au collège en 1995 :

« D'une part, l'informatique qui a révolutionné les modes de calcul, fait une large utilisation des algorithmes dans certains domaines d'application avancée, tel le chiffrement de messages (cryptage et décryptage),

d'autre part, une bonne aisance en calcul mental permet d'opérer rapidement des transformations d'écriture sur les nombres, ce qui est indispensable à la conduite de calculs numériques et algébriques. »

(op. cit., p.5)

Dans nos analyses, nous distinguons l'Arithmétique comme outil et l'Arithmétique comme objet en référence à « la dialectique outil-objet » développée par Douady (1986). Les notions arithmétiques jouant alternativement le rôle d'outil pour résoudre un problème et d'objet prenant place dans la construction d'un savoir organisé.

Une dimension outil : l'Arithmétique est alors considérée comme un outil pour résoudre des problèmes émergeant dans des contextes internes ou externes aux mathématiques. L'Arithmétique comme outil apparaît dans le calcul numérique et le cryptage.

Une dimension objet : l'Arithmétique est alors considérée comme un ensemble structuré d'objets : multiple, diviseur, divisibilité, division euclidienne, pgcd, ppcm, décomposition en facteurs premiers, nombres premiers et nombres premiers entre eux. Elle étudie des propriétés intrinsèques des nombres entiers et des modes de raisonnement.

Les questions que nous posons sont les suivantes : quelle est actuellement la place de l'enseignement de l'Arithmétique dans les programmes et les manuels scolaires dans les deux systèmes éducatifs au collège ? Comment est-elle abordée comme outil/objet tout au long du collège en Syrie et en France ? Est-ce qu'il y a des différences dans les choix et les organisations des contenus et des méthodes, en regardant précisément quels sont les objets

qui existent à un moment donné comme outil et comme objet dans les deux systèmes éducatifs ? Quels objets sont absents ? Ces objets ont-ils existé à d'autres moments ? Quelle est la place de cet objet ? Quelles sont les fonctions occupées par l'arithmétique dans les deux systèmes éducatifs ?³

Pour apporter des éléments de réponses à ces questions, nous allons faire une analyse des programmes et des manuels scolaires des deux systèmes éducatifs.

II. Analyse des contenus d'arithmétique dans les manuels syriens, les programmes français, et une collection de manuels français

Dans ce paragraphe, nous présentons l'organisation des contenus d'arithmétique, niveau par niveau, comme objet d'étude et comme outil dans les manuels syriens (II.1), les programmes français (II.2) et les manuels français de la collection Triangle (II.3). L'analyse comparative des contenus d'enseignement dans les deux pays fera l'objet du paragraphe III.

En ce qui concerne la Syrie, nous n'avons pas eu accès aux programmes, mais seulement aux manuels, qui sont les manuels officiels. En effet, contrairement à ce qui se passe en France, il n'existe qu'un éditeur en Syrie (L'établissement public pour les imprimés et les manuels scolaires). En ce qui concerne la France, nous avons choisi une édition relativement utilisée en particulier dans la région lyonnaise où nous conduisons nos recherches, et qui est considérée comme ayant des contenus plutôt innovants, il s'agit de la collection « Triangle » éditée par Hatier.

³ Ce questionnement s'inscrit dans la perspective Anthropologique du Didactique (Artaud, 1997).

Pour faciliter la lecture, nous montrons dans le tableau suivant, les correspondances entre classes scolaires au collège en France et en Syrie.

Age	Les classes en France	Les classes en Syrie
11-12 ans	Sixième	Sixième
12-13 ans	Cinquième	Septième
13-14 ans	Quatrième	Huitième
14-15 ans	Troisième	Neuvième

II-1. Les manuels syriens

Dans ce qui suit, nous présentons l'organisation des contenus d'arithmétique, niveau par niveau, comme objet d'étude et comme outil dans les manuels syriens.

En classe de sixième : Nous n'avons trouvé qu'un chapitre concernant l'arithmétique, il s'intitule : « *Théorie des nombres* » dans lequel nous trouvons les objets suivants :

- 1- La divisibilité et les critères de divisibilité ;
- 2- Puissance ;
- 3- Diviseurs d'un nombre ;
- 4- Les nombres premiers ;
- 5- Le plus grand commun diviseur ;
- 6- les nombres premiers entre eux ;
- 7- La décomposition en facteurs premiers ;
- 8- Fraction irréductible ;
- 9- Racine carrée ;
- 10- Utiliser la décomposition en facteurs premiers pour trouver la racine carrée d'un nombre ;
- 11-1 Multiples d'un nombre ;
- 11-2 Multiples communs de deux nombres ou plus ;
- 11-3 Plus petit multiple commun ;

11-4 Trouver le PPCM en utilisant « décomposer en facteurs premiers » ;

11- 5 Le plus petit multiple commun des nombres premiers entre eux.

En classe de septième : Nous avons relevé un chapitre qui fait intervenir les objets de théorie des nombres comme outil dans le travail sur les fractions. Dans ce chapitre intitulé : « Nombres et écriture décimale », la notion de *multiple* est présentée comme outil pour la réduction au même dénominateur dans le cas où l'un des dénominateurs est un multiple de l'autre, et la notion de *plus grand diviseur commun* est utilisée également comme outil pour obtenir une fraction irréductible.

En classe de huitième : Deux chapitres font intervenir les notions de théorie des nombres comme outils, les deux chapitres sont :

1 : « Ensemble des nombres réels » : ce chapitre propose *le PGCD* comme outil pour simplifier des fractions ; *le multiple* comme outil pour obtenir des fractions égales.

2 : « Equations » : dans ce chapitre le *PPCM* est un outil pour la réduction au même dénominateur lors la résolution des équations avec fractions.

$$\text{Exemple : } \frac{3}{4}x - x - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}$$

Pour résoudre cette équation, on réduit au même dénominateur en cherchant le ppcm. Le ppcm est 12

$$\frac{9}{12}x - \frac{12}{12}x - \frac{8}{12}x = \frac{4}{12}$$

On multiplie ensuite par 12 les deux membres de l'équation :

$$9x - 12x - 8x = 4 \Rightarrow -11x = 4 \Rightarrow x = -\frac{4}{11}$$

En classe de neuvième : Les objets de la théorie des nombres interviennent comme outil dans trois chapitres qui sont les suivants :

1 : « La factorisation par le facteur commun » : dans ce chapitre le *PGCD* est un outil pour factoriser des expressions algébriques :

Exemple : Pour factoriser l'expression suivante : $5x^3 - 15x^2 + 35x$, nous trouvons le pgcd des coefficients. Le pgcd est ici 5 :

$$\text{Donc : } 5x^3 - 15x^2 + 35x = 5x(x^2 - 3x + 7).$$

2 : « Fractions rationnelles » : ce chapitre propose la *PPCM* comme outil pour la réduction aux mêmes dénominateurs pour additionner et soustraire des fractions rationnelles.

Exemple : calculer $\frac{7x}{2(1-x)} + \frac{x^2-3}{1-x^2} + 3$:

$$\frac{7x}{2(1-x)} + \frac{x^2-3}{(1-x)(1+x)} + \frac{3}{1}.$$

Le PPCM de ces dénominateurs est : $2(1-x)(1+x)$. Il est obtenu en faisant le produit des facteurs communs et des facteurs non communs.

$$\frac{7x}{2(1-x)} + \frac{x^2-3}{(1-x)(1+x)} + \frac{3}{1}.$$

$$1+x \quad 2 \quad 2(1-x^2)$$

$$\frac{7x(1+x) + 2(x^2-3) + 6(1-x^2)}{2(1-x)(1+x)} =$$

$$\frac{7x + 7x^2 + 2x^2 - 6 + 6 - 6x^2}{2(1-x)(1+x)} = \frac{3x^2 + 7x}{2(1-x)(1+x)}$$

3 : « Opérations sur les fractions rationnelles » : dans ce chapitre la *PPCM* est un outil pour résoudre des équations fractionnaires à une inconnue.

C'est ainsi que l'arithmétique en Syrie n'est objet d'étude qu'en classe de sixième, tandis qu'elle joue un rôle d'outil pour le calcul numérique tout au long du collège. Par conséquent deux fonctions de l'Arithmétique sont présentes dans les manuels Syriens: la fonction « Théorie des nombres » qui présente l'aspect théorique de l'Arithmétique, et la fonction « Calcul numérique » qui présente l'aspect pratique de l'arithmétique.

II-2 Les programmes français du collège

L'arithmétique apparaît dans les programmes français dans la partie « Travaux numériques » dans la colonne « Nombres entiers » dans les programmes de sixième et de cycle central, et ceci sans que le terme « Arithmétique » n'ait été introduit ; on rencontre ce terme une seule fois, dans un commentaire du programme de la classe de troisième qui souligne la fonction culturelle de l'Arithmétique :

Cette partie d'arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves. (Programme de troisième, 1998, p.85)⁴

Les élèves sont amenés en classe de sixième à travailler sur la division euclidienne et les nombres en écriture fractionnaire. Les programmes de cette classe mettent de plus en plus l'accent sur le vocabulaire de la division euclidienne, et nous trouvons trois compétences exigibles dans les pro-

⁴ Toutes les citations des programmes du collège des années 1996, 1997, 1998 qui vont suivre sont contenues dans le document du Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation Nationale et de la recherche : « Enseigner au collège mathématiques, Programmes et Accompagnement » réimpression mars 2004.

grammes 2004 qui ne sont pas présentes dans les programmes de 1996 :

- Reconnaître les situations qui peuvent être traitées à l'aide d'une division euclidienne et interpréter les résultats obtenus ;
- Calculer le quotient et le reste d'une division d'un entier par un entier dans des cas simples (calcul mental, posé, instrumenté) ;
- Connaître et utiliser le vocabulaire associé (dividende, diviseur, quotient, reste).

(Programme de sixième, 2004, p.10)⁵

Quant aux notions de multiple et de diviseur, elles sont rappelées sur des exemples numériques en sixième, avec une affirmation que les différentes significations du diviseur doivent être explicitées, tandis que pour la divisibilité, aucune compétence n'est exigible dans cette classe. Néanmoins, les critères de divisibilité sont y proposés pour reconnaître dans des cas simples que deux écritures fractionnaires différentes sont celles d'un même nombre.

Dans le document d'accompagnement de la classe de sixième, la nécessité de maîtriser le vocabulaire de l'arithmétique dans les activités mathématiques est affirmé :

Les élèves doivent être capables d'employer correctement le vocabulaire de l'arithmétique, de la statistique et de la géométrie dans divers types d'activités mathématiques (résolution d'exercices, description de figures, développement d'arguments...).

(L'accompagnement du programme de sixième, 1996, p.32)

Le calcul mental portant sur les nombres inférieurs à 100 reste une nécessité à ce niveau.

5 Programme de sixième, BO Hors série N°5, 9 septembre 2004.

« La résolution de problèmes numériques et, plus tard, le calcul algébrique supposent une bonne maîtrise des relations arithmétiques entre les nombres inférieurs à 100. »
(L'accompagnement du programme de sixième, 1996, p.33)

Au cycle central (classe de cinquième et de quatrième), c'est l'occasion d'approfondir la notion de multiple et de diviseur où « La reconnaissance de multiples et diviseurs est faite soit en utilisant les critères de divisibilité [...] soit en ayant recours au calcul mental ou à la division. »⁶, et d'aborder la simplification des écritures fractionnaires mais sans utiliser la notion de fraction irréductible.

La simplification a été abordée en classe de sixième et elle est présentée également en cinquième: « C'est l'occasion d'envisager la notion de fraction irréductible, mais aucune compétence n'est exigible à ce sujet »⁷.

Le document d'accompagnement du programme signale que la forme irréductible des nombres n'est ni à rechercher systématiquement ni exigible. Au centre central, il est bien précisé, dans la partie commentaire du programme de la classe de quatrième, que la recherche du PPCM et PGCD pour l'obtention de la forme irréductible d'une fraction est hors programme :

« L'addition de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire demande un travail sur la recherche de multiples communs à deux ou plusieurs nombres entiers dans des cas où un calcul mental est possible. La recherche du PPCM et du PGCD pour l'obtention de la forme irréductible est hors programme ».
(Programme de quatrième, 2005, p.18)

6 Programme du cinquième, BO.N° 5,25 Aout 2005 Hors série, p. 12.

7 Programme du cinquième, BO.N° 5,25 Aout 2005 Hors série, p. 12.

En troisième, les élèves enrichissent leurs connaissances en arithmétique : l'algorithme d'Euclide ou celui des différences leur fournit une technique de recherche du PGCD de deux entiers, et leur donne une méthode pour rendre des fractions irréductibles.

Comme nous l'avons dit, le programme de troisième, dans le commentaire, met l'accent sur l'aspect culturel de l'arithmétique, alors que la nouvelle fonction de l'arithmétique qui se dégage des programmes serait plutôt l'aspect algorithmique.

Trois compétences exigibles sont explicitées à ce niveau :

- 1) Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux ;
- 2) Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux ;
- 3) Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.

L'algorithme d'Euclide et l'algorithme de différence sont les deux méthodes privilégiées par le programme pour déterminer le PGCD, sans recours à la décomposition en facteurs premiers. Il est en général reconnu que c'est à cause de cette dernière que l'arithmétique avait été bannie de programme du collège dans les années quatre-vingt :

« Après avoir travaillé au cycle central sur les notions de multiples et de diviseurs, il est nécessaire de savoir si deux entiers sont ou non premiers entre eux. Pour l'obtention du PGCD de deux entiers, le programme préconise l'algorithme d'Euclide ou éventuellement un algorithme de différence la répétition de la transformation qui à un couple d'entiers (a, b) fait correspondre le couple constitué

de leur minimum et de leur écart, par exemple qui à $(285, 630)$ fait correspondre $(285, 345)$ – plutôt que le recours à la décomposition en facteurs premiers. Il n'est pas inutile de rappeler que l'arithmétique avait été bannie des programmes de mathématique du collège précisément à cause de l'abus du recours à la décomposition en produit de facteurs premiers. Certes les facteurs premiers de petits nombres, 924 ou 1999 pour donner des exemples, s'obtiennent facilement. Mais il n'en est plus du tout de même pour de plus grands nombres, dont l'ordinateur rend aujourd'hui naturelle la considération. C'est ainsi qu'il sera par exemple beaucoup plus facile d'établir directement que les deux nombres 12345678910111213 et 10000000000000007 ne sont pas premiers entre eux que d'essayer de trouver leur décomposition en facteurs premiers. »

(Document d'accompagnement du programme de troisième, 1998, p.97)

II.3 Les manuels français

Nous avons retenu pour notre étude les manuels français des classes de sixième, cinquième, quatrième et troisième de la collection Triangle, édités par Hatier (Chapiron & al., 2005, 2006, 2002, 2003).

En classe de sixième : L'arithmétique joue un rôle objet/ outil de la manière suivante :

- Elle intervient explicitement comme objet dans un chapitre intitulé « Division et problèmes » dans lequel les objets suivants sont proposés :
 - 1 : Division euclidienne.
 - 2 : Diviseurs et multiples.
 - 3 : Critères de divisibilité.
- Elle intervient aussi comme outil dans un chapitre intitulé : « Fractions et problèmes »

(les notions de multiple et diviseur, et les critères de divisibilité sont des outils pour obtenir des fractions égales et pour simplifier des fractions).

En classe de cinquième : Deux chapitres font intervenir explicitement l'arithmétique comme outil : « Fraction – Quotients »; « Opérations sur les écritures fractionnaires ».

Dans les deux chapitres, les notions de diviseur et de multiple et des critères des divisibilités sont présents dans le travail sur les fractions pour simplifier des fractions et pour additionner et soustraire des fractions.

En classe de quatrième : Un seul chapitre intitulé « Écritures fractionnaires » fait intervenir explicitement l'arithmétique comme un outil : la recherche d'un multiple commun est un outil pour la réduction au même dénominateur, et les critères de divisibilité et la recherche d'un diviseur commun sont également des outils pour simplifier des fractions.

En classe de troisième : L'arithmétique est proposé comme objet d'étude dans un chapitre intitulé « Calcul numérique et PGCD » qui présente les objets suivants :

- 1 : Diviseurs et Multiples.
- 2 : Plus Grand Diviseur Commun.
- 3 : Nombres entiers premiers entre eux.
- 4 : Fraction irréductible.

Deux techniques sont proposées pour trouver le PGCD afin de rendre irréductible une fraction : l'algorithme d'Euclide et l'algorithme des différences successives. Les outils pour mettre en oeuvre ces techniques sont le calcul à la main, la calculatrice et le tableur.

C'est ainsi que, en France, l'arithmétique est proposée comme objet d'étude en sixième

et en troisième, tandis qu'elle est proposée comme outil tout au long du collège.

Nous trouvons trois fonctions de l'arithmétique dans les manuels français : la fonction « Théorie des nombres », celle de « Calcul numérique », et une fonction dominante en troisième « Algorithmique » pour faire travailler les élèves sur les aspects algorithmiques des mathématiques.

III. Analyse comparative des contenus d'arithmétique au collège entre la France et la Syrie

Nous présentons dans ce qui suit une analyse comparative qui met en perspective les différences entre les deux systèmes éducatifs en abordant les contenus d'arithmétique thème par thème. Le choix que nous faisons pour présenter ces thèmes est justifié par l'articulation existant entre eux. Les relations de divisibilité sont établies à partir de la division euclidienne. Ensuite, la décomposition en facteurs premiers, qui s'appuie sur la notion de nombres premiers, est un outil pour la recherche de PGCD et PPCM dans le travail sur les fractions ; le PGCD est également lié à la notion de nombres premiers entre eux, et est utilisé pour obtenir une fraction irréductible.

III.1 Division euclidienne et relation de divisibilité

Dans les deux pays, la division euclidienne est enseignée à l'école primaire. En Syrie, elle est présentée comme objet d'étude; elle n'est pas reprise comme objet d'étude en sixième. En France, l'étude de la division euclidienne, commencée en primaire se poursuit en classe de sixième.

La relation de divisibilité comme objet d'étude : Dans les manuels français, la relation de divisibilité est proposée comme objet d'étude en sixième, alors que les termes associés (multiples, diviseurs) sont rappelés, sur des exemples numériques, dans les programmes de sixième dans la partie commentaire, et sont réintroduits dans la colonne « contenus » dans les programmes de cinquième.

La partie commentaire des programmes de sixième met en valeur les deux sens du mot « diviseur » qu'il faut distinguer :

- Le vocabulaire « être le diviseur d'un nombre » : par exemple « b est un diviseur de a » qui se traduit par l'égalité « $a = b q$ » ;
- Le vocabulaire : diviseur dans la division euclidienne $a = b q + r$; b est le diviseur, q le quotient et r le reste.

On peut lire également :

La notion de multiple a été introduite à l'école primaire. Elle est rappelée, sur des exemples numériques, en même temps qu'est introduite celle de diviseur. Les différentes significations de ce dernier terme doivent être explicitées. (Programme français de sixième, 2004, p.10)

Le manuel français « Triangle » de sixième propose la définition de la relation de divisibilité à partir de la notion de multiple.

« Un nombre entier a est divisible par un nombre entier b (où b est un diviseur de a) signifie que a est un multiple de b . » (Triangle, classe de sixième, p.47)

Ce n'est pas le cas dans les manuels syriens qui étudient chaque terme de la rela-

tion de divisibilité en sixième dans une rubrique indépendante (Voir II.1) Le manuel syrien propose la relation de divisibilité en termes de propriété à partir de la division euclidienne, nous pouvons citer :

« Un nombre entier a est divisible par un nombre entier b signifie que le reste de la division euclidienne de a par b est nul. » (Manuel syrien de la classe de sixième, p.47)

Mais ni le manuel syrien, ni *a fortiori* le manuel français, ne proposent une définition formelle de la relation de divisibilité en terme de relation entre deux nombres tel :

Dire que le naturel a est un multiple du naturel b signifie qu'il existe un naturel q tel que : $a = b q$

Dire que le naturel b est diviseur du naturel a signifie qu'il existe un naturel q et un seul tel que : $a = b q$

Les manuels français étudient à nouveau la notion de « diviseur d'un nombre » en troisième, avant d'introduire la notion de « diviseur commun à deux nombres », ce qui n'est pas le cas dans les manuels syriens où le vocabulaire de la relation de divisibilité a été présenté en sixième, et n'est pas repris ensuite comme objet d'étude.

Le choix fait par les manuels syriens quant aux notions de multiple et de diviseur est de les proposer en termes ensemblistes. Nous pouvons citer la définition de diviseur d'un nombre proposé par ces manuels de la manière suivante :

On sait que :

$$\begin{aligned} 18 &= 1 \times 18 \\ 18 &= 2 \times 9 \\ 18 &= 3 \times 6 \end{aligned}$$

On appelle les nombres 1, 18, 2, 9, 3, 6 diviseurs de 18. [...] L'ensemble des diviseurs

de 18 est {1, 2, 3, 6, 9, 18} (Manuel syrien de la classe de sixième, p. 67)

Ils proposent deux définitions du multiple : la première propose la définition des multiples d'un nombre comme produit de ce nombre par les entiers successifs à partir de 0 sur un exemple :

*Les multiples de 6 sont : 0, 6, 12, 18, 24,
c-à-d les résultats de produit 6 avec les
nombres : 0, 1, 2, 3, 4,
(Manuel syrien de la classe de sixième, p 84)*

La deuxième définition de multiple est proposée de la manière suivante :

Un nombre est un multiple du nombre imposé si ce nombre est divisible par ce nombre imposé.

348 est un multiple de 6 car $348 \div 6 = 58$

*161 n'est pas multiple de 6 car $161 \div 6 = 26$
et le reste est 5*

161 n'est pas divisible par 6.

(Manuel syrien de la classe de sixième, p.84)

La relation de divisibilité comme outil : la notion de multiple est explicitement utilisée dans les manuels syriens en classe de septième pour la réduction au même dénominateur (dans le cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre) pour additionner et soustraire des fractions par exemple :

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4+5}{6} = \frac{9}{6}$$

2 1

Il suffit de constater que le plus grand dénominateur qui est le multiple de l'autre dénominateur peut être pris comme dénomina-

teur commun : ici le plus grand dénominateur est 6, 6 est un multiple de 3, donc on peut prendre comme dénominateur commun 6.

Dans les manuels français de la collection Triangle, la méthode proposée est l'utilisation des fractions égales pour additionner et soustraire des fractions : pour additionner deux fractions dont l'un des dénominateurs est multiple de l'autre, on remplace dans le calcul une des fractions par une fraction égale avec un dénominateur approprié.

EXEMPLE : Calculer $B = \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$

SOLUTION : ETAPE :

$$B = \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$$

(1) J'écris des fractions qui sont égales aux fractions données et qui ont le même dénominateur.

$$B = \frac{4}{6} + \frac{5}{6}$$

(2) J'applique la règle d'addition de deux fractions de même dénominateur.

$$\text{car } \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

$$B = \frac{4+5}{6} ;$$

(3) Je simplifie, si possible, le résultat.

$$B = \frac{9}{6} ; B = \frac{3}{2}$$

(Triangle, classe de cinquième, p.54)

En accord avec les programmes, la systématisation de la réduction au même dénominateur dans le cas général est repoussée en classe de quatrième, où elle est traitée en utilisant les multiples communs.

*« La systématisation de la réduction au même dénominateur est traitée en 4e. »
(Programme français de la classe de cinquième,
p. 49)*

III.2 Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers

La notion de nombre premier n'est pas évoquée comme objet d'étude dans les programmes français du collège. Par contre, les nombres premiers sont présentés comme objet d'étude en classe de sixième dans les manuels syriens ; citons la définition de nombre premier telle qu'elle est proposée dans les manuels syriens :

Chaque entier naturel supérieur à 1 et qui a exactement deux diviseurs distincts 1 et lui-même est appelé nombre premier.

c-à-d un nombre premier : c'est tout entier supérieur à 1 et qui n'est divisible que par lui-même et 1.

(Manuel syrien de la classe de sixième, p.69)

La décomposition en facteurs premiers n'est introduite qu'en seconde, dans le programme français, alors que cette notion est introduite dans les manuels syriens en sixième comme une technique pour trouver le PGCD, le PPCM et la racine carrée.

Par contre, l'algorithme d'Euclide et la méthode de soustractions successives qui sont des méthodes très simples et courtes pour trouver le PGCD, sont absents dans les manuels syriens.

Le programme français préconise l'algorithme d'Euclide ou éventuellement l'algorithme des différences successives plutôt que le recours à la décomposition en facteurs premiers pour trouver le PGCD de deux nombres. Le document d'accompagnement rappelle que :

« L'arithmétique avait été bannie des programmes de mathématique du collège précisément à cause de l'abus du recours à la

décomposition en produit de facteurs premiers ».

(Document d'accompagnement du programme français de la classe de troisième, p. 97)

Sans doute la décomposition en facteurs premiers est facilement utilisée pour des petits nombres mais elle est considérée comme étant assez difficile avec des grands nombres. Elle conduit, selon l'équipe de Irem de Toulouse, à une confusion dans la signification du PGCD pour les élèves car : *« dans les techniques pratiquées au collège, la recherche du PGCD de deux nombres se fait en travaillant simultanément sur les deux entiers. Avec la décomposition, on fait apparaître une étape préparatoire qui consiste à travailler séparément sur chaque nombre » (p.8)*

Selon l'équipe de l'Irem de Toulouse, l'algorithme d'Euclide est la méthode privilégiée par les élèves à la fin du collège, mais en classe de seconde, après avoir appris la décomposition en facteurs premiers, la moitié des élèves ne connaissent plus cette technique. Ces auteurs ajoutent, en conclusion de leur enquête :

« A l'issue de la troisième, une large majorité d'élèves maîtrise un algorithme de calcul du pgcd de deux nombres, principalement l'algorithme d'Euclide. Après l'introduction des nombres premiers en seconde, environ un élève sur deux connaît encore un des algorithmes étudiés au collège, mais n'a pas toujours su s'approprier la technique du calcul du pgcd à l'aide de la décomposition en produit de nombres premiers. »

(Destainville & al., 2005, p.12)

Cependant, la décomposition en facteurs premiers a certains avantages ; un de ses intérêts provient du fait que la décomposition

en facteurs premiers permet de déterminer le PGCD de plus de deux nombres, de manière plus économique a priori que les deux algorithmes lorsque le nombre d'entiers en jeu augmente.

Ainsi, la décomposition en facteurs premiers a des avantages, et a aussi des désavantages ; elle est, d'une part, considérée comme une méthode très riche qui ouvre la porte à d'autres types d'exercices, elle fait fonctionner la notion de nombres premiers ; elle est utilisée pour déterminer le PPCM ; son intérêt est mis en évidence pour calculer le PGCD de plus de deux nombres. Mais d'autre part, elle est considérée comme une méthode très longue pour trouver le PGCD, son apprentissage au collège nécessite beaucoup de temps, sa maîtrise demande de nombreux exercices, et la difficulté augmente avec la taille des nombres.

Nous nous demandons si la raison de l'abus de cette méthode dans l'enseignement de l'arithmétique en France dans les années quatre-vingt, comme le rappelle le document d'accompagnement du programme de troisième, est ce qui empêche effectivement son étude en troisième, à côté de l'algorithme d'Euclide.

III.3 *Le plus petit multiple commun*

Le PPCM comme objet d'étude est absent dans les programmes et les manuels français, et sa place comme outil est faible ; il est présenté sous l'intitulé « multiple commun » en quatrième pour calculer la somme de nombres relatifs en écriture fractionnaire. Tandis que le PPCM est bien présent dans les manuels syriens en sixième comme objet, et comme outil tout au long du collège et en particulier, en neuvième.

Les manuels syriens présentent le PPCM de deux nombres entiers et le cas particulier du PPCM de deux nombres premiers entre eux après la présentation des notions de multiple et de multiple commun, et proposent des exercices à résoudre, visant à permettre d'établir un lien entre le PPCM et le PGCD (qui est abordé avant le PPCM) dont le résultat classique :

« Le produit du PGCD et du PPCM de deux nombres est égal au produit de ces deux nombres »

La recherche du PPCM de deux nombres se fait ici à partir du PGCD et du produit de ces deux nombres. Les propriétés du PPCM sont proposées dans les manuels syriens sous la forme d'un exercice résolu.

Par exemple : trouver le PPCM des nombres : 12, 8, 48, 24

On trouve que le plus grand nombre 48 est divisible par chacun de ces nombres donc le PPCM = 48. C'est ainsi que la recherche du PPCM est considérée comme une technique importante, dans les manuels syriens, pour :

- Comparer deux fractions ;
- Additionner, soustraire des fractions en septième ;
- Résoudre des équations avec fractions en neuvième ;
- Opérer sur les fractions rationnelles en neuvième.

Deux techniques sont proposées par les manuels syriens pour trouver le PPCM : la méthode qui consiste à lister en parallèle les multiples des deux nombres dans l'ordre croissant et d'identifier le premier nombre commun aux deux listes d'une part, la méthode de

« décomposition en facteurs premiers » qui est proposée après la recherche du PPCM des nombres premiers entre eux,

III.4 Le plus grand diviseur commun

Les manuels syriens proposent le PGCD en classe de sixième, et la recherche du PGCD de deux entiers se fait à partir de la décomposition en facteurs premiers.

Par exemple : trouver le PGCD des deux nombres 180, 168

180	2		168	2
90	2		84	2
45	3		42	2
15	3		21	3
5	5		7	7
1	1			

$$180 = \boxed{2 \times 2} \times 3 \times \boxed{3} \times 5$$

$$168 = \boxed{2 \times 2} \times 2 \times \boxed{3} \times 7$$

$$\text{PGCD} = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3 = 12$$

(Manuel syrien de la classe de sixième, p.73)

En classe de neuvième, le PGCD est considéré comme un outil important pour factoriser les expressions algébriques.

Exemple : factoriser l'expression suivante :

$$15 x y^2 z^2 - 50 x^2 z^2 + 35 x^3 z^3$$

Le PGCD des nombres 15, 50, 35 est 5 :

$$5 x z^2 (3 y^2 - 10 x + 7 x^2 z)$$

En ce qui concerne les manuels français de troisième que nous avons étudiés (Triangle), ils introduisent le PGCD en classe de

troisième pour obtenir des fractions irréductibles, et la recherche de PGCD se fait dans ces manuels en utilisant les soustractions successives, et l'algorithme d'Euclide, avec l'utilisation du tableur ; ces méthodes ne sont pas disponibles dans les manuels syriens. La méthode qui consiste à trouver le PGCD en cherchant le plus grand élément de l'ensemble de diviseurs communs de deux nombres, est une technique commune dans les manuels syriens et français.

Par contre, contrairement aux manuels syriens, les manuels français ne s'appuient pas sur le PGCD comme un outil pour factoriser les expressions algébriques, ceci conformément à l'esprit des programmes. Nawal Abou Radd (2006) a montré que le PGCD est un objet absent institutionnellement dans le travail algébrique en France, alors qu'élèves et enseignants en disposent. Elle a montré que ce choix prive les élèves et les professeurs de moyens pour expliciter si une factorisation a été menée ou non à son terme : ainsi, l'élève qui se voit reprocher de s'arrêter à la réponse $5(5x - 15)$ pour factoriser l'expression : $(25x - 75)$ est confronté en quelque sorte à une « rupture de contrat », puisque il a mené une factorisation partielle, et qu'il ne dispose pas de moyen explicite pour se diriger vers la factorisation « au maximum ».

Pour Abou Radd (2006), le PGCD est un outil très important pour la factorisation car « il y a entre le PGCD et la factorisation une relation de dépendance d'un type connu depuis le travail de Rajoson (1988)⁸ sur le rapport des problèmes aux outils théoriques : un objet de savoir comme par exemple, le PGCD, ne peut

8 Rajoson L. (1988), *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*. Thèse de troisième cycle, Université d'Aix-Marseille II.

vivre durablement dans l'enseignement que s'il est utilisé par un autre, servant à construire une théorie de plus grande ampleur comme la factorisation des polynômes, qui pose et résout des problèmes plus larges comme la résolution des équations. Inversement, sa présence fait vivre des questions de plus faible niveau, relatives par exemple à la divisibilité des entiers ou aux tables de multiplication. » (Abou Radd, 2006)

Nous avons vu plus haut qu'en Syrie, en classe de neuvième, qui correspond à la troisième française, l'utilisation du PGCD et du PPCM était étendue aux polynômes et aux fractions rationnelles.

La question de l'intérêt ou non de factoriser « au maximum » une expression numérique ou algébrique peut être posée, compte tenu de l'évolution des programmes et de la disponibilité des calculatrices et du calcul formel. Lors d'un atelier que nous avons proposé le 26 octobre 2009 aux journées nationales de l'APMEP à Rouen⁹, les participants (professeurs de collège, de lycée et de classe préparatoires) ont émis des avis divergents. Parmi les arguments en faveur de ce travail, on peut retenir l'intérêt que présente une explicitation des objets théoriques qui fondent les techniques dans le domaine numérique pour s'appuyer sur cette référence lorsque l'on aura à travailler sur l'arithmétique des polynômes. Aucun consensus ne s'est dégagé du (bref) débat sur cette question.

III.5 Application du PGCD à la définition des nombres premiers entre eux et aux fractions irréductibles

La notion de nombres premiers entre eux, dans les manuels français, n'est un objet

⁹ L'atelier intitulé « Place de l'enseignement de l'arithmétique dans l'enseignement secondaire en France : 1902-2008 » était co-animé avec Viviane Durand-Guerrier ».

d'étude qu'en classe de troisième, tandis que cet objet est présent, dans les manuels syriens en classe de sixième.

En Syrie, les fractions irréductibles sont introduites comme objet d'étude en classe de septième qui correspond à la cinquième française, alors que cette notion est introduite dans les manuels français en troisième, ceci bien que les élèves sachent simplifier des fractions pour obtenir la forme « la plus simple possible » (c'est-à-dire la forme irréductible) par critères de divisibilité à partir de la classe de cinquième sur des cas simples.

Comme on l'a vu ci-dessus pour la factorisation des expressions algébriques, on peut penser que l'absence de la notion de fraction irréductible ne permet pas toujours aux élèves de savoir si la forme obtenue à un moment donnée est la forme « la plus simple possible », ce qui peut les conduire à donner une réponse partielle.

Conclusion

L'analyse comparative que nous avons menée entre la France et la Syrie nous montre qu'il y a des différences significatives entre les deux pays. Tout d'abord, cette étude montre que l'enseignement de l'arithmétique n'est pas un enjeu très important aujourd'hui dans le système éducatif français au collège et ce contrairement à l'enseignement syrien. L'analyse des programmes et des manuels scolaires français de collège montre en effet d'une part que l'arithmétique occupe une place réduite, tant comme objet que comme outil, et que l'enseignement des notions d'Arithmétique au programme est réparti sur tout le collège, principalement en sixième et en troisième. Dans les manuels syriens l'arithmétique est présentée dès la classe de sixième comme

objet d'étude dans un chapitre intitulé : « Théories des nombres », puis est utilisée comme outil tout au long du collège. On trouve trois fonctions de l'arithmétique dans les manuels syriens: « théorie des nombres », « calcul numérique » et « calcul algébrique », tandis que l'arithmétique a, dans les manuels français, quatre fonctions : « culturelle », « calcul numérique », « théorie des nombres » et « algorithmique ».

On trouve également des différences significatives dans les choix concernant les notions, algorithmes et techniques entre les deux pays. Les nombres premiers et la décomposition en facteurs premiers sont des notions absentes dans les manuels français au collège tandis qu'elles sont présentées en sixième dans les manuels syriens. Les notions de racine carrée et puissance font partie de l'arithmétique en Syrie, alors que ces notions ne font plus partie de l'arithmétique depuis la réforme des mathématiques moderne en France. L'étude de la division euclidienne comme objet est considérée comme étant achevée la fin de l'école primaire en Syrie, tandis qu'en France elle se poursuit jusqu'en sixième. Le plus petit multiple commun comme objet d'étude est absent dans les manuels français et sa place comme outil est faible, il est présenté en quatrième dans le travail sur fractions, tandis que les manuels syriens présentent le PPCM en sixième comme objet d'étude et comme outil, en par-

ticulier, en neuvième. Enfin, le programme français introduit l'algorithme d'Euclide, la méthode des soustractions successives et le tableur comme outils pour trouver le PGCD, alors qu'il n'y a pas d'algorithme dans les manuels syriens, qui utilisent la décomposition en facteurs premiers comme outil pour trouver le PGCD.

La mise en perspective des choix entre les deux pays avec une étude de l'évolution historique des programmes français que nous conduisons par ailleurs (MAJAJ, à paraître a et b) montre que le système syrien est proche des programmes français de l'époque des mathématiques modernes, tandis que les choix faits en France lors de la réintroduction de l'Arithmétique dans les années quatre-vingt-dix correspondent d'une part à un rejet de certains aspects des programmes précédents avec une minoration des aspects théoriques et d'autre part à une ouverture vers de nouvelles fonctions (culturelle, algorithmique) absentes des programmes syriens. Dans la suite de notre travail, nous nous intéressons à la transition entre le collège et le lycée en menant une étude exploratoire sur l'enseignement de l'arithmétique en France en seconde. La disparition de l'arithmétique dans les nouveaux programmes français de seconde en vigueur à la rentrée 2009 confirme que la place et rôle de l'arithmétique dans les programmes de l'enseignement secondaire français ne sont pas très assurés.

Références :

- ABOU RAAD N. (2006), *Le calcul algébrique en France et au Liban étude comparée de l'enseignement de la factorisation et des erreurs des élèves*, Thèse de l'Université Aix- Marseille.
- ANSELMO B. ; BONNET M. ; COMBIER G. ; PLANCHETTE P. ; ZUCCHETTA H. (2004), *De l'arithmétique au collège*, IREM de Lyon.
- ARTAUD M. (1997), Introduction à l'approche écologique du didactique de l'écologie des organisations mathématiques et didactiques, *Actes de la IXe Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 99-139.
- BATTIE V. (2003a), *Spécificité et potentialité de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*, Thèse de l'Université Paris 7.
- BATTIE V. (2003b) Le raisonnement en arithmétique : de l'analyse épistémologique à l'analyse didactique. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 3.3, 363–386 ; Université de Toronto.
- DESTAINVILLE B. ; DUPUY- TOUZET S. ; DUCRET M. ; GIBERT J- M. VIET A. ; VINTER B. (2005), *Pour un suivi en arithmétique de la Troisième à la Terminale*, IREM de Toulouse.
- DOUADY R. (1986), Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n°7.2 pp. 5-31.
- MAJAJ M. (à paraître-a), Comparative study of the place of elementary number theory in programs and textbooks in the middle school between France and Syria, to appear in *electronic proceedings of CERME 6, Lyon, 2009*.
- MAJAJ M. (à paraître-b), Aperçu de l'évolution de l'enseignement de l'arithmétique en France depuis le début du XXe siècle, à paraître dans *les Actes de la XV° école d'été de didactique des mathématiques, Clermont Ferrand, 2009*.
- RAVEL L. (2002), Arithmétique en terminale S spécialité : quel(s) enseignement(s) ?, *Repères IREM n° 49*, pp. 93-116.
- RAVEL L. (2003), *Des programmes ... à la classe, Étude de la transposition didactique interne*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- MANUELS SCOLAIRES SYRIEN :
- CHAPIRON, G, MULET – MARQUIS, R Manuel Mathématique 6ème, (2002), l'établissement public pour les imprimés et les manuels scolaires.
- Manuel Mathématique 7ème, (2005), l'établissement public pour les imprimés et les manuels scolaires.
- Manuel Mathématique 8ème, (1983)¹⁰, l'établissement public pour les imprimés et les manuels scolaires.
- Manuel Mathématique 9ème, (2003), l'établissement public pour les imprimés et les manuels scolaires.
- MANUELS SCOLAIRES FRANCAIS :
- Manuel *Mathématiques 6ième*, Collection Triangle (2005), Edition Hatier, Paris.
- Manuel *Mathématiques 5ième*, Collection Triangle (2006), Edition Hatier, Paris.
- Manuel *Mathématiques 4ième*, Collection Triangle (2002), Edition Hatier, Paris.
- Manuel *Mathématiques 3ième*, Collection Triangle (2003), Edition Hatier, Paris.
- Programmes et documents d'accompagnement des programmes français :
- Programme de sixième, BO Hors série N°5, 9 septembre 2004.
- Programme de cinquième, BO Hors série N°5, 25 Aout 2005.
- Programme de quatrième, BO Hors série N°5, 25 Aout 2005.
- Ministre de la Jeunesse, de l'Education Nationale et de la recherche, *Enseigner au collège mathématiques*, Programmes et Accompagnement (Réimpression mars 2004).

10 Il n'y a pas eu de nouvelle version de ce manuel au début des années 2000 ; c'est donc la version datant de 1983 qui est restée en usage dans les classes.