ENTRETIENS INDIVIDUELS EN CALCUL ALGEBRIQUE

Marie-Hélène HINAULT
Françoise CHENEVOTOT
Irem de Rennes

Résumé : Cet article présente une pratique d'entretiens cognitifs individuels pour des élèves ayant des difficultés en calcul algébrique à la période charnière troisième-seconde. Nous présentons notre méthodologie, et nous montrons, à partir de l'étude du cas d'une élève, comment nous avons préparé et mené les entretiens, en nous appuyant sur le profil de l'élève en algèbre. Enfin, nous généralisons et dégageons quelques idées qui nous semblent essentielles pour la conduite de tels entretiens.

Introduction

Dans cet article nous présentons une pratique d'entretiens cognitifs individuels destinés à des élèves ayant des difficultés en calcul algébrique, à la période charnière troisième-seconde. Cette étude, effectuée dans le cadre d'un mémoire de master, fait suite au travail de deux groupes de recherche de l'Irem de Rennes (IREM DE RENNES 2005, IREM DE RENNES 2008). Cette pratique d'entretien a été expérimentée dans le cadre institutionnel de l'aide individualisée en seconde tel qu'il a existé jusqu'en 2009-2010. La pratique d'entretiens individuels peut trouver sa place dans les dispositifs d'accompagnement personnalisé en vigueur actuellement au lycée (BO spécial n° 1 du 4 février 2010). Au collège on pourrait envisager d'inclure ce travail dans les programmes personnalisés de réussite éducative (BO n°31 du 1er septembre 2005 [1] et n° 31 du 31 août 2006 [2]). Dans les deux cas, il est à

1 Extrait de ce BO : « A tout moment de la scolarité, une aide spécifique est apportée aux élèves qui éprouvent des difficultés dans l'acquisition du socle commun ou qui manifestent des besoins éducatifs particuliers. »

2 Extrait de ce BO : Les PPRE concernent des « élèves rencontrant des difficultés importantes ou moyennes dont la nature laisse présager qu'elles sont susceptibles de compromettre, à court ou à moyen terme, leurs apprentissages ».

craindre que les professeurs de mathématiques aient à faire preuve d'un certain volontarisme pour que l'aide individualisée disciplinaire soit intégrée dans le projet d'établissement.

Quand on envisage une pratique d'entretien deux questions se posent : à quels élèves destine-t-on de tels entretiens et pour quoi faire ? La première question pose celle d'une évaluation des compétences des élèves. La deuxième pose le problème des tâches données aux élèves en entretien, des supports et de la médiation exercée par le professeur. Divers travaux montrent que donner à de très petits groupes, voire à une personne seule, les mêmes exercices techniques que ceux habituellement donnés en classe a généralement peu d'effet.

Un autre problème posé par une pratique d'aide individualisée ou d'entretien est le risque de déresponsabilisation de l'élève qui peut se croire pris en charge par le professeur à qui incomberait toute la responsabilité de résoudre ses difficultés. Pour réduire ce risque, nous avons choisi de proposer à la classe une démarche qualifiée de « bilan approfondi des sources d'erreurs en calcul algébrique » qui implique les élèves et comporte trois volets : une évaluation diagnostique, des entretiens, du travail personnel de la part de l'élève.

Les difficultés auxquelles sont confrontés les élèves peuvent se manifester de deux manières : absence de réponse, ou réponses erronées dans les exercices. C'est à ces dernières que nous nous sommes intéressés.

Ce travail avec les élèves prend appui sur une petite batterie d'exercices ayant une double fonction d'évaluation diagnostique et de support pour les entretiens. Pour rendre compte de cette double fonction, nous avons utilisé l'expression « exercices de mise en route » pour désigner ces exercices.

Notre présentation s'appuie principalement sur le cas d'une élève que nous appelons Blandine. Dans une première partie, nous justifions le choix des exercices et montrons comment nous avons établi à partir de sa production un profil cognitif de l'élève en algèbre. Dans une deuxième partie, consacrée aux entretiens, nous présentons le modèle d'entretien que nous avons retenu, la préparation des entretiens avec Blandine et le bilan de ces entretiens. Enfin, dans une troisième partie nous abordons des questions plus générales concernant la mise en œuvre d'une telle pratique.

1. — Profil de Blandine en algèbre

Pour nous attaquer efficacement aux erreurs produites par les élèves, il nous a semblé nécessaire de ne pas considérer isolément ces erreurs. Il nous fallait disposer d'outils permettant une analyse des productions des élèves porteuse de plus d'informations qu'un score global, mais suffisamment synthétique, pour décider quels élèves nous prendrions en entretien, et pour chacun, quelle stratégie nous pourrions mettre en œuvre. Nous avions aussi besoin d'une grille d'analyse permettant de regarder les erreurs, en les reliant à d'autres erreurs ou procédures, soit du même type, soit de types différents, mais où l'on peut émettre l'hypothèse que l'une explique l'autre.

De plus, nous ne restreignons pas l'activité algébrique des élèves aux seules manipulations formelles. Cela nous conduit à examiner le domaine conceptuel que constitue l'algèbre élémentaire, puis à proposer un modèle d'analyse multidimensionnelle de la compétence en algèbre élémentaire.

1.1. *Compétence en algèbre*

Nous référant à la dialectique outil/objet (DOUADY 1986) nous considérons l'algèbre élémentaire à la fois dans sa dimension outil, du point de vue des problèmes, et dans sa dimension objet, du point de vue des objets manipulés (lettres, symboles, expressions, etc). Nous pointons quelques unes des ruptures épistémologiques, identifiées par la recherche en didactique, et qui, lorsqu'elles ne sont pas consommées, sont des sources d'erreurs fréquentes pour les élèves de collège et lycée. Ces erreurs, qui ne sont pas la conséquence d'une inattention ou d'un entraînement insuffisant, résistent aux explications habituellement données en classe et perdurent.

Problèmes et objets de l'algèbre

Les problèmes relevant de l'algèbre sont très divers. Outre les problèmes dits « arithmétiques » qui peuvent aussi être résolus par une mise en équation et les problèmes nécessitant une mise en équation, nous y incluons les problèmes de généralisation et de preuve (par exemple prouver que la somme de deux nombres consécutifs impairs est un multiple de 4), les problèmes de modélisation et les problèmes des cadres algébrique et fonctionnel (production d'inégalités, étude de signes, recherche d'extremums...).

La résolution de ces problèmes nécessite la manipulation d'objets : lettres, symboles, expressions, équations, fonctions, etc. Certains de ces objets sont aussi utilisés en arithmétique, mais leur utilisation en algèbre est en rupture avec celle qui en est faite en arithmétique ; d'autres sont nouveaux. Nous nous intéressons plus particulièrement aux lettres et aux expressions.

Les lettres

Les lettres sont utilisées de façons différentes en arithmétique et en algèbre. Elles sont utilisées en arithmétique pour désigner une unité de mesure ou des objets (statut d'étiquette) : par exemple 12m peut désigner 12 mètres ou bien 12 meringues. En algèbre, le statut d'une lettre dépend du contexte : 12m pourra désigner 12 fois un nombre m qui peut être le nombre de meringues ou une longueur ou autre chose. Le type du problème à résoudre induit du point de vue expert un statut des lettres utilisées :

— inconnue pour les problèmes de mise en équation,
— nombre généralisé pour les problèmes de généralisation et de preuve,
— variable pour les problèmes du cadre fonctionnel.

Brigitte Grugeon (GRUGEON 2000) cite Küchemann qui a proposé une classification des principaux statuts donnés aux lettres du point de vue des élèves :

— *lettre-objet (la lettre est considérée comme une étiquette),*
— *lettre ignorée et non prise en compte dans les calculs,*
— *lettre évaluée (lettre remplacée par une valeur numérique dans les calculs),*
— *inconnue (lettre désignant un nombre inconnu à déterminer),*
— *lettre représentant un nombre généralisé (lettre pouvant prendre plusieurs valeurs),*
— *variable (lettre utilisée dans un contexte fonctionnel).*

Nous faisons l'hypothèse qu'une conception des lettres, où le statut de lettre-objet ou lettre-étiquette n'a pas été dépassé, ne permet pas l'articulation de l'algèbre sur le numérique, et par conséquent compromet l'entrée dans l'algèbre. C'est pourquoi il nous semble important de détecter quel statut l'élève donne aux lettres, afin de lui permettre d'enrichir ses conceptions de la lettre pour qu'elles ne soient plus un obstacle à son entrée dans l'algèbre. Il est aussi nécessaire de disposer d'exercices permettant ce diagnostic et une remédiation.

Les expressions algébriques

Ce sont de nouveaux objets construits à partir de nombres et de signes opératoires. Contrairement à l'arithmétique, l'algèbre ne permet pas une distinction claire entre le processus de calcul et son résultat. Cette rupture est source de difficultés pour les élèves.

Sfard (SFARD 1991) a montré qu'un concept mathématique peut être conçu comme un processus (statut procédural) ou comme un objet dont on peut décrire la forme ou la structure (statut structural). Ceci s'applique aux expressions algébriques (SFARD & LINCHEVSKI, 1994). Considérons par exemple l'expression $3x + 1$. Du point de vue procédural, cette expression est considérée comme le processus de calcul consistant à multiplier par 3 un nombre donné, puis à ajouter 1 au résultat. Du point de vue structural, cette expression peut être interprétée comme le résultat d'un calcul, ou l'image de x par la fonction $x \longmapsto 3x+1$, ou l'expression générique d'un nombre congru à 1 modulo 3, ou une chaîne de symboles sans signification que l'on peut combiner à d'autres expression en utilisant des règles définies.

De plus, Sfard (SFARD 1991) a montré que dans le développement d'un concept, les conceptions procédurales précèdent les conceptions structurales.

Nous verrons dans la deuxième partie comment le statut procédural des expressions peut être un levier pour amener les élèves à distinguer des expressions correspondant à des processus différents.

Concernant le niveau de manipulation formelle des expressions, J-F Nicaud distingue trois niveaux de traitement :

— *niveau 1 : être capable d'attribuer une valeur aux variables d'une expression et de la calculer,*
— *niveau 2 : être capable de transformer une expression en une expression équivalente dans un calcul à un seul pas (développement, factorisation),*
— *niveau 3 : être capable d'organiser les étapes d'un calcul à l'aide d'un raisonnement stratégique ce qui rend significatives les transformations réalisées.*

J-F Nicaud indique qu'on effectue un réel travail d'algèbre lorsqu'une partie significative de l'activité se situe à ce niveau (GRUGEON 2000). Ces différents points de vue montrent que le calcul algébrique, même au niveau élémentaire, est une activité complexe, en rupture avec l'arithmétique, tout en s'appuyant sur elle.

Ruptures épistémologiques
entre l'arithmétique et l'algèbre

Outre les ruptures que nous avons mentionnées à propos des lettres et des expressions algébriques, nous avons repéré deux autres types de rupture : l'un concerne les méthodes de résolution, l'autre le statut des symboles d'opérations et du signe d'égalité.

— Méthodes de résolution

Les méthodes de résolution en algèbre et en arithmétique s'opposent.

Dans les procédures arithmétiques, on calcule successivement des nombres inconnus intermédiaires qui permettent d'arriver au résultat. Un exemple classique : calculer le nombre tel que, si on ajoute 5 à son triple, on obtient

17. La procédure arithmétique est la suivante : le triple du nombre cherché est 17 – 5 c'est-à-dire 12, d'où le nombre cherché est 12 divisé par 3 c'est-à-dire 4. On voit que cette résolution ne nécessite aucune notation et se fait sous forme de discours.

Dans la résolution algébrique d'un problème, on désigne le(s) nombre(s) inconnu(s) par une (des) lettre(s), on exprime d'autres quantités en fonction de ce(s) nombre(s), en utilisant les règles de formation des expressions, puis on traduit les données exprimées en langage naturel par une (des) équation(s), que l'on résout en utilisant les règles de transformation des expressions et des équations. Enfin, on interprète le résultat dans le contexte du problème. Il faut donc accepter de calculer avec de l'inconnu.

— Statut des symboles d'opérations et du signe « = »

Ces symboles sont les mêmes qu'en arithmétique mais, en algèbre, ils ont une signification et font l'objet d'un traitement différents. Certains auteurs parlent de fausse continuité.

En arithmétique, les symboles d'opération indiquent le plus souvent une action (un calcul) à effectuer : une expression telle que 3 + 5 ne reste pas sous cette forme, elle est évaluée. Le signe « = » a souvent le sens de déclenchement d'un calcul. Par exemple : Blandine utilise l'écriture suivante :

$$8 \times 3 = 24 - 4 = 20 \div 4 = 5 + 2 = 7$$

où chaque symbole traduit une action, mais où la transitivité de l'égalité n'est pas respectée, ce qui conduit à rejeter ce type d'écriture.

En algèbre, une expression non évaluée peut être le résultat d'un calcul, et certains élèves ont une réelle difficulté à accepter une expression telle que $x + 5$ comme résultat d'un calcul. Le statut du signe « = » est celui d'une relation d'équivalence. Analyser la compétence en algèbre élémentaire nécessite donc de prendre en compte les différentes dimensions de cette activité et les ruptures qu'implique l'entrée dans la pensée algébrique.

Une structure d'analyse de la compétence en algèbre élémentaire

Parmi les travaux traitant de l'analyse de la compétence en algèbre élémentaire nous avons retenu ceux du groupe « Lingot »[3]. Le modèle élaboré par ce groupe vise à établir des classes de profils cognitifs voisins en algèbre élémentaire en prenant en compte trois composantes :

- la composante « Usage de l'algèbre » (UA) vise à étudier les aspects de la compétence algébrique dans sa dimension outil, c'est-à-dire la capacité de l'élève à mobiliser l'algèbre pour traduire algébriquement une situation (via les équations ou des relations fonctionnelles), à généraliser, prouver ou démontrer ;
- la composante « Traduction algébrique » (TA) vise à étudier la capacité de l'élève à traduire algébriquement des relations ou à interpréter des expressions algébriques en relation avec d'autres registres de représentation ;
- la composante « Calcul algébrique » (CA) vise à étudier la maîtrise du calcul algébrique.

Pour chacune de ces composantes, il est attribué un niveau de compétence (de 1 à 3, ou 4). Chaque combinaison des niveaux pour les

3 Le projet Lingot, commencé en 2002, est un projet interdisciplinaire qui se situe dans le domaine de recherche sur les EIAH (Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain). L'objectif est de concevoir et de mettre en œuvre des situations d'apprentissage de l'algèbre dans le cadre de la scolarité obligatoire incluant l'utilisation d'environnements informatiques (site http ://pepite.univ-lemans.fr).

Composante	Notation	Objectif	Niveaux de compétence
Usage de l'algèbre	UA	Etudier la disponibilité de l'outil algébrique et la capacité à le mobiliser dans des situations de modélisation (production de formules ou mise en équation) et de preuve.	*Niveau 1* : Disponibilité de l'outil algébrique et mobilisation adaptée.
			Niveau 2 : Mobilisation de l'outil algébrique et traduction algébrique non adaptée.
			Niveau 3 : Mobilisation de l'outil algébrique sans cohérence entre le modèle et la situation.
			Niveau 4 : Non disponibilité de l'outil algébrique pour généraliser, prouver ou modéliser et démarches arithmétiques persistantes.
Traduction d'une représentation à une autre	TA	Etudier la capacité à traduire une expression d'un registre à un autre et la flexibilité à interpréter une représentation d'un registre à un autre.	*Niveau 1* : Traduction correcte.
			Niveau 2 : Traduction pas toujours adaptée.
			Niveau 3 : Au moins une traduction sans cohérence entre le modèle et la situation.
Calcul algébrique	CA	Etudier la capacité à calculer algébriquement.	*Niveau 1* : Traitement algébrique prenant en compte les aspects syntaxique et sémantique des expressions, s'appuyant sur une adaptabilité dans l'interprétation des expressions selon les usages visés (conception structurale).
			Niveau 2 : Traitement essentiellement syntaxique avec des erreurs récurrentes de transformation privilégiant une conception procédurale des expressions.
			Niveau 3 : Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.

Tableau 1 : Caractérisation d'un stéréotype.

trois composantes correspond à une classe de profils appelée stéréotype. Par exemple on parlera du stéréotype (UA2, TA1, CA3). Le tableau ci-contre, extrait d'un rapport sur le projet « Lingot » (CHENEVOTOT-QUENTIN et al 2009) indique comment est défini chaque niveau de compétence pour chaque composante.

Le stéréotype, en faisant apparaître le niveau de compétence atteint par l'élève pour chacune des composantes, met en évidence la composante à travailler prioritairement et les points d'appui éventuels pour la conduite d'un ou plusieurs entretiens.

Cependant, l'analyse fournie par ce modèle nous a paru insuffisante pour la préparation de l'entretien, dans la mesure où ne sont pas mis en évidence les régularités des manipulations formelles ni les phénomènes de connaissances locales. C'est pourquoi nous avons ajouté à notre analyse des productions des élèves deux autres éléments.

Deux autres éléments d'analyse

Ces deux éléments qui complètent notre analyse sont d'une part, une typologie des erreurs de manipulations formelles, et d'autre part, le repérage des connaissances locales.

— Typologie des erreurs de manipulation formelle

Pour compenser la première insuffisance, nous avons utilisé une typologie des erreurs de manipulation formelle introduite par Brigitte Grugeon (GRUGEON 1995). A chaque type d'erreur est associé un code qui est utilisé dans le codage de la copie de l'élève.

M1 : la manipulation formelle est correcte.

M2 : ce niveau n'est pas considéré ici. En effet il correspond à une manipulation correcte autre que la manipulation attendue ; cette distinction est inutile dans la perspective des entretiens.

M3 : la manipulation formelle est incorrecte, mais les rôles respectifs des signes opératoires et de l'exposant 2 sont correctement identifiés dans les réécritures. On distingue trois types de manipulation formelle incorrecte, le troisième pouvant coexister avec l'un des deux premiers :

— M31 : manipulation formelle opératoire incorrecte avec mémoire : les écritures algébriques utilisées dans les calculs indiquent une méconnaissance des parenthèses, mais conservent la mémoire des calculs et des priorités opératoires, et conduisent à un résultat correct ;

— M32 : manipulation incorrecte sans mémoire : les écritures algébriques utilisées dans les calculs ne tiennent pas compte des parenthèses ni des règles de priorité, ne gardent pas la mémoire des calculs et conduisent à un résultat incorrect ;

— M33 : utilisation de règles fausses identifiées : le rôle des parenthèses semble correctement identifié, mais de nombreuses règles de transformation incorrectes sont présentes, par exemple : $(x-1)^2 = x^2 - 1$, ou $a^n a^p = a^{np}$

M4 : manipulation formelle pseudo-opératoire ; le rôle de chacun des signes opératoires n'est pas correctement identifié ou n'est pas stable.

— M41 : les calculs semblent s'appuyer sur des règles de l'un des types suivants :

• désassemblage : ab est remplacé par $a + b$,

• carré duplication : a^2 est remplacé par $a+a$,

• glissement : un exposant devient coefficient, par exemple a^n est remplacé par na,

— M42 : les calculs reposent sur des écritures en assemblage pour regrouper des termes, par exemple :

• assemblage : $a + b$ est remplacé par ab, $3 + 5a$ est remplacé par $8a$,

• regroupement : $a^n + a^p$ est remplacé par a^{n+p} .

M5 : manipulation formelle non opératoire ; le calcul algébrique ne tient compte ni des blocs de calcul ni des opérations.

— *Connaissances locales*

Au-delà de la typologie des erreurs, nous nous intéressons aux moyens dont nous pouvons disposer pour interpréter ces erreurs, et aider les élèves à construire des connaissances plus proches du savoir expert. Léonard et Sackur proposent un modèle d'analyse des connaissances qui repose sur la notion de connaissance locale. (LEONARD & SACKUR 1990).

Une connaissance locale est une connaissance de l'élève qui a deux caractéristiques :

— c'est une connaissance correcte dans certaines limites,
— l'élève ignore l'existence de ces limites.

La copie de Blandine nous en fournit un exemple : pour justifier l'identité $a^2 a^3 = a^5$, elle écrit : « quand deux nombres avec une puissance se multiplient leurs puissances s'additionnent ». Si on fait abstraction de la confusion de vocabulaire, cet énoncé appliqué à deux puissances d'un même nombre est valide mais l'élève ne précise pas le domaine de validité de cette règle.

Léonard et Sackur affirment que *toute acquisition d'une connaissance nouvelle est localement correcte*. Ils soulignent que *les limites d'une connaissance locale comme son domaine de validité fournissent à l'élève des points d'appui pour sa progression vers des connaissances moins locales*. Ils ajoutent : *les connaissances des élèves ne sont pas locales en raison d'une contrainte mathématique, mais pour des raisons liées au fonctionnement cognitif de l'apprenant* (LEONARD & SACKUR 1990).

Ce point de vue fournit un angle d'observation complémentaire des productions des élèves et permet d'élaborer des pistes pour la conduite des entretiens.

1.2. *Exercices*

Dans la démarche retenue, les entretiens portent sur des exercices que l'élève a cherché auparavant. Ces exercices dits « de mise route » doivent remplir plusieurs critères que nous précisons.

Critères de choix des exercices

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous avons attribué à ces exercices une double fonction : évaluation diagnostique et support pour les entretiens. Dans leur fonction d'évaluation diagnostique ces exercices doivent permettre

— d'identifier les élèves qui font beaucoup d'erreurs et/ou des erreurs basiques dans des tâches qui mettent en jeu l'algèbre,
— de repérer les savoir-faire et compétences de l'élève,
— de repérer les types d'erreurs commises par l'élève, mais aussi les régularités et cohérences des procédures.

Pour cela, l'ensemble des exercices doit couvrir la plupart des types de problèmes du champ conceptuel de l'algèbre et les trois composantes d'analyse retenues. De plus il est indispensable que chacune de ces composantes apparaisse plusieurs fois dans des contextes différents. Il est donc impératif que l'ensemble soit donné aux élèves (en une ou plusieurs fois). De plus ces exercices ne doivent pas être trop difficiles pour être suffisamment discriminants.

Comme support pour les entretiens, ces exercices doivent permettre un dialogue à propos de ce qu'a fait l'élève. Ils doivent permettre des changements de cadre et fournir des possibilités de contrôle par l'élève lui-même : exemples, contre-exemples, etc.

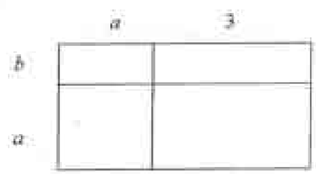
Une autre condition est que la longueur de l'ensemble reste raisonnable et représente une durée de 50 minutes environ, pour s'intégrer dans la pratique habituelle de la classe.

Analyse de chaque exercice
au travers de la production de Blandine

Nous avons retenu cinq exercices. Pour chacun des exercices nous présentons le travail de Blandine suivi d'une analyse de l'exercice et d'une analyse des réponses de Blandine.

Exercice 1 : Cet exercice porte sur un calcul d'aire et comporte deux questions :

Voici un grand rectangle divisé en quatre petits :



1A Ecris l'aire du grand rectangle en utilisant les lettres *a* et *b* :

Aire grand rectangle = a+3 × b+a
= (a+3)(a+b)

1B Pour chacune des expressions suivantes :
- **si tu es certain qu'elle est égale à l'aire du grand rectangle, entoure-la**
- **si tu es certain qu'elle n'est pas égale à l'aire du grand rectangle, barre-la**

1	$a + b(a + 3)$	6	$\cancel{a^2 + ab}$
2	$(a + 3)(a + b)$	7	$\cancel{2(2a + b + 3)}$
3	$\cancel{3a \times 3b \times a^2 \times ba}$	8	$a + b \times a + 3$
4	$(a + b)(a + 3)$	9	$\cancel{3ab + 3a^2}$
5	$ab + 3b + a^2 + 3a$	10	$\cancel{2a + b + 3}$

— la première est une tâche de production d'une expression, nécessitant une traduction du registre géométrique dans le registre algébrique,
— la deuxième est une tâche de reconnaissance d'expressions algébriques équivalentes.

Cet exercice met en jeu la formation des expressions algébriques, l'utilisation des parenthèses, la manipulation formelle des expressions, et les propriétés des opérations, en particulier la distributivité de la multiplication sur l'addition. Les lettres sont des variables associées à des grandeurs. Cet exercice permet aussi de mettre en évidence une éventuelle confusion entre aire et périmètre ou demi-périmètre.

Cet exercice présente un intérêt pour l'entretien, dans la mesure où il permet un contrôle dans le registre géométrique, ou dans le registre numérique, par recours à des contre-exemples. De plus, par le biais des processus, les exemples offrent un appui pour la généralisation.

Analyse de la production de Blandine

Dans la question A, la première expression proposée est incorrecte, la seconde est correcte. La deuxième expression diffère de la première par la présence de parenthèses et l'absence de signe opératoire.

La réponse à la question B est cohérente avec celle à la question A. De plus, l'expression $ab + 3b + a^2 + 3a$ est entourée, ce qui prouve que l'élève reconnaît l'expression développée.

Nous faisons l'hypothèse que, pour cette élève, les parenthèses remplacent le symbole opératoire, les écritures avec parenthèses et sans parenthèses étant considérées comme identiques.

Exercice 2 : Cet exercice comporte trois questions de traduction, indépendantes les unes des autres. Il est destiné à mettre en évidence la conception des lettres (page ci-contre).

La question A est une tâche isolée de traduction du registre géométrique dans celui de l'algèbre. Elle peut être décomposée en deux sous-tâches : écrire la relation entre les longueurs AB, AM et BM puis la traduire dans le registre algébrique. La lettre x a le statut de variable associée à une grandeur.

La question B comporte deux sous-questions qui sont des tâches isolées de mise en équation d'un problème : traduction du langage naturel dans le registre de l'algèbre. La réalisation de chaque tâche nécessite la mise en évidence d'un état initial, d'un état final et la traduction d'une relation entre des quantités. Les lettres ont ici le statut d'inconnues.

La question C est une tâche simple et isolée de traduction de la relation entre deux quantités. Cette question qui semble très élémentaire nous paraît un bon révélateur quant à la conception des lettres.

En effet, l'énoncé en français et sa traduction algébrique ne sont pas sémantiquement congruents. Cette question s'est avérée un bon support d'entretien, permettant par retour au numérique de faire évoluer l'élève vers une conception où les lettres ont un statut de nombre généralisé.

Analyse de la production de Blandine

Les réponses sont correctes pour les questions A et B. Pour la question C, l'élève a d'abord écrit l'égalité correcte, puis l'a barrée et remplacée par P = 6E , ce qui nous semble révélateur d'une conception de lettre étiquette.

2A

Un point M se déplace sur $[AB]$.
$[AB]$ est un segment de longueur 10.
On pose $x = AM$

Exprime la longueur du segment *[BM]* en fonction de x :

$[BM] = AB - x$
$= 10 - x$

2B Des enfants sont réunis pour un anniversaire et organisent des groupes pour jouer.
On sait qu'il y a x filles et y garçons.

Première observation : *Si deux filles décident de rejoindre le groupe des garçons, les deux groupes ainsi constitués auront le même effectif.*

Entoure l'équation qui traduit cette première observation :

$x - 2 = y + 2$	$x - 2 = y - 2$
$x + 2 = y - 2$	$x = y$

Deuxième observation : *En repartant de la situation de départ, si deux garçons décident de rejoindre le groupe des filles, ce nouveau groupe aura un effectif double de celui des garçons restants.*

Entoure l'équation qui traduit cette deuxième observation :

$x + 2 = 2y$	$x + 2 = 2(y - 2)$
$x = 2(y - 2)$	$x + 2 = 2y - 2$

2C Dans un collège, IL Y A SIX FOIS PLUS D'ELEVES QUE DE PROFESSEURS.

Ecris une égalité qui traduise cette phrase, en utilisant les variables E et P qui désignent respectivement le nombre d'élèves et le nombre de professeurs.

~~$6P = E$~~
$P = 6E$

Exercice 3 : Cet exercice comporte quatre tâches de reconnaissance de l'identité ou de la non-identité d'expressions algébriques. Il est un bon révélateur de l'utilisation de l'algèbre comme outil de transformation d'expressions et de l'articulation entre les cadres numérique et algébrique (possibilité de conclure à partir d'un contre-exemple pour la troisième expression). La présence de trois facteurs dans deux expressions rend la tâche plus complexe et en augmente la difficulté. Mais cette complexité présente l'intérêt de mettre en évidence des conceptions du développement comme « quand on développe on enlève les parenthèses », qu'on peut considérer comme des connaissances locales.

Soit l'expression : $-2x^2 + 4x + 6$

Remplis le tableau ci-dessous en indiquant pour chacune des expressions de la colonne de gauche si elle est égale à $-2x^2 + 4x + 6$

Expressions	Vrai / Faux	Note ici les calculs réalisés
$-2(x-3)(x+1)$	Faux	Car en faisant l'opération, on trouve : $-4x-4$
$-2(x-1)^2+8$	Faux	Car en faisant le calcule, on trouve $-2x^2-4+8$
$-2(x-3)(x-1)$	Faux	Car en faisant le calcul, on trouve : $-2x^2+8$
$-2(x-3)-2x(x-3)$	Vrai	Car en faisant le calcul, on trouve : $-2(x-3)-2x(x-3) =$ $-2x+6-2x^2+6x =$ $-2x^2+4x+6$ Et cela correspont à l'expression de départ

Cet exercice offre une possibilité de retour au numérique, de contre-suggestion pour les élèves qui concluent à partir d'un exemple. Nous faisons l'hypothèse que l'élève doit avoir une conception où les lettres ont un statut de nombre généralisé pour que l'articulation numérique/algébrique fonctionne.

Analyse de la production de Blandine: L'algèbre est mobilisée. Les calculs sont explicités et corrects seulement pour la quatrième expression. Pour chacune des autres expressions, une expression réduite erronée est proposée, comme résultat d'un calcul qui n'est pas explicité sur la copie, mais l'est au brouillon. Les réponses semblent obtenues par des règles de désassemblage et assemblage.

Exercice 4 : C'est un problème de preuve qui constitue un bon révélateur de l'utilisation de l'algèbre et du statut des symboles (signe « = » et symboles d'opérations). Il permet aussi


Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un joueur :
« TU PENSES UN NOMBRE, TU AJOUTES 8, TU MULTIPLIES PAR 3, TU RETRANCHES 4, TU AJOUTES TON NOMBRE, TU DIVISES PAR 4, TU AJOUTES 2, TU SOUSTRAIS TON NOMBRE : TU AS TROUVÉ 7 »

L'affirmation est-elle vraie ? Justifie ta réponse.

L'affirmation est vraie

On pose x le nombre choisit au hasard par joueur.

L'équation est donc :

(x + 8)×3 − 4 + x − 4 + 2 − x

et je vois que 8×3 = 24 − 4 = 20 ÷ 4 = 5 + 2 = 7

x = 7

Qu'importe le nombre choisit le résultat sera toujours 7.

exemple 1001 + 8 = 1009 ; 1009 × 3 = 3027 ; 3027 − 4 = 3023 ; 3023 + 1001 = 4024 ; 4024 ÷ 4 = 1006 ; 1006 + 2 = 1008 ; 1008 − 1001 = $\boxed{7}$

de s'assurer que la conversion du langage naturel vers le numérique est présente et correcte, au moins pas à pas.

Comme support d'entretien, cet exercice permet de mettre en évidence les conceptions de l'élève sur les écritures algébriques, l'utilisation des parenthèses et autres symboles. Il permet de travailler sur les expressions en tant que processus.

Analyse de la production de Blandine

L'élève propose une expression globale en fonction du nombre choisi, désigné par une lettre. Cette expression comporte une erreur de parenthèses (division par 4). L'élève essaie de simplifier l'expression obtenue puis revient au numérique en adoptant une disposition de calcul pas à pas.

Nous interprétons « je vois que 8 × 3 = = 24 – 4 = 20 ÷ 4 = 5 + 2 = 7 » comme le traitement séparé de 8 × 3 – 4 ÷ 4 + 2 , lié à une conception de lettre ignorée. Ce traitement rétablit implicitement les parenthèses manquantes. De plus l'écriture enchaînée incorrecte nous semble correspondre à une conception des symboles comme des actions. Nous remarquons aussi une interprétation incorrecte du résultat du calcul de 8 × 3 – 4 ÷ 4 + 2 , présentant une double confusion : d'une part, entre x et le résultat, et d'autre part, entre le résultat trouvé pour 8 × 3 – 4 ÷ 4 + 2 et l'expression $(x + 8) \times 3 - 4 \div 4 + 2$.

Exercice 5 : L'intérêt de cet exercice est de mettre en évidence des règles fausses, assez fréquemment utilisées par les élèves, et le type de justification employé : utilisation de l'algèbre, justification de type légal, justification à partir d'un exemple.

	Vrai/Faux	Justification
$a^3a^2=a^5$	Vrai	Car lorsque 2 nombres avec une puissance se multipliet leurs puissances s'additionnent. $a^{3+2}=a^5$
$a^2=2a$	Faux	$a^2=a\times a$ $2a=a+a$
$a^3a^2=a^6$	Faux	$a^3a^2=a^5$
$4a^3+3a^2=7a^5$	Faux	$4a^3+3a^2=7a^6$ Car lorsque 2 nombres avec des puissances s'ajoutent leurs puissances se multipliet
$a^2=a+a$	Faux	$a^2=a\times a$
$2a^2=(2a)^2$	Faux	Dans $2a^2$ c'est le a qui est au carré Dans $(2a)^2$ c'est 2a qui est au carré
$3+5a=8a$	Faux	On ne peut pas les additionner que si c'était 3a

Comme support d'entretien, il permet de travailler sur l'utilisation de contre-exemples pour démontrer que deux expressions ne sont pas identiques, l'insuffisance d'un exemple pour justifier que deux expressions sont identiques, et pour certains élèves sur la notion de puissance. Ceci nécessite que l'élève ait une conception des lettres comme nombre généralisé.

Analyse de la production de Blandine

Les réponses en termes de vrai-faux sont correctes. Pour les items 1 et 3, les justifications s'appuient sur la règle de calcul classique, avec cependant une confusion de vocabulaire concernant les puissances.

Pour les items 2, 4 et 6, les justifications s'appuient sur les opérations en jeu dans les expressions. Pour l'item 7, la justification est d'ordre légal. Pour l'item 4, l'élève fournit comme justification une règle erronée « lorsque deux nombres avec des puissances s'ajoutent leurs puissances se multiplient ». Cette règle semble obtenue à partir de celle énoncée pour l'item 1, par un échange des opérations addition et multiplication. Nous verrons plus loin comment nous envisageons de déstabiliser cette règle.

Bilan : Le tableau suivant montre comment chacune des composantes du stéréotype en algèbre élémentaire est représentée dans les cinq exercices constituant le travail de mise en route retenu.

L'analyse précédente montre que les cinq exercices choisis, outre qu'ils couvrent les trois composantes du stéréotype, ont des potentialités pour une utilisation en entretien.

Nous présentons maintenant comment nous avons analysé la production des élèves en prenant comme exemple le cas de Blandine.

Le cas de Blandine

L'étude de la production de l'élève comporte deux volets : l'un, exercice par exercice, déjà présenté, destiné à dégager une stratégie et des pistes pour l'entretien ; l'autre global comprenant la détermination du stéréotype et la typologie des erreurs de manipulation formelle.

Détermination du stéréotype et typologie des erreurs de manipulation formelle

Pour chaque exercice nous avons déterminé le niveau de l'élève pour la (les) composante(s) du stéréotype présente(s) dans l'exercice, et appliqué la typologie des erreurs de manipulation. Ce qui nous donne le tableau 3.

Synthèse : Nous attribuons à cette élève le stéréo-

	Usage de l'algèbre	Traduction algébrique	Calcul algébrique
Exercice 1		×	×
Exercice 2		×	
Exercice 3	×		×
Exercice 4	×	×	×
Exercice 5	×		×

Tableau 2 : Couverture des composantes du stéréotype par les exercices de mise en route

Tableau 3 : Détermination du stéréotype de Blandine et typologie des erreurs de manipulation formelle.

Exercice	Question	Utilisation de l'algèbre	Traduction Conversion	Calcul algébrique, traitement	
1			3	3	
2	A		1		
	B		1		
			1		
	C		3		
3	$-2(x-3)(x+1)$	1		3	M41
	$-2(x-1)^2+8$			3	?
	$-2(x-3)(x-1)$			3	M41 42
	$-2(x-3)-2x(x-3)$			1	M1
4		3	3	M32	
5	$a^3a^2=a^5$	3		1	
	$a^2=2a$			1	
	$a^3a^2=a^6$			1	
	$4a^3+3a^2=7a^5$			2	
	$a^2=a+a$			1	
	$2a^2=(2a)^2$			1	
	$3+5a=8a$			2	
Stéréotype		3	3	3	

type (UA3, TA3, CA3). On observe que cette élève mobilise l'algèbre, mais que les erreurs qu'elle commet la conduisent à des conclusions fausses. On peut faire quatre hypothèses :

— la conception de lettres étiquettes ou lettre ignorée, entraîne une manipulation formelle qui ne peut pas s'appuyer sur le numérique ;

— la méconnaissance du rôle des parenthèses dans les expressions, et des règles de formation et de traitement des expressions, gêne cette élève dans son utilisation de l'algèbre ;

— les expressions ont un statut procédural ;

— cette élève travaille en conformité par application de règles.

A partir de cette analyse nous envisageons une stratégie personnalisée pour cette élève.

Stratégie envisageable

Nous dégageons les aspects suivants des composantes qui sont à travailler :
— calcul algébrique : formation des expressions, rôle des parenthèses, manipulations formelles ;
— usage de l'algèbre : articulation numérique-algébrique, contre-exemples ;
— traduction algébrique : conception des lettres.

Nous pouvons nous appuyer sur la conversion du langage naturel vers le numérique et partiellement vers l'algébrique. Un autre point d'appui est fourni par l'énoncé des règles utilisées (l'une correcte, mais dont le domaine de validité doit être précisé, l'autre incorrecte).

Nous prévoyons pour cette élève deux, voire trois, entretiens. Le travail envisagé est le suivant :
— dans un premier entretien, essayer d'amener l'élève à une conception des lettres comme nombre généralisé au travers des exercices 2 (question C) et 5 ;
— dans un deuxième entretien, travailler sur les parenthèses au travers des exercices 1 et 4 ;
— ensuite reprendre les calculs de l'exercice 3.

D'autres déroulements ont été envisagés, mais nous avons préféré aborder en premier le statut des lettres, ce qui pouvait permettre une évolution de ce statut, avant de travailler sur la les parenthèses et les manipulations formelles. On aurait aussi pu laisser à l'élève le choix de l'exercice par lequel commencer. Nous verrons dans la partie suivante comment nous avons rendu opérationnelle cette stratégie.

2. — Les entretiens avec Blandine

Ayant analysé la copie de Blandine et déterminé une stratégie du point de vue de l'algèbre, nous posons la question de la médiation que peut/doit exercer l'enseignant pour atteindre ses objectifs.

2.1 *Quelle médiation ?*

Les entretiens que nous avons utilisés sont de type cognitif, c'est-à-dire qu'ils portent sur des connaissances et sur la formation et l'utilisation de celles-ci.

Le modèle d'entretien que nous avons choisi repose sur les deux idées suivantes :
— pour apprendre et comprendre l'élève doit pouvoir interagir avec l'objet d'apprentissage,
— ces interactions sont largement facilitées et amplifiées par la médiation qu'exerce l'enseignant.

Nous avons choisi de faire porter l'entretien sur un travail écrit effectué par l'élève avant l'entretien et analysé par l'enseignant (exercices présentés en partie 1.2).

Les trois fonctions de l'entretien

Nous partons de l'idée que l'objet d'apprentissage enjeu de l'entretien comporte trois composantes :
— les tâches qui sont données à l'élève,
— les savoirs et techniques auxquels renvoient ces tâches,
— ce qu'a fait l'élève et en particulier les

erreurs qu'il a commises.

Nous avons fait l'hypothèse qu'à chacune de ces composantes correspond une forme particulière de la médiation et un rôle particulier de l'enseignant médiateur.

Une fonction d'explicitation

Cette fonction qui concerne ce qu'a fait l'élève est celle que nous privilégions dans notre démarche. Il s'agit d'amener l'élève, par un questionnement adéquat, à mettre en mots ce qu'il a fait, à donner ses raisons de faire comme il a fait. Notre hypothèse est que la verbalisation par l'élève de ses procédures (comment il fait) et de sa compréhension (comment il a compris) lui permet une prise de conscience du mécanisme qui le conduit à des erreurs ou à des contradictions.

> *Ce n'est […] pas le professeur qui pose un diagnostic (d'ailleurs impossible la plupart du temps), ce n'est pas non plus l'élève qui, par introspection, trouve la source de ses erreurs, ce sont l'interrogation conjointe et les échanges qui conduisent à un processus d'explicitation.*» (IREM DE RENNES, 2008)

L'explicitation en entretien rompt avec un schéma habituel d'explications que l'élève peut éventuellement comprendre localement, mais qui peuvent aussi entrer en conflit avec ses représentations. Cette fonction de l'entretien, par les informations qu'elle permet d'obtenir sur les conceptions et représentations de l'élève, peut permettre à l'élève de comprendre le mécanisme de ses erreurs, et à l'enseignant d'adapter la suite de l'entretien par le choix des tâches annexes, du questionnement et des explications qu'il va pouvoir donner.

Pour la mise en œuvre de cette fonction, nous avons fait appel aux techniques de l'entretien d'explicitation (VERMERSCH, 2003), notamment :

— guider l'élève vers l'évocation du vécu de la situation, utiliser un questionnement qui oriente vers le descriptif « comment fait-il ? » ;
— utiliser des relances en utilisant les mots du sujet.

Une fonction d'étayage.

Cette fonction concerne les tâches. Pour l'élève, la préoccupation première c'est la réussite aux exercices qu'il n'a « pas su faire » ; il est impératif qu'il ne reste pas en échec dans les tâches auxquelles il est soumis. Pour obtenir cette réussite, le professeur peut exercer un étayage au sens de Bruner, en accompagnant l'élève, en lui proposant une ou plusieurs tâches annexes conduisant à la réussite de la tâche principale, en guidant son raisonnement, en l'encourageant à poursuivre dans la voie choisie, en le déchargeant de certains calculs, etc.

L'aide apportée doit être minimale (juste ce dont l'élève a besoin) et ne pas dénaturer l'activité. L'intervention de l'enseignant reste centrée sur la tâche en cours et sa réalisation. Dans ce rôle, l'enseignant évite de faire des commentaires sur la nature des erreurs et de donner des explications sur les notions.

Une fonction d'explication et/ou reformulation.

Cette fonction concerne les notions et vise ici à institutionnaliser et consolider ce qui a été fait auparavant et à préparer l'échange final sur le travail que l'élève pourra faire ensuite en autonomie. Dans un entretien, elle n'intervient que lorsque l'élève est « prêt » à la recevoir.

Quel contrat avec l'élève ?

Proposer à l'élève une recherche conjointe de l'origine de ses erreurs présente l'avantage de l'impliquer dans cette recherche et d'éviter l'écueil de la déresponsabilisation. Pour qu'une telle démarche réussisse, l'engagement de l'élève est indispensable. Cela signifie qu'il accepte d'expliciter ce qu'il a fait, de répondre aux questions de l'enseignant, de réaliser les tâches complémentaires qui vont lui être données. Cet accord de l'élève doit être explicitement demandé. L'élève peut attendre une correction des exercices qu'il a faits. L'enseignant doit l'informer que ça ne va pas être le cas, au moins au début de l'entretien.

En entretien, l'enseignant doit pouvoir résister à une demande de l'élève du style « c'est bon ? » ou « c'est faux ? », par exemple en retournant la question à l'élève sous la forme « et vous qu'en pensez-vous ? ». On se rend compte alors que l'élève a des raisons de penser que sa réponse est correcte (resp. incorrecte), est capable de les exposer, et que ces raisons révèlent des conceptions qui peuvent être erronées, ou des connaissances locales appliquées hors de leur domaine de validité, ou encore un doute quant à la validité des connaissances appliquées.

L'enseignant s'engage à accompagner l'élève jusqu'à ce que celui-ci acquière par lui-même la conviction que ce qu'il a fait est mathématiquement correct. L'enseignant laisse à l'élève toute liberté de choix pour tout ce qui n'est pas déterminant pour la tâche : choix de valeurs particulières, ordre des calculs etc.

2.2 *Préparation et conduite des entretiens avec Blandine*

Le but de l'entretien, tel que nous l'annonçons aux élèves en début d'entretien, est une recherche conjointe des sources d'erreurs. Durant l'entretien lui-même une grande importance doit être accordée à l'explicitation. Ce qui ressort de cette phase d'explicitation détermine ce qui va être fait ensuite, par exemple :

— confronter l'élève aux limites de ses connaissances locales par un jeu de contre-suggestions, contre-argumentations, contre-exemples…
— apporter un étayage pour certaines tâches.

L'enseignant doit donc prévoir les questionnements, contre-suggestions et tâches à donner à l'élève en cours d'entretien, pour que l'élève en tire profit. Nous présentons la préparation que nous avons faite avant les entretiens avec Blandine.

Préparation des entretiens

Cette préparation s'appuie sur la production de l'élève et constitue la mise en œuvre prévue de la stratégie déjà présentée.

Exercice 2 question C : Dans la phase d'explicitation, nous envisageons de pointer le fait que l'élève a changé de point de vue, pour l'amener à s'exprimer sur ce changement.

Il est possible de prendre appui sur le numérique en demandant à l'élève de produire des couples de nombres (nombre d'élèves, nombre de professeurs) satisfaisant à la condition énoncée. Les résultats pourront être présentés sous forme de tableau. Pour la généralisation de la relation, on dispose d'un point d'appui supplémentaire qui consiste à considérer le processus qui permet de passer du nombre de professeurs au nombre d'élèves ou le contraire.

Exercice 5 : Nous considérons que les items 1 et 4 sont à aborder ensemble. Un travail sur l'item 7, que nous ne détaillons pas ici, peut aussi être envisagé.
Item 1 : $a^3\,a^2 = a^5$: La réponse de l'élève est

correcte ; par contre l'énoncé de la règle sur laquelle elle s'appuie est incorrect. La tâche de l'enseignant est ici de faire prendre conscience à l'élève du domaine de validité de la règle énoncée (produit de deux puissances d'un même nombre).

Pour cela, nous envisageons de demander à l'élève de donner d'autres exemples d'application de la règle qu'elle a énoncée et de voir si elle applique cette règle à $4^3 \times 5^2$ par exemple. On peut aussi faire reformuler la règle et la faire justifier. On peut s'attendre notamment à une conception incorrecte des puissances ; dans ce cas c'est cela qu'il sera souhaitable de travailler.

Item 4 : $4a^3 + 3a^2 = 7a^5$: Cette fois, la règle énoncée est incorrecte et conduit l'élève à proposer $4a^3 + 3a^2 = 7a^5$ en remplacement de l'égalité proposée. Nous pensons qu'il est possible d'utiliser cet énoncé comme levier. Notre hypothèse est que, pour obtenir de l'élève la remise en cause de cette règle, les contre-exemples doivent être fournis par l'élève. Ils peuvent nous renseigner sur la manière dont l'élève comprend ce qu'elle a énoncé. Nous envisageons de demander à l'élève comment elle applique cette règle de calcul, et de donner d'autres exemples d'applications numériques plus simples (par exemple $5^2 + 5^3$, $5^2 + 3^2$, $3^4 + 5^2$).

On peut aussi demander à l'élève de calculer les trois expressions $4a^3 + 3a^2$, $7a^6$, $7a^5$, en donnant à a une valeur numérique autre que 0 et 1, et montrer ainsi la force du contre-exemple.

Exercice 1 : Le but est d'amener l'élève à distinguer les écritures $(a + 3)(a + b)$ et $a + 3 \times a + b$ en tenant compte de la priorité des opérations. Nous disposons de plusieurs leviers : l'explicitation des processus, le support géométrique, l'étude de cas particuliers en donnant à a et b des valeurs numériques.

Exercice 3 : La stratégie pour cet exercice comporte quatre temps.

1) Faire expliciter le développement de la quatrième expression qui est correct. Demander à l'élève quelle propriété des opérations elle a utilisée, pour renforcer un point d'appui avant d'aborder la première expression.

2) Demander à l'élève d'expliciter son calcul pour la première ou la troisième expression. Pour la première expression, on note sur la copie une erreur de signe qui ne figure pas sur le brouillon. On peut s'attendre à une description de la procédure. Il nous semble nécessaire de demander à l'élève d'expliciter les signes d'opérations implicites entre -2 et $(x - 3)$ et entre $(x - 3)$ et $(x + 1)$.

Interroger l'élève sur sa conception de la lettre : « *x c'est quoi pour vous ?* ».

3) Etude d'exemples numériques : demander à l'élève de vérifier l'une des égalités,

$$-2(x - 3)(x + 1) = -4x - 4$$

ou

$$-2(x - 3)(x - 1) = -2x^2 + 8,$$

sur un exemple numérique. Ceci permet de voir comment l'élève interprète, dans le cas numérique, l'absence de signe opératoire. On pourra le lui demander si elle ne le dit pas spontanément. En ce qui concerne les calculs numériques, on dispose du levier suivant : demander de calculer la même expression numérique de plusieurs façons. En particulier il sera intéressant de voir comment l'élève calcule le produit de trois nombres, dans un cas numérique.

On peut aussi demander le calcul de $-2x^2 + 4x + 6$ pour la même valeur donnée à x. Un autre outil consiste à demander de traduire, par un arbre, les processus de calcul, pour chacune des expressions avec la lettre x, puis de refaire les calculs schématisés par les arbres, en remplaçant x par une valeur numérique.

4) Après que l'étude des exemples numériques ait permis une compréhension correcte de la structure de l'expression, on peut revenir au cas général et proposer un regroupement de deux facteurs, en prenant appui sur le numérique et sur ce qui a été fait pour la quatrième expression.

Bilan du premier entretien

Nous avons proposé à Blandine trois entretiens qui se sont déroulés en février-mars sur trois semaines consécutives. Nous présentons le déroulement du premier entretien puis une analyse selon trois points de vue :
— le choix des stratégies
— la gestion de la médiation
— l'évolution des conceptions de l'élève.

Cet entretien a duré 31 minutes. Nous l'avons découpé en six parties.
— La *première partie* introduit l'entretien.
— La *deuxième partie* porte sur la question C de l'exercice 2.
— La *troisième partie* porte sur la règle énoncée par l'élève pour justifier sa réponse à l'item 1 de l'exercice 5 : « quand deux nombres avec des puissances se multiplient, les exposants s'additionnent ». Dans cette partie de l'entretien, est revu le vocabulaire des puissances, et les échanges suivants ont pour but de préciser le domaine de validité de la règle énoncée.
— La *quatrième partie* porte sur la recherche de contre-exemples pour la deuxième règle utilisée par l'élève pour justifier sa réponse à l'item 4 : « lorsque deux nombres avec des puissances s'ajoutent leurs puissances se multiplient ».
— La *cinquième partie* porte sur l'interprétation de l'expression $4a^3$, lors du passage à l'application numérique.
— La *sixième et dernière partie* comprend un bilan et clôt l'entretien.

Du point de vue du choix des stratégies

Le choix de travailler d'abord sur la conception des lettres, à partir de la question C de l'exercice 2, s'avère pertinent. La tâche annexe de production d'exemples numériques prépare la généralisation de la relation et permet à l'élève de réussir cette tâche.

Pour essayer de cerner comment l'élève comprend les règles qu'elle applique dans l'exercice 5, l'enseignante choisit de lui demander d'illustrer par des exemples numériques les règles qu'elle a énoncées. Le premier choix de l'élève ($3^2 \times 5^{18}$) est conforme à notre hypothèse, selon laquelle l'élève méconnaît le domaine de validité de la règle qu'elle énonce.

Le traitement qu'effectue l'élève sur les produits $3^2 \times 5^{18}$ et $3^2 \times 5^3$ montre qu'elle s'attache seulement aux exposants, et qu'elle utilise une procédure d'assemblage pour les nombres 3 et 5, et sans doute aussi pour tout produit de la forme $a^n b^p$. La vérification demandée pour $3^2 \times 5^3$ nous fournit un point d'appui pour expliquer à l'élève les limites de la règle (incomplète) qu'elle a énoncée. Dans le travail fait autour de la règle de multiplication de deux puissances d'un même nombre, l'enseignante aurait pu faire vérifier l'identité $a^3a^2 = a^5$ par décomposition de a^3 et a^2 , ce qui aurait été une occasion de faire fonctionner l'algèbre.

Dans le choix de faire travailler l'élève sur les règles qu'elle utilise dans l'exercice 5, la question des parenthèses n'avait pas été envisagée a priori, d'autant plus que $2a^2 = (2a)^2$ est reconnu comme faux, et la réponse est justifiée par l'indication de ce qui est élevé au carré dans chaque cas. L'exemple choisi par l'élève : $(4 \times 3)^3 + (3 \times 3)^2$, satisfait la condition « ajouter deux puissances ». L'enseignante privilégie ici la réussite de la tâche (justifier par un contre-exemple que les identités $4a^3 + 3a^2 = 7a^6$ et $4a^3 + 3a^2 = 7a^5$ sont fausses) mais sous-estime l'obstacle que constitue la question des parenthèses. La considération des processus, et leur représentation sous forme d'arbre, ne semblent pas très efficaces. Nous interprétons cette situation par l'hypothèse de l'insuffisance des points d'appui : manque de familiarité de l'élève avec la représentation sous forme d'arbre, défaut d'appui sur le numérique.

Du point de vue de la gestion des médiations

Nous examinons comment les trois fonctions de l'entretien exposées précédemment apparaissent ici. La *fonction d'explicitation* apparaît à plusieurs reprises.

De la deuxième partie de l'entretien, nous extrayons le passage suivant :

« Professeur Vous aviez répondu six P égale E, vous avez barré et vous avez dit P égale six E. Alors estce que vous pouvez expliquer un petit peu heu votre raisonnement, vos raisons de répondre l'un plutôt que l'autre.

Elève Ben E c'est les élèves, donc heu pour six élèves il y a un prof. Et heu… ben

P Donc six élèves égale un professeur

E(très bas) C'est pas ça

P Pardon

E C'est pas c'est pas ça

P J'ai pas dit ça. Pour l'instant j'ai pas dit ça. Par contre c'qu'j'vais vous demander… c'est… J'vais pas répondre à votre question en fait, je vais vous en poser une autre. »

L'explicitation tourne court. Au quatrième tour de parole l'intervention de l'enseignante est inadaptée. L'enseignante n'obtient pas l'énoncé de ce qui a fait changer d'avis l'élève. Pour amener l'élève à la description de ce qu'elle a fait, l'enseignante aurait pu poser une question du style : « que vous dites-vous dans votre tête ? » A la fin de l'épisode, l'élève émet un doute sur la validité de sa réponse. L'enseignante aurait pu pointer ce doute et demander à l'élève sur quoi elle doutait, ce qui aurait pu amener une explicitation.

Dans la troisième partie, l'explicitation met en évidence le sens que l'élève donne au terme « puissance »,

« P …Dans cette écriturelà la puissance c'est quoi pour vous ? Ce que vous appelez la puissance

E Cellelà

P Oui

E Ben c'est le trois et le deux

P Ouais

E au carré donc »

ce qui permet ensuite à l'enseignante de donner une explication qui semble adaptée.

Dans la quatrième partie, l'échange porte sur l'égalité $(4 \times 3)^3 + (3 \times 3)^2 = (7 \times 3)^6$ produite par l'élève. L'élève précise qu'elle a remplacé a par 3 dans l'expression $4a^3 + 3a^2$, et qu'elle a appliqué la règle de calcul (fausse) qu'elle a énoncée pour l'item 4. Cette description est obtenue bien que le vocabulaire employé par l'enseignante ne soit pas le plus approprié, si l'on se réfère à Vermersch. Nous proposons une autre formulation utilisable ici : « Voudriez-vous me dire comment vous avez fait ? », que nous pensons plus propice à amener l'élève à la description de son action.

Un autre passage illustre l'intérêt de l'explicitation :

« E J'fais directement comme j'aurais fait ?

P Oui. On fera la vérification après. Mais faîtes ce que … Vous diriez c'est huit exposant quatre. [L'élève a écrit $3^4 + 5^4 = 8^4$]

E Oui

P Alors maintenant voilà ce qu'on va faire. Donc… Et vous m'expliquez comment vous avez fait là.

E Heu j'ai additionné les nombres

P Les nombres c'està dire

E Trois et cinq heu »

Nous avons omis de demander à l'élève comment elle avait traité les exposants ce qui aurait mis en évidence qu'elle a appliqué une autre règle que celle qu'elle a énoncée.

Nous voyons que cette fonction d'explicitation n'est pas facile à mettre en œuvre mais qu'elle apporte des informations intéressantes sur les conceptions de l'élève.

La *fonction d'étayage* est présente de façon majoritaire dans cet entretien. Dans la deuxième partie, l'étayage consiste à demander à l'élève des exemples numériques puis à proposer de passer au cas général « si vous appelez P le nombre de professeurs ». Dans la quatrième partie, l'étayage s'appuie sur l'utilisation des arbres représentant les processus, mais n'est pas très efficace.

Dans les autres cas, il s'agit d'étayage sur des calculs numériques. L'enseignante encourage l'élève à poursuivre, la décharge partiellement de certains calculs pour lui éviter de perdre de vue l'objectif de la tâche en cours.

La *fonction d'explication* apparaît à trois reprises et concerne le statut des lettres, le vocabulaire sur les puissances et la règle de multiplication de deux puissances d'un même nombre.

Nous examinons d'*autres interactions* qui n'entrent pas dans le cadre précédent.

Au début de la deuxième partie de l'entretien, l'enseignante est confrontée à la question suivante de l'élève « C'est pas ça ? », qui est la manifestation d'un doute. L'enseignante esquive cette question et propose une tâche annexe qui va permettre à l'élève de décider de la validité de la réponse qu'elle a donnée. Ceci illustre ce que nous avons dit à propos de la neutralité de l'enseignant face aux questions de l'élève sur la validité de ce qu'il énonce ou écrit.

Le choix de commencer par la question C de l'exercice 2, outre son intérêt du point de vue de l'algèbre, nous semble présenter aussi un avantage du point de vue de la médiation. En effet, l'étayage a permis la réussite de la tâche et nous faisons l'hypothèse que cette réussite a pu rendre l'élève plus confiante dans ses capacités et favoriser la suite de l'entretien.

Du point de vue
de l'évolution des conceptions

Au début de l'entretien, il semble que le statut des lettres pour cette élève soit celui de lettre-objet. Cette conception semble évoluer au cours de l'entretien et l'articulation numérique/algèbre commence à fonctionner quand l'élève remplace a par une valeur numérique dans $4a^3 + 3a^2$. Le choix de cet exemple $(4 \times 3)^3 + (3 \times 3)^2$ montre aussi comment l'élève interprète les expressions $4a^3$ et $3a^2$ dans une tâche complexe où la question des parenthèses n'est pas explicitement posée. Du point de vue de l'interprétation des expressions telles que $4a^3$, il ne semble pas y avoir d'évolution, et la question sera à reprendre dans un entretien ultérieur. Il est à remarquer que, dans une autre question du même exercice, cette élève distingue les expressions $2a^2$ et $(2a)^2$, mais que cette distinction est inopérante dans l'action. Notre hypothèse est celle d'une connaissance fragile, qui n'est pas disponible.

Quant aux deux règles énoncées par l'élève dans sa production initiale, il est difficile d'évaluer l'évolution. Il est vraisemblable qu'elle a compris les limites de la règle de multiplication de deux puissances d'un même nombre, mais a-t-elle renoncé à appliquer l'autre règle ou à inventer des règles ?

Ce premier entretien montre que l'enseignant doit avoir des objectifs raisonnables, en lien avec ce que l'élève a déjà acquis et peut mobiliser lors de la résolution des exercices. Ici, la question des parenthèses aurait pu être laissée de côté au profit d'un travail un peu plus approfondi sur les puissances.

Bilan des deux autres entretiens avec Blandine

Le deuxième entretien avec Blandine a porté essentiellement sur le rôle des parenthèses. La première partie de l'entretien a été consacrée à la distinction entre les expressions $4a^3$ et $(4a)^3$; cette question n'avait pas été correctement fermée lors du premier entretien. La deuxième partie a pour support l'exercice 1, conformément à la stratégie choisie.

Le troisième entretien a porté sur le développement du produit $-2(x-3)(x+1)$ dans l'exercice 3. Cet entretien a plutôt eu un rôle de consolidation. Nous présentons un bilan global de ces deux entretiens.

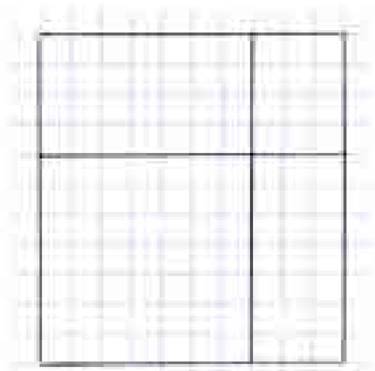
Du point de vue des stratégies

Dans le deuxième entretien les stratégies a priori sont utilisées. En ce qui concerne la distinction des expressions $4a^3$ et $(4a)^3$, l'appui sur le fait que l'identité $2a^2 = (2a)^2$ est fausse, et le travail sur les exemples numériques, semblent avoir plus de poids que l'étude des processus.

L'utilisation des contre-exemples pour prouver qu'une identité est fausse apparaît à deux reprises dans le deuxième entretien. Cette utilisation aurait pu être renforcée par la tâche suivante, à faire en travail personnel : donner un contre-exemple pour chacun des items 2, 3, 5, 6 et 7 de l'exercice 5.

Pour l'exercice 1, l'utilisation de l'exemple numérique prenant appui sur la figure ci-dessous conduit l'élève à la réussite de la tâche.

Dans le troisième entretien, pour l'exerci-



ce 3, nous avons dû adapter notre stratégie au fait que l'élève avait repris cet exercice en travail personnel et effectué des calculs corrects en développant en premier le produit $(x-3)(x+1)$. C'est pourquoi nous avons abandonné la première étape prévue qui portait sur le développement de l'expression $-2(x-3)-2x(x-3)$, et fait porter le travail sur une deuxième technique de développement de l'expression $-2(x-3)(x+1)$.

La stratégie utilisée ici par l'enseignante est de mettre en évidence la structure de l'expression, et ce qu'elle implique pour les calculs à faire (contraintes et libertés), en s'appuyant sur des exemples numériques ayant une structure voisine de l'expression à calculer.

Le calcul de $3 \times 4 \times 5$ est proposé à l'élève dans le but de montrer que, pour effectuer un produit de trois facteurs, plusieurs regroupements sont possibles, et lui faire distinguer l'associativité de la multiplication d'une fausse distributivité. Sur les possibilités de regroupement, on peut considérer que le but est atteint. Par contre sur la confusion entre associativité et fausse distributivité, il ne l'est pas.

Le calcul de $3 \times 4(5 + 2)$ demandé ensuite, nous semble peu pertinent. Il était destiné à montrer à l'élève l'application de la distributivité de la multiplication sur l'addition, sous la forme : $3 \times 4(5 + 2) = 3 \times 4 \times 5 + 3 \times 4 \times 2$ ou : $3 \times 4(5 + 2) = 12 \times (5 + 2) = 12 \times 5 + 12 \times 2$. Il n'est pas sûr que l'élève ait fait le lien entre $3 \times 4(5 + 2)$ et $-2(x - 3)(x + 1)$, du point de vue de la structure. Demander à l'élève de remplacer x par une valeur numérique s'avère plus efficace.

Du point de vue de la gestion des médiations

Le début du deuxième entretien, dans sa fonction d'explicitation, confirme notre hypothèse que le premier n'a pas suffi à déstabiliser une interprétation erronée de l'expression $4a^3$ lors du remplacement de a par une valeur numérique.

Dans le troisième entretien l'explicitation permet la mise en évidence d'une conception de l'élève quant au développement des produits : commencer par les expressions entre parenthèses. Dans les deux entretiens, une partie de l'*étayage* consiste à proposer des tâches annexes de retour au numérique et à accompagner les calculs que fait l'élève. D'autres interventions de l'enseignante relèvent aussi de la fonction d'étayage :

— fournir à l'élève le vocabulaire adéquat pour formuler son observation : permutation des facteurs pour justifier l'identité des expressions $(a + b)(a + 3)$ et $(a + 3)(a + b)$,
— suggérer d'utiliser la figure pour interpréter l'expression $ab + 3b + a^2 + 3a$ comme aire du grand rectangle,
— demander à l'élève de préciser les opérations implicites dans l'expression $-2(x - 3)(x + 1)$,
— pour le calcul de $3 \times 4(5 + 2)$, suggérer de calculer 3×4 puis développer $12 \times (5 + 2)$.

Dans ces deux entretiens, comme dans le premier, il y a peu d'explications. Elles portent sur

— la notion de contre-exemple, et la nécessité d'une démonstration dans le cas général, pour prouver qu'une identité telle que $a^3\,a^2 = a^5$ est vraie.
— la technique de développement d'un produit de trois facteurs, et les possibilités de regroupement de deux facteurs pour la première étape du calcul.

Du point de vue
de l'évolution des conceptions

Les conceptions de l'élève semblent avoir évolué sur deux points : la question des parenthèses et l'articulation algébrique/numérique liée à la conception des lettres.

Le retour au numérique semble permettre à l'élève de se convaincre de la nécessité des parenthèses. La suite de l'entretien, qui porte sur la reconnaissance des expressions égales à l'aire du grand rectangle, confirme ce changement de point de vue.

L'articulation numérique/algèbre devient un point d'appui quand l'élève affirme que ce qu'elle a écrit ($4a^3 + 3a^2 = 7a^6$) est faux, en s'appuyant sur l'étude d'un contre-exemple. Enfin, à l'issue du troisième entretien, elle semble accorder une plus grande attention à la structure de l'expression et aux opérations en jeu.

De ces entretiens, nous dégageons quelques hypothèses ou principes qui se trouvent confirmés par les entretiens conduits avec d'autres élèves.

3. — Quelques éléments pour la conduite d'entretiens en algèbre

3.1. *Présentation de la démarche*

La démarche qualifiée de bilan approfondi des sources d'erreurs en algèbre s'adresse à des élèves de troisième ou seconde. Elle est présentée à toute la classe. Cette démarche comporte plusieurs étapes :

- exercices donnés à toute la classe, étape qualifiée de mise en route, qui peut avoir lieu sur une heure de cours,
- codage et analyse des productions des élèves par le professeur de la classe,
- entretiens : chaque entretien fait l'objet d'une préparation personnalisée,
- travail personnel de l'élève.

La durée prévue pour un entretien est d'environ 20 minutes. Nous insistons pour que tous les exercices soient donnés aux élèves (en une ou plusieurs fois) afin que les trois composantes du stéréotype soient évaluées.

3.2. *Analyse de la production des élèves*

Ce travail doit être effectué sur une photocopie du travail de l'élève, de façon à rendre à l'élève sa copie sans aucune annotation. Cette analyse se fait en deux temps. Dans un premier temps il s'agit de déterminer le stéréotype de chaque élève et la typologie des erreurs de calcul formel, à l'aide de la grille présentée en 1.2. De cette analyse, le professeur peut dégager un panorama de la classe et choisir à quels élèves il va proposer un entretien, comme nous l'expliquerons au paragraphe suivant.

Une fois ce choix effectué (il peut ne pas être définitif), dans un deuxième temps, l'enseignant analyse plus finement la production de chaque élève qui sera vu en entretien.

Le stéréotype est un outil pour se donner un objectif raisonnable d'apprentissage, déterminer la composante à travailler en priorité et repérer les points d'appui éventuels.

Dans la production de l'élève il est utile de rechercher les régularités :

- celles qui sont correctes et qui peuvent constituer des points d'appui,
- celles qui sont incorrectes, et pour lesquelles on peut émettre l'hypothèse d'une source commune à rechercher.

Nous pensons utile aussi de relever les incohérences qui peuvent être de bons révélateurs de la façon dont l'élève a compris les choses, et des points de départ intéressants pour l'entretien.

3.3. *Le choix et l'ordre de passage des élèves*

La question se pose de savoir à quels élèves proposer un entretien. Deux critères peuvent guider ce choix : le profil cognitif de l'élève en algèbre obtenu par l'analyse de sa production et le rapport de l'élève au domaine scolaire.

Nous avons fait le choix, dans cette expérimentation, de proposer des entretiens à tous les élèves dont le stéréotype comportait au moins deux scores très défavorables (code 3), et de faire passer en premier ceux dont le stéréotype ne comportait que des 3. Pour certains élèves ayant un stéréotype défavorable, les résultats ont été peu visibles. Pour les élèves ayant un stéréotype plus favorable, les résultats sont, au moins localement, un peu plus tangibles. L'élaboration d'outils adaptés pour les stéréotypes les plus faibles est aussi plus difficile en raison de la faiblesse des points d'appui.

Si on se place dans la perspective d'une utilisation dans une classe, nous faisons l'hypothèse que faire passer en entretien, en premier, des élèves dont le stéréotype n'est pas trop défavorable peut, d'une part, permettre de « rôder » les outils, et d'autre part, contribuer à installer une dynamique favorable aux entretiens.

Il convient de s'interroger sur les dispositions de l'élève par rapport aux entretiens :

— est-il prêt au dialogue ?
— va-t-il adhérer à la démarche dans laquelle on essaie de l'impliquer ?

Quant à l'organisation des séances, nous proposons la suivante que nous avons expérimentée. Pour la première séance l'enseignant fait venir deux élèves, et mène un entretien avec chacun d'eux successivement. Pendant l'entretien avec le premier élève, le second a le temps de relire sa copie et éventuellement faire un exercice qu'il peut choisir dans le fichier de travail auto-dirigé (voir 3.6). Pendant l'entretien avec le deuxième élève, celui qui a déjà bénéficié d'un entretien travaille en autonomie. Lors des séances suivantes l'enseignant mène un entretien avec un élève et consacre le reste du temps au suivi des élèves qui ont déjà bénéficié d'un entretien et travaillent en autonomie.

3.4. *Préparation de l'entretien, choix de la stratégie*

Chaque entretien fait l'objet d'une préparation qui tient compte de la production de l'élève et de la synthèse que constituent le stéréotype et la typologie des erreurs de calcul formel. Comme nous l'avons déjà dit, cette préparation doit envisager les questionnements, tâches annexes, contre-suggestions à utiliser pour que l'élève tire profit de l'entretien.

Dans ce travail préalable à la détermination d'une stratégie pour un entretien avec un élève, nous considérons comme indispensable de se poser les questions suivantes :

— quelle conception des lettres apparaît dans la production de l'élève ?
— l'articulation algébrique-numérique est-elle présente ?
— la conversion pas à pas du langage naturel vers le numérique est-elle présente ?

Il nous est apparu au cours du travail que des élèves ayant pour seule conception des lettres celle de lettre-objet, ou lettre-étiquette, ne peuvent s'appuyer sur le numérique. Pour ces élèves, l'articulation algébrique-numérique n'a pas de sens, la notion de contre-exemple non plus. Nous en avons déduit qu'il est sans doute plus pertinent de travailler d'abord sur la conception des lettres avec ces élèves. La question C de l'exercice 2 constitue un point de départ adapté, pour enrichir les conceptions de la lettre par une conception de lettre-nombre généralisé.

Pour un élève qui n'utilise pas les parenthèses, ou les utilise incorrectement, nous faisons l'hypothèse qu'il est plus opportun de commencer par travailler sur les processus et l'écriture des résultats.

Enfin, pour un élève qui semble confondre aire et périmètre dans l'exercice 1, nous pensons qu'un travail sur ces notions est à envisager avant d'aborder cet exercice en entretien. En effet nous considérons que cette confusion prive l'élève, en ce qui concerne l'algèbre, d'une possibilité de changement de cadre, et est plus généralement un obstacle dans l'apprentissage des mathématiques.

Une autre question se pose : qui choisit l'exercice sur lequel l'élève et le professeur vont travailler en premier ? Deux points de vue s'opposent sur cette question.

1) C'est l'enseignant qui choisit : ceci a l'avantage pour l'enseignant d'aller plus directement aux questions qui posent problème selon lui, et demande a priori moins de préparation.

2) L'enseignant laisse l'élève choisir le premier exercice sur lequel ils vont travailler ensemble : cette situation présente l'intérêt de coller davantage aux inquiétudes de l'élève et à ses questions ; elle demande plus de préparation à l'enseignant qui doit être prêt à démarrer avec n'importe quel exercice.

3.5. *Conduite de l'entretien*

Le premier entretien avec un élève porte sur un des exercices de mise en route. Le professeur remet à l'élève sa copie sans aucune annotation et lui laisse un peu de temps pour la relecture (ceci peut avoir lieu pendant un entretien avec un autre élève). Quand un deuxième entretien a lieu, il peut porter sur un autre exercice de mise en route ou sur un exercice complémentaire.

Il est nécessaire, pour qu'un tel travail soit profitable, que l'élève soit volontaire. Avant de commencer l'entretien, il est utile de rappeler le but de l'entretien et de demander explicitement à l'élève son accord pour un tel travail.

Nous avons insisté sur l'importance de l'explicitation. Un moyen pour lancer cette explicitation est de demander à l'élève de relire sa réponse, pointer ce qu'il a fait, « Vous avez répondu… », lui demander comment il a fait : « J'aimerais que vous me disiez comment vous avez fait ? », ou ce qu'il s'est dit dans sa tête quand il a traité cette question.

Il nous paraît aussi utile de prévoir, à la fin de l'entretien, un petit bilan en demandant à l'élève ce qu'il retient de ce qui vient d'être fait. C'est le moyen d'apprécier la portée du travail qui a précédé et son impact sur les conceptions de l'élève. Nous avons parfois observé dans les entretiens que nous avons analysé un décalage entre ce que l'élève avait retenu de l'entretien et ce que l'enseignant pensait avoir fait. Ce bilan permet à l'enseignant d'attirer l'attention de l'élève sur un point dont il n'a pas vu l'importance, d'institutionnaliser ce qui a été fait pendant l'entretien et de proposer à l'élève un travail personnel.

3.6. *Le travail personnel de l'élève après les entretiens.*

Nous l'avons déjà dit la démarche proposée aux élèves comporte une part de travail personnel. Ce travail est indispensable pour consolider les apprentissages. Il peut se faire dans la cadre de l'accompagnement personnalisé.

La forme la plus viable est le fichier de travail que nous avons qualifié d'auto-dirigé, faisant référence à une certaine autonomie de l'élève, qui travaille néanmoins sous la direction de son professeur. Nous avons utilisé un fichier existant produit par le groupe qui a travaillé sur l'aide individualisée de 2001 à 2004 (IREM DE RENNES 2005). Ce fichier a été enrichi pour répondre à des besoins repérés au cours des entretiens. Ce fichier est aussi utilisable par d'autres élèves.

Le fichier comporte deux parties :

— un classeur directement accessible aux élèves, qui comprend plusieurs exemplaires de chaque fiche dans des chemises en plastique, dans lequel les élèves peuvent choisir une fiche qui correspond à une question qu'ils souhaitent travailler ;
— un classeur accessible aux élèves sous le contrôle du professeur, qui contient les corrections des fiches, et pour certaines fiches, des fiches d'aide ou de correction partielle.

La constitution d'un tel fichier est amplement facilitée par la mutualisation. Il peut être envisagé aussi un travail sur ordinateur avec des exerciseurs, ou sur des sites en ligne tels que Mathenpoche ou Wims par exemple.

Conclusion

Les nombreux entretiens (plus d'une trentaine) que nous avons menés et l'analyse que nous venons de présenter nous ont convaincu qu'il est possible d'agir sur les difficultés des élèves en calcul algébrique par le biais d'entretiens cognitifs individuels. De plus, l'entretien peut être un moyen de guider l'élève dans le choix d'un travail personnel mieux adapté à ses besoins. Ce genre d'entretien peut aussi contribuer à une modification du rapport personnel de l'élève à l'algèbre : évolution de certaines conceptions, meilleure confiance en ses capacités de raisonnement par la compréhension de la logique qui a été la sienne, passage d'une orientation du travail où il applique des règles à une prise de position personnelle.

Pour mener à bien de tels entretiens, l'enseignant doit disposer d'outils variés, tant du point de vue du contenu que de la gestion de la médiation. Nous dégageons trois idées principales pour la conduite de ces entretiens en algèbre élémentaire :

— s'appuyer sur les différentes composantes de la compétence en algèbre ;
— s'intéresser en premier à la conception des lettres pour l'enrichir si besoin par une conception de nombre généralisé ;
— accorder une importance particulière à la fonction d'explicitation comme moyen d'accès aux sources d'erreurs.

Pour le premier point, les exercices que nous avons utilisés conviennent. On peut aussi envisager d'autres outils notamment informatisés.

Pour le deuxième point, nous avons constaté avec d'autres élèves que Blandine qu'une conception des lettres limitée à celle de lettre-étiquette ou lettre objet n'a pas permis une évolution significative des conceptions de l'élève, en particulier les procédures d'assemblage et désassemblage ont perduré. Au contraire, lorsque cette conception de lettre objet est mise au jour et dépassée, des progrès ont été possibles.

Quant à la fonction d'explicitation, elle nous semble un moyen privilégié d'accéder aux sources des erreurs des élèves. La situation individuelle de l'entretien est bien adaptée à cette fonction. Nous pensons que pour accéder aux sources des erreurs, le but premier de l'entretien ne doit pas être la déstabilisation de connaissances erronées, mais la mise en évidence des procédures de l'élève « comment il fait », du « comment » il est possible d'inférer les principes ou raisons qui guident l'action. Ceci implique que l'enseignant porte un intérêt réel à la pensée de l'élève qui est en face de lui, et adopte une posture particulière, qui est non pas d'apporter du savoir, mais de s'intéresser au « faire » de l'élève, non pas expliquer mais amener l'élève à dire comment lui-même comprend.

En ce qui concerne la remédiation, l'expérimentation a montré que l'enseignant ne dispose pas toujours des outils adaptés aux situations rencontrées en entretien. Nous pensons que ce travail de recherche est à poursuivre pour l'élaboration et la validation de tels outils, en particulier pour faire face aux difficultés des élèves les plus faibles ; en effet c'est pour ces élèves que les outils disponibles font le plus défaut. Le cadre qui nous semble adapté pour cette tâche est celui de groupes de travail de professeurs au sein des Irem.

Bibliographie

BRUNER J.S. (1983). *Le développement de l'enfant, savoir faire, savoir dire*. Paris PUF

CHENEVOTOT F., GRUGEON-ALLYS B., DELOZANNE E., (2009). Vers un diagnostic cognitif dynamique en algèbre élémentaire. In *Actes du Colloque Mathématiques Francophone*.

COULET J.C. (1996). Résolution de problèmes et éducabilité cognitive. In Lieury A (ed) *Manuel de psychologie de l'éducation et de la formation*. Paris Dunod.

DOUADY R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, Vol 7, n°2*, pp 5-31. Grenoble La Pensée Sauvage.

GRUGEON B. (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G*. Thèse de doctorat, Université de Paris 7 Denis Diderot.

GRUGEON B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire**.** *Recherches en didactique des mathématiques, Vol 17, n°2*, pp 167 210. Grenoble La Pensée Sauvage.

GRUGEON B., Equipe DIDIREM, Université de Paris 7. (2000) Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception, exploitation et perspectives. In *«L'algèbre au lycée et au collège», Actes des journées de formation de formateurs, Boisseron 4-5 juin 1999,* Publication de l'IREM, Université de Montpellier.

http://pepite.univ-lemans.fr/Telechargement/francais/8-BG IREM-Montpelier.pdf

IREM DE RENNES (2005). *L'aide individualisée en seconde : De quels outils avons-nous besoin ?* pp 31 à 49. IREM de Rennes-Université de Rennes1.

IREM DE RENNES (2008). *Entretiens individuels et difficultés d'apprentissage en algèbre*. IREM de Rennes-Université de Rennes1.

LEONARD F., SACKUR C. (1990). Connaissances locales et triple approche. *Recherches en didactique des mathématiques, Vol 10 n° 2.3* pp 205-240. Grenoble La Pensée Sauvage.

MATHERON Y., NOIRFALISE R. (2002). L'aide individualisée: entre système didactique auxiliaire inutile et déficit d'analyse didactique entravant son efficacité et son développement. *Petit x n° 60,* pp 60-82.

PERRAUDEAU M. (2002). *L'entretien cognitif à visée d'apprentissage : un dispositif pour aider l'élève en mathématiques*. Paris : L'Harmattan.

ROGALSKI J. (2008). Mise en regard des théories de Piaget de de Vygotski sur le développement et l'apprentissage. In VANDEBROUKE F (dir). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès Editions.

SFARD A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 22, pp.1-36.

SFARD A., LINCHEVSKI L. (1994).The gains and the pitfalls of reification-The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 26, pp.191-228.

VERMERSCH P. (2003). *L'entretien d'explicitation*. Paris : ESF