PEUT-ON MANIPULER LES NOTATIONS DE LEIBNIZ EN TOUTE RIGUEUR ?

Mariza KRYSINSKA
GEM, Université Catholique
de Louvain et Ladimath
Université de Liège

1. — Introduction

La question relative à la rigueur des notations de Leibniz a été formulée par un étudiant sur un forum d'Internet (Futura-Sciences : les forums de la science 2008) à propos de la formule de la dérivation d'une fonction composée, formule exprimée à l'aide de la notation *dx*. L'analyse du débat entre étudiants qui a suivi cette question, nous a permis de faire une étude didactique et épistémologique de ces difficultés.

Pour formuler notre réponse à la question concernant la rigueur des notations du type *dx*, nous nous sommes intéressée à leur rôle dans les premiers apprentissages du calcul des dérivées. Pour cela, nous nous sommes référée d'abord aux quelques traités contemporains du *calculus* pour y voir comment est validée la formule de dérivation d'une fonction composée exprimée avec les notations *dx*. Nous avons comparé cette validation avec les explications concernant la même formule mais sans les notations de Leibniz présentes dans quelques manuels belges de l'enseignement du second degré. Dans le traité de L'Hôpital (1716), nous avons cherché les conditions de la première utilisation des notations de Leibniz.

Finalement, nous avons élaboré une séquence didactique relative au calcul des dérivées qui s'appuie sur le texte de L'Hôpital. Son but est de proposer aux étudiants un apprentissage qui leur fournit les moyens de contrôle du sens des manipulations des notations comme *dx*.

2. — Présentation du débat entre étudiants à propos des notations de Leibniz

Le débat entre étudiants concernant la rigueur des notations de Leibniz se trouve sur le site Internet d'un Forum de Mathématiques du collège et lycée. Il s'agit donc d'élèves français à la fin de l'enseignement du second degré. Ce débat est reproduit intégralement ci-dessous avec les erreurs des étudiants.

Phys2

Plusieurs fois, j'ai rencontré la « démonstration » de la dérivée de la composée de deux fonctions *f* et *u* par la notation de Leibniz : $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{du}\dfrac{du}{dx}$, en supposant bien sûr que *du* soit différent de zéro. Mais, j'ai trouvé dans un document que cette opération laissait penser que la dérivée de la composée de deux fonctions s'exprimait ainsi.

J'aimerais par conséquent savoir si nous pouvions manipuler les dérivées par la notation de Leibniz en toute rigueur, et bien sûr si ce n'est pas le cas, pourquoi.

Cassano

Oh, ça c'est une question pour les matheux. Doit y avoir une histoire de convergence là-dedans.

MiMoiMolette

Plop. On me dit à l'oreille que ça s'utilise beaucoup en physique, mais qu'en math, c'est une aberration parce qu'on ne peut pas dériver une fonction par rapport à une autre fonction. C'est soumis à pas mal de conditions. En math, paraît que c'est niveau L3/M1,…

Zébule

Oui bien sûr, il me semble que ce n'est pas du tout une démonstration : il s'agit d'une notation bien commode mais rien de plus puisqu'on ne manipule pas du tout les dérivées comme des nombres (multiplier et diviser par *du* ça n'a pas de sens). Pour montrer la formule de dérivation de la composée, il faut revenir à la définition de la dérivée d'une fonction avec les limites.

Phys2

Mais dans ce cas là, la dérivée est présentée sous la forme d'un quotient de différentielles, et multiplier et diviser possède un sens, non ? Par contre, quant à la remarque de MiMoiMollette, quelqu'un pourrait-il donner quelques détails pas trop complexes sur le sujet ?

Zébule

Les différentielles au sens propre sont des applications linéaires (mais ça a priori tu n'as absolument pas besoin de le savoir pour dériver…) donc non ça n'a pas de sens. En fait, quand tu écris $\dfrac{df}{dx}$ *df* ne représente pas la différentielle de *f* mais une toute petite variation de *f*. $\dfrac{df}{dx}$ aurait plus de sens je crois mais ce ne sons pas des différentielles, ce sont des quantités infinitésimales, enfin là je crois qu'on s'écarte beaucoup de ton niveau et même de mien.

Enfin bref, ce n'est pas une démonstration, c'est une égalité qui est vraie dans le cadre de cette notation, justement grâce à la formule de dérivation de la composée. Je n'arrive pas très bien à m'expliquer je crois,…

Phys2

Citation : *En fait, quand tu écris* $\dfrac{df}{dx}$, *df ne représente pas la différentielle de f mais une toute petite variation de f.*

Mais la différentielle *df* d'une fonction *f* est définie par : $df = f'(x)dx$.

Or, $f'(x) = \lim \dfrac{(f(x\ -\ h)\ -\ f(x))}{h}$, et en utilisant les mêmes notations, $dx = h$. Par conséquent, $df = f(x - h) - f(x)$ avec h tendant vers zéro. La différentielle s'identifie donc bien à une variation infinitésimale. De plus, $df = f'(x)dx$ est équivalent à $f'(x) = \frac{df}{dx}$, et en considérant la différentielle comme une variation infinitésimale, correspond bien à la définition de la dérivée.

Citation : *Les différentielles au sens propre sont des applications linéaires (mais ça a priori tu n'as absolument pas besoin de le savoir pour dériver…) donc non ça n'a pas de sens*

Mais, cela ne reviendrait-il pas à diviser et à multiplier par $k(x)$ par exemple ? Car ici, on ne divise pas par une différentielle, mais bien par un nombre, l'image d'une fonction par la différentielle…

God's Breath

La notation de Leibniz est tout à fait rigoureuse, à condition de savoir de quoi l'on parle. Les différentielles df, du, dx,… ne sont pas des nombres, mais des fonctions, et ces fonctions ne sont pas à valeurs réelles… Ce sont des objets mathématiques relativement compliqués, dont la manipulation nécessite beaucoup de soin.

Phys2

Alors selon Wikipédia :

Soient E et F deux espaces vectoriels normés (est-ce important que les espaces vectoriels soient normés ?), et f une application de E dans F. Soit a un point de E. Alors, on dit que f est différentiable en a si et seulement s'il existe une application linéaire continue L de E dans F telle que

$$\forall\, x \in E,\ f(a + h) = f(a) + L(h)\ o(\|h\|)\ .$$

Et L est appelée différentielle de f au point a. Apparemment, la différentielle définie comme cela, la formule $dy = f'(a)dx$ serait alors correcte.

Mais ce que je ne comprends pas, c'est que, si effectivement, il n'y a pas de sens à diviser par une application, c'est-à-dire par la différentielle, alors pourquoi peut-on noter $f'(x) = \frac{dy}{dx}$? Car après tout, x peut être défini par la fonction identité ?

MiMoiMolette

Mais f est exprimé en fonction de x, c'est pas la même chose que si c'était une fonction quelconque… Concernant la différentiabilité, c'est pas si simple à utiliser (j'ai fait ça en cours et on galère en TD pour montrer qu'une fonction est différentiable.

Phys2

Je ne comprends pas cet argument.

God's Breath

Citation : *Soient E et F deux espaces vectoriels normés (est-ce important que les espaces vectoriels soient normés ?), et f une application de E dans F. Soit a un point de E.*

Il est important que les espaces soient munis d'une topologie afin d'avoir une notion de continuité pour les applications (en particulier linéaires) de E dans F. Les plus simples des espaces vectoriels topologiques sont les espaces normés.

Citation : *Alors, on dit que f est différentiable en a si et seulement s'il existe une application linéaire continue L de E dans F telle que*

$$\forall\, x \in E,\ f(a + h) = f(a) + L(h)\ o(\|h\|)\ .$$

Et L est appelée différentielle de f au point a.

Apparemment, la différentielle définie comme cela, la formule $dy = f'(a)dx$ serait alors correcte.

Attention : L est la différentielle de f au point a ; la différentielle de f, notée df, est l'application $a \longrightarrow L$. La relation n'a aucun sens (ou du moins certainement pas celui que tu lui donnes. Ce qui a un sens, c'est $df = f'dx$ où df, f' et dx sont à évaluer en a.

La notation ne vaut que si l'espace de départ E est de dimension 1. Lorsqu'il y a plusieurs variables, il faut utiliser les notations avec les « ronds », $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$ par exemple, où l'on insiste bien sur le fait que ∂x n'est qu'une notation de la dérivée partielle, n'est en particulier pas un quotient, et que ∂f et ∂x n'ont aucun sens pris individuellement et séparément.

On peut noter $f' = \frac{df}{dx}$ par convention, ce qui ne veut pas dire que l'on fait une division… $\frac{df}{dx}$ n'est qu'une notation pour f', pas le résultat d'une division. Cette notation a pour but de manifester la relation fondamentale $df = f'dx$ sous la forme $df = \frac{df}{dx}dx$ et, de ce fait, peut être utilisée dans tous les calculs. Dans le calcul de la dérivée d'une fonction composée, on a d'une part, $df = \frac{df}{dx}dx$, d'autre part, $df = \frac{df}{du}du$ et $du = \frac{du}{dx}dx$, donc $df = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}dx$; d'où l'on déduit bien $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$ comme résultat d'un produit de deux fonctions, notées sous forme de quotient sans être des quotients, donc sans « simplification d'un produit de fractions ».

Citation Phys2 : « Car après tout, x peut être défini par la fonction identité ? »

Effectivement, x est dans la notation de Leibniz, une notation de la fonction identité. Le problème est que l'on confond, dans la no-tation de Leibniz, la fonction f et la valeur $\mathrm{Id}(x) = x$.

Phys2

Merci beaucoup God's Breath pour ta réponse, j'ai déjà l'esprit plus clair. Mais, j'ai un second problème : pour une courbe paramétrée, de paramètre t, on écrit avec les notations de Leibniz, la dérivée : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$. Mais comment trouver cela sans la conception abusive de la simplification par dt et en restant cohérant avec la définition de la différentielle ?

God's Breath

C'est toujours la même chose : tant que l'on considère des fonctions d'une seule variable, deux différentielles du et dv sont proportionnelles au sens qu'il existe une unique fonction Φ telle que $dv = \Phi du$ et l'on note $\Phi = \frac{dv}{du}$, je mets des parenthèses pour indiquer que le numérateur et le dénominateur sont « indissociables » et que ce n'est pas une fraction au sens usuel. On a donc l'existence des fonctions $\Phi = \left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\Psi = \frac{dy}{dt}$ et $\Xi = \frac{dy}{dx}$ telles que $dx = \Phi dt$, $dy = \Psi dt$ et $dy = \Xi dx$, donc $dy = \Xi\Phi dt$ et $\Xi\Phi = \Psi$ (par unicité du « rapport de proportionnalité » entre les différentielles ou encore $\Xi = \Psi/\Phi$ qui s'écrit immédiatement, en notation de Leibniz, sous la forme : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$.

Phys2

D'accord, je n'avais pas fait attention que l'on pouvait diviser par $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, qui n'est pas une différentielle… Merci beaucoup.

Résumons ci-dessous en quelques lignes ce débat :

— Phys2 demande s'il peut manipuler la notation $\frac{dy}{dx}$ comme le quotient de deux fonctions car il a l'impression que, dans la formule $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$, on s'appuie sur les règles de simplification des quotients.

— MiMoiMolette considère cette formule

comme « aberration » car la lettre u représente une fonction, et car, selon lui, on ne peut pas dériver une fonction par rapport à une autre.

— Zébule affirme que l'égalité $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\,\frac{du}{dx}$ n'est pas une démonstration de la formule de la dérivation d'une fonction composée car pour montrer cette formule, il faut s'appuyer sur le calcul des limites et que, de plus, « multiplier et diviser par du ça n'a pas de sens ».

— Par contre, Phys2 voudrait considérer toutes les notations $\frac{df}{dx}, \frac{df}{du}, \frac{du}{dx}$ comme quotients de différentielles car cela lui permettra d'expliquer le fonctionnement de la formule $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\,\frac{du}{dx}$ à la manière des fractions. Pour cette raison, il compte sur les autres condisciples pour lui expliquer cette formule à l'aide des différentielles.

— God's Breath établit la formule par les manipulations formelles des différentielles garanties par la définition de celles-ci :
$df = \frac{df}{dx}dx,\ df = \frac{df}{du}du$ et $du = \frac{du}{dx}dx.$
Ces manipulations se réduisent à la substitution de du par $\frac{du}{dx}dx$ dans $df = \frac{df}{du}du$.
Et God's Breath précise qu'il obtient la formule $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\,\frac{du}{dx}$ « comme résultat d'un produit de deux fonctions, notées sous forme de quotient sans être des quotients, donc sans simplification d'un produit de fractions ».

— Phys2 demande aux autres interlocuteurs une explication de la formule $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}$ dans le cas d'une courbe paramétrée, mais désormais il accepte que cela soit « sans la conception abusive de la simplification par dt et en restant cohérent avec la définition de la différentielle ».

— God's Breath propose une explication de la formule $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}$ qui est analogue à celle qui est proposée pour la formule $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\,\frac{du}{dx}$. Pour cela, il commence par désigner par les lettres Φ, Ψ et Ξ, les fonctions dérivées impliquées dans la formule :
$\Phi = \left(\frac{dx}{dt}\right), \Psi = \left(\frac{dy}{dt}\right)$ et $\Xi = \left(\frac{dy}{dx}\right)$: il place expressément $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dy}{dx}$ entre parenthèses « pour indiquer que le numérateur et le dénominateur sont indissociables et que ce n'est pas une fraction au sens usuel ». Ensuite, il passe aux différentielles par l'intermédiaire des égalités qui les définissent $dx = \Phi dt$, $dy = \Psi dt$ et $dy = \Xi dx$. Par substitution, il obtient l'égalité pour la différentielle dy sous une deuxième forme : $dy = \Xi\Phi dt$. En s'appuyant sur l'argument l' « unicité du rapport de proportionnalité » entre les différentielles, ici entre dy et dt, il identifie le produit des fonctions $\Xi\Theta$ et la fonction Ψ, ce qui donne $\Xi\Phi = \Psi$, et il conclut que $dy = \Xi dt$. En s'appuyant sur les égalités qui définissent Ψ et Ξ, il obtient que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}$.

Les différentes considérations relatives à la notion de différentielle ne sont pas mentionnées dans ce résumé. On y reviendra plus loin.

3. — Quelques questions soulevées dans le débat

Un certain nombre de questions relatives au sens des notions et à la signification des notations utilisées par des élèves ont pu être dégagées lors du débat. Nous en citons quelques-unes : la question de la « dérivée d'une fonction par rapport à une autre fonction », deux interprétations possibles de la notation $\frac{df}{dx}$, ou encore les différentes conceptions de la différentielle, pour terminer par la question de la validation de la formule.

3.1 *Question de la « dérivée d'une fonction par rapport à une autre fonction »*

Comme première difficulté liée à la question de Phys2, nous relevons les doutes sur la légitimité de la formule qui sont exprimées par un élève : « en math, c'est une aberration parce qu'on ne peut pas dériver une fonction par rapport à une autre fonction ». Ces doutes sont soutenus par la conviction de l'élève sur le caractère fortuit de la ressemblance de ce calcul avec le calcul sur les nombres : « il s'agit d'une notation bien commode mais rien de plus puisqu'on ne manipule pas du tout les dérivées comme des nombres ».

Regardons de plus près cette question. Dans la formule $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\,\frac{du}{dx}$, la lettre f représente une fonction et la lettre x représente seulement une variable indépendante : par contre la lettre u a un double statut, d'abord celui d'une variable indépendante, ensuite celui d'une variable dépendante ou d'une fonction. En effet $\frac{df}{du}$ est la dérivée de la fonction f de la variable indépendante u :

$$\frac{df}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u}$$

et $\frac{du}{dx}$ est la dérivée de la fonction u de la variable indépendante x :

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}.$$

Toutes les lettres utilisées dans la formule représentent des variables, tantôt dépendantes, tantôt indépendantes, selon la place qu'elles occupent dans les formules

$$\frac{df}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u}$$

ou $$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

soit au numérateur, soit au dénominateur. La convention de notation d'une fonction par l'équation comme

$$y = f(u) \text{ ou } u = g(x)$$

lève le problème de la dérivée d'une fonction par rapport à une autre fonction.

3.2 *Deux interprétations de* $\frac{df}{dx}$

Lors du débat, deux conceptions de $\frac{df}{dx}$ se heurtent.

Selon Zébule, $\dfrac{df}{dx}$ représente un tout car « il s'agit d'une notation bien commode mais rien de plus puisqu'on ne manipule pas du tout les dérivées comme des nombres (multiplier et diviser par *du* ça n'a pas de sens) ».

Phys 2 sépare df et dx pour pouvoir interpréter la notation $\dfrac{df}{dx}$ comme quotient de deux différentielles : « mais dans ce cas là, la dérivée est présentée sous la forme d'un quotient de différentielles, et multiplier et diviser possède un sens, non ? »

God's Breath se réfère à la convention de notation pour expliquer les raisons de considérer comme un tout : « On peut noter $f' = \dfrac{df}{dx}$ par convention, ce qui ne veut pas dire que l'on fait une division… $\dfrac{df}{dx}$ n'est qu'une notation pour f', pas le résultat d'une division. Cette notation a pour but de manifester la relation fondamentale $df = f'dx$ sous la forme $df = \dfrac{df}{dx}dx$ et, de ce fait, peut être utilisée dans tous les calculs. »

Phys2 observe que le choix de notation $\dfrac{df}{dx}$ fait penser délibérément à un quotient : « mais ce que je ne comprends pas, c'est que, si effectivement, il n'y a pas de sens à diviser par une application, c'est-à-dire par la différentielle, alors pourquoi peut-on noter $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$? »

Ces élèves ignorent que les deux cas de figures sont possibles : on peut manipuler $\dfrac{df}{dx}$ aussi bien comme un tout figé que comme un quotient. On y reviendra dans la section 4 lorsqu'on y étudiera quelques aspects du traité de L'Hôpital.

3.3 *Différentes conceptions de la « différentielle »*

Que savent les élèves au sujet des différentielles ? Zébule précise que « les différentielles au sens propre sont des applications linéaires ». God'Breath déclare prudemment que « ce sont des objets mathématiques relativement compliqués, dont la manipulation nécessite beaucoup de soin » et que « les différentielles df, du, dx,… ne sont pas des nombres, mais des fonctions, et ces fonctions ne sont pas à valeurs réelles… ». Phys2 confond la différence $f(a+h) - f(a)$ accompagnée de la condition « h tendant vers zéro » avec la différentielle df : il précise que « df ne représente pas la différentielle de f mais une toute petite variation de f » et qu'il s'agit « de quantités infinitésimales ». Les élèves citent quelques définitions de la différentielle, qui sont soit incomplètes, soit trop formelles et qui d'ailleurs n'éclairent en rien la question de la rigueur des notations de Leibniz :

— Zébule déclare que « les différentielles au sens propre sont des applications linéaires » sans préciser les variables dépendante et indépendante.

— Phys2 précise que « la différentielle df d'une fonction f est définie par : $df = f'(x)dx$». Il affirme que l'égalité $df = f'(x)dx$ est équivalente à $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$. Pense-t-il à l'équivalence entre ces deux égalités assurée par les principes d'équivalence des égalités ? Les deux égalités le suggèrent. Pourtant, cela n'est pas vrai car les notations dx et df n'ont pas la même signification d'une égalité à l'autre. En effet, dans l'égalité $df = f'(x)dx$, dx et df sont des variables, l'une indépendante et l'autre dépendante. Par contre, dans l'égalité $f'(x) = \frac{df}{dx}$, les notations dx et df perdent leur statut de variables car la notation désigne un tout qui est la limite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. La fausse équivalence algébrique entre les égalités $df = f'(x)dx$ et $f'(x) = \frac{df}{dx}$ renforce l'impression que $\frac{df}{dx}$ se comporte comme un vrai quotient. Mais paradoxalement c'est cette illusion de quotient qui assure, entre autres, l'utilisation d'une notation du type dx dans de multiples techniques du calcul des dérivées et des intégrales.

— Phys2 cite la définition de Wikipédia qui n'éclaire en rien les raisons d'être de la formule $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$: il ne précise pas à quelle partie de l'égalité $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ peut se référer cette définition.

— God's Breath revient au fait que « la différentielle de f, notée df, est l'application $a \longrightarrow L$ ». La notation $a \longrightarrow L$ suggère qu'il s'agit d'une fonction de la variable a, ce qui est faux puisque a est ici un paramètre ; L est bien une fonction de h. En bref, si les élèves sont conscients que la différentielle df est une fonction, et même une fonction linéaire, ils ignorent sa variable indépendante. Ce fait témoigne probablement de certaines lacunes dans l'enseignement et dans l'apprentissage du concept de fonction en terme de variables indépendante et dépendante.

3.4 *Question de la validation de la formule*

La validation de la formule $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ proposée par God's Breath s'appuie sur l'égalité $df = f'(x)dx$ qui, rappelons-le, est considérée par Phys2 comme équivalente à $f'(x) = \frac{df}{dx}$ par définition et non par les manipulations d'un quotient.

Dans sa démonstration, God's Breath s'appuie, en plus, sur les égalités $df = \frac{df}{du}du$ et $du = \frac{du}{dx}dx$, et sur la technique de la substitution d'une variable par une autre. Il obtient ainsi l'égalité $df = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}dx$ de laquelle il déduit la formule $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$. Il ne précise pas ici comment. Mais on peut imaginer que ces arguments soient semblables à ceux qui lui ont servi à justifier la formule $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$: l'égalité $df = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}dx$ exprime le rapport de proportionnalité entre df et dx. Etant donné que le coefficient de proportionnalité dans ce cas est noté par $\frac{df}{dx}$, on en déduit que $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}$.

La principale faiblesse de ce raisonnement est qu'il n'éclaire pas pourquoi la dérivée d'une fonction composée se comporte comme le produit de $\frac{df}{du}$ et $\frac{du}{dx}$ comme s'il s'agissait de vrais quotients. C'est pour cette raison que nous lui préférons les arguments de Stewart (2001) cités dans la section 5 où l'on se réfère d'abord à la définition de la dérivée et au calcul du produit des quotients des différences, qui est une étape qui précède le passage à la limite.

Pour savoir s'il est possible de considérer $\frac{dy}{dx}$ comme une vraie fraction, autrement dit s'il est possible de calculer dy indépendamment du calcul de $f'(x)$, on se tourne vers la genèse du calcul différentiel étudiée dans la section suivante.

4. — Leibniz et son calcul des différences

Les notations du type dx ou dy ont été introduites pour la première fois par Leibniz. Il a été conscient de leur importance dans son calcul différentiel puisqu'il a écrit (1850) qu' « une partie du secret de l'analyse consiste dans la caractéristique, c'est-à-dire dans l'art de bien employer les notes dont on se sert. »

L'article fondateur du calcul différentiel est celui que publia Leibniz en 1684 dans un périodique de Leibzig, les *Acta Eruditorum,* intitulé *Nova methodus pro maximis et minimis*. Il y a exposé une nouvelle méthode pour étudier les courbes par la recherche des extremums et des tangentes. Un des points forts de sa méthode est son formalisme, mais l'extrême concision de sa présentation jointe à l'absence de validation des règles de calcul énoncées en ont rendu sa diffusion très lente. Les contemporains de Leibniz n'en ont pas compris les enjeux. Les premiers mathématiciens capables de l'apprécier furent les frères Jean et Jacques Bernoulli qui contribuèrent à le faire connaître en l'appliquant aux questions étudiées à l'époque, à savoir celles de la courbe isochrone et de la courbe brachistochrone (en fait, il s'agit d'une même courbe, la cycloïde). Au cours des années 1691 et 1692, Jean Bernoulli enseigna à un jeune marquis français, Guillaume F. A. de l'Hôpital, le calcul des différences de Leibniz et ce dernier écrivit et publia en 1696 le premier traité de calcul différentiel intitulé l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Ce traité domina tout le 18^{e} siècle. L'Hôpital y exposa la théorie du calcul des différences beaucoup plus clairement que ne l'avait fait Leibniz lui-même et ainsi a contribué largement à la diffuser.

4.1 *Quelques éléments du formalisme de Leibniz*

La méthode de calcul fondée par Leibniz et expliquée par L'Hôpital (1713) est une méthode générale pour rechercher les tangentes aux courbes et pour résoudre les problèmes des maximums et des minimums. Cette méthode s'appuie sur la convention des notations comme x, y ou z pour les variables, a, b ou c, … pour les constantes. L'Hôpital introduit les notations dx, dy pour les différences et les différentielles des variables x (dans le traité, on ne fait pas de distinction entre les deux) et il précise qu' « on se servira dans la suite de la note ou caractéristique d pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre ». En même temps, il considère la différence d comme « la portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement » et, pareillement à Leibniz, il ne précise pas ce qu'il comprend par 'portion infiniment petite' ni par 'une quantité variable [qui] augmente ou diminue continuellement'. Une signification supplémentaire de la différence d infiniment petite apparaît lorsque L'Hôpital précise que cela lui permet de prendre « indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite ou (ce qui est la même chose) d'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée d'une autre quantité infiniment moindre telle qu'elle puisse être considérée comme demeurant la même. »

Tout le calcul sur les 'différences' de Leibniz est déduit de deux règles : de la 'différence' de la somme et de la 'différence' du produit de deux variables. Mais, le seul endroit où Leibniz s'appuie sur la notion d'infiniment petit est la 'différence du produit' :

$$\begin{aligned} d(xy) &= (x + dx)(y + dy) - xy \\ &= xdy + ydx + (dx)(dy) \\ &= xdy + ydx \end{aligned}$$

Le passage de l'avant dernière ligne du calcul à la dernière est justifié ainsi :

> « La différence sera $xdy + ydx + (dx)(dy)$ c'est-à-dire $xdy + ydx$ puisque $dxdy$ est une quantité infiniment plus petite par rapport aux autres termes xdy et ydx ; car si l'on divise par exemple ydx et $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y et de l'autre dy qui est la différence et par conséquent infiniment moindre qu'elle. » (L'Hôpital, 1716, p.5),

Le calcul présenté ci-dessus aurait suscité de fortes réserves chez plus d'un mathématicien notamment à cause de l'usage abusif du signe de l'égalité comme équivalence dans le cas de l'égalité $xdy + ydx + (dx)(dy) = xdy + ydx$ entre les expressions qui ne sont équivalentes que si $(dx)(dy) = 0$.

Cette bizarrerie de la méthode de Leibniz s'explique par le fait que les calculs se font non seulement sur des grandeurs usuelles mais aussi sur des grandeurs 'infiniment petites' avec un statut flou. Pourtant Leibniz ne prétend pas que les 'infiniment petits' existent réellement, il pense seulement qu'on peut raisonner sans erreur comme s'ils existaient.

L'usage des 'infiniment petits' a été fort critiqué par beaucoup d'autres mathématiciens. Leur statut non défini mathématiquement a empêché Leibniz d'utiliser le mode de validation hypothético-déductif de sa méthode. Néanmoins, on peut considérer que cette méthode est validée d'une manière pragmatique parce qu'elle a permis de retrouver des résultats déjà connus par ailleurs comme l'extremum ou la pente de la tangente d'une courbe du deuxième degré.

4.2 *Valence instrumentale et valence sémiotique des notations de Leibniz dans le contexte de l'extremum*

A chaque notation on peut attribuer deux types de fonctionnement, l'un sous la forme de la valence instrumentale, l'autre sous la forme de la valence sémiotique. La valence instrumentale d'une notation nous « permet de faire » ; elle dépend du nombre de techniques dans lesquelles on peut l'utiliser. Cette valence « sera d'autant plus grande que ces techniques se montreront robustes et fiables dans l'accomplissement des tâches concernées. » (Bosch, Chevallard, 1999). La valence sémiotique d'une notation est une capacité à produire du sens, elle permet de voir ce qui est fait, de contrôler ce qui est en train de se faire et suggère ce qui reste à faire.

La valence instrumentale des notations dx et dy est soutenue par leur valence sémiotique acquise dans le texte de L'Hôpital (1713), entre autres, à l'occasion du calcul de l'extremum d'une courbe. Voici comment L'Hôpital le présente :

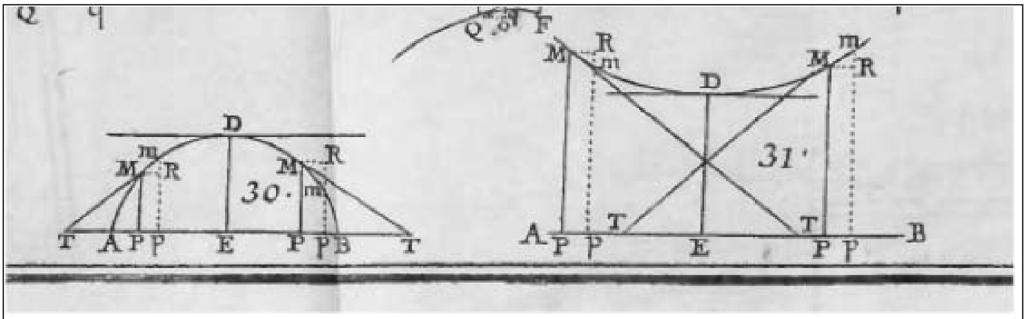


Figure 1 : Graphique tiré du livre de L'Hôpital

« La nature de la ligne courbe *MDM* (figure 1) étant donnée, trouver pour *AP* une valeur *AE* telle que l'appliquée *ED* fait la plus grande ou la moindre de ses semblables *PM*. Lorsque *AP* croissant, *PM* croît aussi ; il est évident que la différence Rm sera positive par rapport à celle de *AP* ; et qu'au contraire lorsque *PM* diminue, la coupée *AP* croissant toujours, la différence sera négative. Or, toute quantité qui croît ou diminue continuellement, ne peut devenir de positive négative, qu'elle ne passe par l'infini ou par zéro . » (L'Hôpital, 1713, p.58),

L'argument principal donc s'appuie sur une continuité supposée de dy et de la propriété des valeurs intermédiaires qui serait satisfaite par une grandeur variable.

La méthode générale expliquée ci-dessus est appliquée ensuite par L'Hôpital aux quelques exemples. Dans l'un d'eux, il s'agit de trouver un point E sur un segment AB, tel que le produit du carré de la longueur du segment AE par la longueur du segment EB soit maximal (figure 1). Pour traiter ce problème avec le calcul des différences, L'Hôpital le traduit en formules algébriques à l'aide des notations standardisées, x pour la longueur variable AE et a pour la longueur constante AB. On doit trouver la valeur maximale de $AE^2\,EB = y = x^2\,(a-x)$.

Pour cela, il calcule dy et détermine la valeur de x qui annule dy. En appliquant les deux règles de calcul citées ci-dessus, il obtient que

$$\begin{aligned} dy &= d[x^2(a-x)] = d[ax^2 - x^3] \\ &= d(ax^2) - d(x^3) \\ &= 2axdx - 3x^2dx \\ &= (2ax - 3x^2)dx \end{aligned}$$

d'où l'équation $dy = 0$ devient $(2ax - 3x^2)dx = 0$, ce qui donne la solution non nulle $x = 2a/3$. Ce calcul permet d'obtenir directement la différentielle de $x^2(a-x)$ comme fonction linéaire de dx sans passer par le calcul de $\frac{dy}{dx}$.

Ensuite, $\frac{dy}{dx}$ est calculé comme un vrai quotient.

L'exemple traité ci-dessus illustre l'efficacité de la méthode de Leibniz qui consiste en la simplicité de son algorithme, en ses notations élégantes et performantes comme dx, dy, $\frac{dy}{dx}$, …, son formalisme opératoire qui permet d'effectuer quasi-automatiquement les calculs et obtenir un nombre considérable de nouveaux résultats.

5. — Réponses institutionnelles aux questions formulées au cours du débat

Nous nous référons aux deux livres contemporains de *calculus*[1] pour voir comment y sont traitées les trois questions suivantes :

— la formule de la dérivée d'une fonction composée exprimée en notations de Leibniz ;

— la formule de la pente de la tangente à une courbe définie par les équations paramétriques en notations de Leibniz ;

— la définition de la différentielle d'une fonction en notations de Leibniz.

Notre choix s'est porté sur les traductions des livres nord-américains parce qu'on y utilise fréquemment les notations de Leibniz en parallèle avec la notation f' de Lagrange.

Le premier livre consulté est celui de Stewart (2006). Dans le premier extrait de ce livre, on présente les notations utilisées par l'auteur pour traiter la question de la composée de deux fonctions.

> « Dérivée d'une fonction composée :
> Si f et g sont deux fonctions dérivables et si $F = f \circ g$ est la fonction composée définie par $F(x) = f(g(x))$, alors F est dérivable et l'expression de F' est donnée par le produit
>
> $$F'(x)= f'(g(x))g'(x) .$$
>
> Avec les notations de Leibniz, si $y = f(u)$ et $u = g(x)$ sont des fonctions dérivables, alors $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$. »
> (Stewart, 2006, p. 228)

Il s'agit de la notation d'une fonction sous forme d'équation dans laquelle il apparaît le nom de la variable dépendante dans un membre, le symbole de la fonction et le nom de la variable indépendante dans l'autre : $y = f(u)$ et $u = g(x)$. La composition s'obtient alors par la technique de la substitution de la variable u par $g(x)$. Curieusement, la notation $f \circ g$ choisie pour la composée de deux fonctions n'est plus reprise pour noter la composée $f'(g(x))$ comme $(f' \circ g)(x)$.

Dans l'extrait suivant, il s'agit de fournir des arguments de validation de la règle de dérivation d'une fonction composée lorsqu'elle est exprimée avec les notations de Leibniz.

> « Soit Δu la variation de u qui résulte de la variation Δx de x, autrement dit,
>
> $$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x).$$
>
> Par ricochet, la variation de y est
>
> $$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$$
>
> Il est tentant d'écrire
>
> $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad (1)$$
>
> $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad (2)$$
>
> La continuité de g fait que $\Delta u \longrightarrow 0$ quand $\Delta x \longrightarrow 0$.
>
> $= \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$. » (3) Stewart, 2006, p. 228)

La seule faille dans ce raisonnement est que dans (1), il se peut que Δu soit nul (même si $\Delta x \neq 0$) et il est bien sûr interdit de diviser par 0. Néanmoins, ce raisonnement laisse penser au moins que

1 Le *calculus* est une branche des mathématiques développée indépendamment par Newton et Leibniz. Il est composé de deux types de calculs : le calcul différentiel pour traiter initialement les questions de la pente d'une courbe ou de l'extremum d'une fonction, et le calcul intégral pour traiter initialement les problèmes d'aire sous une courbe. Les deux calculs sont reliés l'un à l'autre par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral. Actuellement, le terme *calculus* est fréquemment utilisé dans les pays anglosaxons pour désigner un cours très élémentaire d'analyse mathématique.

la règle de dérivation des fonctions composées est exacte. Pour combler la faille il faut un raisonnement plus subtil que nous ne présentons pas ici. » (Stewart 2006, p. 228)

La ressemblance de la formule avec le comportement des quotients est ici voulue, ce qui est commenté par Stewart ainsi.

« L'équation $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ est facile à retenir, car si $\frac{dy}{du}$ et $\frac{du}{dx}$ étaient des quotients, nous pourrions simplifier par du. Souvenons-nous pourtant que du n'a reçu aucune définition jusqu'à présent et que l'expression $\frac{du}{dx}$ ne peut pas être vue comme un réel quotient. » (Stewart, 2006, p. 228)

Le quotient différentiel $\frac{dy}{du}$ représente ici un tout inséparable comme résultat du calcul de la limite du quotient des différences $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ dans lequel Δy est un accroissement de la variable dépendante y : $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$, et Δu est un incrément de la variable indépendante u.

Les calculs faits en (1), (2) et (3) éclairent pourquoi la formule $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ se comporte comme un quotient bien qu'elle ne soit pas un quotient : c'est parce qu'on peut toujours revenir aux quotients des différences et utiliser les propriétés des quotients avant de passer à la limite.

Dans l'extrait suivant, il s'agit de la formule de la pente de la tangente à une courbe définie par les équations paramétriques en notations de Leibniz :

« Tangente aux courbes paramétrées :

[…] Nous avons présenté des courbes définies par des équations paramétriques $x = f(t)$, $y = g(t)$.

C'est par la règle de dérivation des fonctions composées que l'on peut obtenir les tangentes à de telles courbes. On suppose que les fonctions f et g sont dérivables et on souhaite connaître la tangente en un point de la courbe en lequel est aussi une fonction dérivable de x. La règle de dérivation des fonctions composées donne $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$. A condition que $\frac{dx}{dt}\neq 0$, on peut résoudre par rapport à $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}$. » (Stewart, 2006, p. 233)

Les variables y et x sont considérées comme coordonnées d'un point courant de la courbe qui varient en fonction d'une troisième variable t. Quant à la notion de différentielle, elle est caractérisée comme fonction dont les variables indépendante et dépendante sont spécifiées :

« Les idées en toile de fond des approximations affines sont parfois présentées en termes de différentielles. Si $y = f(x)$ et si f est une fonction dérivable, alors la différentielle dx est une variable indépendante, ce qui revient à dire que dx peut prendre n'importe quelle valeur réelle. La différentielle dy est maintenant définie en termes de dx par l'équation $dy = f'(x)dx$. Cette expression fait de dy une variable dépendante, qui en réalité dépend à la fois de x et de dx. La valeur de dy n'est calculable qu'après avoir attribué une valeur à dx et une valeur du domaine de f à x. » (Stewart, 2006, p. 256)

Dans cette citation, on insiste sur le lien fonctionnel défini par l'équation $dy = f'(x)dx$; les différentielles dx et dy deviennent ainsi des variables, l'une indépendante et l'autre dépendante par le lien d'une fonction linéaire.

La difficulté d'utilisation des notations dx et dy consiste dans leur double sens. En effet, la forme de deux égalités $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ et $dy = f'(x)dx$ suggère qu'elles sont équivalentes en vertu des principes d'équivalence des égalités algébriques. Or, cela n'est pas vrai car dans l'égalité $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ est un résultat du calcul d'une limite et il doit être considéré comme un tout. Par contre, dans l'égalité $dy = f'(x)dx$, on a $dx = \Delta x$ et dy est définie comme une 'quantité' autonome par l'intermédiaire de $f'(x)$ qui doit être calculé avant. Ces nuances sont occultées par le fait que la notation $\frac{dy}{dx}$ se comporte comme quotient sans l'être, ce qui constitue, à la fois, son intérêt et ses difficultés d'utilisation.

Le deuxième livre consulté est celui de Ayres (1978). Pareillement au livre de Stewart, on définit d'abord une fonction composée de deux fonctions données en utilisant la notation d'une fonction sous forme d'une équation dans laquelle on explicite la variable dépendante et la variable indépendante. La composition se fait comme chez Stewart, par la technique de substitution des variables.

« Si $y = f(u)$ et $u = g(x)$, alors $y = f(g(x))$ constitue une fonction de x. Si y est une fonction dérivable de u, et si u est une fonction dérivable de x, alors $y = f(g(x))$ est une fonction dérivable de x et la dérivée dy/dx s'obtient en utilisant l'une des deux méthodes suivantes :
On exprime explicitement y en fonction de x et on dérive. Exemple : Pour $y = 2u + 3$ et $u = 2x + 1$ on a : $y = 2(2x + 1) + 3$ et $\frac{dy}{dx} = 4$.
On dérive chacune des fonctions par rapport à sa variable indépendante et on utilise la formule $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ [….] » (Ayres, 1978, p. 29)

La règle de la dérivée des fonctions composées s'obtient d'une façon analogue. Ici également les lettres x, y et u représentent les variables.

« Soit Δu et Δy les accroissements respectifs donnés à x et à y quand on augmente x de Δx. On a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et, en supposant $\Delta u \neq 0$, quand $\Delta x \longrightarrow 0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$, c.q.f.d.

On trouve généralement la condition relative à Δu en prenant $|\Delta x|$ suffisamment petit. Lorsque ceci n'est pas possible, on obtient la règle comme suit :

On pose $\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u + \varepsilon\Delta u$, avec $\varepsilon \longrightarrow 0$ quand $\Delta x \longrightarrow 0$. On a alors $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon\frac{\Delta u}{\Delta x}$, et en calculant la limite quand $\Delta x \longrightarrow 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + 0\,\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\,.»$$

(Ayres, 1978, p. 32)

Interprétation géométrique de $\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u + \varepsilon\Delta u$

D'après la figure ci-contre, $\Delta y = RQ$ et $\frac{dy}{dx}\Delta x = PR\ tan(S\hat{P}R) = RS$: donc $\varepsilon\ \Delta x = SQ$. »
(Ayres, 1978, p. 26)

Pour une variation Δx de x de $P(x,y)$, Δy représente la variation correspondante y le long de la courbe et $\frac{dy}{dx}\Delta x$ n'est autre que la variation correspondante

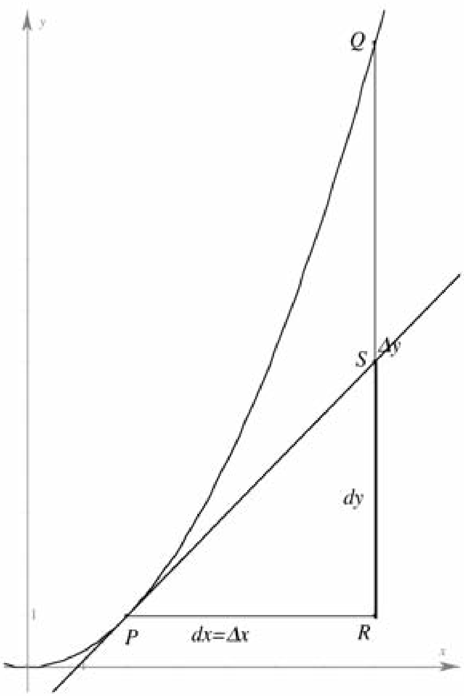


Figure 2 : L'interprétation géométrique de la différentielle dy et de la différence Dy

de y le long de la tangente PS. Comme leur différence $\varepsilon.\Delta x = [\dots (\Delta x)^2 \longrightarrow 0$ plus rapidement que Δx, on utilisera $\dfrac{dy}{dx}\Delta x$ comme approximation de Δy, quand $|\Delta x|$ est petit. » (Ayres, 1978, p. 32)

Les différentielles dy et dx ne sont pas définies de la même manière : dx désigne l'accroissement de la variable indépendante x, noté autrement par Δx, tandis que dy signifie une fonction de x et de dx et désigne une approximation de Δy qui est l'accroissement de la variable y.

« Pour la fonction on définit :
• dx appelé différentielle de x, selon la relation $f(x)$.
• dy, appelé différentielle de y, selon la relation $dy = f'(x)dx$.
La différentielle de la variable indépendante est par définition égale à sa variation, mais la différentielle de la fonction n'est pas égale à sa variation.
Exemple :
Quand $y = x^2$, $dy = 2xdx$, alors
$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = 2xdx + (dx)^2$.
Une interprétation géométrique est donnée par la figure 3. » (Ayres, 1978, p. 119)

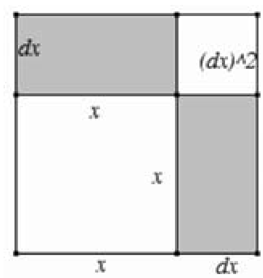


Figure 3 : Interprétation géométrique de la différentielle de la fonction

Revenons maintenant à la notation $\dfrac{dy}{dx}$ et à son interprétation comme quotient. Dans le troisième livre consulté, celui de Swokowski (1993), on donne les raisons pour lesquelles ce quotient désigne la dérivée d'une fonction :

« La division des deux membres de l'équation $dy = f'(x)dx$ par dx explique en quelque sorte la notation $\dfrac{dy}{dx}$ introduite […] pour désigner la dérivée de y par rapport à x. » (Swokowski, 1993, p. 129),

Dans le livre de Stewart (2006), on va plus loin car on y écrit que si $dx \neq 0$, on peut diviser les deux membres de l'équation $dy = f'(x)dx$ par dx et on obtient ainsi l'équation $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ et on précise que, dans ce cas,

> « le membre de gauche peut réellement être interprété comme un quotient de différentielles. » (Stewart, 2006, p.256),

Donc finalement, on peut résumer que chez Swokowski on considère $\frac{dy}{dx}$ comme quotient 'en quelque sorte', tandis que chez Stewart $\frac{dy}{dx}$ devient réellement interprété comme quotient.

De toute façon, dans les deux cas, l'équivalence des égalités $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ et $dy = f'(x)dx$ est assurée par la définition de la différentielle dy par l'égalité $dy = f'(x)dx$. Mais cette équivalence donne l'impression d'être obtenue par la division par dx et, pour cette raison, la notation $\frac{dy}{dx}$ se comporte comme quotient sans l'être.

6. — Instrumentalité des notations *dx*, *dy*

La grande instrumentalité de dx et dy s'est construite en parallèle avec sa sémioticité. Ces notations ont aidé Leibniz à identifier et à exprimer la parenté entre les problèmes des tangentes aux courbes et les problèmes des aires curvilignes. C'est la raison pour laquelle la notion de différentielle est incontournable pour comprendre la notion d'intégrale et le théorème fondamental de Leibniz grâce aux manipulations de la notation $\int f(x)dx$. De plus, comme on a vu dans la section précédente, la notation de la différentielle par dx ou dy a une grande force explicative de la formule de la dérivée d'une fonction composée. Cela est également le cas de la formule de la dérivée d'une fonction réciproque :

Soit $y = f(x)$ et sa réciproque $x = g(y)$. Alors
$$\frac{dx}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y/\Delta x} = \frac{1}{dy/dx}.$$

Voici encore d'autres exemples de techniques impliquant le calcul des différentielles qui entraînent les manipulations des notations comme dx, des techniques accessibles aux élèves de l'enseignement du second degré et certaines parmi elles sont connues d'eux.

Primitivation par changement de variable : calculons, par exemple, $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx$.
Pour cela utilisons le changement de variable suivant : $u = x^2 + 4$, d'où $x^2 = u - 4$. De la dernière égalité, on déduit que $2xdx = du$ ou encore que $xdx = \frac{1}{2}du$ La suite des calculs se présente ainsi :
$$\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,xdx =$$
$$\int \frac{u-4}{\sqrt[3]{u}}\,\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int (u^{2/3} - 4u^{-1/3})\,du\,.$$

Cette technique peut être justifiée par la dérivation d'une fonction implicite et par la formule de la dérivation des fonctions composées.

Equation différentielle à variables séparées $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$: pour la résoudre, on l'écrit sous la forme de l'égalité des différentielles $h(y)dy = g(x)dx$ et ensuite, sous la forme d'égalité des intégrales $\int h(y)dy = \int g(x)dx$.

La règle de changement de variable permet de justifier ce passage :

$$\int h(y)dy = \int h(y(x)) \frac{dy}{dx} dx = \int g(x)dx .$$

Approximation affine à l'aide des différentielles : $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$. Cette approximation est la conséquence de l'approximation de $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ par dy suggérée par la figure 2, $\Delta y \approx dy = f'(x)dx$, où la différentielle dy représente la variation de l'ordonnée y sur la tangente PS tandis que la différence Δy représente la variation de l'ordonnée sur la courbe $y = f(x)$ suite à une variation dx de x.

Genèse de l'intégrale définie comme 'somme-limite' des différentielles : $\int_a^b f(x)\,dx =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + ... + f(a + n\Delta x)]$$

Chaque terme de la somme

$$f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + ... + f(a + n\Delta x)$$

peut être considéré comme la différentielle d'une fonction $F(x)$ et servir d'approximation pour la différence du type $F(x + \Delta x) - F(x)$:

$$f(a + \Delta x)\Delta x \approx F(a + \Delta x) - F(a)$$
$$f(a + 2\Delta x)\Delta x \approx F(a + 2\Delta x) - F(a + \Delta x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(a + n\Delta x)\Delta x \approx F(a + n\Delta x) - F(a + (n-1)\Delta x)$$

Ce raisonnement permet d'éclairer les raisons pour lesquelles l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est égale à

$$[F(a + \Delta x) - F(a)] + [F(a + 2\Delta x) - F(a + \Delta x)] + ... + [F(a + n\Delta x) - F(a + (n-1)\Delta x)] =$$
$$= F(a + n\Delta x) - F(a)$$
$$= F(b) - F(a)$$

lorsque $n\Delta x = b - a$.

Ce résultat est bien connu comme le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

7. — Absence de la notation *dx* dans l'enseignement des débuts de l'analyse et quelques-unes de ses conséquences

Tous les exemples cités témoignent d'une forte instrumentalité de dx et dy. Pourtant, cette notation est faiblement utilisée dans l'enseignement du second degré et diversement utilisée dans l'enseignement universitaire, comme l'ont montré Artigue et Viennot (1986) sur l'exemple de la tangente à une courbe définie par son équation cartésienne :

> « On ne verra guère par exemple un étudiant français en sciences se permettre de déterminer la pente de la tangente en (1,1) à l'ellipse d'équation $2x^2 + y^2 = 3$ par la « manœuvre » suivante :
> $2x^2 + y^2 = 3 \Rightarrow 4xdx + 2ydy = 0 \Rightarrow ydy = -2xdx$
> $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$. » (Artigue &Viennot (1986) cités dans Bosch & Chevallard, 1999, p. 24)

Selon Bosch et Chevallard (1999), on décrète facilement que la notation différentielle est « dénuée de sens » dès qu'elle est manipulée comme quotient comme cela est le cas dans les exemples suivants :

- $y = \arcsin x \Rightarrow \sin y = x \Rightarrow \cos y\, dy = dx$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- $\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow dy = y dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln|x| = x + C \Rightarrow y = ke^{x}$$

Ils attribuent cet état de choses aux interdits formulés par les mathématiciens eux-mêmes :

> « On sait […] que lorsque les techniques de différentiation et d'intégration basées sur l'emploi de la notation différentielle sont bannies de l'enseignement, le motif en est généralement l'absence d'une technologie acceptable par les "censeurs" – en général des mathématiciens. » (Bosch & Chevallard, 1999, p. 24)

ou encore à l'absence d'une justification théorique satisfaisante des techniques s'appuyant sur les manipulations de dx et dy :

> « la valence sémiotique d'un ostensif (on d'un assemblage d'ostensifs) fait référence, plus qu'à l'objet lui-même, aux techniques dans lesquelles celui-ci intervient : ainsi, faute d'une technologie mathématique appropriée, l'ostensif $\frac{dy}{dx}$ peut certes renvoyer à la dérivée de la fonction $y = f(x)$ mais sans que le numérateur et le dénominateur de la fraction renvoient à quoi que ce soit d'instrumental en eux-mêmes, en sorte qu'on ne pourra alors utiliser cet ostensif qu'à la manière dont on utilise la notation $y'(x)$ – avec ce seul avantage que $\frac{dy}{dx}$ permet de préciser la variable de la dérivation. » (Bosch & Chevallard, 1999, p. 26)

Regardons de plus près, à quoi ressemble l'enseignement de la formule de la dérivation d'une fonction composée dans certains manuels belges francophones lorsqu'on n'utilise pas les notations dx et dy.

En général, au niveau de l'enseignement du second degré en Belgique francophone, on utilise rarement la notation différentielle. La formule de la dérivée d'une fonction composée est exprimée à l'aide de la notation du type $f(x)$. Ce fait entraîne les difficultés techniques de la validation de la formule considérée qui aboutissent à l'abandon de sa validation. Cela est illustré ci-dessous par deux exemples tirés de deux manuels différents.

L'exemple tiré du manuel Cqfd 5 *(niveau de la classe de 1ᵉ en France)*

> « Soit $f = h \circ g$ dérivable en x, h dérivable en g(x) et g dérivable en x.
>
> On admet que $(h \circ g)'(x) = h'(g(x))g'(x)$.
>
> *Exemple :* calculer la dérivée de $f(x) = \sin(x^2 + 1)$
>
> $$x \underset{g}{\xrightarrow{\text{"carré"}}} x^2 + 1 \underset{h}{\xrightarrow{\text{"sinus"}}} \sin(x^2 + 1)$$
>
> La dérivée de $f(x) = \sin(x^2 + 1)$ est le produit de deux dérivées : celle de « sinus » en $g(x)$ et celle de $g(x) = x^2 + 1$.
>
> $$\begin{aligned}[\sin(x^2 + 1)]' &= \sin'(x^2 + 1).(x^2 + 1)' \\ &= [\cos(x^2 + 1)].2x \\ &= 2x.\cos(x^2 + 1)\end{aligned}$$ »
>
> (Van Eergenbrugghe, Bousson, 2010)

L'exemple tiré du manuel Actimath 5ᵉ *(niveau de la classe de 1ᵉ en France)*

> « Formule (admise). Soit
>
> $$\begin{cases} f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \longrightarrow f(x) \text{ dérivable en } a \\ g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \longrightarrow g(x) \text{ dérivable en } f(a) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) \cdot g \\ \quad\ \downarrow \qquad\quad \downarrow \\ f'(x) g'(f(x)) \end{array}$$

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$$

(Delfeld et al, 2003)

Dans les deux cas, la notation spécifique pour les composées de fonctions, $h \circ g$ ou $g \circ f$, est superflue : elle n'est même pas utilisée pour exprimer la dérivée de ces composées parce qu'on la note par $(h \circ g)'(x) = h'(g(x)).g'(x)$ au lieu de $(h \circ g)'(x) = (h' \circ g)(x).g'(x)$ ou par $(g \circ f)'(x) = f'(x).g'(f(x))$ au lieu de $(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x).f'(x)$.

Dans les deux exemples, la formule est admise sans aucune justification ni raison d'être. Les deux manuels s'appuient sur les diagrammes avec les flèches reproduits ci-dessus pour expliquer le fonctionnement de la composition de fonctions. La raison probable de l'utilisation des diagrammes est l'absence de la notation « $y =\dots$ » qui aurait permis d'exprimer la composition de deux fonctions par la technique de changement de variable. De plus, ces diagrammes n'ont aucune instrumentalité parce qu'on ne peut pas les manipuler dans les techniques de calcul de la fonction composée et ils n'ont pas d'usage reconnu par la communauté scientifique.

Dans les deux cas, les flèches tantôt horizontales tantôt tournées vers le bas tentent de suggérer la formule de dérivation d'une fonction composée. Pourtant, les nombreux témoignages des élèves et des professeurs montrent les difficultés persistantes des élèves à comprendre la composition des fonctions et à retenir la formule de la dérivée d'une fonction composée sous la forme $(h \circ g)'(x) = h'(g(x)).g'(x)$. De plus, la notation $h'(g(x))$ pourrait poser aux élèves des difficultés analogues à celles qui ont été évoquées par l'élève MiMoiMolette à propos de la notation $\frac{df}{du}$ dans laquelle f et u désignent des fonctions lorsqu'il dit qu'il ne peut pas dériver une fonction par rapport à une autre fonction.

On ne connaît pas les raisons de ce choix par les auteurs des manuels cités. On ne peut que s'aligner sur l'explication donnée par Bosch et Chevallard (1999) déjà citée ci-dessus. Donc, certains interdits qui touchent l'utilisation des notations dx et dy sont probablement liés à leur lien avec les infinitésimaux dont le statut est critiqué par des mathématiciens.

8. — Formalisme de Leibniz pour introduire le calcul différentiel dans le contexte des extremums et des tangentes

Dans cette section largement inspirée du texte de Bernard, Citta, Krysinska (2011), nous présentons quelques éléments d'une proposition d'enseignement du début du calcul différentiel au niveau de l'enseignement du second degré. Cette proposition consiste à introduire la dérivée par le biais de la modélisation algébrique des extremums des fonctions et des tangentes aux courbes.

Dans ces deux cas, on s'appuie sur l'objet *tangente* non défini mathématiquement mais dont les élèves ont une certaine connaissance intuitive. Le travail de modélisation implique la nécessité de la confrontation du modèle avec cette connaissance.

A l'occasion de ces deux problématiques, des extremums des fonctions et des tangentes aux courbes, nous mettons en place des techniques algébriques qui permettent d'éviter les classiques calculs de limites : ces techniques sont inspirées par celles qu'a utilisées L'Hôpital dans les mêmes contextes. Elles exploitent la valence sémiotique et instrumentale des notations dy, dx et $\dfrac{dy}{dx}$.

Ces techniques mises au point sont testées de façon pragmatique afin de vérifier qu'elles produisent des résultats corrects ou conformes aux connaissances naïves relatives à l'objet *tangente*.

Commençons par expliquer nos choix didactiques :

— Nous avons placé le problème de l'extremum avant celui de la tangente car la tangente peut être vue comme une position extrême d'une sécante, autrement dit comme un problème d'extremum.

— Nous avons choisi des fonctions du 2e degré afin de pouvoir disposer des méthodes algébriques pour déterminer les extremums et les tangentes.

8. 1 *Problème d'extremum*

La méthode pour déterminer l'extremum sera mise au point sur l'exemple d'une fonction du deuxième degré et ensuite validée par le fait que la valeur extrême d'une telle fonction peut être calculée autrement.

Soit la fonction définie par $y = -x^2 + x$. Déterminons à vue son extremum.

Une approche expérimentale, souvent suggérée, par des élèves consiste à déplacer une règle en position horizontale parallèlement à elle-même vers le haut comme le suggère la figure 4. On y voit ainsi que le maximum de la fonction est atteint à l'intérieur d'un intervalle $[x, x+\Delta x]$ caractérisé par l'égalité $f(x) = f(x+\Delta x)$.

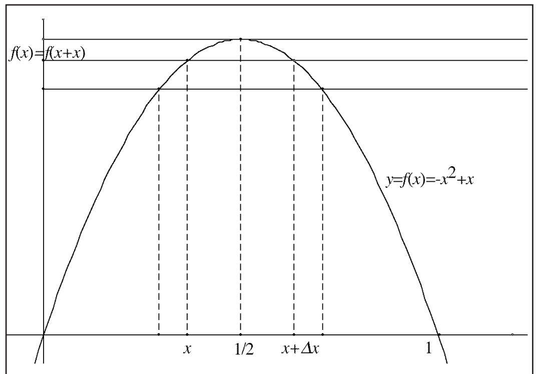


Figure 4 : Extremum de la fonction donnée par l'équation $y = -x^2 + x$

Plus x est proche de l'endroit où le maximum est atteint, plus la variation de y sur l'intervalle $[x, x+\Delta x]$ est faible. La figure 4 suggère que localiser l'extremum revient à calculer l'abscisse du point de contact en lequel la pente de la tangente est nulle : l'abscisse de ce point de contact est située dans l'intervalle $[x, x+\Delta x]$.

Nous nous contentons à ce stade d'une définition élémentaire de la droite tangente à une courbe, à savoir une droite qui n'a qu'un point (double) en commun avec la courbe et qui *ne peut pas la traverser franchement*. Ecrivons l'expression de la pente de la sécante passant par les points d'abscisse x et $x + \Delta x$, et imposons que cette pente soit nulle :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{-2x\Delta x - (\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x} = 0$$

$$-2x - \Delta x + 1 = 0$$

Comme, plus Δx est proche de 0, plus ces sécantes s'approchent de la position de tangente, nous imposons $\Delta x = 0$ et notons le résultat $\frac{dy}{dx}$. Nous arrivons à l'équation $\frac{dy}{dx} = -2x + 1 = 0$.

Celle-ci admet la solution $x = \frac{1}{2}$. C'est la valeur de x qui réalise le maximum de y. La formule bien connue de l'extremum d'une fonction du deuxième degré aurait donné $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$, ce qui confirme le résultat ci-dessus obtenu par l'annulation de Δx. La notation $\frac{dy}{dx}$ représente ici un tout inséparable.

Opérons aussi selon la méthode de Leibniz, à savoir calculer Δy :

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= -(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) + x^2 - x\\ &= -2x\Delta x - (\Delta x)^2 + \Delta x\end{aligned}$$

le poser égal à 0 et noter dy le résultat obtenu après avoir négligé le terme $(\Delta x)^2$ et remplacer Δx par dx :

$$dy = -2xdx + dx = (-2x + 1)dx = 0 .$$

En divisant l'équation par dx, on obtient $\frac{dy}{dx} = (-2x + 1) = 0$. Ces équations ont comme solution $x = \frac{1}{2}$ comme précédemment.

Remarquons que, dans ce cas, la notation $\frac{dy}{dx}$ représente bien une fraction.

8. 2 *Recherche d'une tangente*

Ainsi que nous l'avons précisé à la section précédente, la notion de tangente à une courbe est, à ce stade, très élémentaire. On verra qu'il est nécessaire par la suite de faire évoluer cette première conception de la tangente vers celle d'une droite qui, localement, approche le mieux la courbe. Cette nouvelle conception forcera les élèves à accepter que la tangente puisse avoir plusieurs points en commun avec la courbe et qu'elle puisse la traverser franchement. A la fin, la tangente pourra être définie comme une droite dont la pente est obtenue, soit comme limite du quotient des différences, soit comme le quotient des différentielles à la manière de Leibniz.

Notre choix didactique est de chercher une tangente de direction donnée, et non pas la tangente en un point donné, à la différence de ce qui est fréquemment proposé dans les manuels, et voici pourquoi :

— nous avons pu observer que le calcul de l'approximation du point de contact de la tangente dans une direction donnée est accessible à une majorité d'élèves ;

— plusieurs études démontrent que le calcul de la pente de la tangente en un point vue comme limite de pentes des sécantes n'est pas du tout évident pour beaucoup d'élèves car liée à la vision géométrique de la tangente comme limite des sécantes. Citons ici Schneider (1988), qui compare les deux possibilités en ces termes :

« S'il peut y avoir, pour certains élèves, plusieurs tangentes en un point, une droite de direction donnée ne peut être, aux yeux de tous, tangente à une courbe qu'en un seul point. C'est ce que postulent implicitement les élèves qui proposent de déterminer le maximum d'une fonction en faisant glisser une droite, parallèlement à l'axe Ox, jusqu'à ce qu'elle rencontre en un seul point la courbe représentative de cette fonction. » (Schneider, 1988, p.293) ;

— certains élèves voient la tangente parallèle à une droite de direction donnée comme la dernière droite sécante avec la courbe, celle qui est la plus éloignée, ramenant ainsi le problème de la tangente à celui de la recherche d'un extremum.

Ajoutons que ce choix didactique conduit à la dérivée en tant que fonction, comme cela était le cas de l'extremum. Envisageons la fonction définie par $y = -x^2 + x$ et cherchons à déterminer la tangente parallèle à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ (figure 5).

Commençons par une approche expérimentale qui consiste à faire glisser une règle sur le graphique de la courbe, paralèlement à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ le plus loin possible, c'est-à-dire sans perdre le contact avec la courbe (fig. 5). Cela revient à rendre maximum la différence $z = -x^2 + x - \frac{1}{2}x$. Nous cherchons cette valeur extrême, comme à la section 8.1, en traitant l'équation suivante en x et en Δx :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - \frac{1}{2}(x+\Delta x)}{\Delta x} - \frac{-x^2 + x - \frac{1}{2}x}{\Delta x} = 0$$

Notons qu'une simplification de l'égalité de droite conduit à :

$$\frac{(-(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)) - (-x^2 + x)}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$

On reconnaît, dans le membre de gauche de cette dernière égalité, la pente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de la

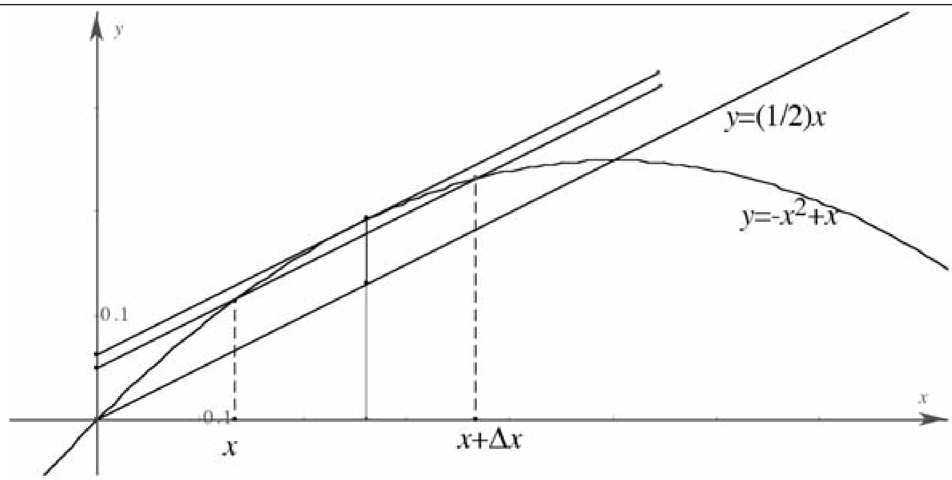


Figure 5 : Tangente à la courbe d'équation $y = -x^2 + x$ et parallèle à la droite $y = \frac{1}{2}x$

sécante qui joint les deux points de coordonnées (x, y) et $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ de la courbe d'équation $y = -x^2 + x$ et celle-ci doit valoir $\frac{1}{2}$.

Le point de contact d'une tangente de même pente aura son abscisse situé dans l'intervalle $[x, x + \Delta x]$. Après simplifications, l'équation

$$\frac{(-(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x)) - (-x^2 + x)}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$

s'écrit :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2x\Delta x - (\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$

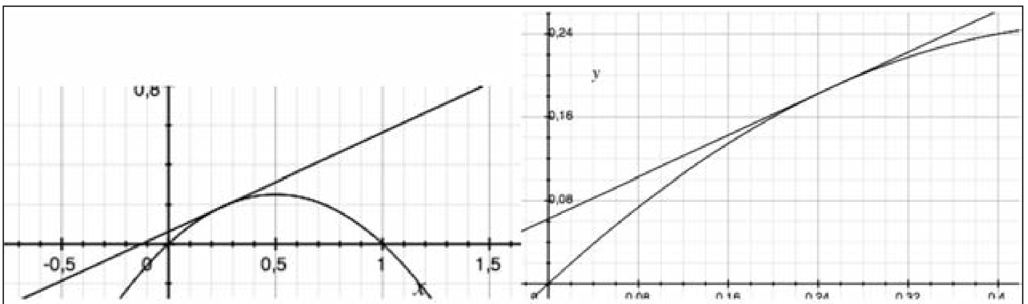
$$-2x - \Delta x + 1 = \frac{1}{2}$$

Comme, plus Δx est proche de 0, plus la sécante est proche de la position tangente, on décide de poser $\Delta x = 0$ et de noter le résultat $\frac{dy}{dx}$. On arrive ainsi à : $\frac{dy}{dx} = -2x + 1 = \frac{1}{2}$.

D'où $x = \frac{1}{4}$. L'ordonnée de ce point de la courbe vaut $\frac{3}{16}$ et une équation de la droite de pente $\frac{1}{2}$ passant par ce point est $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$. Cette droite est-elle la tangente cherchée ?

Maximise-t-elle l'écart entre la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ et la courbe d'équation $y = -x^2 + x$? Cet écart est donné par la fonction $z = -x^2 + x - \frac{1}{2}x$. Le maximum de cette fonction se produit bien en $x = \frac{1}{4}$.

Les figures 6a) et 6b) montrent, de plus en plus près, les positions relatives de la courbe d'équation $y = -x^2 + x$ et de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$ à proximité du point d'abscisse $x = \frac{1}{4}$.



a) b)

Figure 6 : Vérification si la droite $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$ est tangente à la courbe $y = -x^2 + x$

La droite colle au graphique au point qu'elle se superpose localement à lui. Mais alors, cette droite n'aurait-elle pas plusieurs points en commun avec la courbe ? Pour le savoir, étudions le nombre de solutions de l'équation

$$-x^2 + x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \quad \text{ou} \quad x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0 .$$

En l'écrivant $[x - \frac{1}{4}]^2$, on voit que $x = \frac{1}{4}$ est l'unique racine (double) de cette équation. C'est l'abscisse du point de contact entre la droite et la courbe. La droite n'a donc qu'un seul point commun avec la courbe.

Voici une autre façon de procéder, plus proche de celle de Leibniz. On calcule l'accroissement entre deux points d'abscisses x et $x + \Delta x$:

$$\Delta y = -(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) + x^2 - x$$
$$= -2x\Delta x - (\Delta x)^2 + \Delta x$$

Comme Δx est très petit, on élimine le terme en $(\Delta x)^2$ et on note le résultat dy :

$$dy = -2xdx + dx = (-2x + 1)dx .$$

On calcule alors le quotient des différentielles en divisant la dernière égalité par dx :

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 1.$$

Ce quotient donne la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse x et c'est en $x = \frac{1}{4}$ que cette pente est égale à $\frac{1}{2}$.

C'est bien le même résultat que précédemment. En conclusion, bien qu'au cours des deux calculs, on ait transgressé certaines règles de simplifcation algébrique (division par $\Delta x = 0$ ou négligence de certains termes), le résultat final est le même et il est correct.

9. — Quelques conclusions

L'analyse du débat entre élèves a permis de mettre en évidence leur conception étriquée de la rigueur mathématique et les difficultés à expliquer d'une manière éclairante et convaincante la signification des notations comme dy et dx. La consultation des traités anglophones du calculus cités dans ce texte a pu montrer l'intérêt chez ces auteurs pour les notations de Leibniz à cause de leur très grande force explicative, notamment dans le cas des formules de dérivation des fonctions composées et des fonctions réciproques. La consultation de quelques manuels belges francophones laisse penser que l'absence de ces notations a poussé leurs auteurs à admettre ces formules sans aucune raison d'être, juste accompagnées des schémas d'explication fantaisistes et inefficaces.

L'étude du traité de L'Hôpital a permis de comprendre la finalité du formalisme de Leibniz. Elle a aussi inspiré un parcours pour enseigner les débuts de l'analyse sans qu'il soit précédé par les techniques générales du calcul des limites. Dans ce parcours, le calcul des dérivées exprimé avec les notations de Leibniz est associé d'emblée à la modélisation de l'extremum et de la pente de tangente à une courbe. Un tel parcours a pour le but de rendre intelligible l'utilisation de la notation du type dans plusieurs techniques déjà mentionnées et plus particulièrement dans la formule $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$. Il peut aussi servir d'alternative à l'organisation mathématique répandue dans des manuels scolaires belges francophones qui est faussement hypothético-déductive.

Bibliographie

Artigue M., & Viennot L. (1986), La notion de différentielle en mathématiques et en physique dans l'enseignement supérieur, *Actes de la IVe école d'été de didactique des mathématiques*,Paris : Publications de l'IREM de Paris 7.

Ayres F., (1978),*Théorie et applications du calcul différentiel et intégral*, Série Schaum, NY : McGraw-Hill,

Bosch M., & Chevallard Y., (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, en ligne

yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf ou in *Recherches en didactique de Mathématiques, Vol 19*, n°1, pp 77-124

Bernard F., Citta M., & Krysinska M., (2011), Etude du formalisme de Leibniz : calcul différentiel et intégral, document non publié, GEM-Université Catholique de Louvain

Delfeld H. & al, (2003), *Actimath*, 5ème, *Mathématiques générales, Analyse*, Bruxelles :Van In

Leibniz G.,W., (1850), Leibnizens mathematische Schriften, Halle : Gerhardt

L'Hôpital, (1716), *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, 2e edition, Paris : François Montalant

Forum, Futura-Sciences : les forums de la science (2008), en ligne http://forums.futura-sciences.com/mathematiques-college-lycee/205718-rigueur-de-notation-de-leibniz.html

Schneider M., (1988), *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives*, Thèse de doctorat, Université catholique de Louvain

Schneider M., (2009) *Traité de didactique des mathématiques*, Editions de l'Université de Liège

Stewart J., (2001) *Analyse, concepts et contexte*, Bruxelles : De Boeck Université

Swokowski (1993), *Analyse*, 5e édition, Bruxelles : De Boeck Université

Van Eergenbrugghe A., & Bousson A., (2010), *CQFD* 5ème, Bruxelles : De Boeck