ELOGE DE L'ALGEBRE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER
Irem de Strasbourg

Le grand poète persan Omar Al Khayyam, est célèbre par ses *Rubayat ;* il a aussi écrit un ouvrage marquant de l'algèbre arabe, qu'il introduit par ces mots :

> *Avec l'assistance de Dieu et son concours précieux, je dis : l'algèbre est un art scientifique*.[...] *Ce qu'on cherche dans cet art, ce sont les relations qui joignent les données des problèmes à* (*l'inconnue*). *La perfection de cet art consiste dans la connaissance des méthodes mathématiques au moyen desquelles on est en état d'effectuer la détermination des inconnues soit numériques, soit géométriques*[1].

1 Woepke F., *L'algèbre d'Omar Alkayyami publiée, traduite et accompagnée d'extraits du manuscrit inédits,* B. Duprat, Paris 1851, p. 5. Voir aussi Rashed, Roshdi, and Ahmed Djebbar, 1981, *L'œuvre Algébrique d'al-Khayyām*. Alep : Imprimerie de l'Université d'Alep.

Et, en effet, l'Algèbre est un art, dans le sens originel *d'artifice ou d'artificiel*, opposé à naturel. C'est une œuvre humaine qui, donnant vie à une idée, crée un être que ne fournit pas la nature. Même si cette création surgit d'abord pour résoudre des problèmes pratiques, (et dont le sens est encore conservé aujourd'hui dans ce qu'on appelle *Arts et Métiers)* elle prend peu à peu son autonomie et se subordonne à des fins idéales, afin de satisfaire un désir de connaître, sans visée pratique immédiate. Aristote dit bien que *la science et l'art adviennent aux hommes par l'intermédiaire de l'expérience, car l'expérience a créé l'art et le manque d'expérience a créé la chance. L'art naît lorsque, d'une multitude de notions expérimentales se dégage un seul jugement universel applicable à tous les cas semblables*[2].

2 Aristote, *La Métaphysique* , Tome I, p. 5.

Ainsi, l'algèbre est née d'une pratique sans cesse répétée sur de multiples exemples particuliers, pour s'élever progressivement, par généralisations et abstractions, à un art idéal, créateur d'objets et de formes nouvelles, aussi autonome et gratuit que la musique ou la sculpture. L'algèbre est un outil de pensée, d'action et d'écriture de la science.

Considérer l'algèbre comme un outil de pensée peut paraître paradoxal, tant est répandu le cliché que l'algèbre est justement ce qui évite de penser, ce qui automatise la pensée mathématique. Et chez l'élève qui commence l'apprentissage de l'algèbre, la tentation est grande, en effet, de se laisser aller à des mécanismes de calcul mal contrôlés, où la réflexion est absente et où le sens des lettres support du calcul a disparu. Or il y a bien de la pensée dans l'algèbre et celle-ci ne se réduit nullement à un ensemble de procédés algorithmiques et/ou symboliques. C'est la grande force de l'algèbre qui réside dans le fait que ses objets sont des lettres et des signes dont le sens laisse la place à une certaine indétermination, que l'on peut restreindre ou étendre à volonté.

Nous montrerons d'abord cette puissance de l'algèbre dans le traitement d'un calcul d'abord élémentaire, qui par une progression réfléchie de l'abstraction, combinée à un jeu simultané sur les symboles mathématiques conduit à une efficacité et une généralité de résultats insoupçonnée. Ensuite quelques jalons historiques nous sensibiliseront aux difficultés rencontrées par les mathématiciens pour élaborer un tel outil, difficultés que nos élèves sont censés surmonter en quelques années de collège et de lycée. Enfin nous testerons l'efficacité de l'algèbre dans deux domaines où elle apporte les secours les plus précieux et déterminants, la géométrie et les sciences de la nature.

Le mouvement de l'algèbre : généralité, symboles, opérations

Soit à exprimer la somme

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

en fonction de l'entier naturel n supérieur ou égal à 1. Énoncé ainsi il y a déjà des symboles et un peu de formalisme pour exprimer la généralité. On pourrait ne formuler le résultat que sous forme verbale à partir d'une propriété géométrique sur des exemples tels que le font Conway et Guy en proposant le joli puzzle tridimensionnel ci-dessous, dans leur livre *The book of numbers*[3].

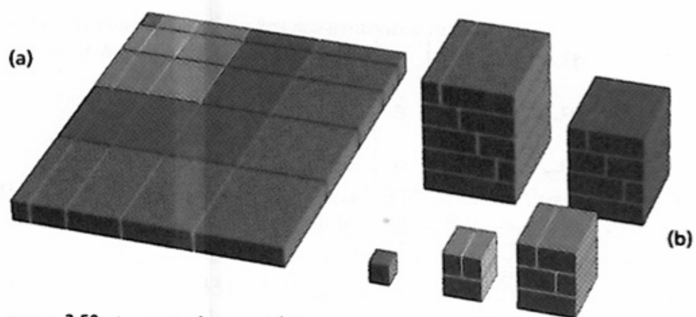


FIGURE 2.50 *A squared triangular number is the sum of cubes.*

3 Conway J. H. et Guy R. K., *The book of numbers*, Springer, 1996, p. 58.

La propriété générale montrée nécessite une bonne observation des différents objets présentés et doit être induite à partir des quatre premiers exemples. Il n'y a ni symboles ni opérations.

Une présentation plus systématique passe par une géométrie des nombres. Plaçons les unités de la somme S en utilisant ce que les Grecs appelaient un gnomon, c'est-à-dire une figure toujours semblable à elle-même, sorte d'équerre qui, complétée avec un carré, donne un carré et que l'on rajoute par itération et en augmentant les éléments constitutifs selon une même règle répétée :

1^3	$\longrightarrow$	1	2	3	4	5	6
2^3	$\longrightarrow$	2	4	6	8	10	12
3^3	$\longrightarrow$	3	6	9	12	15	18
4^3	$\longrightarrow$	4	8	12	16	20	24
5^3	$\longrightarrow$	5	10	15	20	25	30
6^3	$\longrightarrow$	6	12	18	24	30	36

Partant de 1 on accole le gnomon :

$$2 + 4 + 2 = 2(1 + 2 + 1) = 8 = 2^3.$$

Le gnomon suivant est :

$$3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 3(1 + 2 + 3 + 2 + 1) = 3^3$$

De façon générale, au rang n, on a ajouté :

$$n\,[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1] = = n[n(n+1)/2 + n(n-1)/2] = n^3$$

en utilisant la formule connue

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = n(n+1)/2\ .$$

Mais la somme totale des nombres du tableau peut aussi s'écrire :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n)(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = [n(n+1)/2]^2$$

D'où le résultat :

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = [n(n+1)/2]^2\ .$$

Il y a un peu de généralité dans le nombre quelconque de termes et l'écriture littérale, c'est un début d'algèbre. Voyons alors le mouvement de l'algèbre dans une réflexion plus ample sur ce problème. Deux de ses ressorts principaux sont la généralisation de plus en plus large des objets soumis au calcul, et l'utilisation de notations désignant ces objets de plus en plus généraux. Le travail se fait donc à la fois sur le signe et sur les symboles opératoires.

Le problème initial

Soit à calculer en fonction de n la somme

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1.

Première généralisation : on porte l'attention sur la succession de nombres et l'on généralise le premier terme.

Calculer en fonction de n et x la somme :

$$S(x) = x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + \ldots + (x+n)^3\ ,$$

où x est un nombre quelconque (réel, complexe, ...) et n un entier naturel.

Deuxième généralisation : sur la succession elle-même.

Calculer en fonction de n, x et r la somme

$$S(x) = x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 + \ldots + (x+nr)^3\ ,$$

où r est aussi un nombre quelconque.

Troisième généralisation : sur l'exposant.

Calculer en fonction de n, x, r et p la somme

$S(x) = x^p + (x+r)^p + (x+2r)^p + \ldots + (x+nr)^p$,

où p est un exposant *a priori* quelconque.

Dernière généralisation sur la fonction exprimant chaque terme de la suite.

Calculer la somme

$S(x) = u(x) + u(x+r) + u(x+2r) + \ldots + u(x+nr)$

où u est une fonction quelconque de x , r un réel ou un complexe, n un entier naturel.

Cette dernière expression attire notre attention sur le fait que l'élément constitutif de la somme est formé au moyen d'une et d'une seule opération, toujours répétée : le passage de x à $x+r$. Désignons ce passage par le symbole E, comme *Etat varié*[4], et écrivons :

$$(\mathrm{E} \times u)x = u(x+r).$$

Alors :

$$S(x) = (\mathrm{I} + \mathrm{E} + \mathrm{E}^2 + \ldots + \mathrm{E}^n) \times ux,$$

où I désigne l'absence de variation donc l'identité, et E^p l'opération répétée p fois ; E désigne alors ce que l'on appelle un opérateur.

En admettant que ces symboles satisfont aux mêmes règles de calcul que les nombres usuels, résultat dont la validité sera précisée et démontrée au cours du 19ème siècle, nous pouvons écrire successivement :

$$S(x) = (\mathrm{E}^{n+1} - \mathrm{I})/(\mathrm{E} - \mathrm{I}) \times ux.$$

Là nous sommes explicitement dans la création algébrique : introduction d'un symbole ; calcul sur ce symbole. Continuons :

$$[(\mathrm{E} - \mathrm{I}) \times u]x = u(x+r) - ux = (\Delta \times u)(x) ,$$

où Δ désigne l'opérateur différence. Donc : $\mathrm{E} - \mathrm{I} = \Delta$, ou encore $\mathrm{E} = \mathrm{I} + \Delta$.

De sorte que :

$$\mathrm{E}^{n+1} = (\mathrm{I} + \Delta)^{n+1} = \mathrm{I} + (n+1)\Delta + \frac{n(n+1)}{1.2}\Delta^2 + \frac{n(n+1)(n-1)}{1.2.3}\Delta^3 + \ldots + \mathrm{C}_{n+1}^{k}\Delta^k + \ldots + \Delta^{n+1}$$

en appliquant la formule du binôme : nouveau symbole, nouveau calcul.

D'où :

$$(\mathrm{E}^{n+1} - \mathrm{I})/(\mathrm{E} - \mathrm{I}) = (n+1)\mathrm{I} + \frac{n(n+1)}{1.2}\Delta + \frac{n(n+1)(n-1)}{1.2.3}\Delta^2 + \ldots + \mathrm{C}_{n+1}^{k}\Delta^{k-1} + \ldots + \Delta^n$$

Dans le cas particulier où $u(x) = x^3$, on a :

$(\Delta \times u)x = (x+r)^3 - x^3 = 3x^2r + 3xr^2 + r^3$.

Puis : $(\Delta^2 \times u)x = \Delta[(\Delta \times u)x] = 6xr^2 + 6r^3$;

$(\Delta^3 \times u)x = 6r^3$; et pour $p \geq 4$, $(\Delta^4 \times u)x = 0$.

De sorte que dans ce cas précis, $S(x)$ se réduit à

$$S(x) = (n+1)x^3 + \frac{n(n+1)}{1.2}(3x^2r + 3xr^2 + r^3) + \frac{n(n+1)(n-1)}{1.2.3}(6xr^2 + 6r^3) + \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}6r^3 =$$

$$(n+1)[x^3 + \frac{3}{2}nrx^2 + \frac{n(2n+1)}{1.2}xr^2 + n^2\frac{(n+1)}{4}r^3].$$

En particulier, pour $r = 1$ et $x = 0$ on récupère bien : $S = [n(n+1)/2]^2$.

4 selon Louis Antoine Arbogast (1759 – 1803), *Du calcul des dérivations,* p.380.

Mais on peut évidemment moduler à volonté les variables x, r, p et la fonction u, étant conscient néanmoins que la somme ne se simplifie pas forcément (en pratique essentiellement lorsque u est un polynôme de degré n, dont la différence $(n + 1)$ème est nulle). Par exemple pour $x = 1$, $r = 2$ on obtient la somme :

$$S = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n + 1)^3 =$$
$$(n + 1)^2 (2n^2 + 4n + 1) =$$
$$(n + 1)^2 (2(n + 1)^2 - 1).$$

mais aussi, pour $x = n$, $r = 1$:

$$Sn = n^3 + (n + 1)^3 + \ldots + (n + n)^3 =$$
$$3n^2 (n + 1)(5n + 1)/4 \text{ , etc.}$$

Plus simplement encore, pour $x = 1$, $r = 2$, $p = 1$, on obtient le résultat élémentaire connu :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2 .$$

Dans l'enseignement élémentaire on n'abordera évidemment pas les questions à ce niveau, mais le mouvement vers l'abstraction et la généralisation y est déjà bien présent dans l'apprentissage de la résolution d'équations. Ce qui reste en général à un ancien élève de lycée quand on lui demande ce que lui évoque le mot *algèbre* c'est la résolution de l'équation du second degré : (e) $ax^2 + bx + c = 0$ par les formules $x = (- b \pm \sqrt{\Delta})/2a$, où Δ est le discriminant, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Or l'équation (e) a totalement épuré sinon même gommé le contexte pratique de questionnement et de problème pour en faire une écriture abstraite de signes sans lien avec une quelconque réalité sur laquelle l'intuition pourrait se fixer et permettre à la pensée de l'agripper. La langue est de ce point de vue très révélateur dans l'utilisation du mot comprendre où il y a *prendre, saisir* ; le langage familier a d'ailleurs repris ce double sens dans l'expression : *tu saisis ?* Comprendre cette écriture purement abstraite suppose que la pensée puisse mettre quelque chose derrière les lettres : grandeurs, quantités, nombres, à quoi elle puisse se référer pour fonctionner, c'est-à-dire établir des relations.

Imagine-t-on tout ce qui est demandé à un élève comme effort vers l'abstraction jusqu'à ce qu'il ait assimilé totalement le sens et l'utilisation de l'écriture (e) ?

La première difficulté réside dans le passage d'une formulation d'un problème en langage courant et sa traduction algébrique. Le problème suivant, pourtant bien « concret », illustre cette difficulté.

> *Un malade est remboursé par la sécurité sociale à un certain pourcentage. Une mutuelle complémentaire lui rembourse le même pourcentage sur le reste. Il constate qu'au total il a récupéré 99 % de sa dépense. Quel est le pourcentage commun remboursé par la mutuelle et la sécurité sociale ?*

Comment mettre un tel problème en équation ? Quoi prendre pour inconnue, (est-ce un nombre, un rapport, un pourcentage ?) Et à quelles données faut-il la relier, puisqu'aucune indication n'est précisée sur ce que le malade a dépensé ? Comme le remboursement est proportionnel à la somme déboursée par le malade, on peut suggérer de supposer cette dépense égale à 100 €, et de prendre pour inconnue la somme remboursée par la sécurité sociale pour 100 €. Le problème se traduit alors par l'équation

$$x + (100 - x)(x/100) = 99.$$

Tout l'apprentissage de l'algèbre repose maintenant pour l'élève dans la transformation de cette équation particulière pour la ramener à l'équation générale (e), par exemple sous la forme : $x^2 - 200x + 9900 = 0$, et dans l'apprentissage de sa résolution au moyen des fameuses formules évoquées plus haut. Remarquons qu'un bon apprentissage des résolutions de ce genre de problème devrait avoir habitué l'élève à ne pas utiliser d'emblée les formules mais de passer par ce que l'on appelle la forme canonique : $(x-100)^2 = 100$, conduisant directement à $(x-100) = \pm 10$, donc $x = 10$ ou $x = 110$ et les pourcentages qui s'en déduisent.

Mais ces réponses soulèvent une autre question : il y a deux solutions là où l'on en n'attendait qu'une ; laquelle faut-il garder comme solution au problème posé ?

La confrontation de l'exemple pratique avec la forme générale (e) pose encore d'autres questions, elle peut donner le sentiment à l'élève que les règles d'écriture sont aléatoires et ambiguës :

— il y a un symbole d'égalité, qui ne pose pas de problème, et un autre d'opération **+** qu'il comprend bien comme addition. Mais il n'y a aucun symbole de soustraction ni de division comme dans le problème posé,

— les problèmes pratiques que l'on cherche à résoudre au moyen d'équations se ramènent rarement à une égalité à zéro. L'apprentissage de l'algèbre passe nécessairement par ces transformations d'une équation particulière à l'écriture canonique, où il faut abandonner la référence à la situation concrète pour ne plus penser qu'au calcul littéral et ses règles propres,

— le problème pratique peut conduire à une équation où le coefficient b ou c est nul, comme dans l'équation $x^2 + 5x = 0$. Comment gérer dans ce cas les formules avec le discriminant ? Pourquoi faire préférer à l'élève une résolution directe, alors qu'il préfère toujours les formules qui, croit-il, dispensent de l'effort de la réflexion ?

— de même qu'on n'écrit pas les coefficients nuls (sauf le second membre) on n'écrit pas non plus le coefficient 1 alors que l'on pense : $1 \times x^2 + 5x = 0$. En fait, la multiplication est souvent implicite, comme dans $2x$ ou $1x = x$ ou lorsqu'elle est exprimée par la puissance pour désigner la multiplication de$x$ par lui-même.

Il y a donc une double origine des difficultés des élèves : d'une part se familiariser avec les symboles et l'écriture littérale ; de l'autre effectuer des opérations sur des lettres en gardant la signification de ce qu'elles représentent, nombres, quantités ou mesures de grandeurs, sa préoccupation est de retrouver celles-ci sous l'écriture symbolique.

Quelques jalons dans l'élaboration historique de l'algèbre

Il se trouve que les moments décisifs de l'histoire de l'algèbre coïncident avec les étapes de la substitution d'une écriture formelle à une écriture verbale qui au départ ne se distinguait en rien de l'écriture ordinaire et renvoyait à des objets que l'intuition pouvait saisir d'emblée.

Un survol des étapes historiques ayant conduit à la forme épurée (e) permettra de mieux comprendre la pertinence de son écriture, point d'aboutissement d'une lente abstraction allant des objets dénombrés ou des grandeurs mesurées aux quantités calculées, puis des quantités vers la seule considération d'opérations abstraites sur des lettres désignant des nombres, et ultérieurement toute sorte d'autres objets. Cette histoire présente distinctement deux branches qui, d'abord séparées, se rejoignent au 17ème siècle : l'une porte sur le traitement de l'inconnue et l'organisation des méthodes de résolution, son support est l'arithmétique et le calcul numérique ; l'autre concerne la relation entre les inconnues et les données, aboutissant à l'écriture et au calcul littéral ; son support est plutôt d'abord la géométrie avant de devenir l'écriture même des lois naturelles.

Des équations sans algèbre

Le problème 24 du papyrus égyptien Rhind peut se traduire ainsi : *la quantité totale et son septième ajoutés, on obtient 19.* Les Égyptiens résolvent ce genre de problème par une méthode dite de fausse position. Supposons que la réponse soit 7 ; la quantité totale et son septième est dans ce cas 8. Pour trouver 19 au lieu de 8 il suffit de multiplier 7 par 19 et diviser le résultat par 8 pour des raisons simples de proportionnalité que nous écririons : $\frac{x}{7} = \frac{19}{8}$.

Cette méthode s'applique à toutes les équations dont la formulation, aussi complexe soit elle, se ramène à une relation du type $ax = b$. Par exemple le problème 29, également du papyrus Rhind : *Ajoute les 2/3, ajoute le 1/3, retranche les 2/3, il reste 10.* Un élève qui a bien compris la proportionnalité, saurait trouver la réponse $13^1/_2$ en prenant comme fausse position 27 laquelle[5] donne 20 au lieu de 10. Alors qu'il aurait eu beaucoup plus de difficultés à résoudre l'équation correspondante écrite sous forme algébrique :

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x) - \frac{2}{3}[x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x)] = 10$$

L'intérêt de cette méthode est qu'elle ne nécessite aucun appareillage symbolique, son inconvénient est que son champ d'application est limité, ne s'appliquant même pas à toutes les équations du premier degré ! Si celle-ci se présente sous la forme $ax + b = c$ ce qui est plus souvent le cas, l'existence de deux coefficients inconnus, a et b, peut aussi se contourner par une double fausse position[6].

On peut faire l'observation suivante sur toutes ces équations « sans algèbre », c'est que l'inconnue (ou les inconnues) reste implicite, n'est nulle part posée en tant que telle. La résolution proposée de ces problèmes est entièrement arithmétique : on développe des techniques ou des procédures dans lesquelles les calculs se font sur des nombres donnés dans l'énoncé du problème, ou posés par celui qui le résout ; l'inconnue, (ce que l'on cherche) est le point d'aboutissement, mais ne fait l'objet ni d'un symbole, ni d'une quelconque opération ou manipulation. Par ailleurs, l'énoncé du problème reste entièrement statique, on n'y touche pas, on se contente d'effectuer de façon quasi rituelle les calculs proposés par la règle.

Calculer avec un symbole qui représente une inconnue

La première innovation importante, comparable d'une certaine façon à l'invention du zéro, sera la mise en œuvre par Diophante (probablement autour de 250 après J.C.) d'une désignation et d'un calcul explicite sur une inconnue. Matérialiser par un signe (le *zéro*) l'absence justement de tout objet, représentait un saut conceptuel considérable. De même, désigner par un mot spécifique *l'arithme* et représenter par un signe connu ζ, parfaitement identifiable, quelque chose qui est justement inconnu, puis effectuer avec ce mot et ce signe des calculs de

5 Leonard de Pise (13e siècle) donne explicitement la recommandation de choisir le nombre essayé de telle sorte qu'il puisse être divisé entièrement par les dénominateurs de toutes les fractions intervenant dans l'énoncé du problème. (Tropfke, Geschichte der Elementar Mathematik, p.371)

6 Voir dans *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, le chapitre *Recherche inconnue désespérément*, p. 302.

même nature que pour les nombres connus, cela traduit un progrès vers l'efficacité tout à fait déterminant. Certes l'*arithme* n'est pas, en général, l'une des inconnues du problème. Elle est un artifice heuristique, intermédiaire opérationnel pour la découverte des véritables inconnues. Elle ne doit pas occulter trois caractéristiques encore absentes chez Diophante et qui empêchent de qualifier d'algébriques ses méthodes : le regroupement de la diversité infinie des équations en quelques classes très limitées en nombre ; la généralité et l'efficacité démultipliée pour le traitement de ces classes d'équations que permet l'utilisation de lettres à la place des quantités connues ou inconnues ainsi que les symboles d'opérations ; le regroupement des symboles distincts pour les différentes dimensions de l'inconnue en un seul, combiné avec la notation exponentielle.

L'algèbre nommée et reconnue comme discipline explicite

Ainsi avec Al-Khwārizmī (9e siècle), l'algèbre devient une discipline spécifique, susceptible d'une activité clairement identifiée [7], et le signe de cette identification se traduit en Europe au 16e siècle par l'invention d'un mot : les cossistes, ceux qui pratiquent *l'art de la chose cherchée ou inconnue, l'art de la Coss*. C'est dans le cadre de cette activité que les écoles allemandes et italiennes vont développer l'utilisation des symboles mathématiques. Ce n'est pas le lieu, ici, de reprendre cette histoire, largement développée par ailleurs [8]. Insistons seulement sur le fait que tout ce travail reste toujours illustré par des équations particulières : les méthodes de résolution sont bien exposées de façon générale, dans des textes ritualisés à l'aide parfois de poèmes et accompagnées de démonstrations géométriques sur des figures, mais les exemples traités portent toujours sur des données numériques explicites, les calculs effectués au moyen de symboles ne se font pas sur des lettres, mais des nombres chaque fois particularisés. Deux aspects caractérisent cette étape dans le développement du symbolisme algébrique :

1) les divers degrés de l'inconnue sont représentés par des lettres différentes. Par exemple Viète (1540 – 1603) écrira :

   « *Si* $65C - 1QQ$, *aequetur* $1{,}481{,}544$, *sit* $1N57$ » [9]

   là où nous écrivons :

   « si $65x^3 - x^4 = 1.481.544$ *alors* $x = 57$.»

   Dans cette conception, le cube, le carré, ou même le carré-carré (accepté par Viète, mais traité de *contre nature* par Stifel (1487 – 1567)) sont des objets pensés, au moins dans leurs relations mutuelles comme non numériques, des grandeurs hétérogènes.

2) les coefficients sont des nombres qui comptent les objets inconnus, cubes C ou carré-carré QQ, et même les nombres simples comptés N une fois par le chiffre 1, comme le carré-carré, noté $1QQ$. La pensée algébrique telle que nous la concevons aujourd'hui suppose encore une autre transformation radicale : celle de ne plus voir dans le $65x^3$ autre chose que la multiplication du nombre 65 par le nombre x répété trois fois, ou dans $1Q$ la multiplication de 1 par x et encore par x ce qui donne le même résultat que x multiplié par x et dispense ainsi de mettre le coefficient 1. Cette étape sera principalement l'œuvre de Descartes (1596 – 1650), dans son travail d'algébrisation de la géométrie, alors que Viète, comme on va le voir

7 Voir Marc Moyon, *La tradition algébrique arabe*.

8 *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques* p. 306 à 312.

9 Cajori, *A history of mathematical notations*, vol. 1, p.186

ci-dessous, reste prisonnier de la dualité : numérique pour les calculs, géométrique pour la généralité et la validation.

La mise en place d'un calcul littéral

Nous avons déjà indiqué qu'il fallait distinguer deux évolutions séparées vers l'écriture et le calcul littéral, l'une concernant les inconnues et les symboles d'opérations, l'autre les données. Que l'on désigne par un symbole les grandeurs ou les quantités inconnues devient vite une nécessité si l'on veut pouvoir calculer avec ces inconnues. Cette nécessité est moins impérative pour les données, car l'exemple traité avec des coefficients numériques explicites informe sur la manière de procéder avec n'importe quels autres nombres remplaçant les premiers. C'est le traitement de l'exemple canonique d'Al-Khwārizmī : $x^2 + 10x = 39$, comme représentatif de toute les équations de la forme : $x^2 + bx = c$. Il n'en est plus de même lorsqu'on veut énoncer une propriété générale, valable pour tous les nombres. Ainsi lorsque Leonard de Pise dit Fibonacci : veut énoncer une égalité numérique générale telle que :

$$\frac{b+g}{b} \times \frac{b+g}{g} = \frac{b+g}{b} + \frac{b+g}{g}.$$

il écrira : *Que l'on partage le nombre a en deux parties b et g*. ($b + g = a$) *Si la division de a par b donne e et celle de a par g donne d, j'affirme que le produit de d par e est égal à la somme de d et e*.[10]

il y a utilisation de lettres pour signifier des nombres quelconques, mais il n'y a pas encore de signe opératoire sur elles.

Le véritable changement commencera avec Viète qui introduit une double notation symbolique : l'une par voyelles pour les inconnues, l'autre par consonnes pour les données ; et ceci pour effectuer un calcul littéral qu'il appelle *logistique spécieuse* (qui manipule des lettres, renvoyant à des objets abstraits, *des espèces*) opposée à la *logistique numéreuse* qui ne connaît que les nombres (voir ci-dessus). En même temps il distingue deux types de qualités dans les grandeurs, qu'elles soient données ou inconnues : une qualité de nature géométrique, avec des adjectifs comme *planus* ou *solidus* (resp. carré et cube), et une qualité numérique avec d'autres adjectifs tels que *quadratus, cubus*. Ainsi l'équation $ax^2 + bx = c$ devient chez Viète : *B in A quadratum plus D plano in A aequari Z solido*. Rappelons que A est l'inconnue B, C, Z des grandeurs connues, et l'on aura remarqué que Viète respecte un principe d'homogénéité qui l'oblige à faire en sorte que tous les termes de l'équation aient le même degré, ici trois. (en utilisant les exposants que Viète ne connaît pas encore, l'équation s'écrirait : $BA^2 + D^2A = Z^3$).

Ce n'est pas encore une algèbre sur les nombres mais seulement sur les grandeurs, et de ce fait il est essentiel de respecter la dimension géométrique de celles-ci. Si l'on est dans le calcul des grandeurs, cela n'aurait aucun sens d'ajouter des lignes à des surfaces, des surfaces à des solides. Mais à vouloir tout bien distinguer Viète complique à outrance la situation. Il veut garder la distinction (qui est une vraie distinction) entre d'une part les dimensions de la grandeur et, d'autre part, le fait que leur mesure se traduise par des puissances. Cela a pour conséquence fâcheuse que la symbolique de puissance n'est pas opératoire. C'est en identifiant les deux et en cassant la dualité numérique - géométrique, que Descartes libérera d'une façon définitive la pensée algébrique.

Les innovations de Descartes

Descartes se vante de n'avoir jamais lu Viète, comme d'ailleurs il n'a guère lu ses prédécesseurs, ni ses contemporains préférant étu-

10 cité par Tropfke p. 381

dier dans *le grand livre du monde* en voyageant. *Ce qui me réussit beaucoup mieux, ce me semble, que si je ne me fusse jamais éloigné ni de mon pays ni de mes livres*[11]. C'est sans doute à cause de cet esprit très libre que Descartes arrive à réaliser les innovations décisives. Remarquant qu'*il doit y avoir quelque science générale expliquant tout ce qu'on peut chercher touchant l'ordre et la mesure sans application à une matière particulière, et que cette science est appelée (...) mathématique universelle* il cherchera en celle-ci ses *Règles pour la direction de l'esprit*[12]. Ecoutons Descartes dans la jeunesse de sa pensée qui n'a, encore aujourd'hui, rien perdu de sa vigueur :

> Règle IV : *La méthode est nécessaire pour la recherche de la vérité.*
> *Car la méthode, qu'on appelle du nom étranger d'algèbre, n'est pas autre chose, semble-t-il, pourvu toutefois qu'on parvienne à la débarrasser des chiffres nombreux et des figures embrouillées qui la surchargent, afin qu'elle possède désormais cette clarté et cette facilité suprême qui doit se trouver comme nous l'avons dit, dans la vraie mathématique.*

Cette clarté et cette facilité nous seront acquises par le respect de la

> Règle XVI : *Quant aux choses qui n'exigent pas l'attention immédiate de l'esprit, quoiqu'elles soient nécessaires pour la conclusion, il vaut mieux les désigner par des signes très courts plutôt que par des figures complètes : car ainsi la mémoire ne pourra faillir, et la pensée ne sera cependant pas forcée de se partager pour les retenir, tandis qu'elle s'appliquera à en chercher d'autres.*

Et comme exemple, il donne rien moins que la notation exponentielle des différents ordres de grandeurs !

> *ainsi, si j'écris* $2a^3$*, ce sera comme si je disais le double de la grandeur désignée par la lettre a, laquelle contient trois relations.(...). Il faut remarquer encore que, par nombre de relations, il faut entendre les proportions (...) que dans l'algèbre ordinaire on cherche à exprimer par plusieurs dimensions et figures, et dont on nomme la première racine, la seconde carré, la troisième cube, la quatrième bicarré, etc.*

Dans *La Géométrie*[13], l'un des trois essais qui accompagnent le *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences,* Descartes achève la purification des notations algébriques de leur gangue géométrique en surmontant le principe d'homogénéité. Il suffit en effet de se fixer une unité et de remplacer les dimensions manquantes par des puissances de cette unité ; en même temps, ce faisant, on ramène la pensée de toutes les grandeurs, quelle que soit leur dimension, à celle d'une ligne simple ! *Où il est à remarquer que par* a^2 *ou* b^3 *ou semblables, je ne conçoy ordinairement que des lignes toutes simples, encore que pour me servir des noms usités en l'Algèbre, je les nomme des quarrés ou des cubes, etc.*

Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne, se doivent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre, lorsque l'unité n'est point déterminée en la question, comme ici a^3 *en contient autant qu'* abb *ou* b^3 *(...), mais que ce n'est pas de même lorsque l'unité est déterminée, à cause qu'elle peut être sous-entendue partout où il y a trop ou trop peu de dimensions :* et de donner les exemples de a^2b^2 (dimension 4) qu'on divisera une fois par l'unité ; et b (dimension 1) qu'on multipliera deux fois par la même unité. Le coefficient est définitivement passé du statut de nombre dénombrant ou mesurant à celui

11 Descartes *Discours de la Méthode*, Œuvres et Lettres, Ed. La Pléiade, p. 132

12 idem, p.37

13 Descartes *La Géométrie* p. 299

de coefficient multipliant. Mais ayant le même statut que l'inconnue, étant soumis aux mêmes règles de calcul, il doit pouvoir être distingué de celle-ci ; c'est pourquoi, Descartes propose de noter les connus par les premières lettres de l'alphabet a, b, c, etc., et les inconnues par les dernières, x, y, z .

Comme le titre de l'ouvrage de Descartes l'indique sans ambiguïté, ces règles sont avant tout destinées à traiter les problèmes de géométrie.

L'algèbre au secours de la géométrie

La tablette babylonienne AO 17264 du Musée du Louvre, datée de la période dite « kassite » (entre le 16^e et le 12^e siècle av. JC) présente un problème, dans lequel on demande de partager l'aire d'un trapèze en six parts, égales par paires, par des parallèles aux bases. Les données sont en nombres entiers en écriture sexagésimale et il s'agit de trouver les longueurs des divers côtés. Sans entrer dans le détail des calculs conduisant à la solution globale (on en trouvera une étude détaillée dans une analyse faite par Maurice Caveing dans la revue Historia Mathematica[14]), le partage par paires fait intervenir à trois reprises la même succession de calculs énoncés ainsi pour le premier :

> *Carre 3,33 ; le front supérieur, cela fera 12, 36, 9 ; D'autre part, carre 2, 27 ; la deuxième transversale, cela fera 6, 0, 9 ; Additionne 6, 0, 9 ; et 12, 36, 9 ; cela fera : 18, 36, 18 ; Fractionne en deux 18, 36, 18 ; cela fera : 9, 18, 9 ; Extrais la racine, cela fera : 3, 3 ; 3, 3 est la transversale supérieure*[15].

Le scribe n'a pas donné d'explication sur la découverte de cette formule. Elle traduit les opérations que le symbolisme algébrique permet de réduire à la simple expression

$$m = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \ ,$$

si b = AD et c = BC désignent les longueurs des bases d'un trapèze ABCD partagé en deux trapèzes de même aire par une parallèle (PQ) aux bases, de longueur m (figure 2) :

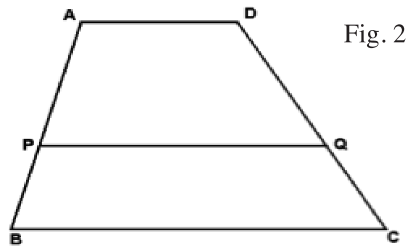


Fig. 2

Démontrons cette formule en utilisant les théorèmes élémentaires de la géométrie tout en nous appuyant sur la notation algébrique.

En désignant par u et v les hauteurs des deux trapèzes égaux en aire :

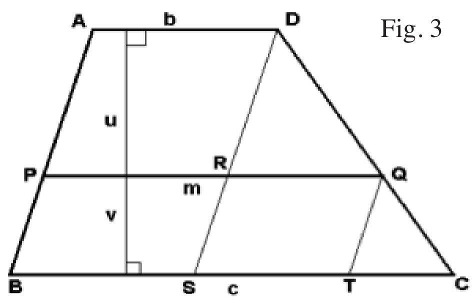


Fig. 3

14 M. Caveing, *La tablette babylonienne AO 17264 du Musée du Louvre et le problème des six frères,* Historia Mathematica 12, (1985), p. 6 – 24, repris dans *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes,* Presses Universitaires de Lille, 1994.

15 Le « front supérieur » est la grande base, le « front inférieur » la petite base, la transversale désigne la parallèle aux bases partageant la partie trapézoïdale en deux parties de même aire. Dans le texte de Caveing le trapèze est placé avec la plus grande base au-dessus de la plus petite, contrairement à ce qui suit.

L'égalité en aire des deux trapèzes se traduit par

$$u.(m + b)/2 = v.(m + c)/2 \ .$$

La similitude des triangles DRQ et QTC, obtenus en traçant les parallèles à (AB) par D et Q donne :

$$u/v = RQ/TC = (m - b)/(c - m) \ .$$

D'où $(m + c)/(m + b) = (m - b)/(c - m)$, ou encore $(m + c).(c - m) = (m + b).(m - b)$, d'où :

$$m = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} \ ,$$

que l'on appelle la moyenne quadratique des longueurs b et c. Le formalisme algébrique est ici particulièrement efficace pour exprimer la généralité d'une figure géométrique là où longtemps les anciennes civilisations étaient obligées de l'expliquer sur un exemple avec des valeurs numériques particulières, comme dans la tablette babylonienne.

La généralité était l'apanage de la géométrie mise en place par les mathématiciens grecs tels qu'Euclide ou Archimède qui cherchaient à résoudre le problème par des constructions purement géométriques plutôt que par des calculs.

Complétons les trapèzes par leurs symétriques par rapport aux milieux respectifs I, J, K de [DC], [DQ] et [QC], de manière à pouvoir travailler sur des parallélogrammes : ABB'A', APFE et PBHG (fig. 4).

Pour déterminer la droite (PQ) il suffit de construire le parallélogramme APFE sachant que son aire est la moitié de celle du parallélogramme ABB'A' donc égale à celle de sa moitié AUVA', où U et V sont les milieux de [AB] et [A'B'] respectivement.

Or (FB') est parallèle à (DC) par le théorème des milieux, donc F se trouve sur la parallèle à (DC) passant par B'. Par ailleurs les parallélogrammes AUVA' et AEFP doivent avoir même aire. Le point F se trouve donc aussi sur l'hyperbole d'asymptotes (AB) et (AA') passant par V. Une telle hyperbole, dont on connaît les asymptotes et un point, se construit simplement point par point de façon suivante (figure 5) :

Soit V le point donné, (OU) et (OW) les asymptotes, U et W étant les projections de V sur les asymptotes. Le choix d'un point N ou Z quelconque sur ces asymptotes permet la construction des parallélogrammes OZXY et ONMP égaux en aire au parallélogramme donné OUVW, par le tracé des parallélogrammes OWSZ qui détermine le point R, et OWTP qui détermine le point R'. Aujourd'hui, avec un logiciel de géométrie dynamique une telle hyperbole s'engendre comme lieu des points X (ou M) sommets des parallélogrammes construits par le procédé ci-dessus lorsque le point Z (ou N) décrit une des droites asymptote.

Revenant au problème posé, la droite (PQ) passe par le point M, intersection de l'hyper-

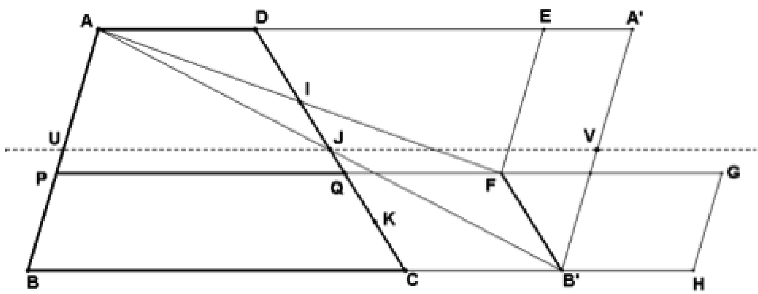


Fig. 4

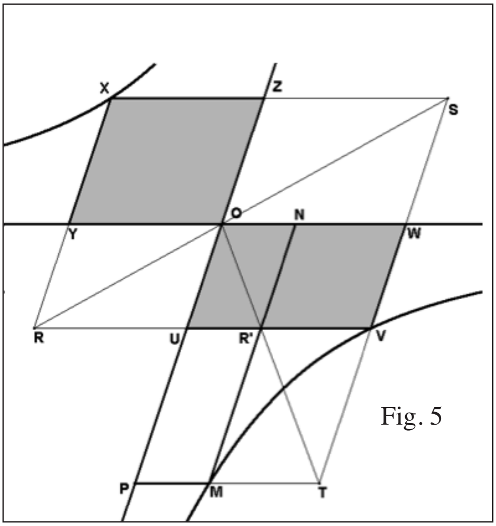


Fig. 5

bole d'asymptotes (AB) et (AA') passant par V, et de la parallèle à (DC) passant par B' (figure 6).

Mais pour un élève ou un étudiant d'aujourd'hui une telle solution s'avère difficile, supposant une pratique de la géométrie qu'il n'a pas. En revanche, par l'introduction d'un repère il peut assez facilement traduire les propriétés géométriques par des relations algébriques et résoudre le problème par le calcul.

Prenons comme repère par exemple (Ax, Ay) porté par (AD) et (AB) (figure 7) ; on désignera les données par AB = a, AD = b, BC = c les inconnues AP = y, PQ = x . On a les coordonnées : $D(b, 0)$; $C(c, a)$; $D'(2b, 0)$; $B'(b+c, a)$. La droite $(D'B')$ a alors pour équation : $a(x-2b)+y(b-c)=0$, le point V aura

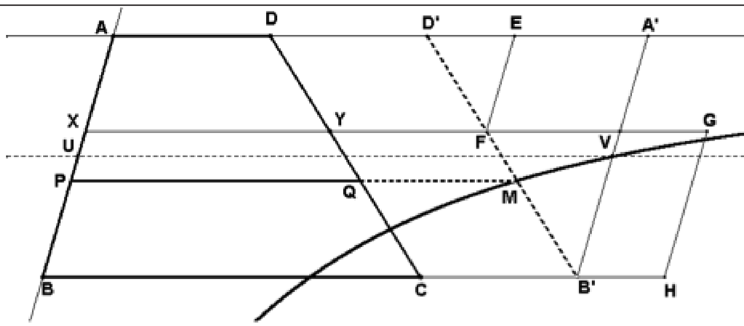


Fig. 6

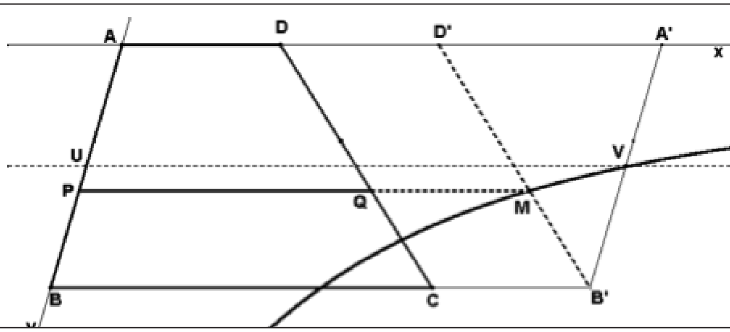


Fig. 7

pour coordonnées $V(a/2, b+c)$, donc l'hyperbole d'asymptotes (Ax, Ay) passant par V a pour équation : $xy = a(b+c)/2$. La droite et l'hyperbole se coupent aux points dont les coordonnées sont solutions du système :

$$a(x-2b) + y(b-c) = 0$$
$$xy = a(b+c)/2 \ .$$

L'abscisse x est alors immédiate par élimination de y qui donne l'équation :

$$x^2 = (b^2 + c^2)/2 \ .$$

Si l'on est dans un contexte géométrique classique, il reste néanmoins à construire effectivement le segment (PQ) en mettant en évidence la longueur $\sqrt{(b^2 + c^2)}$ au moyen du théorème de Pythagore et des propriétés du carré (figure 8). Reportons la longueur b en I perpendiculairement à BC $= c$. Alors IC $= \sqrt{(b^2 + c^2)}$. Construisons le carré ICKJ et son centre O. On a CO $= \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$, que l'on reporte selon le segment PQ cherché.

De l'équation numérique à l'équation d'une courbe

Descartes se servira de ses nouvelles notations principalement pour ramener les problèmes de géométrie à des problèmes d'algèbre, en traduisant les problèmes de construction ou de lieux en termes d'équations. Il y montre fièrement leur efficacité en résolvant sans difficulté les principaux problèmes légués par les géomètres grecs comme la duplication du

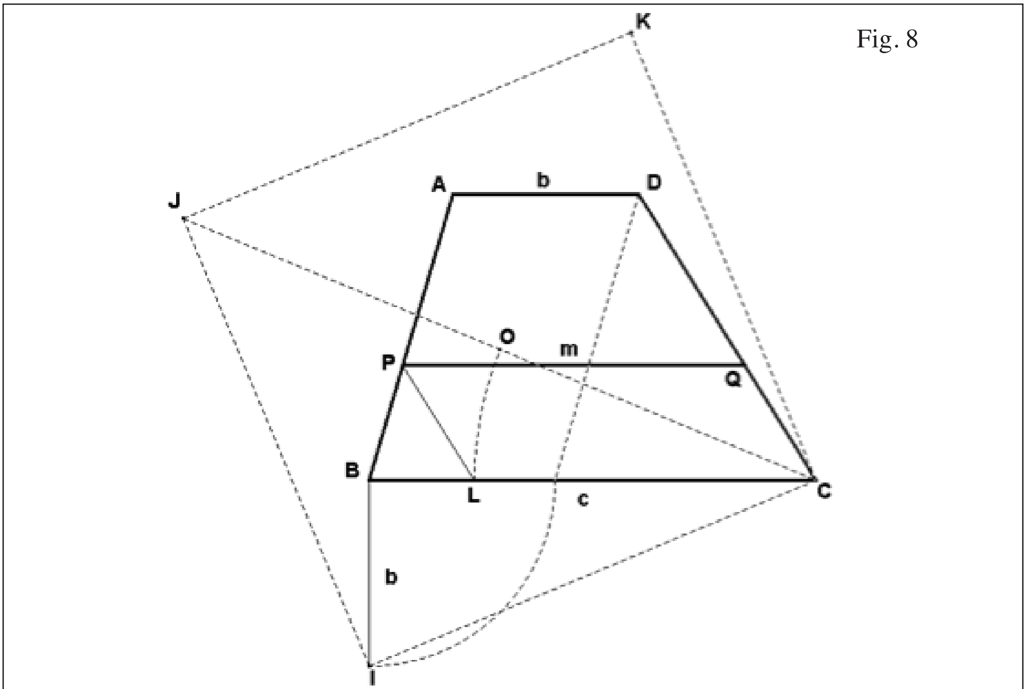


Fig. 8

cube ou la trisection des angles. Descartes élargit le concept d'équation, jusque là simple relation numérique entre données et inconnues, à celui d'équation de courbe, comme relation entre les coordonnées d'un point, caractéristique de cette courbe. Nombre de constructions sont ainsi ramenées à des intersections de courbes, élargissant le domaine des figures constructibles par intersection de droites et cercles (donc avec comme seuls outils la règle et le compas) à d'autres courbes algébriques, en particulier les coniques.

Les problèmes restés sans solution sont repris avec ces nouveaux outils algébriques. L'algèbre s'étant étendue entre temps à un nouveau domaine, celui des nombres complexes, la géométrie s'enrichissait d'une représentation biunivoque des points du plan par ces nombres, ramenant ainsi la géométrie plane à un calcul. Un exemple significatif en est la construction des polygones réguliers pour lequel les Grecs en étaient restés à un nombre de côtés égal à 3, 4, 5, 15 et leur produit par une puissance de 2.

Gauss et “ les équations qui déterminent les sections circulaires”

Gauss (1777-1855) n'avait que 19 ans lorsqu'il découvrit les raisons profondes liant la construction des polygones réguliers à l'équation cyclotomique

$$\frac{X^n - 1}{X - 1} = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1 = 0 \,.$$

Il aboutit à la conclusion « *que pour que la division géométrique du cercle en* N *parties soit possible à la règle et au compas,* N *doit être* 2 *ou une puissance de* 2, *ou bien un nombre premier de la forme* $2^n + 1$ *ou encore le produit d'une puissance de* 2 *par un ou plusieurs nombres premiers différents de cette forme*[16] ». Il découvrait l'existence d'une infinité de nouveaux polygones constructibles à la règle et au compas, mais donnait aussi les moyens de construire les autres polygones réguliers à l'aide de l'intersection de courbes données par leur équation. Le polygone régulier de sept côtés ou heptagone en est un exemple remarquable.

L'équation cyclotomique correspondante est (*c*) :

$$X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = 0 \,,$$

dont nous écrirons les six racines complexes sous la forme : ω^k, avec $1 \le k \le 6$, et où $\omega = \cos(2\pi/7) + i.\sin(2\pi/7)$.

Gauss nous apprend à regrouper ces racines en deux périodes de sommes $p = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $\bar{p} = \omega^6 + \omega^5 + \omega^3$, dont le produit $p\bar{p} = 2$ et la somme $p + \bar{p} = -1$, nous les donnent comme racines de l'équation du second degré : $X^2 + X + 2 = 0$. Et ceci permet la décomposition de (*c*) sous la forme :

$$(X^3 - pX^2 + \bar{p}X - 1)(X^3 - \bar{p}X^2 + pX - 1) = 0 \,.$$

Cette décomposition nous incite à chercher les racines comme intersection du cercle unité avec une conique. En effet le deuxième facteur contenant les racines conjuguées de celles du premier, il suffit d'étudier ce dernier, combiné avec la racine 1, ce qui nous donne l'équation

$$(X - 1)(X^3 - \bar{p}X^2 + pX - 1) =$$
$$X^4 - (\bar{p} + 1)X^3 - X^2 - (p + 1)X + 1 = 0 \,.$$

Or les images des racines de cette équation sont toutes sur le cercle unité, donc caractérisées par la relation $\overline{X} = 1/X$, ce qui incite à écrire l'équation ci-dessus, en mettant X^2 en facteur, sous la forme :

$$X^2 + \frac{1}{X^2} - (\bar{p} + 1)X - (p + 1)\frac{1}{X} - 1 = 0 \,,$$

16 Gauss, *Recherches arithmétiques*, p. 489

qui, transcrite en remplaçant X par $(x + iy)$ et p par sa valeur $(-1 + i\sqrt{7})/2$ nous donne l'équation d'une hyperbole équilatère à laquelle appartiennent les racines :

$$2x^2 - 2y^2 - x + y\sqrt{7} - 1 = 0$$

ou

$$(x - \frac{1}{4})^2 - (y - \frac{\sqrt{7}}{4})^2 = \frac{1}{8}\ .$$

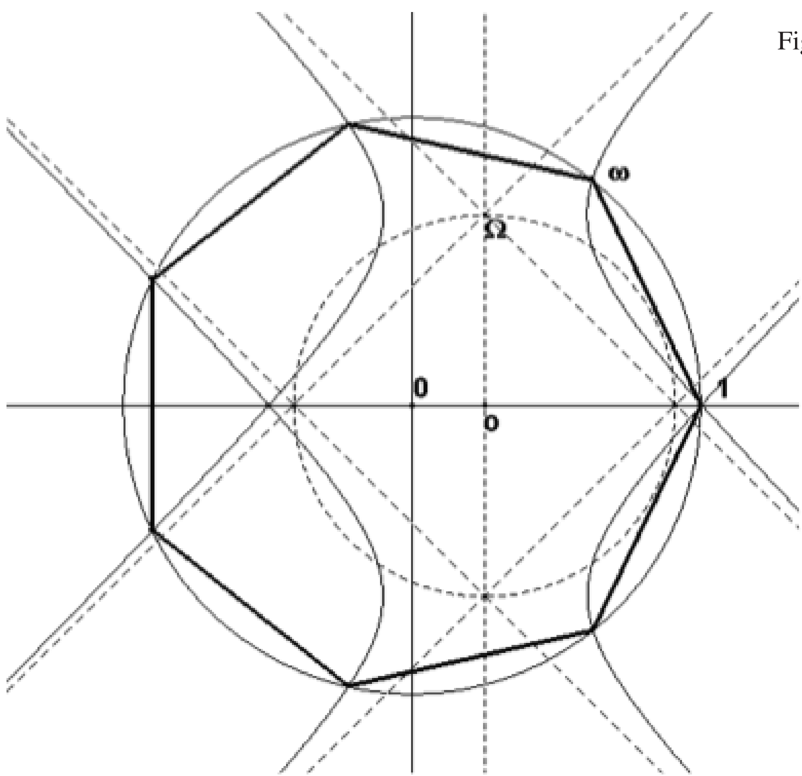
Le centre $\Omega\,(\frac{1}{4}\ ,\frac{\sqrt{7}}{4})$ de l'hyperbole peut se construire par l'intersection du cercle de centre $(1, 0)$ passant par l'origine O et de la droite d'équation $x = 1/4$.

Nous avons ainsi la construction de l'heptagone régulier inscrit dans le cercle unité au moyen de l'intersection de ce cercle par une hyperbole équilatère et sa symétrique par rapport à l'axe des abscisses (Fig. 9).

L'équation comme expression d'une loi naturelle, l'algèbre comme langage de la science

Les règles et les notations cartésiennes se répandent rapidement dans toute l'Europe, diffusées d'abord par le Père Mersenne (1588 – 1648) puis utilisée par Ch. Huygens (1629 –

Fig. 9



1695) aux Pays-Bas, par Wallis (1616 – 1703) en Angleterre. Leur succès n'aurait peut-être pas été aussi fulgurant si elles n'étaient venues fort opportunément au secours de l'autre volet de la science émergente du 17e siècle : la physique, appelée encore à cette époque *philosophie naturelle*.

Galileo Galilée (1564 – 1642) avait proposé de lire *cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers. Mais on ne peut le comprendre si on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à en connaître les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot. Sans eux c'est une errance vaine dans un labyrinthe obscur* [17]. On ne saurait mieux décrire le changement intervenu par rapport à la conception aristotélicienne de la physique : Galilée détruit la vieille cloison hermétique qui séparait le monde physique de celui des mathématiques ; mais à nouvelle philosophie de la nature, nouvelles mathématiques.

L'outil mathématique dont dispose Galilée et qu'il croit encore suffisant est celui de la géométrie d'Euclide, « ses triangles, ses cercles et autres figures », alors que pour donner les *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* — titre du plus célèbre ouvrage de Newton (1643 -1727)) — il faut bien autre chose. Le savant qui essaye de *lire le livre de la nature* y découvre des lois, c'est-à-dire des relations entre grandeurs variables**.** La géométrie des Anciens, qui avait renvoyé au domaine de la physique toute étude des changements, donc de la variabilité, était totalement inadaptée à l'expression de lois de la nature. Entièrement statique, cette géométrie ne pouvait répondre aux problèmes posés par la mathématisation de la physique qu'en changeant son point de vue sur les courbes : celles-ci doivent passer du statut de lieu à celui de trajectoire. Alors la rencontre de ce changement de statut avec l'algébrisation des courbes réalisée par Descartes pourra engendrer ce concept aux potentialités inouïes : la fonction d'une ou plusieurs variables. Remarquez la pérennité du mot variable utilisé encore aujourd'hui, qui garde bien la trace de cette irruption du changement dans la mathématique. Ainsi la relation entre grandeurs variables pourra s'exprimer grâce à l'outil algébrique au moyen de la fonction, et se représenter géométriquement au moyen de la courbe.

On ne se rend pas compte de la difficulté qu'il y avait à énoncer une loi physique sans l'outil algébrique et fonctionnel ; voici en quels termes Galilée exprime par exemple la loi de la chute des corps soumis à la pesanteur, loi qui se traduit si simplement aujourd'hui par l'équation : $e = 1/2\,\gamma\, t^2$.

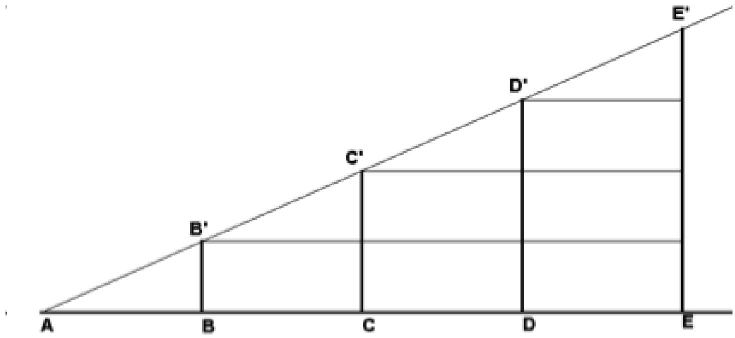
> *On a coutume de mentionner quelques-unes des plus faciles à observer* (parmi les propriétés du mouvement), *comme par exemple, le fait que le mouvement naturel des corps pesants se trouvant en état de chute subit une accélération constante. Mais personne n'a encore fait connaître la quantité qui régit cette accélération. Car à ma connaissance, personne n'a démontré que les distances parcourues en temps égal par un corps auparavant immobile et qui s'est mis à tomber, se comportent comme la progression des nombres impairs en commençant par un* [18].

On peut s'interroger sur la raison de la présence de cette *progression des nombres*

17 Galilée, *Il Saggiatore,* 1623, Le Opere VI p. 232, Trad. Fr. Ch .Chauviré, Les Belles Lettres, 1979, p. 141.

18 Galilée., *Entretiens et démonstrations mathématiques à propos de deux sciences nouvelles*, Troisième journée, Le opere de G. Galilei, edizione nationale, Florence, 1890-1909. Voir aussi *Discours concernant deux sciences nouvelles,* présentation, traduction et notes de M. Clavelin, A. Colin, 1970, p 125.

Fig. 10



impairs. Galilée ne dispose pas de la notion de fonction. Pour penser la progression uniforme de la vitesse, il est obligé de discrétiser la situation et de passer par la géométrie. Sur la figure 10 les segments AB, AC, AD, AE, etc. représentent les temps écoulés aux instants $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$, etc. Les segments BB', CC', DD', EE', etc. représentent les vitesses acquises aux instants $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$, etc., les aires des triangles ABB', ACC', ADD', AEE', etc. représentent les distances parcourues aux instants $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$, etc.

On peut raisonner de deux façons :

a) Lorsque le temps écoulé est double, triple, quadruple, etc., il en est de même de la vitesse. Par conséquent les aires que l'on rajoute sont égales à trois fois, cinq fois, sept fois, etc., celle de l'aire du triangle rectangle initial, D'où la *progression des nombres impairs en commençant par un*, du texte de Galilée.

b) Mais on peut aussi considérer ce que devient l'aire du triangle ABB' : celui-ci devient ACC' dont l'aire est celle de ABB' multipliée par 4, pour ADD', elle est multipliée par 9, pour AEE' par 16 etc.

loi que Galilée énonce ainsi : *Si un mobile partant du repos, tombe avec un mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus, en des temps quelconques par ce même mobile, sont entre eux en raison double des temps, c'est-à-dire comme les carrés de ces mêmes temps*[19].

Cet exemple illustre combien l'algèbre va simplifier l'écriture en une courte formule de la relation entre différentes variables exprimant une loi naturelle. Jusqu'à présent l'équation reliait des grandeurs données à des grandeurs recherchées mais inconnues. En élargissant le point de vue aux sciences de la nature, l'équation devient une loi en vertu de laquelle deux ou plusieurs quantités ou grandeurs sont liées entre-elles et changent de façon corrélée, tandis que d'autres conservent des valeurs fixes. Autrement dit, l'opposition des quantités constantes et des quantités variables remplace la distinction des quantités connues et des quantités inconnues. D'où cette foule d'équations qui vont jalonner l'histoire de la physique, équation des cordes vibrantes, équation de la chaleur, équations de Maxwell, équation de Schrödinger, etc. La plupart de ces équations

19 idem, p.140

relient en fait des fonctions dont l'étude va conduire vers une nouvelle branche extrêmement florissante des mathématiques, l'analyse. Le statut d'inconnue lui même va changer, et concerner non plus seulement les nombres mais aussi les fonctions, par l'intermédiaire de toutes sortes d'équations, différentielles, intégrales, fonctionnelles.

Conclusion

L'algèbre a ainsi largement débordé le domaine propre des mathématiques pour devenir un langage pour l'écriture de la science. Mais elle s'est aussi considérablement modifiée à l'intérieur même des mathématiques, au point que ce que l'on appelle algèbre aujourd'hui a peu de rapport avec l'algèbre tel qu'on la comprenait à la fin du 18ème siècle. La partie mathématique de *L'Encyclopédie Méthodique* publiée au début des années 1780 a encore des difficultés à distinguer ce qui ressort de l'algèbre et ce qui concerne l'analyse :

«Algèbre : est la science du calcul des grandeurs considérées généralement. On a choisi, pour représenter les grandeurs ou les quantités, les lettres de l'alphabet, comme étant d'un usage plus facile et plus commode qu'aucune autre sorte de signes.»

«Analyse est proprement la méthode de résoudre les problèmes mathématiques, en les réduisant à des équations.

L'analyse, pour résoudre tous les problèmes, emploie le secours de l'algèbre, ou le calcul des grandeurs en général : aussi ces deux mots : Analyse, Algèbre, sont souvent regardés comme synonymes.(…)

(D'où) la Méthode analytique, en Géométrie (qui) est la méthode de résoudre les problèmes, et de démontrer les théorèmes de Géométrie en y employant l'analyse ou l'algèbre.»[20]

Le développement des mathématiques au 19e siècle va orienter l'algèbre vers la théorie des groupes puis des structures algébriques en général : c'est la définition comme *science des structures algébriques indépendamment de leurs réalisations concrètes,* donnée aujourd'hui par l'Encyclopedia Universalis. De sorte que l'algèbre, non seulement structure aujourd'hui l'ensemble des mathématiques mais se trouve aussi à la base de la plupart des modèles tant physiques que chimiques qui décrivent la matière et l'espace. Les équations sont devenues à la fois le moteur de recherche et le langage universel de la science.

20 Encyclopédie Méthodique, p 43 et 49.

Bibliographie

Arbogast, L. A. *Du calcul des dérivations,* Berger Levrault, Strasbourg, 1800 (An VIII).

Aristote, *La Métaphysiqu*e, Tome I, traduction et commentaire par J. Tricot, J. Vrin, 1991.

Cajori, F. *A history of mathematical notations,* 2 vol., Open Court, Chicago, 1928 – 1929.

Caveing, M. *La tablette babylonienne AO 17264 du Musée du Louvre et le problème des six frères,* Historia Mathematica 12, (1985), p. 6 – 24, repris dans *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes,* Presses Universitaires de Lille, 1994.

CII (Commission inter IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques, *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques,* Ellipses, 1993.

Conway J. H. et Guy R. K., *The book of numbers*, Springer, 1996

Descartes, R. Œuvres et Lettres, Ed. La Pléiade, 1963

Encyclopédie Méthodique, Mathématiques, réédition en trois volumes par ACL Éditions, 1987.

Galilée, G. *Il Saggiatore,* 1623, Le Opere VI p. 232, Trad. Fr. Ch .Chauviré, Les Belles Lettres, 1979.

Galilée., G. *Entretiens et démonstrations mathématiques à propos de deux sciences nouvelles*, Le opere de G. Galilei, edizione nationale, Florence, 1890-1909. Voir aussi *Discours concernant deux sciences nouvelles,* présentation, traduction et notes de M. Clavelin, A. Colin, 1970

Gauss C.F., *Recherches arithmétiques* parues sous le titre *Disquisitiones Arithmeticæ,* (Fleischer-Lipsiæ 1801) ; traduites par A.C.M. Poullet- Delisle, Courcier Paris 1807, rééditées par A. Blanchard 1979.

Moyon M. *La tradition algébrique arabe du traité d'Al-Khwârizmî au Moyen Âge latin et la place de la géométrie,* in Histoire et enseignement des mathématiques*, Rigueurs, erreurs, raisonnements,* Publication INRP, Clermont Ferrand (IREM), 2007.

Rashed, R. and Djebbar, A., *L'œuvre Algébrique d'al-Khayyām*. Alep : Imprimerie de l'Université d'Alep, 1981.

Tropfke, J. Geschichte der Elementar Mathematik, Band 1, Arithmetik und Algebra, De Gruyter, Berlin, 4. Auflag, 1980.

Woepke F., *L'algèbre d'Omar Alkayyami publiée, traduite et accompagnée d'extraits du manuscrit inédits,* B. Duprat, Paris 1851, p. 5. Il existe une version en ligne : http://catalog.hathitrust.org/Record/000167334