QUAND LA LONGUEUR DE PLANCK CONFIRME L'INTUITION DE NEWTON

Pascal SERMAN

Zénon d'Élée, avec son célèbre premier paradoxe, démontre-t-il l'impossibilité du mouvement ou démontre-t-il que la conception d'une grandeur divisible à l'infini ne permet pas de décrire une action aussi banale que le mouvement ? Newton, avec ses grandeurs évanouissantes, fonde-t-il le calcul infinitésimal sur une intuition dénuée de tout fondement ou anticipe-t-il sur des découvertes à venir de la physique ? Ces deux interrogations ne sont-elles pas deux formulations d'une question qui préoccupe l'humanité depuis la plus haute antiquité, celle du rapport entre continu et discontinu ?

Dans sa 11e conférence, Havemann [3] notait en 1964 :

> l'évolution moderne des mathématiques place au tout premier plan les problèmes de la continuité et de la discontinuité. Il ne s'agit pas seulement de l'ancienne opposition entre géométrie et algèbre ; du contexte homogène et topologique de la géométrie, où aucun dénombrement n'entre en jeu, et de l'algèbre, où tout est ramené aux chiffres, aux quantités, aux ensembles et aux discontinuités.(…). Les questions les plus profondes dont traitent les mathématiques modernes, comme celle du fondement théorique du calcul des probabilités, débouchent sur les problèmes de la dialectique de la continuité et de la discontinuité..

Dans une première partie, nous nous intéressons à un paradoxe célèbre de Zénon d'Élée et en proposons une résolution dans le cadre d'un modèle proposé par la mécanique quantique. Dans une deuxième partie, nous nous penchons sur l'intuition de Newton (l'existence de grandeurs évanouissantes). Dans une troisième partie, nous nous intéressons à l'analyse non-standard. Dans une quatrième partie, nous rêvons à une réconciliation entre mathématique et physique, en proposant une approche de l'infiniment petit inspirée par la physique quantique.

1. — Le premier paradoxe de Zénon : la dichotomie

Aristote, cité dans Dumont [1], écrit dans sa Physique :

> Les arguments de Zénon contre le mouvement sont au nombre de quatre ; ils causent beaucoup de sou-

cis à ceux qui veulent les résoudre. Le premier argument porte sur l'inexistence du « se mouvoir », compte tenu du fait que le mobile doit parvenir à la moitié avant d'atteindre le terme de son trajet.

Zénon développe ensuite l'idée suivant laquelle, parvenu à la moitié du trajet, le mobile doit parcourir la moitié du chemin qui reste, puis encore la moitié de ce qui reste, et ainsi de suite dans un processus sans fin qui, s'il rapproche constamment le mobile du but, lui interdit de l'atteindre. Zénon prétend-il nier la possibilité du mouvement ou cherche-t-il à prouver que la conception d'un grandeur divisible à l'infini ne permet pas de décrire le mouvement ? Peu importe au demeurant, car ce paradoxe indique une difficulté réelle. Procédé mathématique qui consiste à diviser une quantité en deux parties égales, puis à diviser l'une des deux parties obtenues en deux parties égales, et ainsi de suite sans qu'aucune borne n'impose a priori l'arrêt de ce processus, la dichotomie tombe en défaut devant la description d'un processus aussi courant que le déplacement d'un point à un autre.

Aristote, toujours selon Dumont [1], réfute le paradoxe de la manière suivante :

C'est pourquoi l'argument de Zénon admet une prémisse fausse : qu'il n'est pas possible que les grandeurs illimitées soient chacune parcourue ou touchée une par une par les grandeurs illimitées en un temps limité. En effet, illimité, rapporté à la longueur et au temps, se dit en deux sens, de même que rapporté, plus généralement, à tout ce qui est continu : car on peut considérer soit l'infini selon la division, soit l'infini selon les extrémités. Alors qu'il n'est pas possible qu'une chose entre en contact dans un temps limité avec des grandeurs illimitées en quantité, cela est possible si ces grandeurs sont illimitées en division. En effet, du point de vue de la divisibilité, le temps lui-même est illimité. Il en résulte que c'est dans un temps illimité, et non pas dans un temps limité, que s'effectue le parcours de l'illimité et que le contact avec les grandeurs illimitées se fait par des grandeurs illimitées, et non pas par des grandeurs limitées.

Nous ne cacherons pas au lecteur que cette réfutation-là ne nous convainc pas : si la grandeur est divisible à l'infini, alors le continu est continu, un point, c'est tout ! Recherchant à comprendre le fond de la question, nous nous sommes tournés vers un texte fondateur : les Éléments d'Euclide.

Aux origines du paradoxe,
la définition du point selon Euclide

Le Livre I des Éléments [2] s'ouvre sur une première définition, celle du point :

1. *Un point*[1] *est ce dont il n'y a aucune partie.*

Vitrac, le traducteur, commente immédiatement

La première définition des *Éléments* est négative. *Il était difficile de faire autrement ; définir le point à partir de la ligne aurait été une faute logique, car il lui est logiquement antérieur*[2]. Le terme primitif qui sous-tend implicitement ces premières définitions, la grandeur, est habilement évoqué ici : selon Aristote, la quantité est ce qui est divisible, et la grandeur est ce qui est divisible en parties continues ; le point quant à lui est la non-grandeur, le « sans-partie ».

Cette définition a pour conséquence immédiate la possibilité de diviser une longueur, si petite soit-elle, en deux parties égales, et ce,

1 (note du traducteur, Vitrac) Le mot « point » est σημειον (« signe »), terminologie classique des géomètres à partir d'Apollonius et d'Euclide. Auparavant le terme utilisé était στιγμη (« marque du stylet ») avec une connotation évidemment plus « concrète » ; Aristote (…) utilise les deux mots concurremment.

2 (note de Vitrac) La définition pythagoricienne du point : « une unité qui a une position » (…) est critiquable si l'on estime que point et unité appartiennent à des registres différents (…) et relèvent de sciences différentes (la géométrie et l'arithmétique Le débat sur la définition du point était assez ancien, puisque, selon Aristote, Platon avait combattu cette notion comme étant « fiction » géométrique (…). Lui-même critique les définitions proposées par les Platoniciens et propose comme définition « ce qui est absolument indivisible, mais avec position » (...).

en répétant le processus autant de fois que l'on souhaite, c'est-à-dire indéfiniment. Dit autrement, la définition du point par Euclide justifie, *a posteriori*, la divisibilité à l'infini, qui elle-même avait conduit Zénon à formuler son paradoxe. Dans ce qui suit, nous envisageons une résolution du paradoxe appuyée sur un résultat proposé par les physiciens dans le modèle standard de la mécanique quantique : la longueur de Planck.

La mécanique quantique au secours de Zénon ?

Au début du mois de juillet 2012, les chercheurs scientifiques du CERN pensent avoir mis en évidence de manière expérimentale l'existence du boson de Higgs, achevant ainsi la description de ce que les physiciens appellent le modèle standard de la physique. Sous réserve, bien entendu, des indispensables vérifications expérimentales, le modèle standard se trouverait ainsi confirmé comme rendant compte de tous les faits expérimentaux actuellement connus au sujet de trois des quatre forces fondamentales qui régissent le comportement des particules élémentaires constituant l'Univers. Dans la présentation au public de ce modèle par les physiciens eux-mêmes, sur le site du CERN [10], on peut lire (ce qui est en italique est souligné par nous) :

> Le modèle standard comprend les forces électromagnétique, forte et faible ainsi que leur particule porteuse correspondante et explique de façon très satisfaisante comment ces forces agissent sur toutes les particules de matière. Cependant, *bien que la gravité soit la force qui nous est la plus familière, elle ne fait pas partie du modèle standard.*(...) Mais, heureusement pour la physique des particules, *lorsque l'on se situe à l'échelle minuscule des particules, l'effet de la gravité est négligeable.* C'est seulement en présence d'amas de matière importants — comme en nous-mêmes ou dans les planètes — que l'effet de la gravité prédomine. C'est pourquoi le modèle standard fonctionne encore bien, malgré le fait qu'il exclue l'une des forces fondamentales.

Les physiciens nous proposent donc un modèle qui, selon eux, fonctionne correctement “à l'échelle minuscule des particules”. C'est pourquoi nous limiterons notre réflexion à l'infiniment petit.

La longueur de Planck ou l'infiniment petit standard[3]

Dans le modèle standard, il existe dans la nature une longueur en-deçà de laquelle la notion de longueur mesurable perd toute signification ; cette longueur, dite *longueur de Planck*, est une constante de la nature ; ainsi, de même qu'il y a un *quantum* d'énergie, il existe un *quantum* de longueur[4]. Ce quantum de longueur mesure environ $1{,}616\,252 \times 10^{-35}$ m. Raisonnant dans le cadre du modèle standard, utilisant l'hypothèse du quantum de longueur, nous proposons une première résolution du paradoxe :

> Le mobile poursuit son mouvement aussi longtemps que la distance qu'il lui reste à parcourir excède la distance de Planck ; dès que cette condition n'est plus remplie, le mobile atteint son but.

Une telle explication, ne nécessitant aucun calcul, ne résout-elle pas le paradoxe de façon élégante ? Une autre résolution, plus formalisée, ne consiste-t-elle pas, prenant Zenon au mot, à dénombrer les étapes du parcours ?

Considérons par exemple l'expérience de pensée décrivant le mouvement d'un mobile sur une distance de 1m. La longueur de Planck mesure approximativement $1{,}616\,252 \times 10^{-35}$ m. Pour simplifier les calculs, nous l'arrondirons à $1{,}6 \times 10^{-35}$ m. Soit donc un mobile parcourant une distance de 1m, distance clairement supérieure à la longueur de Planck. Nous allons répéter l'algorithme de la division dichotomique, tant que la distance restant à parcourir excèdera la longueur de Planck, et numéroter les étapes.

3 Standard au sens de la physique quantique

4 Il existe aussi d'autres *unités de Planck*, notamment un *temps de Planck*, autrement dit un *quantum* de temps, que nous laissons de côté dans cet article

— Le mobile parcourt d'abord 1/2 m (étape 1) ; il lui reste alors à parcourir 1/2 m ;
— il parcourt ensuite $1/2^2$ m(étape 2) ; il lui reste encore à parcourir $1/2^2$ m;
— il parcourt ensuite $1/2^3$ m(étape 3) ; il lui reste encore à parcourir $1/2^3$ m ;
— et ainsi de suite, tant que la distance à parcourir $1/2^n$ m excède $1{,}6 \times 10^{-35}$ m ;
— parvenu à l'étape n, il lui reste à parcourir $1/2^n$ m ;
— tant que $1/2^n$ reste au-dessus de $1{,}6{\times}10^{-35}$, le mobile poursuit son mouvement ;
— dès que $1/2^n$ passe sous la « barre » *naturelle* des $1{,}6 \times 10^{-35}$, le mobile a atteint son but.
— Cela se produit lorsque $1/2^n \leq 1{,}6{\times}10^{35}$ c'est-à-dire $2^n \geq 1/(1{,}6{\times}10^{-35})$, ou encore $2^n \geq 6{,}25{\times}10^{34}$.

Il n'est pas nécessaire de recourir aux logarithmes [5] pour résoudre cette inéquation, sa résolution est assez rapide à l'aide d'une calculatrice et de la touche puissance : on trouve $2^{115} \approx 4{,}15{\times}10^{34}$ et $2^{116} \approx 8{,}31{\times}10^{34}$, ce qui permet d'affirmer qu'à l'étape 115, le mobile n'a pas encore atteint son but, et qu'avant l'étape 116 il l'a atteint.

L'expérience de pensée n'est-elle pas concluante ? Un résultat spectaculaire de la physique moderne, la longueur de Planck, n'a-t-il pas permis de décrire le mouvement en le décomposant en étapes ? Cette expérience donne-t-elle tort à Zénon ? Oui, si l'on considère que Zénon entendait prouver l'impossibilité du mouvement. Non, si l'on considère que Zénon entend prouver que la divisibilité à l'infini de l'espace ne permet pas de décrire la réalité du mouvement.

En tout état de cause, cette expérience permet de préciser des bornes physiques à la possibilité de divisibilité des longueurs, à condition, rappelons-le, de raisonner dans le cadre du modèle standard proposé par la physique. Nous retiendrons qu'un résultat de la physique quantique permet de résoudre le premier paradoxe de Zénon.

2. — La mécanique quantique et l'intuition de Newton

Newton, les fluxions et les Principia

Newton [6] s'intéresse à des problèmes de vitesse, de maxima et de minima, de tangentes, de courbure, de quadrature, de longueur… Il considère des accroissements très petits et, dans le cours de ses calculs, tantôt néglige ou rejette certains termes très, très petits, tantôt signale que ces termes s'évanouissent. Le moins qu'on puisse dire est que Newton laisse dans l'obscurité le bien fondé de cette négligence, de ce rejet ou de cet évanouissement.

Newton [7] s'efforce d'être plus précis. Dans ses raisonnements et dans ses calculs, il recourt à une méthode dite « des premières et dernières raisons », clairement exposée. Cela dit, Newton [7] conclut une scholie [6] en comparant l'infiniment petit à l'infiniment grand :

> On comprendra ceci plus clairement dans les quantités infiniment grandes. Si deux quantités, dont la différence est donnée, augmentent à l'infini, leur dernière raison sera donnée et sera certainement la raison d'égalité, cependant les dernières, ou les plus grandes quantités auxquelles répond cette raison, ne seront point des quantités données. Donc, lorsque je me servirai dans la suite, pour être plus clair, des mots de quantités évanouissantes, de quantités dernières, de quantités très petites, il ne faut pas entendre par ces expressions des quantités d'une grandeur déterminée, mais toujours de quantités qui diminuent à l'infini.

5 A l'aide des logarithmes, la résolution, certes plus rapide, est cependant plus abstraite.

6 Scholie (ou scolie) : En mathématiques, remarque sur une proposition précédente.

Substituer l'infiniment grand à l'infiniment petit, cela ne revient-il pas à déplacer le problème sans répondre à la question ? En tout cas, cela ne rend pas l'explication convaincante !

La longueur de Planck et la grandeur évanouissante de Newton

Pour ne pas alourdir la lecture de ce qui suit, nous assimilerons les grandeurs ou quantités à des longueurs, aires ou volumes, ce qui permet de ramener l'infiniment petit à la longueur de Planck. Raisonnant dans le cadre du modèle standard et de son quantum de longueur (i.e. la longueur de Planck), nous réécririons la scholie précédente en remplaçant « *à l'infini* » par « *jusqu'à ce que leur grandeur n'excède plus, dans aucune dimension, la longueur de Planck* ». La conclusion précédente deviendrait alors la suivante (entre crochets, notre formulation) :

> lorsque je me servirai dans la suite, pour être plus clair, des mots de *quantités évanouissantes*, de *quantités dernières*, de *quantités très petites*, il ne faut pas entendre par ces expressions des quantités d'une grandeur déterminée, mais toujours de quantités qui diminuent [*jusqu'à ce que leur grandeur n'excède plus, dans aucune dimension, la longueur de Planck*].

Ainsi, l'*évanouissement* de la grandeur ne serait rien d'autre que sa diminution en-deçà de la longueur de Planck. Ainsi, dans le cas particulier de la longueur, l'évanouissement signifierait tour autre chose que la disparition pure et simple dans un néant indéterminé ; comment ne pas songer à l'affirmation de Hegel [4], selon laquelle « le néant d'un quelque chose quelconque est aussi un néant déterminé » : le *néant* d'une longueur ne serait autre que la longueur de Planck.

Préfaçant sa traduction de Newton [6], Buffon écrit que Newton, après avoir hésité un moment, s'était opposé à toute publication de son vivant, de peur de ne pas être compris. Il est vrai que la grandeur évanouissante a un défaut majeur, celui de ne pas être définie (pour paraphraser Marx, « (elle) existe d'abord et est expliqué(e) ensuite »). Pourtant, dans le cadre du modèle standard, Newton [6] ne deviendrait-il pas un ouvrage rigoureux, à la condition d'y ajouter un préambule définissant l'infiniment petit de la manière proposée plus haut ? Avant de présenter au lecteur une approche de l'infiniment petit mathématique suggérée par les considérations précédentes, nous ne pouvons pas ignorer l'analyse non standard, à laquelle nous consacrons la troisième partie du présent article.

3. — L'analyse non-standard

L'analyse non-standard (ANS), aussi bien telle que fondée par Robinson [9], que dans la version « moins riche » imaginée par Nelson [8], redonne droit de cité à l'infiniment petit [7] dans les traités de mathématique. En permettant aux mathématiciens de se familiariser avec la présence d'infiniment petits, non seulement dans le cours des calculs, mais aussi dans la formulation de certains des énoncés, l'analyse non standard a constitué, pensons-nous, une authentique révolution dans la pratique mathématique. Robinsonnienne ou nelsonienne, l'ANS ne constitue-t-elle pas une théorie de l'infiniment petit satisfaisante ? Sans entrer dans le détail, ce qui nous entraînerait fort loin de l'objet du présent article, remarquons simplement que l'ANS reste marquée par l'existence d'objets que nul ne pourra jamais percevoir.

Considérons par exemple la théorie de Nelson (on en trouve une présentation simplifiée assez abordable dans Lobry [5]). Nelson bâtit sa théorie en affirmant l'existence d'un entier non standard. Une fois

7 Ainsi qu'à l'infiniment grand, mais, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut, nous consacrons le présent article à l'infiniment petit.

admis l'existence de cet entier-là, Nelson démontre qu'il est supérieur à tout entier naïf, le qualifie d'infiniment grand et l'inverse, obtenant ainsi un infiniment petit [8].

Une première remarque est que cet entier non standard n'a rien d'*intuitif* : il ne correspond à rien de *perceptible* dans le monde réel, même en s'appuyant sur les résultats de la physique. Dit autrement, l'existence de cet entier non standard est purement *spéculative*. Ce qui n'enlève rien à la fécondité de la théorie de Nelson.

Certains mathématiciens proposent de contourner la difficulté en considérant un entier tellement grand qu'il ne représente rien dans le monde réel, par exemple $10^{1\,000}$ (nombre cardinal supérieur au nombre de particules de l'univers, estiment les physiciens). Cette proposition, appuyée sur un résultat de la physique moderne, à savoir l'estimation du nombre total de particules de l'univers, encourt cependant un questionnement : pourquoi ce choix de $10^{1\,000}$? Pourquoi ne pas choisir $10^{1\,000}+1$ ou $10^{1\,001}$, nombres qui, eux aussi, majorent ce nombre de particules ? Ensuite, $10^{1\,000} - 1$ ou $10^{1\,000} - 2$ ou $10^{1\,000} - 3$ ... ne sont-ils pas d'autres candidats *plausibles* au statut d'infiniment grand, en tant que majorants du nombre de particules de l'univers : jusqu'où pouvons-nous poursuivre cette *décrémentation* avant de *rencontrer* un nombre entier ayant une signification concrète dans l'Univers ? Cette manière d'aborder la question n'est-elle pas, elle aussi, quelque peu spéculative ?

Enfin, en analyse non-standard, il est encore possible de diviser une quantité en deux parties égales, et de répéter cette opération indéfiniment, sans qu'aucune borne ne s'oppose à la poursuite de ces divisons successives. De ce fait, l'ANS ne s'interdit-elle pas de rendre compte en termes les plus simples qu'il soit possible de la réalité physique ?

Dit autrement : la révolution de l'analyse non-standard fut une authentique révolution, qui a habitué les mathématiciens à calculer et à raisonner avec l'infiniment petit ; conservant l'idée qu'une quantité est divisible à l'infini, elle est encore inadaptée à une description la plus simple qu'il soit possible de l'infiniment petit tel que les physiciens le perçoivent aujourd'hui avec leur modèle standard. Avant d'inviter le lecteur à rêver à une autre approche de l'infiniment petit, nous citerons ces lignes de Havemann [3]

> On considère souvent les mathématiques comme une science entièrement indépendante de l'expérience. Une discussion compliquée et difficile se mène entre les mathématiciens sur la question du rapport qu'entretiennent les mathématiques avec l'expérience pratique. Le développement historique montre qu'un grand nombre de propositions mathématiques ont été « découvertes » longtemps avant que n'aient été formulés les axiomes dont elles peuvent être déduites. Les mathématiques se sont donc développées de la même façon que les sciences purement expérimentales. Cela peut surprendre parce que les mathématiques progressent par le moyen de la « pure pensée ». En fait, les idées des mathématiciens leur sont souvent suggérées par des problèmes pratiques. Certains problèmes rencontrés dans les sciences expérimentales se prêtent à la mathématisation, ce qui n'exclut pas que le mathématicien ne doive se libérer totalement de tous les faits expérimentaux : il doit en effet travailler avec de purs produits de la pensée. En séparant le problème de son objet concret, il engage sa raison dans les sphères profondes de l'abstraction. Cheminant pas à pas, il découvre ainsi de nombreuses vérités dont il ne comprend que plus tard la raison profonde qu'il énonce sous forme d'axiomes.

8 L'ANS de Robinson étant d'un abord moins immédiat, plus ardu que celle de Nelson, nous nous contentons de signaler son existence.

Conclusion : si nous rêvions à une approche de l'infiniment petit appuyée sur la physique ?

La physique ayant proposé un modèle cohérent et fécond de la réalité à travers la mécanique quantique, ne devient-il pas possible de modifier en conséquence l'approche mathématique de l'infini, en commençant par définir l'infiniment petit actuel ?

Cela pourrait conduire à une nouvelle définition du point : à la définition inaugurale des Éléments d'Euclide,

1. *Un point est ce dont il n'y a aucune partie.*

nous substituerions celle-ci (entre crochets, notre formulation) :

1*. *Un point est ce dont* [*chaque dimension est en deçà de la longueur de Planck*].

Cette définition n'est-elle pas *positive*, le point (mathématique) devenant l'idéalisation d'une *réalité* (physique), à savoir le quantum de longueur (longueur de Planck) ?

Réconcilier ainsi mathématique et physique, ne serait-ce pas renouer avec les origines de l'activité scientifique ?

Bibliographie

[1] Dumont Jean-Paul et autres, *Les Présocratiques*, Bibliothèque de La Pléiade, Editions Gallimard, Paris, 1988
[2] Euclide, *Les Éléments*, Traduction de B. Vitrac, PUF, Paris, 1990
[3] Havemann R., *Dialektik ohne Dogma ? (Naturwissenschaft und Weltanschauung)*, Rowohlt Verlag, Reinbek, 1968 (1ère édition 1964) (inédit en français)
[4] Hegel G. W. F., *Science de la Logique* (édition de 1812), traduction française de P. J. Labarrière et G. Jarczyk, Aubier, Paris, 1972
[5] Lobry C., *Et pourtant ils ne remplissent pas* ***N***, Aléas éditeurs, Lyon, 1989
[6] Newton I., *La méthode des fluxions et des suites infinies*, traduit par M. de Buffon, réédition par Albert Blanchard, Paris, 1994
[7] Newton I., *Principia – Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, Traduction de la marquise du Châtelet, réédité par Dunod, Paris, 2006
[8] Nelson E., *Internal set Theory, a new approach to NSA*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 83, n°6, novembre 1977,
[9] Robinson A., *Non-standard Analysis*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, revised edition 1974 (1st edition 1966)
[10] Site public du CERN http://public.web.cern.ch/public/fr/science/StandardModel-fr.html

Bibliographie complémentaire

[11] Giusti E., *La naissance des objets mathématiques*, traduit de l'italien par G. Barthélémy, Ellipses, Paris, 2000
[12] Harthong J. et Reeb G., *Intuitionnisme 84*, dans Barreau H. et Harthong J., *La mathématique nonstandard*, Editions du CNRS, Paris, 1984.
[13] Kuhn T., *La structure des révolutions scientifiques*, traduit de l'américain par L. Meyer, Flammarion, Paris, réédition 2008
[14] Poincaré H., *La Science et l'hypothèse*, Flammarion , Paris, réédition 2009