LA TRANSITION TROISIEME/SECONDE CONSTATS ET QUESTIONS A PARTIR DE LA COMPARAISON D'EXERCICES VARIES DES DEUX NIVEAUX

Brigitte BENZEKRY, Achères
Catherine FAUVE, Fresnes,
Françoise PILORGE, Paris,
Aline ROBERT, UCP-IUFM de Versailles,
Sophie ROUSSE, Saint Germain en Laye
Mireille VUONG, Longjumeau,
Catherine de ZELICOURT, Montrouge

Résumé : A partir d'énoncés habituels proposés en seconde et en troisième sur les fonctions, l'algèbre ou la géométrie, les analyses de ce qui est attendu des élèves révèlent des différences importantes entre les deux niveaux. Les trois articles confirment que les exercices, souvent plus longs et plus complexes en seconde, demandent des choix, des changements de cadres, l'introduction d'étapes et une certaine disponibilité des calculs qui peuvent laisser les élèves démunis ; or les déroulements imaginés pour les aider, notamment associés à de nombreux découpages, ne sont pas nécessairement porteurs de ce qui est recherché (cf. deuxième article). De même au collège, la multiplication ou la répétition de certaines tâches isolées est souvent considérée comme un bon moyen de faire réussir un grand nombre d'élèves (cf. troisième article) mais n'est peut-être pas la seule solution pour pallier leurs difficultés.
N'y aurait-il pas lieu d'une part, d'élargir et de varier davantage les applications proposées en troisième et d'autre part de s'appuyer davantage en seconde sur les acquis réels des élèves afin de faciliter la transition?

Introduction (Aline Robert)

1. *Pourquoi étudier la transition ?*

A nos yeux, la transition 3ème/2nde pose un problème double : du côté des enseignants nous percevons une réelle difficulté pour les collègues de seconde qui ne reçoivent pas les élèves « attendus » et s'interrogent sur les adaptations à adopter, et pour les collègues de troisième apparaît une sorte de « culpabilisation » car ils envoient en seconde des élèves jugés insuffisants sur le plan mathématique et s'interrogent sur des alternatives. Les premiers « font avec » mais ont le sentiment de perdre du temps, et de courir encore plus derrière les programmes, les seconds ont beaucoup de mal à imaginer des alternatives qui pourraient convenir.

Le troisième article développe justement cet aspect de la transition à partir d'énoncés d'exercices précis sur lesquels se sont exprimés des enseignants des deux niveaux au cours de stages de liaison, en relation avec la faisabilité et l'intérêt de l'exercice pour les élèves.

Du côté des élèves, on retrouve le ressenti correspondant à ce qui précède - notamment des difficultés telles en seconde que certains élèves s'y retrouvent en échec grave alors qu'ils étaient bons au collège, et en troisième, une certaine appréhension à la fois de la sélection de fin de l'année et de l'année suivante, annoncée comme très difficile.

2. *Comment étudier la transition ?*

Reste à préciser comment nous allons apprécier aussi bien les déclarations des enseignants sur des exercices précis que plus généralement les différences ou proximités dans ce qui est proposé aux élèves.

Dans les trois textes qui suivent, le même point de vue est adopté par les 7 auteurs qui en développent un aspect à partir d'exercices précis qui y sont analysés. Les auteurs s'appuient ainsi tous sur une étude des activités mathématiques que peuvent développer les élèves à partir d'énoncés qui leur sont proposés. Ils comparent ce qui est attendu, que ce soit *a priori* (premier article), et pendant les déroulements des séances correspondantes (deuxième article) ou *a priori* et dans les appréciations qu'en donnent des enseignants des deux niveaux interrogés sur les énoncés en question (troisième article). Nous développons ci-dessous ce point de vue partagé par tous les auteurs, suite à une aventure commune qui nous a réunies successivement le temps d'une formation longue (master professionnel de formation de formateurs à l'Université Paris-Diderot).

a) *Les activités des élèves en ligne de mire*

La première chose à souligner est que nos constats et interprétations sont dressés à partir des activités des élèves (ce qu'ils ont à faire) qui peuvent être engendrées par les exercices comparés, c'est-à-dire à partir d'une analyse que nous faisons des mises en fonctionnement attendues des connaissances à utiliser, complétée ou non selon les cas par une analyse de ce qui a pu se passer en classe. C'est en effet de l'ensemble des activités des élèves que résulte une part importante de leurs apprentissages, de notre point de vue, d'où l'importance de les étudier, et de surcroît c'est bien des choix de l'enseignant sur les contenus et la gestion de la classe que ces activités résultent pour une grande part, d'où l'importance de ces choix : les alternatives aux mains des enseignants sont en relation avec les apprentissages des élèves, même si d'autres éléments contribuent à ces apprentissages. Précisons qu'un apprentissage, pour nous, est associé à une certaine disponibilité des connaissances déclarées apprises, c'est à dire à la fois une connaissance précise des théorèmes et la possibilité de les utiliser à bon escient y compris sans indication, même s'il faut mélanger ou mettre en relation des connaissances, ou prendre des initiatives intermédiaires. Autrement dit nous associons apprentissage à conceptualisation et organisation des connaissances, même si plusieurs niveaux ou degré de conceptualisation peuvent être envisagés sur les mêmes notions, au fur et à mesure des études.

Dans ces conditions, nous appréhendons les activités que les élèves peuvent développer sur un exercice en faisant intervenir des analyses, de plus en plus fines, pas toujours toutes évoquées explicitement ici.

b) *A propos des notions enseignées et des exercices étudiés*

Nous avons besoin pour développer les analyses des exercices étudiés de caractéristiques globales des notions à enseigner dans lesquelles ils s'inscrivent – ce que nous appelons le relief de la notion.

Filons la métaphore pour expliquer ce que représente ce relief. Un guide de montagne, pour préparer une course et la mener à bien, doit d'abord apprécier, avant la course, des éléments sur les caractéristiques géographiques des régions à traverser et sur les différents itinéraires envisageables, il doit prévoir le matériel approprié à apporter ; chaque matin, il doit adapter sa course en relation avec la météo du jour, avec la course de la veille et l'état des participants, et avec la difficulté du trajet à venir. De même, il peut être utile, pour amener les élèves à faire des mathématiques et à en apprendre, d'apprécier les notions à enseigner, leurs relations avec ce que savent déjà les élèves (en terme de proximité), les différents aspects pouvant intervenir –formalisme, cadres et registres impliqués - les types de problèmes avec les raisonnements licites et le niveau de rigueur exigible, et leurs difficultés spécifiques répertoriées.

Cela contribue à préciser ce qui doit devenir des objets de connaissances évaluables, à insérer dans les autres connaissances déjà là et/ou des outils à utiliser, à faire construire aux élèves et à délimiter la variété des tâches qu'on peut proposer pour être « source et critère de savoir ». Cette formule empruntée à Vergnaud souligne bien l'importance que nous donnons dans la perception du relief aux résolutions de problème, aussi bien comme moteurs d'apprentissages que comme témoins, dans les évaluations.

Ici nous ferons allusion au fur et à mesure à des éléments de relief connus sur l'algèbre élémentaire et sur les fonctions, qu'on peut trouver notamment dans les documents d'accompagnement des programmes ou dans la littérature professionnelle.

Il faut imaginer que les énoncés, étudiés ci-dessous, font partie d'un scénario global, c'est-à-dire d'ensemble ordonné de cours et d'exercices, avec du travail donné à la maison, qui peut être très important (et variable), et des évaluations, qui renseignent les élèves sur ce qui doit être pris au sérieux. Dans cet article, le scénario global n'est cependant pas indiqué car les exercices étudiés sont plutôt des exemples emblématiques de types de tâches souvent proposées, ils sont « sortis » de la classe, et c'est à ce titre qu'ils sont analysés (sauf dans le deuxième texte, où l'objectif reste le même).

En revanche l'analyse *a priori* précise des tâches « recélées » dans chaque énoncé est indispensable dans les trois textes, que ce soit pour comprendre les relations des exercices et des programmes (premier et troisième article) ou les inflexions apportées par les déroulements aux activités des élèves (deuxième). Cette analyse permet d'appréhender les connaissances que les élèves ont à utiliser –anciennes, nouvelles, indiquées ou non [1] ; on étudie aussi la manière dont ces connaissances ont à être adaptées par rapport au texte « brut », qui est dans le cours, en repérant les reconnaissances partielles à faire pour appliquer ces propriétés, les mélanges de cadres, registres ou points de vue, les initiatives à prendre comme l'introduction d'intermédiaires, les étapes à respecter et les raisonnements à mener, les mises en relation, les choix.

1 On parle alors de connaissances supposées disponibles.

c) *Déroulements et reconstitution des activités des élèves*

Mais..un énoncé d'exercice n'informe que partiellement, souvent trop partiellement, sur les activités que les élèves ont déployées en le travaillant, on manque d'informations sur ce qu'ont pu faire les élèves. Il s'agit, en croisant les tâches proposées et les déroulements effectifs, d'apprécier davantage les activités que les élèves ont pu développer en classe[2]. Sont-ce les tâches prévues qui ont été travaillées par les élèves – quelle proximité avec ce qui a été analysé a priori ? Dans quelle mesure est-ce le cas pour tous les élèves – y a-t-il des activités a minima, possibles pour tous les élèves, et d'autres a maxima, qui ne seraient le fait que de quelques-uns ? Tout cela n'est évidemment pas facile à faire, et l'utilisation de vidéos de séances aide bien. Autant que faire se peut, nous commençons ainsi par découper systématiquement le travail sur un exercice en épisodes significatifs de l'activité des élèves et nous les étudions successivement, en notant notamment la durée (chronologie) : enrôlement et maintien dans le travail, recherche (individuelle, collective.). et accompagnement, repérage et exploitation du travail des élèves, correction, bilan. Au sein de chaque épisode, nous repérons, toujours autant que possible, ce qui pourrait avoir un effet sur les activités des élèves, que ce soit en termes de travail autonome et d'échanges entre élèves ou en termes d'aides de l'enseignant. Le moment des aides, avant, pendant ou après la recherche, leur nature –aide directe indiquant ce qu'il faut faire, simple relance, aide s'appuyant sur le travail fait pour amener les élèves à sortir du contexte précis de l'exercice ou à généraliser par exemple –le choix de ce qui est dit, répété, non dit par l'enseignant, sont autant d'indices qui nous intéressent et contribuent à cette reconstitution des activités qu'ont pu faire les élèves, qui ne correspond pas aux activités effectives, hors d'atteinte, mais en donne une « enveloppe ».

Dans cet article cependant seul un texte prend en compte ce type d'informations (le deuxième), ce qui invite à une suite toute trouvée à ce type de travail.

Finalement, sans même comparer les déroulements effectifs à chaque fois, il se confirme qu'il y a de grandes différences entre les deux cycles, dans ce qui est proposé et/ou attendu des élèves sur des notions comparables (fonctions, algèbre, rédaction en géométrie), que les auteurs tentent de caractériser en relation avec l'enseignement correspondant. Cet éloignement des mises en fonctionnement des connaissances attendues entre collège et lycée est repris et interrogé plus systématiquement dans les bilans partiels et la conclusion générale ; quelques pistes éventuelles d'enrichissement des pratiques sont esquissées, pratiques susceptibles d'aider élèves et enseignants à mieux aborder cette transition, en essayant d'éviter qu'elle soit vécue par trop d'élèves comme une trop grande rupture.

Il est temps de passer aux exemples.

2 Ce que nous apprécions est évidemment inspiré de théories de l'apprentissage générales spécifiées aux mathématiques et à la situation scolaire.

Différentes utilisations de l'algèbre dans la transition : Fonction, Géométrie et Preuve

(Brigitte Benzekry, Sophie Rousse)

Les professeurs de mathématiques de 2nde trouvent bien souvent que les élèves qui arrivent de collège « ne savent pas calculer », et qu'il est donc difficile de leur faire résoudre des problèmes mathématiques de 2nde alors qu'ils n'ont pas assimilé les techniques de calcul de base.

Les professeurs de 3ème ont dans l'ensemble des classes de niveaux hétérogènes : leur objectif pour une partie des élèves est que ceux-ci arrivent à acquérir les connaissances du socle commun, qui restent très peu ambitieuses en calcul numérique comme en calcul littéral. Les professeurs essayent d'autre part, comme le préconisent les programmes de collège, de faire entrer leurs élèves dans une véritable activité mathématique, notamment par le biais de la résolution de problèmes, tout en préservant un minimum de connaissances et savoirs faire techniques.

Enseignantes en 3ème et en 2nde, nous sommes parties du constat que les acquis généralement attendus par les professeurs de lycée, de notions d'algèbre vues en 3ème, ne sont souvent pas disponibles chez les élèves de début de 2nde et nous avons essayé d'en analyser les causes.

Notre allons tenter de montrer, sur quelques exercices de 3ème et de 2nde mis en parallèle, utilisant l'outil algébrique, que les attentes des professeurs de 3ème et de 2nde diffèrent, et que les tâches soumises aux élèves de début de 2nde ne sont pas celles soumises aux élèves de fin de 3ème . Nous comptons ainsi mieux cerner les difficultés rencontrées par nos élèves, et ce en quoi il est possible d'y remédier. Nous avons pour ce faire effectué une analyse de tâches de ces exercices, assortie de commentaires issus de notre expérience avec les élèves.

1. Calcul algébrique et fonctions

Nous allons comparer, sur des questions apparemment analogues, un exercice de 2nde et deux de 3ème permettant de mettre en évidence l'évolution du statut de l'algèbre : objet en 3ème et début d'outil en 2nde.

1. *L'exercice de seconde*

Ce premier exercice, classique dans la première moitié de l'année de 2nde, a pour objectif de travailler sur les différentes écritures d'une expression algébrique afin de choisir la plus appropriée pour répondre aux différentes questions.

Exercice 1 (niveau 2nde) :

f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$
par : $f(x) = -3x^2 + 30x + 25$
et $g(x) = -6x^2 + 30x + 100$.

1. Montrer que $f(x) = -3(x-5)^2 + 100$.

2a. Calculer les images par f de 5 , 2/5 et $(1 + \sqrt{3})$..

2b. Déterminer, par le calcul, le ou les antécédent(s) de 100 par g.

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des courbes des fonctions f et g, graphiquement à l'aide de la calculatrice, puis par le calcul.

4. Prouver que la fonction f admet 100 pour maximum.

Analyse a priori et commentaires

• L'utilisation algébrique du signe égal

En **question 1**, le signe = est utilisé en tant que relation d'équivalence : les élèves, n'ayant pas à leur disposition la forme canonique d'une expression du 2nd degré, doivent travailler avec l'égalité de droite à gauche et non de gauche à droite comme ils le font depuis l'école primaire. Ils utilisent donc **la symétrie du signe =**.

Quand on leur demande de conclure, les élèves ont tendance à le faire par « $f(x) = -3x^2 + 30x + 25$ ». En effet, ils ont l'habitude, en arithmétique, que le signe = annonce un résultat. De plus, habitués aux fonctions linéaires et affines qui ne s'expriment que sous un seul format, et malgré les exemples nombreux que les professeurs de 3ème leur soumettent (voir exercice n°3 bis niveau 3ème), certains élèves pensent que deux expressions différentes correspondent nécessairement à deux fonctions différentes.

Bien que le développement de la question 1 comporte l'utilisation d'une identité remarquable simple, il requiert néanmoins une bonne maîtrise de la priorité des opérations. Le programme de 3e, pour sa part, recommande d'utiliser les identités remarquables sur des exemples basiques, ce qui n'est pas le cas ici.

Il est intéressant de noter que dans cette question, l'égalité est à démontrer « pour tout x réel ». Cet implicite à la fois dans le libellé des questions et dans le langage du professeur est fréquent en 3ème et en 2nde et les élèves en ont rarement conscience, semble-t-il.

En 3ème, cette omission n'empêche pas la réussite aux exercices mais ne permet pas aux élèves d'accéder au caractère généralisateur de l'algèbre. En 2nde, les enseignants attendent de leurs élèves la compréhension des quantificateurs, conformément aux nouveaux programmes.

On peut supposer que si les enseignants lèvent les implicites sur les quantificateurs, cela permettra aux élèves de mieux appréhender le sens de ce type de question.

En **question 2a**, le signe = est utilisé comme annonciateur d'un résultat comme c'est le cas en arithmétique. Cependant, les élèves doivent **choisir** entre deux expressions algébriques. Puis les calculs comportent des valeurs rationnelles et irrationnelles, ainsi qu'une identité remarquable, connaissances théoriquement disponibles depuis la 3ème, mais uniquement sur des exemples simples.

• Vers des utilisations « outil » de l'algèbre

En **question 2b**, on attend des élèves qu'ils adaptent leur connaissance relative au calcul d'antécédents sur les fonctions affines et linéaires vues en 3ème à un autre type de fonction[3]. Cela suppose que la notion d'antécédent soit reconnue et que les élèves la recontextualisent.

En **question 3,** on attend des élèves qu'ils effectuent un **changement de cadre** graphique/algébrique. Ce changement de cadre se fait couramment en 3ème dans les lectures d'images et d'antécédents pour une fonction dont la courbe est donnée par le professeur. En seconde, la représentation graphique sur calculatrice est rapidement laissée à la char-

3 Le programme actuel de la classe de 3ème intègre la notion de fonction.

ge de l'élève, avec son cortège de difficultés liées au choix de la fenêtre, à la lecture de l'écran sur lequel l'unité n'est pas indiquée. Les élèves doivent s'adapter à la présence de deux courbes ce qui, bien que guidé par le professeur, ne se fait pas aisément.

Les élèves effectuent le changement de cadre pour arriver par eux-mêmes à la question intermédiaire : résoudre algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$. Ils doivent **choisir** la forme de $f(x)$ qu'ils utiliseront, bien que les deux choix leur permettent d'aboutir.

S'ils choisissent la forme développée de $f(x)$, ils obtiennent l'équation $3x^2 - 75 = 0$, soit $3(x^2 - 25) = 0$. Ou bien ils écrivent $3x^2 = 75$, soit $x^2 = 25$.

Dans le premier cas, les élèves obtiennent $3(x - 5)(x + 5) = 0$ au mieux. Puis ne savent pas quoi faire du facteur 3, ce type d'équation étant inhabituel en 3ème ; ils écrivent souvent $3 = 0$ ou $x = 5$ ou $x = -5$; ici, les élèves appliquent la règle du produit de facteurs nul sans en rechercher le sens.

Pour les autres, avec $x^2 = 25$, ils obtiennent souvent une seule solution $x = 5$. En effet, les élèves ont vu apparaître pour la première fois, en 4ème, cette équation dans le cadre du théorème de Pythagore où a est une longueur, donc un nombre positif. Cette erreur est tenace et a tendance à demeurer malgré l'étude de la fonction carré en 2nde et de nombreuses résolutions graphiques d'équations du type $x^2 = a$.

Dans la **question 4**, l'algèbre est utilisée comme **outil de preuve** soit à l'aide d'une inéquation à résoudre, soit par la recherche du signe de la différence $f(x) - 100$, soit de façon plus intuitive en exploitant le fait qu'un carré, ici $(x - 5)^2$, est toujours positif. La première méthode dépasse largement les exigences de fin de 3ème, où seules les inéquations du 1er degré à une inconnue sont au programme. Le saut conceptuel demandé aux élèves en début de 2nde est très grand.

La deuxième méthode suppose de bien **choisir** la forme de $f(x)$.

La troisième méthode, elle, suppose que les élèves aient élaboré une **conception structurale de l'algèbre**, c'est-à-dire d'être capable de repérer la structure d'une expression algébrique via les priorités opératoires. Les élèves doivent, ici, interpréter l'expression sous la forme « – 3 fois un carré, plus 100 ».

• Dans cet exercice, les élèves sont donc confrontés à trois grands types de difficultés :

— Celle de faire des **choix.** En effet, dans chacune des questions, les élèves ont à choisir l'expression de f(x) la plus appropriée pour y répondre, voire à choisir une bonne représentation graphique.

— Celle du **statut de la lettre** qui évolue au cours de l'exercice : indéterminée en question 1, variable en question 2a puis inconnue en question 2b et question 3 et de nouveau variable en question 4. Selon le statut de la lettre, le travail des élèves est différent ; de fait des quantificateurs sont implicites à la fois dans les questions posées et les réponses attendues des élèves.

— Celle du **statut de l'égalité** qui varie aussi d'une question à l'autre : c'est un changement de point de vue, ce qui implique un changement de stratégies pour les élèves…

2. *Les exercices de 3ème*

Comparons maintenant les tâches de cet exercice avec celles d'exercices de niveau 3ème sur des notions proches de celles du début de celui-ci.

Même s'ils ne sont plus dans l'esprit des nouveaux programmes, ces exercices sont encore très fréquemment traités en 3ème, et les professeurs de 2nde pensent généralement que les élèves les ont travaillés l'année précédente.

Exercice 2 (niveau 3ème) :
On donne l'expression
$$E = (2x + 7)^2 - (2x + 7)(x - 1) .$$
1. Développer et réduire E.
2. Factoriser E.
3. Résoudre l'équation $(2x + 7)(x + 8) = 0$.

Analyse a priori et commentaires

Ce type d'exercice a été un classique au brevet des collèges. Il reste encore largement utilisé en tant qu'exercice d'entraînement en algèbre niveau 3ème.

La résolution des questions se fait de façon totalement indépendante, bien que la 3e utilise le résultat de la 2nde. Mais aucun lien n'est fait explicitement. Cet enchaînement ne laisse pas de choix aux élèves. Les tâches sont donc isolées ; on est dans l'algèbre comme application de règles.

Le statut de la lettre passe d'indéterminée à inconnue, mais dans un contexte très simple et habituel pour les élèves, ce qui leur évite d'en être gêné.

Dans les **questions 1 et 2**, il s'agit de tâches classiques. On peut néanmoins s'attendre à ce que la gestion du signe – pose problème.

Dans la **question 3**, il s'agit de la résolution d'une équation-produit, comportant deux facteurs tous les deux du premier degré, c'est une **tâche simple et isolée.**

Dans les faits, la majorité des exercices à caractère algébrique de 2nde porte sur des fonctions alors qu'en 3e la plupart des expressions algébriques sont indiquées par des lettres majuscules. On peut remarquer que, dans le cadre des nouveaux programmes de 3e, on peut remplacer la notation E par la notation fonctionnelle E(x).

Exercice 2bis (niveau 3ème) :
Résoudre les équations suivantes :
1. $x^2 = 49$
2. $x^2+7 = 0$
3. $(x+2)^2 =25$

Analyse a priori et commentaires

Cet exercice ne tient pas compte des inflexions des nouveaux programmes et n'engage que les auteurs. Les élèves peuvent transposer tous les termes dans un même membre puis faire apparaître une équation produit. C'est une méthode « sûre » à condition de maîtriser les identités remarquables. En effet, A^2-B^2 se transforme bien souvent en $(A-B)^2$, et $A^2 + B^2$ en $(A + B)^2$. Les identités remarquables, détachées de la non linéarité du carré, sont source de bien des erreurs de la 3ème à la terminale.

Ainsi, la 2ème question peut se transformer en résolution de $(x + \sqrt{7})^2 = 0$ et la question 3) en résolution de $x^2 + 4 = 25$.

La 1ère question et la 3ème relèvent de résolutions d'équations du type $x^2 = a$, avec $a > 0$. Si les élèves la résolvent sans factorisation, ils risquent fort d'oublier une solution : conclure que $x = 7$ dans la 1ère question et que $x = 3$, dans la 3e question, solution obtenue en résolvant $x + 2 = 5$. Cette erreur a tendance à perdurer pendant les années de lycée (cf exercice 1).

Cette méthode n'est accessible dans la question 3 qu'aux élèves ayant développé une conception structurale de l'algèbre, afin de pouvoir y reconnaître « un carré égal à 25 ».

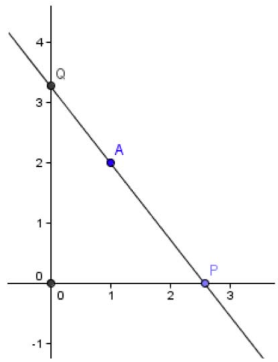
Pour des élèves, utiliser un modèle ($x^2 = a$) est parfois plus difficile que de refaire systématiquement la résolution de l'équation selon la première méthode. Les professeurs laissent-ils suffisamment de temps aux élèves pour décontextualiser ? Ne proposent-ils pas parfois un modèle, un concept trop tôt ? Les professeurs de 2nde attendent-ils des élèves des acquis en termes de concepts alors que les élèves de 3ème arrivent tout juste à décontextualiser une notion ? Les professeurs laissent-ils les élèves contextualiser un nombre de fois suffisant ?

2. Calcul algébrique et géométrie

Voici maintenant un exercice de 2nde, puis un de 3ème, avec un changement de cadre de la géométrie vers l'algèbre. Cependant l'intervention de l'algèbre est préparée en 3ème par un passage au numérique, ce qui est moins fréquent en 2nde. Bien que datant de 1984, la problématique de cet exercice reste tout à fait dans l'esprit des nouveaux programmes[4].

Exercice 3 (niveau 2nde) **:** [D'après Terracher (1986 ; hachette), basé sur une idée du petit Archimède de 1984]

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère le point A(1; 2). A chaque point P de l'axe des abscisses, d'abscisse x ($x > 1$), on associe le point Q de l'axe des ordonnées de façon que A, P et Q soient alignés.



Où placer le point P pour que le triangle OPQ ait la plus petite aire possible ?

1. Faire une figure active sous GeoGebra ou Geoplan. Faites afficher les valeurs de x et y_Q , ordonnée de Q.

2. Montrer que l'ordonnée de Q est $\dfrac{2x}{x-1}$.

3. En déduire que l'aire $S(x)$ du triangle OPQ est donnée par $S(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ pour tout réel x, $x > 1$.

4. Par lecture graphique de la courbe représentative de S sur la calculatrice, conjecturer la valeur minimale de $S(x)$.

5. Montrer que, pour tout $x > 1$,

$$S(x) = 4 + \frac{(x-2)^2}{x-1}.$$

6. En déduire que 4 est le minimum de $S(x)$. En quelle valeur est-il atteint ?

4 Nous nous référons à l'objectif général du programme de 2nde, dans le Bulletin Officiel n°30 du 23 juillet 2009.

Analyse a priori et commentaires

Là encore dans cet exercice, **la lettre *x* change de statut**, elle est nombre généralisé, puis variable, puis inconnue.

• *Le changement de cadre annoncé géométrie-algèbre*

La résolution de la **question 1** implique un **changement de cadre** géométrie/algèbre. En classe de 3ème, la pratique serait plutôt de faire calculer y_Q pour quelques valeurs de x. Cette pratique est un passage peut-être nécessaire au début de l'apprentissage de l'algèbre au collège dont on peut se demander s'il ne convient pas de s'extraire graduellement par la suite. Il est à noter que de nombreux élèves de collège ne maîtrisent pas GeoGebra ou Geoplan.

• *Imbrications algèbre-géométrie*

Dans la **question 2**, les élèves peuvent utiliser le Théorème de Thalès ou la proportionnalité des accroissements en liaison avec les fonctions affines. Dans les deux cas, une difficulté réside dans la présence de deux lettres : x, abscisse du point P, et y_Q ordonnée de Q. Les élèves qui sortent de collège y sont peu préparés.

Dans la **question 3**, il s'agit de multiplications d'écritures fractionnaires ; connaissance supposée disponible par les élèves, mais la présence d'un dénominateur variable rend la tâche plus difficile. Là encore, les élèves qui sortent de collège y sont peu préparés.

• *Un changement de cadre algèbre-graphique*

La **question 4** suppose que les élèves adaptent leurs connaissances de lecture graphique d'image et d'antécédent à un problème de recherche d'extremum d'une fonction. Il y a souvent confusion entre l'extremum et la valeur pour laquelle il est atteint.

Une des origines de cette confusion pourrait être liée à des caractéristiques particulières de la courbe représentative d'une fonction, qui est difficile à appréhender par les élèves. En effet une courbe est un objet à une dimension du plan (à deux dimensions) et traduit une relation orientée entre les deux dimensions.

• *Retour à l'algèbre en tant qu'outil*

Question 5. Une première difficulté vient de la nécessité de la mise au même dénominateur avec un dénominateur variable, ce qui n'est pratiquement pas abordé en 3ème, même si les élèves disposent des outils théoriques nécessaires.

Une deuxième difficulté tient au travail de développement du numérateur $4(x-1)+(x-2)^2$, qui est une tâche habituelle en 3ème, mais qui ici est loin d'être isolée.

Une troisième difficulté apparaît : les élèves ont tendance à commencer la rédaction de la réponse par l'affirmation :

$$S(x) = 4 + \frac{(x-2)^2}{x-1}.$$

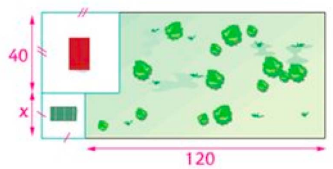
Ils terminent par « donc $S(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ ». (Voir exercice 1). On retrouve, comme dans l'exercice 1, que les élèves sont habitués à lire les égalités de gauche à droite, et à ce que la fin soit la conclusion.

Question 6. Il y a d'abord **un choix** à opérer entre les deux expressions de S(x). Il s'agit ensuite de trouver le signe d'un quotient comportant la variable x au numérateur et au dénominateur ; les outils sont simples, vus au collège, (signe de $x - 1$, quotient de deux valeurs positives), mais il faut se rappeler la définition de x, respecter le sens des objets travaillés, et généraliser la règle du signe du quotient à un numérateur et un dénominateur variables. Les outils travaillés en 3ème sous forme isolée sont une fois encore utilisés et mis en relation en vue de la réalisation d'une tâche complexe.

• *Bilan :* Cet exercice met en évidence des sources de difficultés des élèves liées à la présence de multiples lettres dans les expressions algébriques, de lettres dans des écritures fractionnaires, et à l'unidimensionnalité d'une courbe dans le plan. L'enseignant en lycée peut sous estimer ces difficultés, le temps et les répétitions nécessaires à la construction par les élèves des concepts sous jacents.

Exercice 3bis (niveau 3e) : (Transmath 2008)

Une parcelle rectangulaire est formée : d'un terrain carré de 40 m de côté, d'un autre terrain carré de côté inconnu x, d'un terrain restant, boisé :



Les dimensions sont exprimées en m et $x \leq 40$.
A désigne l'aire en m ^{2} du terrain restant, boisé.

1. Calculer A lorsque :

$x = 20$ $x = 30$ $x = 40$

2. a. Trouver deux méthodes différentes pour exprimer A en fonction de x.

b. Développer, puis réduire chacune des deux expressions trouvées.

Analyse a priori et commentaires

Les élèves doivent d'abord faire des calculs de A avec des valeurs particulières de x. La lettre x a donc un statut de nombre généralisé dans la question 1 puis un statut de variable dans la question 2. Les deux dernières questions visent à **donner du sens aux expressions algébriques**, tout en travaillant le développement.

Le **changement de cadre** géométrie-algèbre ne pose pas de difficultés en termes de concepts géométriques et permet donc de se concentrer sur l'aspect algébrique de l'exercice. Cependant, les élèves ne voient souvent pas l'intérêt de trouver deux méthodes alors qu'ils se contenteraient volontiers d'en trouver une seule.

Nous avons déjà fait la remarque dans les commentaires de l'exercice 2, à savoir que les nouveaux programmes de 3e permettent la notation fonctionnelle A(x) dès la 3ème.

3. Algèbre et preuve

L'utilisation de l'algèbre en tant que preuve porte davantage sur les ostensifs et le numérique en 3ème alors qu'en 2nde, la preuve est davantage liée à du calcul algébrique impliquant des variables.

Exercice 4 (niveau 3ème):

1. Développer et réduire $n^2 - (n + 5)(n - 5)$.

2. Sans faire d'opérations, mais en le justifiant brièvement, donner le résultat de :

$$G = 9\,876\,543\,210^2 - 9\,876\,543\,215 \times 9\,876\,543\,205.$$

Analyse a priori et commentaires :

C'est un exemple d'utilisation de l'algèbre en tant que preuve, à un niveau accessible en 3ème. L'**aspect généralisateur de l'algèbre** y est mis en avant.

Les élèves ont du mal à faire le lien entre les deux questions posées. L'habitude de la résolution de tâches simples et surtout isolées est très forte. Le fait que l'expression de la **question 1** ait un caractère généralisateur, par ailleurs implicite (« pour tout nombre n, ..»), n'est pas toujours mobilisable car l'algèbre est souvent vue par les élèves comme une succession d'applications de règles et non un outil puissant de preuve. Le statut de la lettre passe d'indéterminée à celui de nombre généralisé. Le signe = reste annonciateur d'un résultat.

La **question 2** peut amener à une vérification sur calculatrice afin de montrer les limites de celle-ci qui donnerait 0 comme résultat. Afin de mettre davantage en évidence **l'algèbre en tant qu'outil de preuve**, une alternative à la question 2 pourrait être :

2. Prouver que:

$$9\,876\,543\,210^2 - 9\,876\,543\,215 \times 9\,876\,543\,205 = 25.$$

Il est à noter que la majorité des énoncés d'algèbre de 3ème ne contient pas les verbes « démontrer » et « prouver », mais plutôt « exprimer », « calculer », « donner le résultat de ». Ce qui n'est plus le cas en 2nde où le professeur, implicitement ou explicitement, attend un travail de preuve.

Exercice 4bis (niveau 2nde) :

L'unité de longueur est le centimètre. a et b désignent deux nombres réels strictement positifs tels que $a > b$.

1.a . Faire la figure 1 ci après, dans le cas où $a = 8$ et $b = 5$. Découper soigneusement les quatre pièces comme indiqué.

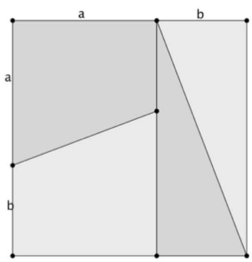


Figure 1

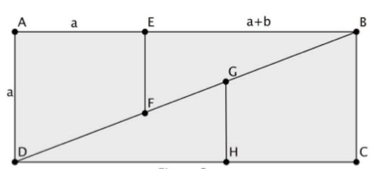


Figure 2

1.b . Coller ces quatre pièces comme indiqué dans la figure 2.

1.c . Obtient-on le rectangle ABCD ? Calculer les aires des deux figures. Que constate-t-on ?

2. Reprendre les questions précédentes lorsque $a = 5$ et $b = 3$. [5]

5 Avec les valeurs de a = 5 et b= 3, il s'agit du puzzle de Lewis Carroll pour lequel l'aire du carré vaut 64 et celle du rectangle 65

On se propose de prouver qu'en général, les pièces de la figure 1 ne permettent pas de reconstituer exactement la figure 2.

2. On note $\mathcal{A}$ l'aire du carré de la figure 1 et $\mathcal{B}$ celle de la figure 2. L'objectif est de comparer ces deux aires.

2.a. Exprimer $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ en fonction de a et b.

2.b. Vérifier que $\mathcal{B} - \mathcal{A} = a(a-b) - b^2$.

2.c. Calculer $\mathcal{B} - \mathcal{A}$ lorsque $a = 8$ et $b = 5$.

2.d. Démontrer que :

lorsque $a < \frac{1+\sqrt{5}}{2} b$, alors $\mathcal{B} - \mathcal{A} < 0$.

lorsque $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2} b$, alors $\mathcal{B} - \mathcal{A} > 0$.

lorsque $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} b$, alors $\mathcal{B} - \mathcal{A} = 0$.

2.e. Conclure sur la comparaison des aires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

3.a .Exprimer EF en fonction de a et b, sachant que les droites (EF) et (AD) sont parallèles.

3.b .Vérifier que pour $a = b$, alors EF = b .

4. Lorsque $b = 5$, pour quelle valeur de a le puzzle est-il réalisable pour la figure 2 ? Donner l'arrondi au centième de la valeur trouvée pour a.

Analyse a priori et commentaires

Le statut des lettres a et b passe progressivement de celui de nombres généralisés, à celui de variables, indépendantes l'une de l'autre pour aboutir, à la fin de l'exercice, à l'expression de l'une en fonction de l'autre.

Dans les **questions 2.a et 2.b,** l'expression de $\mathcal{B} - \mathcal{A}$ sous la forme demandée ne sera pas accessible à tous les élèves car ils sont face à du calcul algébrique qu'ils maitrisent mal, qui plus est, avec deux variables. Le travail sur les inégalités leur est aussi ardu dans la **question 2d**. Les notions d'opérations sur les inégalités ont été vues en 3ème, mais ici, elles sont exploitées avec deux variables et la transitivité de la relation d'ordre sur **R**, peu utilisée en collège, est nécessaire.

Question 2.e Exploiter le signe de la différence $\mathcal{B} - \mathcal{A}$ est récurrent au lycée et rarement utilisé au collège. C'est un **outil de preuve** qui ne nécessite aucune connaissance nouvelle. Cependant, le passage de sa conceptualisation à sa recontextualisation nécessite de nombreuses répétitions.

Question 3.a L'obtention du rapport

(1) : $\frac{a+b}{2a+b}=\frac{EF}{a}$ est difficile. Les élèves maitrisent le théorème de Thalès dans des applications numériques ; pour autant, lorsque les rapports comportent des lettres au numérateur et au dénominateur, la tâche leur est difficile et peu d'élèves aboutissent.

Question 3.b $EF=\frac{a^2+ab}{2a+b}$. Il faut maintenant remplacer a par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}b$, a et b ne sont plus des variables indépendantes l'une de l'autre.

L'acquisition du calcul avec des rationnels et des irrationnels, si elle est effective chez les élèves de 3ème, l'est généralement sur des tâches simples et isolées. Elle ne permet pas de mener à bien cette question pour la majorité des élèves. Les professeurs de 2nde donnent parfois ce type d'exercice en devoir maison. Il peut éveiller la curiosité de certains. Mais les **difficultés techniques sont multiples pour les élèves**. Ils risquent fort de se décourager, de se faire aider (un peu trop) par leurs parents, un professeur particulier, ou encore de recopier le travail d'un autre.

Afin d'‘éviter ces nombreux écueils, le professeur peut envisager de mener ce travail en demi-classe (s'il a encore la chance d'en bénéficier) ou en classe entière, en petits groupes. Cette **modalité de travail** permet à l'enseignant de donner des aides aux élèves à bon escient.

4. Des pistes de réflexion

A la fin du collège, en algèbre, nos élèves, pour la plupart, résolvent des exercices qui proposent des tâches simples et isolées même si les programmes encouragent les enseignants à « donner du sens » au calcul algébrique. Or la compréhension des concepts n'est souvent pas acquise. La variété et la complexité des mises en application de leurs connaissances, la longueur des exercices qui leur seront proposés l'année suivante pourront les mettre en difficulté.

L'apprentissage des élèves en algèbre, avec tout ce qu'elle comporte de continuités et de discontinuités, ne fait que commencer.

1) L'aspect procédural des expressions algébriques (nature du travail effectué pour avoir des résultats) est très présent au collège sous la forme de programmes de calcul, et dans les substitutions. **L'aspect structural** d'une expression algébrique (reconnaissance de la structure) y est aussi présente dans les développements, factorisations et résolutions d'équations et d'inéquations, mais bien souvent sous la forme d'application de règles, le spectre des types de résolutions d'équations et d'inéquations étant relativement réduit.

Au lycée, les élèves ont très souvent à choisir la forme la plus appropriée pour répondre à une question : c'est l'aspect structural qui est en cause dans ce cas. La variété des types de résolution d'équations et d'inéquations au lycée suppose bien que les élèves soient capables d'en analyser la structure.

2) Les changements de cadre et la modélisation sont d'autant plus présents que les programmes de 2nde incitent à enseigner les mathématiques comme outil de résolution de problèmes. Les passages de points de vue géométriques à des points de vue algébrique, fonctionnel ou graphique sont très nombreux. Ils s'agrémentent de l'utilisation de **nombres**

rationnels et irrationnels au sein de raisonnements algébriques. Cette complexification des tâches est difficilement abordable par les élèves habitués souvent à des tâches plus simples et plus isolées.

3) Les différentes significations du signe égal

En arithmétique, le signe = est annonciateur d'un résultat numérique effectué. C'est la conception qui prime dans l'esprit de beaucoup d'élèves qui n'ont pas terminé la transition arithmétique – algèbre. En algèbre, un résultat est une formule prouvée à l'aide des règles du calcul littéral.

Ceci peut nous amener à nous demander ce qu'est un résultat dans l'esprit du professeur et dans celui des élèves, et ce qui le valide. Par exemple, $2 + \sqrt{3}$ est pour le professeur un résultat numérique effectué, mais pas nécessairement pour les élèves. Multiplier les exemples où les résultats numériques ne sont ni entiers, ni décimaux, peut permettre aux élèves d'élargir leur notion de résultat numérique et de les amener plus rapidement à la notion de résultat en algèbre.

La signification du signe = en tant que relation symétrique entre les deux membres apparaît en collège essentiellement dans les résolutions d'équations. Mais l'activité des élèves réduite à des résolutions « d'équations type » ne leur permet pas de l'appréhender en tant que telle.

Elle est cependant prédominante en lycée : dans la résolution d'équations, dans la démonstration de l'égalité de plusieurs expressions. Afin de faire accéder les élèves à la lecture des égalités de droite à gauche, les élèves pourraient y être entraînés dès le collège.

4) Bien entendu, les différents statuts de la lettre sont déjà présents en collège au sein de tâches relativement simples et isolées en tant que nombre généralisé, indéterminée, variable, inconnue et paramètre.

Ils cohabitent plus largement en 2nde. En particulier, la lettre y est utilisée comme paramètre à de plus nombreuses reprises, puisqu'on « étudie » les fonctions polynômes du 2nd degré et les fonctions homographiques en plus des fonctions affines, en tant que familles de fonctions. La lettre en tant que paramètre peut aussi intervenir dans des résolutions de problèmes.

Ces changements de statut de la lettre et de l'égalité, qui ont tendance à être invisibles aux yeux des élèves, méritent d'être présents à l'esprit des enseignants, voire à être parfois explicités aux élèves.

Varier les types de questions, expliciter aux élèves les différents cas de figure et la rédaction qui en découle sont autant d'atouts pour permettre aux élèves d'avoir des repères fiables.

Nous espérons, par l'analyse de ces exercices, avoir montré que les notions de 3ème, dont l'usage est complexifié en 2nde, peuvent représenter pour les élèves un saut cognitif important qui peut laisser les professeurs de lycée démunis. La conscience que les professeurs de collège ou de lycée en ont pourrait élargir leur approche des tâches confiées aux élèves, leurs choix de mise en activité des élèves, ainsi que les modalités de leur mise en œuvre, et ce pour permettre aux élèves d'effectuer ce saut cognitif le plus facilement possible.

Faire faire des mathématiques en 3ème et en 2nde : quelles difficultés liées à la transition ?

(Catherine Fauvé, Mireille Vuong, Catherine de Zélicourt)

Ce travail est conduit par le double questionnement suivant :

Du côté des élèves :

- En quoi les difficultés des élèves de 3ème et 2nde se ressemblent-elles ? En quoi diffèrent-elles ? Peut-on identifier une certaine spécificité due à ce passage là et trouver des points communs, voire une classification ?

- Quelles sont les difficultés-obstacles ? Les difficultés- source de progrès ?

Du côté des enseignants :

- En quoi les difficultés des élèves peuvent-elles enrichir la réflexion des enseignants sur les contenus et les méthodes tout en tenant compte des contraintes ?

Suite à une réflexion à partir d'une expérience de plusieurs années d'enseignement en collège et en lycée, nous avons tenté d'établir une classification des difficultés (relativement spécifiques) dues à ce passage troisième-seconde, vues du côté élèves et vues du côté professeur.

Dans cet article nous développons une première catégorie de difficultés, internes aux mathématiques enseignées, qui concernent les énoncés proposés à chaque niveau et les activités correspondantes pour les élèves ainsi que les déroulements des séances en classe concernant ces exercices, qui pourraient accentuer les différences d'activités attendues. Nous illustrons notre propos par un exemple : un exercice classique de seconde que nous analysons en dégageant les connaissances qui doivent être utilisées par les élèves puis en montrant plusieurs déroulements. Nous donnons une conclusion « provisoire », évidemment partielle : la transition est porteuse d'attentes différentes, notamment en terme de types de questions (types de tâches) et donc d'activités des élèves sur des connaissances qui peuvent être proches, et l'enseignant peut plus ou moins aider les élèves à s'y adapter selon les déroulements qu'il organise... et la conscience qu'il a de ces différences.

Nous proposons dans le paragraphe VI. d'autres catégories de difficultés plus générales qui pèsent cependant de manière importante à nos yeux sur les élèves et leurs enseignants.

1. Première catégorie de difficultés, les méthodes spécifiques à chaque niveau (activités mathématiques des élèves attendues par les enseignants, modes de travail en classe).

Voici (page ci-contre) un tableau résumant un certain nombre de questions relevant de ces méthodes que nous semblent pouvoir se poser les élèves et les enseignants.

Ces questions nous semblent importantes au moment de cette transition, même si certaines d'entre elles continuent à se poser en première ou ont commencé à se poser en classe de collège. Pour illustrer ce propos vu de la seconde, nous allons travailler à partir d'un énoncé emblématique de ce niveau sur les fonctions, mettant en jeu des connaissances en partie vues en troisième. Nous

Du côté des élèves	**Du côté des enseignants**
- les non-dits en 2nde : figure à dessiner ? Justification exigée mais non demandée. - questions intermédiaires à inventer, changement de cadres dans les exercices de 2nde à gérer de façon autonome - problème de langage et d'écriture : incompréhension d'une question ou d'un raisonnement logique, d'un formalisme, de locutions telles que « si.alors », « donc », « et », « ou »… - écoute et prise de notes, que signifie « argumenter » ? - résoudre un problème, est-ce seulement appliquer des techniques, faire des calculs ? en 3ème ? en 2nde ? - peut-on mémoriser sans comprendre ?	- comment mettre en activité chaque élève ? - réutiliser les notions nouvelles ou les connaissances anciennes - expliquer la nécessité de la démonstration - différences dans les déroulements de cours ? conséquences ? - nécessité accrue d'un travail commun des professeurs d'un même niveau : fixer une progression commune et organiser des contrôles communs, est-ce nécessaire et suffisant ?

livrons notre analyse des connaissances que les élèves ont à mettre en fonctionnement pour résoudre l'exercice, puis nous nous interrogeons sur les déroulements possibles en séances. Nous présentons ensuite deux séances ayant eu lieu et dégageons finalement quelques réponses aux questions précédentes.

2. L'exercice et l'analyse a priori

Cet exercice de mathématique (donné dans l'encadré de la page suivante) a été choisi dans le manuel de seconde, « INDICE », Bordas, programme 2009. Il peut être proposé aux élèves à la fin des chapitres traitant des fonctions.

Nous proposons notre analyse **a priori** de cet exercice**, question par question,** analyse qui permet à l'enseignant de prévoir les étapes de travail des élèves, les connaissances à mettre en œvre et certaines des adaptations à utiliser, sources éventuelles des difficultés qu'ils pourraient rencontrer, notamment en relation avec leurs connaissances antérieures.

Un développement important de l'imbrication complexe géométrie – algèbre donne lieu à un réel travail géométrique comportant de nombreux choix, travail plus important que dans l'exercice 3 de l'article précédent. L'habillage géométrique représente une véritable variable didactique.

Question [6] 1

Connaissances nécessaires et adaptations.

- formule d'aire du triangle (B × h)/2, utilisation de la propriété de la médiane dans un triangle isocèle (hauteur), théorème de Pythagore pour calculer la longueur de la médiane (connaissances de collège).

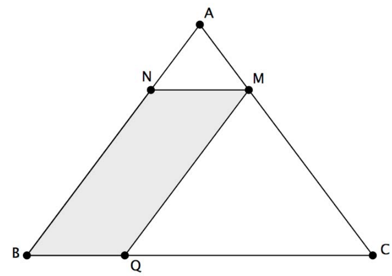
Pour la formule d'aire et surtout pour la propriété de la médiane d'un triangle isocè-

6 Nous développons les connaissances nécessaires aux élèves pour répondre aux questions ainsi que les adaptations qu'ils devront mettre en œuvre.

Exercice : *Parallélogramme d'aire maximale.*

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que AC = 5 et BC = 6. Un point N se déplace sur le segment [AB] en restant différent des points A et B. M est l'intersection de (AC) et de la parallèle à (BC) passant par N. On désigne par Q le point du segment [BC] tel que le quadrilatère NMQB soit un parallélogramme.

On pose AN = x , avec $0 < x < 5$. On note $f(x)$ l'aire du parallélogramme NMQB.



1) Calculer l'aire du triangle ABC.

2) Montrer que MN = $\frac{6}{5}x$

En déduire l'aire du triangle AMN.

Montrer que QC = $\frac{6}{5}(5 - x)$

En déduire l'aire du triangle CMQ.

4) Montrer que $f(x) = 12 - \frac{12}{25}(5 - x) - \frac{12}{25}x^2$

5) Montrer que $f(x)$ s'écrit aussi : $f(x) = \frac{12}{25}(-2x^2 + 10x)$

6) Calculer $f(\frac{5}{2})$ et montrer que : $f(x) - f(\frac{5}{2}) = -\frac{24}{25}(x - \frac{5}{2})^2$

7) Quel est le signe de $f(x) - f(\frac{5}{2})$? En déduire le maximum de f sur l'intervalle [0 ; 5]

le, il suffit de remplacer dans la propriété les données par celles de l'exercice et cela ne mélange pas plusieurs propriétés. Cependant ces propriétés ont été apprises les années antérieures donc sont ici supposées disponibles car elles doivent être mobilisées sans indications. La question du choix de « la base » ne se pose pas ici.

Pour appliquer le théorème de Pythagore en revanche, il est nécessaire d'introduire des étapes, non indiquées même si elles sont « naturelles » ; en effet les élèves doivent penser à tracer la hauteur issue de A, [AH], penser qu'elle est médiane, donc que BH = 3, et la longueur AH n'étant pas l'hypoténuse du triangle mais un côté de l'angle droit, AH ^{2} s'obtient par soustraction, puis AH par racine carrée.

Il y a donc dès cette première question, une figure à compléter sans que cela ne soit demandé, des connaissances disponibles à mobiliser et des étapes à choisir.

Question 2

Connaissances nécessaires et adaptations :

• Théorème de Thales

Il y a plusieurs choix possibles : Les élèves peuvent trouver directement l'aire de AMN avec l'une des méthodes ci-dessous :

- Coefficient de réduction pour déterminer la hauteur de AMN puis son aire,
- Théorème de Thales pour montrer AMN isocèle puis calcul de la hauteur de AMN avec le théorème de Pythagore et calcul de son aire,
- Angles correspondants pour montrer que le triangle AMN est isocèle puis calcul de la hauteur et de l'aire de AMN.

Les élèves peuvent aussi montrer d'abord comme il est indiqué, que MN = $\frac{6}{5}x$, puis utiliser le théorème de Thales pour calculer la hauteur et la base du triangle AMN pour en déduire l'aire. Une première difficulté dans une telle figure pour les élèves est de choisir les « bonnes » parallèles et les « bonnes sécantes », ensuite, il y a un choix à faire entre les différentes méthodes. Dans ces méthodes, il y a des adaptations à faire, adapter une formule apprise sur le théorème de Thalès à la figure de cet exercice dans laquelle les lettres utilisées ne sont pas nécessairement les mêmes (on utilise souvent M sur [AB] et N sur [AC]), les élèves peuvent se demander s'il faut justifier que la hauteur AH de ABC est aussi hauteur de ANM. Si le calcul de l'aire se fait avec (B × h)/2, il faut aussi calculer la nouvelle hauteur en fonction de x. Il y a donc des choix, des adaptations, des étapes intermédiaires non données dans le texte, et des connaissances disponibles à mobiliser (dans ce chapitre sur les fonctions, le théorème de Thalès n'a pas été forcément revu !)

Question 3

Connaissances et adaptations :

- Calculs de longueurs, d'aires et algébriques

Il s'agit d'introduire à partir de la figure le calcul de QC par différence et celui de BQ par propriété de parallélogramme : QC = BC – BQ et BQ = MN . Puis il faut factoriser le résultat (qui dépend de x) par 6/5.

On peut considérer que QC = BC – BQ et BQ = NM sont, en seconde, des tâches simples (applications immédiates) et isolées (ne mettant en jeu qu'une propriété à la fois), mais l'étape qui consiste à mettre la fraction 6/5 en facteur est souvent difficile en lycée. La factorisation est une connaissance qui devrait être disponible mais qui, de fait, n'est pas facilement mobilisable pour de nombreux élèves de seconde, lorsqu'il s'agit d'une fraction.

Pour en déduire l'aire de CMQ :

Connaissances et adaptations :

Divers choix se présentent pour la détermination de la hauteur de QCM :

- montrer que QCM est isocèle puis utiliser le théorème de Pythagore
- calculer directement la hauteur comme différence des deux hauteurs de ABC et de AMN

Puis il faut calculer l'aire de QCM en utilisant de nouveau la formule de l'aire d'un triangle.

Il faut donc tracer la hauteur dans ce triangle MCQ, puis calculer sa longueur. Si le calcul se fait avec le théorème de Pythagore, il faut auparavant montrer que ce triangle est isocèle, sinon il faut expliquer correctement le calcul par différence des hauteurs de ABC et ANM. Dans les deux cas il y a des étapes à introduire. Toutes ces connaissances sont censées être disponibles en fin de 3ème mais le choix d'une démarche et l'introduction d'étapes (non explicitées) sont des difficultés.

Question 4

Connaissances et adaptations :

- Calculs géométriques cachés et algébriques

Il faut penser à écrire l'aire du parallélogramme comme différence de l'aire du triangle ABC et des aires des triangles AMN et QCM ce qui introduit un intermédiaire. La difficulté est plus ou moins grande selon la forme de l'expression trouvée dans la question précédente. Les élèves peuvent aussi développer les expressions de 5 pour retrouver l'expression de 4.

Ecrire l'aire cherchée comme différence des aires précédentes est une application immédiate en seconde, mais l'expression proposée n'est pas obligatoirement celle trouvée par l'élève qui peut penser s'être trompé. La factorisation de $4 - \frac{4}{5}x = \frac{4}{5}(5 - x)$ pour pouvoir retrouver le facteur dans l'expression de est une difficulté pour l'élève. On retrouve une connaissance disponible à mobiliser avec adaptation de la mise en facteur.

Question 5

Connaissances et adaptations :

- Calculs algébriques :
- développement d'une identité remarquable, développement d'expressions précédées du signe « », factorisation par une fraction.

On retrouve les adaptations des formules vues en classe en troisième, mais avec plusieurs fractions dans la même expression, cela peut être une tâche simple et isolée si ces calculs ont déjà été refaits en seconde.

Question 6

Connaissances :

- Calcul de l'image d'un nombre par une fonction, puis factorisation d'une expression.

Adaptations : On peut considérer que trouver l'image d'un nombre donné par une fonction donnée est une application immédiate (tâche simple et isolée) en seconde puisque cet exercice se situe à la fin du chapitre sur les fonctions, mais l'expression qu'il est demandé de retrouver contient un développement puis nécessite une simplification, puis une mise en facteur d'une fraction et enfin une factorisation à l'aide d'une identité remarquable qui contient une fraction. Ce sont des connaissances disponibles mais difficilement mobilisables par de nombreux élèves de seconde.

Question 7

Connaissances :

- Développement du produit remarquable ; signe d'un carré ; signe d'un produit de deux réels de signes différents ; définition du maximum.

Adaptations :

Les premières étapes sont des tâches simples et isolées (bien que pas toujours maitrisées) mais le lien entre le signe de l'expression et l'extrémum de la fonction est une adaptation de la définition du cours.

3. Divers déroulements possibles

Cet exercice peut être traité sous forme de TD, en classe, accompagné par l'enseignant. On peut imaginer un travail en petits groupes d'élèves. Il y a alors plusieurs possibilités pour permettre à l'enseignant de faire travailler tous les élèves, les plus forts comme les plus faibles :

1. *Des groupes homogènes* et dans ce cas, dans le groupe « fort » le texte serait modifié : dans la figure on rajouterait la hauteur issue de A, et dans les questions on demanderait seulement l'expression en fonction de x de l'aire du parallélogramme, puis montrer que le maxi-

mum est atteint pour $x = \frac{5}{2}$. Les élèves peuvent aussi déterminer l'aire du parallélogramme en calculant la hauteur de celui-ci issue du sommet M. Cette solution permet des calculs beaucoup plus simples puisque les élèves trouvent alors directement) et montrer que : $f(x)= \frac{12}{25}(-2x^2 + 10x)$. La formulation de cet exercice donnant des aides supposées devient alors source de complications pour les élèves.

2. *Des groupes hétérogènes* en laissant le texte tel quel, et dans chaque groupe les élèves les plus forts pourraient aider les autres. Des aides seraient alors ponctuellement données par l'enseignant aux groupes qui n'arriveraient pas à avancer.

En utilisant les TICE : à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique les élèves peuvent construire la figure et conjecturer le sens de variation de la fonction donnant l'aire du parallélogramme puis son maximum avant de lancer la recherche algébrique du problème. On pourrait être tenté, pour aider les élèves, de décortiquer le texte de cet exercice en le décomposant en tâches simples et isolées mais ce serait en contradiction avec un des buts de cet exercice, qui est d'apprendre justement aux élèves à construire eux même les intermédiaires nécessaires. Il est dit dans le programme de seconde que « l'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de conduire un raisonnement, une démonstration, de pratiquer une lecture active de l'information, en privilégiant les changements de registre (numérique, géométrique) ».

Deux de ces alternatives ont été réalisées dans deux classes de seconde, de lycée et de niveaux différents afin d'obtenir une analyse des activités des élèves, analyses qui permettront de mieux connaître les réactions des élèves face à ces différentes difficultés.

4. Analyses de deux déroulements effectifs

1. *Première observation du déroulement de la séance dans une classe de 2nde hétérogène (en fin d'année)*

Les élèves ont travaillé en équipe de quatre pendant une heure. L'observation a porté sur six équipes, trois par heure. Les groupes sont volontairement hétérogènes. Cette organisation (peu de groupes à la fois) a permis une bonne observation par l'enseignante et une participation satisfaisante de tous les élèves. Un groupe aborde les questions 1 et 2 seulement ; 4 groupes sur les 5 restants tentent l'aire de CMQ.

Question 1 : *Aire du triangle ABC*

Les élèves de 3 groupes sur 6 se précipitent sur le *formulaire* de leur livre pour savoir s'il existe une formule particulière pour le calcul de l'aire d'un triangle isocèle; constatant que seuls sont traités les triangles quelconque, rectangle et équilatéral, quelques élèves reviennent plusieurs fois à ce formulaire, les autres concluent qu'il faut appliquer la formule pour un triangle quelconque.

a) *L'introduction de la hauteur* issue de A pose moins de problème que prévu. Dans un groupe, un élève demande si on peut rajouter un point (et non la hauteur) ; son voisin écrit immédiatement le résultat de l'aire, en remplaçant la longueur de la hauteur par . Dans deux autres groupes, un élève constate que la figure est proposée en vraie grandeur et mesure alors 4 pour la hauteur !

b) *Le théorème de Pythagore* est proposé à l'unanimité pour calculer la hauteur, même si quelques élèves pensent qu'il va leur manquer l'autre côté de l'angle droit (le reste du groupe rappelle alors que « le triangle est isocèle »). Un groupe cependant propose AH = $\sqrt{3}/2$ comme dans un triangle équilatéral de côté 1.

c) L'application du théorème est correcte ; un seul groupe fait une erreur de signe à la fin du calcul.

d) Plusieurs remarques sur *l'unité de l'aire* : discussions de deux groupes, qui formulent la question ainsi, « doit-on mettre cm ² ? »

Réponse d'un autre élève : « une aire a toujours une unité » ou bien « il faut bien mettre cm ², sinon comment on fait, on écrit 12 ² ? » Pour ces élèves, le fait que les côtés n'aient pas d'unité dans l'énoncé ne les gêne aucunement !

Question 2 :

a) *Calcul de MN :* Tous les élèves pensent au théorème de Thalès ; un seul groupe hésite sur le choix des parallèles. Pour tous, les trois fractions égales sont bien écrites et le résultat exact est trouvé sans difficulté.

b) *Aire de AMN :* Discussions dans tous les groupes quant à la méthode à utiliser. Un seul groupe se pose la question « les triangles ABC et AMN sont-ils proportionnels ? » ; la discussion aboutit à une réponse positive mais, finalement, se solde par un abandon par manque de connaissances sur le rapport de proportionnalité. Un autre groupe est affolé à l'idée de refaire des calculs comme dans la première question : ils réfléchissent à une autre méthode... sans la trouver. Donc, à l'unanimité, ils tracent et cherchent la hauteur principale de AMN. Pour cela, il y a deux méthodes :

• Trois groupes utilisent le théorème de *Thalès*, et aboutissent rapidement au résultat juste pour la hauteur et l'aire. Toutefois, diviser par 2 le produit $\frac{6x}{5} \times \frac{4x}{5}$ est un peu fastidieux (ou aboutit à $\frac{24x^2}{10}$)

• Trois groupes reproduisent leur méthode utilisée pour la première question, avec le théorème de *Pythagore*. Et là les choses se compliquent pour les trois groupes :

Faire la soustraction 25 – 9 *avec des nombres, comme dans la première question, ne pose aucun problème ; mais l'expression* $x^2 - \frac{9x^2}{25}$ *n'apparaît pas comme une soustraction à effectuer* (pour deux groupes sur trois) !

Dans un cas, cela donne $(x - \frac{3x}{5})(x + \frac{3x}{5})$ (désemparé, ce groupe s'arrête) ; dans l'autre cas la hauteur du triangle AMN vaut alors $x - \frac{\sqrt{3}}{5}x$; ceux-là trouvent une aire très compliquée, ce qui ne les soucie aucunement !

Dans le troisième groupe, le résultat de la soustraction est négatif (or c'est le carré de la hauteur !), ce qui ne leur saute pas aux yeux immédiatement, du fait sans doute que l'expression s'écrit $\frac{-16x^2}{25}$ (et non $-\frac{16x^2}{25}$ par exemple)

Question 3 :

a) *Calcul de QC :* un groupe est tenté par le théorème de Thalès, pour ensuite reconnaître une impossibilité.

L'expression $6 - \frac{6x}{5}$ est trouvée rapidement, par soustraction ; l'expression factorisée de l'énoncé est trouvée par un groupe en factorisant, par un autre en développant. L'un de ces groupes n'a plus le temps de poursuivre.

b) *Aire de CMQ :* Les quatre groupes restants cherchent à calculer la *hauteur*. Un groupe a l'idée de faire la soustraction des deux hauteurs précédentes ; ils écrivent alors la formule de l'aire, mais sans la simplifier. Deux autres groupes utilisent le théorème de Thalès, mais l'un se trompe dans les calculs et l'autre n'a pas le temps de terminer. Un groupe se lance dans l'utilisation du théorème de Pythagore, en développant toutes les expressions du second degré, avec beaucoup d'erreurs de calcul.

Conclusion quant à la liaison 3ème/2nde :

Il est intéressant d'avoir pu analyser les trois premières questions qui peuvent être considérées comme des questions typiques de la transition 3ème/2nde.

Ecrire les théorèmes classiques, comme Pythagore ou Thalès, avec des nombres ou avec x ne pose plus de problème ; par contre ces mêmes élèves ont toujours beaucoup de difficultés à identifier une opération entre termes algébriques de même degré à une opération arithmétique. Cela prouve, qu'avant même la notion de fonction, les difficultés liées au passage calcul arithmétique / calcul algébrique sont encore très présentes en fin de 2nde (cf premier article)

Les questions 1 à 4 peuvent être traitées dans une classe de troisième, mais à partir de la question 5, les difficultés liées au calcul algébrique ainsi qu'à la notion de maximum sont davantage du programme de seconde. Cette dernière notion sur le maximum n'est pas toujours acquise en première.

Les élèves en difficulté ont tous participé (sauf une) de façon efficace, sans doute encouragés par l'absence d'évaluation et par la gentillesse et la collaboration bienveillante des meilleurs élèves.

2. *Deuxième observation dans une classe de 2nde option Histoire des Arts*

Les élèves n'ont pas été confrontés au même énoncé que celui qui est donné dans l'article. Voici l'énoncé 2ème version :

Exercice : *Parallélogramme d'aire maximale.*

Soit ABC un triangle isocèle tel que AC = 5 et BC = 6. Un point N se déplace sur le segment [AB] en restant différent des points A et B. M est l'intersection de (AC) et de la parallèle à (BC) passant par N. On désigne par Q le point du segment [BC] tel que le quadrilatère NMQB soit un parallélogramme.

On pose AN = x . On note $f(x)$ l'aire du parallélogramme NMQB.

On cherche pour quelle valeur de x, l'aire de ce parallélogramme est maximale.

Les élèves sont placés en groupe de 4 maximum, le professeur a laissé chacun se placer par affinité. Les groupes étaient de niveau hétérogène sauf un seul qui était composé d'élèves en difficulté en mathématiques mais de très bons élèves dans les disciplines littéraires. Tous les groupes ont refait la figure en grandeur réelle et n'ont pas placé le point N au « même endroit ». 4 groupes ont colorié l'aire du parallélogramme. (3 minutes)

Cette première étape a été suivie d'une étape de réflexion et de discussion au sein des groupes. (5 minutes)

Ils se sont lancés dans le travail : tous avait compris qu'il fallait exprimer $f(x)$ en fonction de x. 3 groupes (que je nommerai T) ont choisi de calculer l'aire des triangles ANM et MQC. 7 groupes (que je nommerai P) ont choisi de déterminer directement l'aire du parallélogramme.

Les 10 groupes ont spontanément exprimé MN = $\frac{6x}{5}$ en utilisant Thales. (3 minutes)

3 groupes parmi les 7 P se sont trompés en calculant l'aire du parallélogramme, ils ont calculé MN × NB. (première intervention du professeur : êtes vous sûrs de cette formule ?) (2 minutes)

2 groupes P ont tracé la hauteur du parallélogramme issue de Q et n'ont pas réussi à conclure. (2ème intervention du professeur : vous pouvez tracer une autre hauteur).

Le professeur est intervenu une troisième fois auprès de ces groupes pour leur indiquer qu'ils pouvaient tracer la hauteur issue de A au triangle ABC. Grâce à cette intervention les groupes ont déterminé $f(x)$ en 45 minutes.

Les 2 derniers groupes P ont travaillé seuls et ont déterminé $f(x)$ en 25 minutes.

Parmi les groupes T, les interventions de l'enseignant ont été plus nombreuses :

- l'aire du triangle AMN a été calculée en utilisant Pythagore. Le groupe des « littéraires » se trompe en calculant la racine carrée de AH : AH = $\sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{5}x\right)^2}$ ce qui donne $x - \frac{3}{5}x$!!!!
- Les autres groupes T gardent l'expression AH = $\sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{5}x\right)^2}$.
- La hauteur MO du triangle MQC n'a été trouvée qu'après intervention du professeur qui leur a proposé de tracer la hauteur du triangle ABC.

Deux groupes T ont déterminé $f(x)$ en 45 minutes. Le dernier groupe « littéraires » a réussi à écrire $f(x)$ comme différence des aires des triangles de ABC avec AMN et MQC au moment de la sonnerie. **Les 9 autres groupes** ont écrit $f(x)$ sous la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -\frac{24}{25} < 0$. Ils ont calculé l'abscisse du sommet de la parabole et son ordonnée avant de dresser le tableau de variations. Deux groupes ont spontanément restreint l'ensemble de définition à l'intervalle]0; 5[, les autres ont pris **P**.

Bilan : Le fait que l'exercice n'ait pas été guidé n'a pas été un obstacle en soi bien au contraire les groupes qui ont déterminé l'aire du parallélogramme directement ont eu des calculs moins compliqués et ne se sont pas lassés. Le lien avec les fonctions du 2nd degré a été aussi tout à fait évident (un groupe a demandé si on pouvait poser $c = 0$). En cette fin de 2nde, les difficultés principales des élèves restent être le calcul algébrique.

En fin d'heure, le professeur leur a montré l'énoncé initial, tous se sont écriés : *« C'est drôlement plus compliqué que ce que nous avons fait !!! »*

En seconde, on retrouve le fait que résoudre un problème comme celui-ci, ne consiste pas seulement à appliquer *des tech-*

niques de calcul, il faut interpréter les résultats, et les adapter à la situation géométrique. Une autre difficulté que l'on peut prévoir est la *longueur de cet exercice* : les élèves doivent rester concentré longtemps pour aller au bout de l'exercice, doivent réinvestir les résultats trouvés dans les questions précédentes ; ils doivent par conséquent se souvenir des expressions trouvées.

Nous pouvons penser qu'un élève qui n'aurait assimilé que *le socle commun* de troisième, aurait bien du mal pour traiter un exercice comme celui-là.

5. Pistes de réflexion et conclusion

Nous avons choisi sur un exemple de montrer ce qui nous semble essentiel dans la liaison 3ème-2nde. Ce n'est pas tant les programmes spécifiques à ces deux classes qui engendrent des difficultés pour les élèves mais plutôt les types de questions auxquels les élèves sont confrontés.

Si nous généralisons les différences qui ont été mises en évidence ici, il y a davantage d'exercices longs, dont les questions dépendent les unes des autres ; les connaissances anciennes sont supposées disponibles et mélangées aux connaissances en voie d'acquisition ; il peut y avoir des choix réels de stratégie –laquelle n'est pas toujours indiquée, et nécessite d'introduire des intermédiaires et des étapes ; enfin les parties techniques (calcul algébrique par exemple) sont aussi plus complexes, avec une incursion dans un domaine numérique large (**Q**, voire **R**) même si tous les «ingrédients» en sont séparément connus, dans des domaines numériques plus restreints. L'enseignant doit prendre conscience de ces différences et réfléchir *a priori* aux déroulements et aux interventions qu'il devra moduler au cours de l'année de 2nde pour que la transition 3ème-2nde soit moins source de difficulté.

Les déroulements différents de ce même exercice proposé en seconde prouvent qu'aider les élèves ne consiste pas nécessairement à les guider de façon trop détaillée ou trop directive, ceci peut même être contreproductif. Il vaut mieux les aider par des pistes de réflexion qui leur permettent de trouver les réponses et qu'ils pourront ensuite adapter à d'autres situations. Les enseignants de seconde peuvent être aidés par une bonne connaissance des programmes de collège, surtout en ces temps de changements de programmes, et faire en sorte que l'adaptation en seconde soit plus progressive.

6. D'autres catégories de difficultés

D'autres difficultés de ce passage troisième-seconde ont été répertoriées et classées en 4 catégories, mais ces difficultés ne sont pas liées uniquement aux mathématiques mais se retrouvent dans l'ensemble des matières (voir ci-dessous et page suivante).

Catégorie 2 : *les ruptures ou continuités institutionnelles et dans les programmes officiels et dans les textes d'accompagnement*

Du côté des élèves	**Du côté des enseignants**
En 2nde, il y a changement d'établissement, ce qui peut être vécu comme une rupture : Mathématiques différentes ? Effacement de la mémoire ?	Comment gérer le temps ? Depuis la 6ème, les programmes insistent sur « donner du sens ». Que signifie cette expression ?

Catégorie 3 : *les spécificités et finalités de chaque niveau (fin de la scolarité obligatoire, /vers une spécialisation)*

Du côté des élèves	Du côté des enseignants
- angoisse de l'orientation en 3ème, en 2nde choix trop rapide.d'où décrochage - méconnaissances des différences d'exigences du collège, du lycée : la 2nde est-elle une 3ème bis ? - l'arrivée en 2nde vécue comme un aboutissement - difficultés d'abstraction d'élèves qui, auparavant, n'allaient pas au lycée	problème lié au socle commun en 3ème: préparer au brevet, à la 2nde, au bac professionnel ? comment motiver tous les élèves préparer les élèves de 2nde à une 1ère S, 1ère L, 1ère STG..? poids de l'hétérogénéité en 3ème, en 2nde.

Catégorie 4 : *les évaluations.*

Du côté des élèves	Du côté des enseignants
- Opacité sur ce qui est évalué : calcul ou raisonnement ? - notes décourageantes - que juge la note ? le travail fourni, les capacités de l'élève ? - la moyenne est-elle suffisante ?	- l'évaluation est-elle formatrice - comment corriger les devoirs face aux élèves ? Quel temps y consacrer ? - comment être exigeant sans décourager les élèves ?

Catégorie 5 : *les différences de nature et de rythme du travail demandé*

Du côté des élèves	Du côté des enseignants
- hétérogénéité sur les quantités de travail à fournir. - que signifie « apprendre un cours » ? (par cœur ?) - que signifie « savoir » son cours ? (recettes ?) - apprendre ou comprendre, faut-il choisir ?	- comment gérer le manque de bases des élèves? (passage systématique d'une classe à l'autre). - comment utiliser les temps en classe non entière : les modules en seconde, les études dirigées en 3ème ? Tâches différenciées ? - comment faire comprendre la nécessité du travail en classe ? du travail à la maison ?

La transition : du côté de la profession ?

(Françoise Pilorge)

L'article qui suit révèle, à partir de quelques exemples précis, des appréciations d'enseignants de collège et de lycée sur le travail mathématique à proposer aux élèves de chaque cycle sur des sujets proches (abordés dans chaque cycle). Trois stages de « bassin » ont été organisés par la DAFOR de Paris regroupant de 20 à 36 enseignants de collège et de lycée, volontaires ou désignés par leur chef d'établissement pour deux ou trois demi-journées (en 2006/2007, en 2007/2008 et en 2008/2009). Tout ce qui est relaté ici concerne ces stages et reste donc évidemment très partiel ; les exercices cités ci-dessous sont ceux qui ont donné lieu à des échanges importants.

Dans chaque cas nous donnons l'énoncé qui a été proposé à la discussion pendant le stage, une rapide analyse de la tâche, ce à quoi on peut s'attendre côté élèves, les réactions des enseignants, des alternatives et/ou des questions que cela nous inspire malgré le caractère limité de nos observations.

Premier exercice : *Calculer et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible :*

$$A = \frac{3 - \frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}}\ .$$

Ce calcul nécessite de nombreuses étapes : les deux premières sont quasi-indépendantes puisqu'on traite séparément le numérateur et le dénominateur. Les règles de calcul sur les écritures fractionnaires ainsi que les règles de priorité ont été étudiées avant la classe de troisième mais il faut adapter la connaissance antérieure sur la nécessité de la réduction au même dénominateur de fractions pour en faire la somme : en effet, on additionne trois fractions dont l'une est un entier et ce, deux fois de suite. Puis on doit reconnaître le quotient de deux fractions, le fait qu'elles aient le même dénominateur pouvant être une difficulté supplémentaire. Enfin, la simplification n'est pas évidente si on a effectué les produits.

C'est donc un exercice présentant de nombreuses adaptations de règles de calcul sur les écritures fractionnaires. Même s'il s'agit de connaissances antérieures, ce qui est ici en cause est le degré d'adaptation dans les mises en fonctionnement successives de ces connaissances « techniques ».

Les professeurs de 3ème et de 2nde retiennent cet exercice, les uns comme entrainement en fin de collège, les autres comme révision en début de 2nde. Or le document « calcul numérique » indique « les compétences à construire au collège » parmi lesquelles figurent pour la classe de 4ème :

- effectuer la somme de deux nombres en écriture fractionnaire de dénominateurs différents dans des cas simples comme $\frac{3}{7} + \frac{10}{21}$, $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$, $\frac{9}{12} + \frac{6}{8}$.
- donner une écriture fractionnaire d'un quotient de deux nombres en écriture fractionnaire simples comme $\frac{\frac{2}{5}}{3}$, $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}$, $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{5}}$.

Même si les calculs de ce type sont poursuivis en 3ème, l'exercice proposé apparait audelà des exigences du programme. Beaucoup d'enseignants de 3ème cependant, y compris ceux qui enseignent à des élèves en difficulté, insistent sur la nécessité d'acquérir au collège une bonne maitrise des techniques de calcul, condition indispensable d'après eux pour réussir au lycée. Les enseignants de 2nde considèrent effectivement que ces compétences doivent être en place dès le début de l'année et n'y consacrent qu'au plus quelques séances de révision. Or cette faculté d'adaptation qui permet une certaine « aisance » dans les calculs ne peut plus être considérée comme un objectif du collège : il y a donc là un hiatus entre ce qui est supposé être acquis par les enseignants de lycée qui, le plus souvent d'ailleurs, méconnaissent les changements de programmes du collège, et ce qui est réellement acquis par les collégiens. Or si les enseignants de lycée peuvent laisser leurs élèves prendre eux-mêmes en charge une bonne partie de ces travaux d'entrainement (en comptant sur les familles, cours particuliers, logiciels adéquats.), les enseignants de collège savent bien que la plupart de leurs élèves ne pourront pas les acquérir en dehors de la classe et qu'ils risquent d'être découragés dès les premières semaines au lycée.

L'apprentissage des règles de calcul (calculs numériques et aussi calcul littéral) avec leurs adaptations de plus en plus complexes « consomme » donc un temps d'enseignement important en 3ème. Tout se passe comme si les enseignants de 3ème cherchaient davantage à se conformer aux attentes de leurs collègues de lycée qu'au programme lui-même. D'ailleurs certains d'entre eux suivent leurs anciens élèves une partie de l'année de seconde en leur proposant des heures de soutien dans leur établissement. La volonté d'aider leurs élèves dans cette transition souvent douloureuse est donc indéniable mais on peut se demander si le fait de multiplier les activités de calcul hors de tout contexte n'est pas trop couteux en temps d'enseignement et si ces tâches répétitives ne se font pas finalement au détriment d'autres apprentissages tout aussi fondamentaux.

Deuxième exercice : *On cherche un triangle rectangle tel que :*

- *Les mesures de ses côtés (en cm) sont des nombres entiers.*
- *Son hypoténuse mesure 13 cm.*
- *Son aire est égale à 30 cm².*

Trouver ses mesures et le dessiner en vraie grandeur.

Il est nécessaire d'introduire dès le début des intermédiaires : réaliser un schéma du triangle, donner des noms soit directement aux longueurs des côtés, soit aux sommets. Ce dernier choix n'est d'ailleurs pas neutre pour la suite ; en effet, après avoir mobilisé des connaissances antérieures supposées disponibles (théorème de Pythagore et expression de l'aire d'un triangle) pour passer du cadre géométrique au cadre algébrique, un deuxième changement de cadre est nécessaire pour résoudre le système de deux équations, dans le cadre arithmétique cette fois, par essais et tests sur les couples d'entiers possibles. Ce deuxième changement de cadre sera sans doute facilité si les variables sont déjà nommées x, y plutôt que AB, AC. La construction demandée à la fin oblige à revenir au cadre géométrique et permet de vérifier.

Cet exercice est rejeté d'emblée par presque tous les enseignants de collège et une bonne partie des enseignants de lycée. Il semble que quelques-uns aient juste parcouru l'énoncé et se soient arrêtés après la mise en équations, considérant, à juste titre, que la résolution d'un système du second degré est hors de portée d'un élève de 3ème ou de 2nde. Ceux-là ont pensé à une méthode experte mais n'ont pas essayé de le faire par essais, méthode rarement encouragée dans l'enseignement secondaire. D'autres l'ont examiné plus en détail et le trouvent difficile mais « intéressant » : ils proposent de le donner en devoir maison mais en y ajoutant des questions intermédiaires car il leur semble impossible de le donner sous cette forme. Cependant bon nombre d'enseignants reconnaissent que peu d'élèves s'investissent dans les devoirs « en temps libre », ce qui les amène à renoncer peu à peu à en proposer, d'autant que le grand nombre de copies identiques rend la correction fastidieuse et qu'il semble injuste d'évaluer de la même façon les enfants qui bénéficient d'aides et ceux qui n'ont aucun soutien.

Ne vaut-il donc pas mieux le donner à chercher en classe en proposant des aides au fur et à mesure des besoins ? N'est-ce-pas l'occasion de réinvestir des connaissances antérieures familières ? Il est probable qu'un élève ne saura pas comment aborder un tel exercice à la maison s'il n'a pas appris en classe à chercher, à examiner les hypothèses, à prendre des initiatives ..Les enseignants reconnaissent la nécessité de confronter les élèves à ce type d'exercice mais avancent plusieurs arguments pour ne pas pouvoir le faire, principalement :

- Le manque de temps pour finir le programme
- Les difficultés de gestion de classe lorsque la solution n'est pas immédiate, en particulier avec les élèves en difficulté.

La possibilité de faire travailler les élèves par deux ou plus n'est pas retenue car elle engendre trop de désordre. Cependant plusieurs professeurs ont souhaité tester l'exercice sous cette forme dans leur classe et c'est un professeur de 3ème qui a témoigné par la suite de l'enthousiasme d'une bonne partie de ses élèves qui, non seulement se sont montrés actifs pendant la séance mais ont exprimé le souhait de faire plus souvent des exercices de ce type !

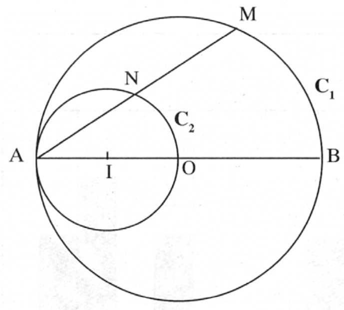
Il semble donc que les exercices dits « ouverts », qui permettent aux élèves de s'engager dans une véritable activité mathématique, ne sont que rarement proposés en classe que ce soit en 3ème ou en 2nde ; si au collège, les conditions difficiles (manque de calme dans la classe, impossibilité de travailler en demi-groupes) ont pu décourager l'enthousiasme des enseignants présents, en classe de 2nde au contraire, l'heure hebdomadaire dédoublée (obligatoire jusqu'en septembre 2009) semble propice pour aborder de tels exercices. Sinon, quand et comment apprendre à l'élève à choisir une stratégie, à sélectionner les outils adaptés au problème posé, à confronter ses résultats avec d'autres élèves et donc à acquérir une certaine autonomie? Comment développer ces qualités qui sont justement celles qui lui sont indispensables pour réussir sa scolarité ultérieure ?

Le troisième exercice (encadré de la page suivante) fait appel essentiellement à des connaissances de niveau 4ème : bien que les segments [ON] et [BM] ne soient pas dessinés, il faut reconnaitre la configuration du triangle inscrit dans un demi-cercle à la fois pour AON et pour ABM ; en déduire le parallélisme des droites (ON) et (BM) mobilise une propriété disponible depuis la 6ème. Puis, soit on utilise le théorème de Thalès étudié en 3ème, soit on utilise une « propriété de la droite des milieux » dans le

Troisième exercice (extrait d'une évaluation à l'entrée en 2nde, 1992)

Enoncé :

C_1 est le cercle de diamètre [AB] et de centre O.
C_2 est le cercle de diamètre [AO] et de centre I.



M est un point de C_1, distinct de A et B.
Le segment [AM] coupe le cercle C_2 en N.
Démontrer que le point N est le milieu du segment [AM].

Consigne :

Rédigez une démonstration qui obtiendrait le maximum des points à cet exercice (en 3ème ou en 2nde selon la classe où vous enseignez).

triangle ABM. L'introduction d'intermédiaires (tracés des segments [ON] et [BM]) facilite encore cette étape.

La justification du parallélisme des droites (ON) et (BM) est d'abord évoquée. Faut-il réciter « si deux droites sont perpendiculaires…» ? Plusieurs enseignants de 3ème disent qu'ils exigent de leurs élèves ces justifications car elles permettent de valoriser les plus faibles : les autres s'accordent pour ne pas exiger que l'on récite la propriété utile quand elle est « ancienne », c'est-à-dire quand elle a été étudiée avant l'année en cours.

Vient ensuite le problème du théorème de Thalès qui doit être récité in extenso en 3ème : mais faut-il systématiquement préciser que les points sont alignés ? Oui pour la plupart des professeurs de collège qui souhaitent donner à leurs élèves de bonnes habitudes : on vérifie les conditions d'application d'un théorème avant de l'utiliser ; certains ajoutent « dans le même ordre » qui est une condition nécessaire pour la « réciproque » mais pas pour le théorème direct : ils espèrent ainsi éviter que cette condition ne soit oubliée dans le cas de la réciproque. Enfin, pour beaucoup, ce n'est pas la « propriété de la droite des milieux » qui est utilisée dans la seconde méthode mais sa réciproque. Or cette réciproque est un cas particulier du théorème de Thalès tandis que la propriété elle-même est un cas particulier de sa « réciproque », cette dernière n'étant pas exactement réciproque d'ailleurs. La plupart des professeurs de lycée ont rédigé des démonstrations plus concises, comportant seulement la référence à Thalès. Peut-on accepter la formulation «d'après une propriété des milieux » ou « d'après Thalès» sans préciser si c'est la propriété directe ou sa réciproque du moment que l'élève a choisi le bon énoncé et a donné clairement les conditions et les conclusions ?

Ce point a provoqué à chaque stage des discussions animées, certains enseignants de collège déplorant que cette distinction ne soit plus prise en compte lors de la correction du

DNB [7] alors qu'ils se sont « battus » toute l'année pour apprendre à leurs élèves à ne pas confondre un théorème et sa réciproque. La notion de propriété caractéristique qui apparait enfin en 2nde permet de reformuler certains énoncés et de simplifier l'ensemble [8].

Ainsi les « outils » de géométrie du collège sont complexes et la question de la mise en forme de la démonstration est une préoccupation importante, un enseignant d'un des stages demandant même s'il ne faut pas préciser que A, N et M sont alignés pour pouvoir conclure que N est le milieu de [AM]. Si les exigences quant à la forme semblent nécessaires en début d'apprentissage, tant pour expliciter le raisonnement que pour donner un cadre rassurant aux élèves en difficulté, on peut s'interroger sur l'importance à accorder par la suite à la rédaction et sur la pertinence de certaines aides qui risquent finalement d'entraver la réflexion lorsque les problèmes deviennent plus complexes [9]. Il apparait en tout cas que les connaissances du collège ne peuvent pas être considérées comme disponibles pour tous les élèves à l'entrée en 2nde et qu'il est sans doute important de les faire « fonctionner » à ce niveau, sans aller systématiquement jusqu'à la forme aboutie de la démonstration.

A travers ces exemples il nous semble qu'il se dessine ce que nous aurions envie de qualifier d'habitudes de la profession, en relation avec la transition. Individuellement les enseignants n'y adhèrent pas nécessairement, certains s'en éloignent même. Mais collectivement il s'avère qu'il y a une certaine prégnance de ces habitudes dans les activités mathématiques proposées aux élèves (il y a sans doute des phénomènes analogues dans les déroulements les renforçant encore).

Ainsi sont proposées de part et d'autre de la transition, pour apprendre ou pour tester, un certain nombre d'activités calculatoires isolées, demandant des adaptations complexes des seules règles de calculs, mais peu d'activités complexes mélangeant au contraire les connaissances dans divers cadres, voire demandant des initiatives comme l'introduction d'étapes, d'intermédiaires ou l'introduction de raisonnements arithmétiques simples dans un cadre algébrique.

La rédaction semble même opposer les uns aux les autres. Faut-il citer un théorème avant de l'appliquer et comment ? Apparemment les enseignants de collège, comme d'ailleurs ceux de lycée à un autre niveau, accordent beaucoup d'importance aux habitudes de rédaction qu'ils essaient d'inculquer à leurs élèves pour les aider, les mettre sur la voie des présentations habituelles des démonstrations et pour rendre homogènes les productions de la classe. Devant les difficultés rencontrées, tant pour mettre en forme les démonstrations que pour distinguer un théorème de sa réciproque, ils sont attachés à la précision tandis que ceux de lycée, face à des élèves moins récalcitrants, semblent plus souples.

Finalement beaucoup d'enseignants de collège, préoccupés par la réussite d'un maximum d'élèves, évoquent la portée des répétitions, en matière de tâches notamment, ou des normes, en matière de rédaction. Tout se

7 Diplôme national du brevet des collèges

8 Depuis septembre 2008, le théorème de Pythagore est présenté globalement dès la 4ème , comme indiqué dans le Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008 : « On ne distingue pas le théorème de Pythagore direct de sa réciproque (ni de sa forme contraposée). On considère que l'égalité de Pythagore caractérise la propriété d'être rectangle »

9 Voir : Demongeot M, Gandit M (2003) : Faire la figure, coder, écrire les hypothèses, démontrer que…, *Petit x n°63*

passe comme si les enseignants de lycée rétorquaient en évoquant un peu plus les apprentissages, pour lesquels on a une idée de la portée et aussi des limites des répétitions, qui enferment les élèves les plus faibles dans des stratégies sans flexibilité et qui finissent par gêner leurs progrès. Ces différences de position sont accentuées par le manque d'autonomie dans le travail à la maison, souvent évoqué, notamment de la part de certains élèves de collège, pour lesquels le seul lieu de travail est la classe, y compris pour les entraînements « basiques ».

Les questions qui émergent de ces différences touchent à l'organisation de dynamiques entre sens et techniques, entre forme et fond, entre compréhension et apprentissage. Choisir le théorème adéquat et savoir l'appliquer à bon escient ne se fait pas sans un travail technique, et c'est encore plus vrai quand plusieurs questions s'enchaînent. Mais si les élèves ne rencontrent pas d'occasions de réfléchir aux théorèmes à choisir mais seulement des occasions de les appliquer, on peut être sceptique sur leur apprentissage.

Comme il ne peut y avoir quelque chose de totalement automatique dans la gestion des enseignants, c'est bien de la mise en œuvre d'une palette d'outils que peuvent résulter leurs choix optimaux.

Conclusion commune aux différents articles

Plusieurs constats communs peuvent être tirés : beaucoup d'analyses témoignent de pratiques et de représentations comparables et spécifiques à chaque niveau, il y a donc là un phénomène propre à la profession et pas isolé.

On constate ainsi un décalage certain entre les attentes des enseignants de seconde et ce que font leurs élèves, qui ont plus de difficultés que prévu à résoudre les exercices.

Sont en jeu notamment le manque de questions intermédiaires révélé par le manque d'initiatives des élèves et une certaine technicité attendue, le problèmes du manque de questions intermédiaires pouvant être associé à des adaptations qui ne sont pas proposées au collège.

On peut peut-être mettre ce type de difficultés en relation avec le degré de conceptualisation atteint au collège : les connaissances correspondantes sont mobilisables, même avec certaines adaptations, les élèves savent les utiliser mais à condition que soient indiqués notamment les étapes et les intermédiaires à introduire ainsi que certains changements de point de vue.

Tout se passe comme si, au collège, beaucoup d'élèves avaient atteint un certain niveau de décontextualisation des notions algébriques et fonctionnelles du programme, avaient acquis par exemple certaines méthodes mais avec un spectre d'application encore limité ; comme s'ils n'avaient pas encore conceptualisé vraiment ces notions –qui ne sont donc pas disponibles, notamment comme outils, peu « flexibles », c'est-à-dire que les élèves ont du mal à changer de cadre ou registre quand ils sont dans un domaine de travail donné insuffisant.

Et si c'était « normal » ? Et si c'était au lycée seulement que pouvait se terminer cette conceptualisation (déjà dit par Chevallard) ? Et si l'objectif du collège pouvait être alors de renforcer les bases de cette décontextualisation, notamment en l'élargissant à d'autres contextes, y compris familiers ?

Cette perspective s'inscrit dans l'idée qu'on ne peut envisager de modifications pour un seul niveau : les enseignants des deux niveaux sont ainsi concernés, les uns en élargissant les occasions d'utiliser les connaissances, y compris en continuant à donner les indications nécessaires, les autres en reprenant plus progressivement les choses et en s'appuyant à fond sur les acquis effectifs…

Cela renforce aussi l'intérêt de ces formations croisées entre collègues des deux cycles, qui permettent sans doute des évolutions, à condition de respecter la complexité des pratiques, de s'appuyer sur le collectif et les échanges entre collègues, et de disposer de ressources « génératrices » de scénarios suffisamment précises et reliées à la fois au relief et aux déroulements envisageables.

Bibliographie succincte

CHEVALLARD Yves (1985) : Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, *Petit x* n°5.

GRUGEON Brigitte (2006) : Le calcul algébrique: pistes pour une progressivité des apprentissages de l'école au lycée. *Brochure IREM-Université Paris 7* n°92

ROBERT Aline (2005) : Quelles différences y a-t-il ... ? Exemples d'analyses didactiques d'exercices et d'activités d'élèves (en collège ou lycée), *Bulletin A.P.M.E.P* n°457 mars-avril 2005.

Documents d'accompagnements des programmes :

http://eduscol.education.fr/cid45766/ressources-pour-faire-la-classe.html

Bulletin officiel n° 30 du 23 juillet 2009 : Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique (arrêté du 23-6-2009 - J.O. du 12-7-2009)

http://eduscol.education.fr/cid45768/programmes%A0en-vigueur.html

Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008 : Programmes des enseignements de mathématiques, de physique-chimie, de sciences de la vie et de la Terre, de technologie pour les classes de sixième, de cinquième, de quatrième et de troisième du collège (arrêté du 9-7-2008 - J.O. du 5-8-2008)

http://eduscol.education.fr/cid48727/mathematiques-college.html