
GRANDEURS ET MESURES

Naïma BEDJAOUI-TEBBAL
Université de Tlemcen

Résumé : Cet article est écrit en réponse à une erreur récurrente commise par les étudiants lors de la résolution d'un exercice sur la formule de Taylor. Cette erreur nous amène à revenir sur l'importance de la distinction entre les notions de grandeurs et de mesures dans l'enseignement, ainsi que les conséquences de certains non-dits ou sous-entendus.

Dans l'avant-propos de l'ouvrage « Grandeurs et mesure Cycle 3 » [8], nous pouvons lire :

« L'apprentissage des grandeurs joue un rôle important dans les mathématiques que ce soit pour le développement du raisonnement, le renforcement de l'esprit critique [...]. Il construit un chemin entre les insuffisances du perceptif, l'intérêt des instruments de mesure... et la puissance du raisonnement (dont le calcul) ».

Mais, par expérience, force est de constater que les notions de *grandeur* et *mesure* restent les composants d'un brouillard mathé-

matique dans lequel évoluent certains élèves, voire même certains étudiants. Aucun niveau n'est épargné. Ce constat est déjà mentionné par Evelyne Barbin[1] dans l'article « L'arithmétisation des grandeurs », où elle cite également le numéro 44 de la revue Repères Irem « motivé particulièrement par la disparition de la notion de grandeur dans l'enseignement secondaire ».

Comme indiqué dans le résumé, cet article est le fruit d'une réflexion s'appuyant sur le mode de résolution, par des étudiants de 1ère année (DEUG ou LMD), d'un exercice sur la formule de Taylor.

Il s'agit de l'exercice suivant : « En appliquant la formule de Taylor et, sans utiliser de calculatrice, calculer à 10^{-4} près, $\cos(30,1^\circ)$ »

Il faut donc appliquer la formule de Taylor à la fonction cosinus, mettre en avant le fait que la mesure de l'angle, dans ce cas, doit être donnée en radians et qu'il suffit de convertir en radians la mesure de l'angle donnée en degrés. Malheureusement, depuis une quinzaine d'années, de plus en plus d'étudiants écrivent :

« Soit $n \in \mathbb{N}$, a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction définie et n fois dérivable sur le segment $[a, b]$, $(n + 1)$ fois dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un réel c de $]a, b[$:

$$f(b) = f(a) + \frac{(b - a)}{1!} f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!} f''(a) + \dots \\ \dots + \frac{(b - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c)$$

En considérant que f est la fonction cosinus, cela s'écrit :

$$\cos b = \cos a - \frac{(b - a)}{1!} \sin a - \frac{(b - a)^2}{2!} \cos a + \dots$$

et, en posant $b = 30,1$ et $a = 30$, on obtient :

$$\cos 30,1 = \cos 30^\circ - 10^{-1} \sin 30^\circ - \frac{10^{-2}}{2!} \cos 30^\circ + \dots \\ = \dots \\ = 0,8567 \gg$$

Comparant le résultat trouvé $\cos 30,1^\circ = 0,8567$ avec celui donné par la calculatrice $\cos 30,1^\circ = 0,8651$, l'étudiant ne comprend pas, convaincu cependant que la machine ne se trompe pas.

Il ignore que des conversions se font. « *Le calcul sur machine reste une opération incontrôlable dans laquelle on ne sait pas ce qu'on*

fait » écrit, à juste titre, Rudolf Bkouche dans son article intitulé « Des tice dans l'enseignement des mathématiques » [4].

Pourquoi l'étudiant oublie-t-il, si toutefois il l'a compris auparavant, que les fonctions trigonométriques associent à chaque nombre réel les lignes trigonométriques de l'angle que ce nombre mesure en radians ? Il s'agit d'étudiants connaissant la formule de Taylor, donc ayant un certain niveau en mathématiques.

Pourquoi cette précipitation sur l'application numérique sans penser d'abord à l'unité de mesure à choisir ?

L'erreur découle entre autres des non-dits ou peu-dits concernant l'usage des fonctions sinus, cosinus... L'importance de l'unité, qui paraît pour certains enseignants évidente, ou, du moins sous-entendue, ne semble pas assez mise en valeur.

Comment les lignes trigonométriques puis les fonctions trigonométriques sont-elles assimilées par l'élève au collège puis au lycée ?

En classe de 4ème, on commence par le cosinus d'un angle aigu. Les sinus et tangente sont introduits en classe de 3ème. Ces trois notions sont définies comme rapport de deux longueurs dans un triangle rectangle et l'angle est considéré comme grandeur.

Il est clair, d'après le théorème de Thalès, que si l'on considère deux triangles semblables ABC et A'B'C' les lignes trigonométriques des angles A et A' (ou B et B' ou encore C et C') ne changent pas. Les formules telles que :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

sont obtenues avec des angles considérés comme grandeurs. Par conséquent, l'unité de mesure utilisée pour l'application numérique importe peu.

D'autre part, les grandeurs enseignées à l'école élémentaire : longueurs, masses, aires... sont associées à des mesures, d'où la confusion de ces deux notions. Il est important d'éviter cette confusion et d'insister sur le fait que la notion de grandeur est fort abstraite. A ce propos, nous reprenons la remarque faite par Rudolf Bkouche dans son article « Sur la dimension culturelle de l'enseignement » [5] :

« Aujourd'hui, sous l'influence d'une conception moralisante de l'interdisciplinarité, on réintroduit les grandeurs pour faire « concret » et rapprocher l'enseignement des mathématiques de celui de la physique. On commet ici une double erreur. D'une part, la notion de grandeur n'est pas concrète, c'est même l'une des premières abstractions à l'origine du développement des mathématiques, d'autre part, c'est un travail sur les grandeurs qui a conduit au développement de l'algèbre... La première question qui se pose à propos des grandeurs est de les comparer, ce qui conduit au mesurage... On est ainsi conduit à la notion de mesure. »

Mais comparaison et mesurage sont plus difficiles lorsqu'il s'agit des angles. La comparaison est plus naturelle pour les mesures de longueurs que pour les mesures d'angles. Disposant de deux segments, on peut voir quel est le plus grand. La question est plus difficile pour les angles.

L'erreur discutée dans cet article n'est que l'arbre qui cache la « forêt des insuffisances dans l'enseignement des mathématiques ». Une forêt de plus en plus dense en raison de l'allègement, pour ne pas dire l'appauvrissement des programmes d'une part et du formatage de l'esprit de l'élève dès l'école élémentaire, d'autre part.

Il s'agit donc de remettre en question divers points dans l'enseignement.

L'usage de la même unité d'angles fait oublier son importance, mais prouve, au fil du temps, le danger de mesurer avec la même unité. L'adoption d'un seul système d'unités d'angles permet de contourner inconsciemment les problèmes mais elle a parfois de mauvaises répercussions, comme c'est le cas dans l'exemple proposé dans cet article. Les difficultés peuvent être évitées mais la confusion réapparaît tôt ou tard. Il est donc nécessaire d'habituer l'élève à plus de rigueur dans les calculs. Le choix des unités doit s'adapter aux problèmes : les dimensions d'un livre s'expriment en cm alors qu'une distance entre deux villes est évaluée en km.

Il faut, ici, revenir sur le programme de Descartes qui, en fixant une unité de longueur permet de rendre le calcul sur les longueurs analogue au calcul sur les nombres. Cette façon de calculer occulte la loi des homogènes de Viète et, par cela même, la géométrie sous-jacente au calcul.

Rappelons que Viète, dans son « Introduction à l'art analytique » [9], précise la distinction entre le « *logistique numérique* », c'est-à-dire le calcul sur les nombres et le « *logistique spécifique* », c'est-à-dire le calcul sur les grandeurs. Il note par des consonnes les « connues » et par des voyelles les « inconnues ». D'autre part, Viète énonce la loi des homogènes, deux grandeurs étant dites homogènes si elles sont de même genre (des longueurs, des aires, des volumes, des masses, ...). On ne peut ajouter ou soustraire que deux grandeurs homogènes et le résultat est une grandeur homogène. Ceci contraint donc à n'avoir dans une égalité que des grandeurs de même genre. Si b, c, d sont des longueurs, on ne peut écrire $b + c = dd$, puisque $b + c$ est une longueur tandis que dd représente une aire. De même on n'écrit pas $b + cc$ car on ne peut ajouter une aire à une longueur. Descartes abandonnera la loi des homo-

gènes en introduisant une unité de longueur rendant ainsi le calcul sur les longueurs analogue au calcul numérique.

Amy Dahan-Dalmédico et Jeanne Pfeiffer écrivent [6] :

« Il [Descartes] voit en l'algèbre une méthode puissante pour supporter le raisonnement sur des quantités abstraites et inconnues. De son point de vue, l'algèbre, en rendant automatique, « mécanique », les mathématiques, permet une simplification de la pensée, une économie d'efforts. »

Dans un souci d'économie d'efforts, la géométrie analytique est enseignée avec beaucoup d'« implicite ». La géométrie se perd dans les calculs en raison du non-respect de la loi des homogènes et l'« automathe » s'avoue très satisfait. L'automathe est l'élève qui, selon Stella Baruk [3], « reproduit un ensemble de procédures sans rien y comprendre ». Le terme « automathe » est repris, entre autres, par Joëlle Delattre [7] pour désigner les élèves qui « apprennent par cœur formules et recettes, exercices types et corrigés-types et au moindre écart, les voilà perdus ! ».

Pour essayer d'analyser l'erreur qui a suscité l'écriture de cet article, il faut également s'intéresser à la place consacrée à l'apprentissage des angles et de leur mesure, en particulier l'introduction du radian.

Dans l'histoire, le radian ne s'est imposé que très tardivement. D'après « Le dictionnaire des mathématiques élémentaires » de Stella Baruk [2] :

« le mot « radian » apparaît pour la première fois imprimé en 1873 dans des textes d'examens proposés au Queen's College de Belfast

par James Thomson, frère du célèbre physicien Lord Kelvin (1856-1940), et, après quelques délibérations, est adopté par d'autres universités. Mais cette émergence était préparée par plus d'un siècle d'utilisation implicite.

L'œuvre d'Euler (1707-1783), en particulier son Introduction à l'analyse infinitésimale de 1748, dans le même temps qu'elle donne l'impulsion définitive à l'utilisation de π , impose le cercle de rayon unité. Et c'est alors qu'Euler écrit : « Ainsi, comme π exprime un arc de 180° , $\sin 0\pi = 0$, $\cos 0\pi = 1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, ... ».

Euler omet de dire, par exemple, « $\frac{\pi}{2}$ radians » parce que le mot n'existe pas encore, mais cette omission va précisément le rendre nécessaire ; aujourd'hui nous disposons du mot et de sa notation abrégée, « rad », mais nous écrivons aussi « $\sin \frac{\pi}{2}$ » par économie et parce que le radian est devenu une unité tout à fait 'naturelle' . »

C'est justement un tort d'user de cette économie sans en connaître les raisons. L'économie se construit. Il ne s'agit pas d'apprendre une méthode rapide, et de l'appliquer comme une banalité. Une confusion règne dans l'esprit de l'étudiant qui calcule... sans vérifier l'unité de mesure utilisée. On peut donc s'interroger sur les circonstances qui amènent à un tel conditionnement de l'élève.

A quel moment faut-il introduire le radian ? La définition du radian peut-être donnée dès qu'on parle de longueur d'un arc de cercle, en CM2 ou en sixième.

Si on définit le radian comme la mesure de l'arc dont la longueur est égale au rayon, on peut alors montrer que la mesure en radian d'un arc est le rapport de la longueur de l'arc au rayon du cercle. La mesure en radian apparaît comme un nombre pur (sans dimension). C'est la différence avec la mesure en degré. L'usage d'une simple ficelle de même longueur que le rayon du cercle suffit pour construire un arc d'un radian. Mais on sait que cette construction est impossible à l'aide de la règle et du compas.

Dans le but d'une étude exploratrice, j'ai soumis un questionnaire sur les mesures d'angles à un échantillon de 123 étudiants de niveau licence ou master.

A la question : « Donner une définition du radian », 104 ont répondu : « Le radian est une mesure d'angle telle que $180^\circ = \pi$ radians ». 19 seulement ont donné la réponse : « Le radian est la mesure de l'angle qui sous-tend un arc de cercle dont la longueur vaut le rayon ».

La proportion d'étudiants associant le radian à la longueur du rayon reste faible, d'où la nécessité d'indiquer et d'insister sur l'étymologie du mot. L'élève mémorise mieux cette unité de mesure : radian, du latin *radius* rayon, ce qui justifie que l'usage d'une ficelle de longueur le « *radius* » suffit pour mesurer un arc d'un radian.

La notion de radian étant donnée, on définit π comme la mesure du demi-cercle. A ce moment-là, la difficulté n'est pas pédagogique mais mathématique à cause de l'abus de langage lié à π . π est un nombre d'une part, et une mesure d'angle d'autre part. C'est une difficulté de concevoir un objet mathématique à la fois comme mesure et nombre pur.

Le tour et certains de ses sous-multiples constituent des unités de mesure d'angle beau-

coup plus naturelle que le radian. En effet, en tours ou en degrés la mesure d'un angle droit est donnée par un nombre rationnel $\frac{1}{4}$ ou 90 mais

en radians cette mesure est $\frac{\pi}{4}$, nombre irrationnel.

Cependant, ni le tour ni le degré ne permettent les commodités du radian dans le calcul différentiel. En fait, le radian s'est imposé pour des raisons analogues à celles qui furent à l'origine de la base du logarithme népérien : dans la base de logarithme népérien, la dérivée de la fonction exponentielle est « elle-même ». Si on note x la mesure d'un arc en radian, on montre

aisément que lorsque x tend vers 0, alors $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1, ce qui implique que la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus. Cette propriété caractérise la mesure en radian et en fait son intérêt en analyse.

A partir du moment où le radian puis les fonctions trigonométriques sont introduites, il est très important d'insister sur le fait que la formule du développement de la fonction cosinus utilisée plus haut s'obtient en prenant le radian comme unité de mesure des angles.

Mais si l'on considère la fonction \sin° qui, à chaque nombre réel, associe le sinus de l'angle que ce nombre mesure en degrés, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^\circ x}{x} \neq 1.$$

Il est donc nécessaire de renforcer l'importance de l'unité utilisée. A cet effet, on pourrait proposer aux étudiants de calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (x \text{ exprimé en radians})$$

et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^\circ x}{x}$ (x exprimé en degrés).

Considérant le cercle de rayon 1 ci-contre, on montre que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ en encadrant l'aire

\mathcal{A} du secteur OAB défini par l'arc x par les aires respectives \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 des triangles OAB et OAC.

Cela s'écrit : $\mathcal{A}_1 < \mathcal{A} < \mathcal{A}_2$, c'est-à-dire :

$$2 \text{ OA.HB} < 2 \text{ OA} \cdot x < 2 \text{ OA.AC}$$

et se ramène, après simplification, à

$$\text{HB} < x < \text{AC}$$

qui est en fait une comparaison de longueurs.

Ainsi,

$$\sin x < x < \tan x \quad (1)$$

soit

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

d'où

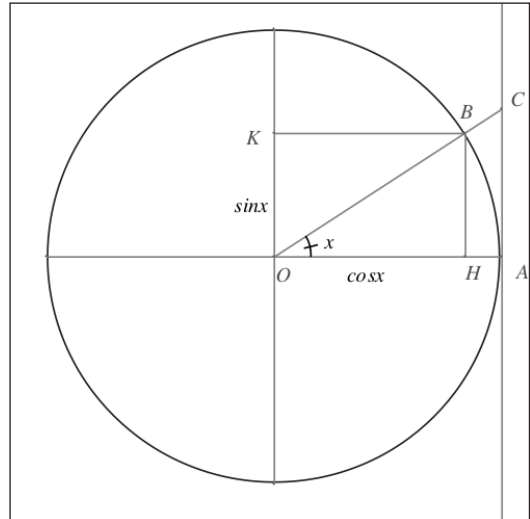
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

ce qui montre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

A présent, si l'on considère la fonction \cos° qui, à chaque nombre réel, associe le cosinus de l'angle que ce nombre mesure en degrés alors la longueur de l'arc d'angle x (en degrés) est $\frac{\pi}{180}x$ et la relation (1) s'écrit :

$$\sin^\circ x < \frac{\pi}{180}x < \frac{\sin^\circ x}{\cos^\circ x},$$



ce qui donne :

$$\frac{\pi}{180} \cos^\circ x < \frac{\sin^\circ x}{x} < \frac{\pi}{180}$$

et, par passage à la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^\circ x}{x} = \frac{\pi}{180}.$$

Si l'on pose : $F = \cos^\circ$ et $G = \sin^\circ$, on montre que $F' = \frac{\pi}{180} G$ et que $G' = \frac{\pi}{180} F$.

Effectués par les étudiants, les calculs précédents fixent les idées et montrent les avantages incontestables du radian par rapport aux autres unités de mesure d'angles. On voit bien que si x n'est pas exprimé en radian, il faut tenir compte d'un facteur multiplicatif pour les dérivées des fonctions trigonométriques.

Avec ceci, le calcul de $\cos(30,1^\circ)$ se fait sans problème si l'on ne veut pas faire de conver-

sion, par application de la formule de Taylor.
La seule condition est de poser :

$$\cos(30,1^\circ) = F(30,1)$$

et non

$$\cos(30,1^\circ) = f(30,1)$$

où f est la fonction cosinus usuelle.

Ainsi $b = 30,1$, $a = 30$ et

$$\begin{aligned} \cos(30,1^\circ) &= \cos^\circ(30,1) = \\ &= \cos^\circ 30 - \left(\frac{\pi}{180} \sin 30^\circ\right) 10^{-1} - \\ &\quad \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \cos 30^\circ \frac{10^{-2}}{2!} + \dots \\ &= \dots \\ &= 0,8651 \gg \end{aligned}$$

L'application de la formule de Taylor n'est pas la seule occasion mettant en évidence les inconvénients des non-dits. Au lycée déjà, dans l'équation du mouvement sinusoïdal

$$x = \sin(\omega x + \varphi),$$

ω est choisi de façon que $\omega x + \varphi$ soit mesuré en radians, si bien qu'en dérivant, on obtient

$$\omega \cos(\omega x + \varphi).$$

Un changement d'unité nécessite autant d'attention que pour l'exemple déjà étudié.

Il ne s'agit d'ailleurs pas seulement des angles, mais de n'importe quelle grandeur. Il est très utile de demander par exemple à un élève, dès l'école élémentaire de déterminer la distance entre deux villes en utilisant une carte au 1/1000000 ème. Il faut également montrer aux élèves que pour le même changement d'échelle, la constante de proportionnalité pour un

calcul de distance diffère de celle obtenue pour un calcul d'aire. Avec ce genre d'exercice la notion de changement d'unités prend plus de sens pour lui et montre que le choix des unités dépend des ordres de grandeur. Cependant, les exercices proposés à l'école élémentaire restent plus clairs que les problèmes de sinus et \sin° . Il est donc souhaitable, au lycée, de demander aux élèves de faire des changements de repères, et de leur faire écrire, par exemple, l'équation du cercle dans un repère non orthonormé. Ceux qui y parviendront seront surpris du résultat !

En conclusion :

La notion d'angle n'est pas assez développée dans l'enseignement. D'ailleurs, même dans le système international d'unités, un problème se pose. Considérablement modifié aujourd'hui, ce système comprend 7 unités fondamentales : *le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le kelvin, la mole et la candéla*, à partir desquelles sont obtenues, par analyse dimensionnelle **toutes** les autres unités. A notre niveau, remarquons simplement que la grandeur « angle » y est absente. Notons par ailleurs, une difficulté de langage sur la notion d'angle. On parle de « longueur » d'un « segment » ou d'« aire » d'une « surface », mais simplement de « mesure » d'un « angle », sans terme spécifique. Alors qu'on peut distinguer le terme « segment » qui désigne l'objet mathématique et « longueur » qui désigne la grandeur, c'est le même terme « angle » qui désigne l'objet géométrique et la grandeur correspondante. Par conséquent, essayons de donner plus de place à la notion d'angle dans l'enseignement.

D'autre part, la loi des homogènes manque dans l'enseignement des mathématiques. Cela donne l'impression que les mathématiciens calculent sans unités, tandis que les physiciens restent attachés à leur équation aux dimensions pour vérifier

l'homogénéité de leurs formules. Pourtant l'analyse dimensionnelle peut être considérée comme une forme de loi des homogènes. La question n'est donc plus celle de la distinction entre mathématiciens et physiciens, mais celle de la distinction entre calcul numérique et calcul des grandeurs tel que le faisait Viète.

En choisissant une unité, Descartes rejette la loi des homogènes ce qui, d'une part simplifie les calculs et d'autre part fait perdre de vue leur signification géométrique. Mais en

ramenant les problèmes de géométrie à des problèmes d'algèbre, Descartes ne se doutait pas de toutes les simplifications que l'enseignement ferait subir à sa méthode, entraînant de fâcheuses conséquences.

Le point de départ de cet article est une erreur dans le choix d'une unité de mesure par les étudiants. Essayant de décortiquer cette erreur, on s'aperçoit qu'elle est plus profonde qu'en apparence puisqu'elle révèle des carences insoupçonnées dans l'enseignement actuel.

Bibliographie

- [1]. E. Barbin. L'arithmétisation des grandeurs. Repères Irem, n°68, juillet 2007, pp.5-20.
- [2]. S. Baruk. Dictionnaire de mathématiques élémentaires. Seuil. 1992.
- [3]. S. Baruk. Fabrice ou l'école des mathématiques. Seuil 2001.
- [4]. R. Bkouche. Des tice dans l'enseignement des mathématiques. Repères Irem, n°89, octobre 2012, pp.39-55.
- [5]. R. Bkouche. Espace mathématiques francophone. Genève 02-07 février 2012.
- [6]. A. Dahan-Dalmédico et J.Pfeiffer, Une histoire des mathématiques. Routes et dédales. Seuil, coll. « Points Sciences » 1986.
- [7]. J. Delattre. Sens interdit, sens unique ou sens authentique ? Repères Irem, n°7, avril 1992, pp.100-114.
- [8]. Groupe Ecole Primaire de l'Irem de Lille, Coordination Louis ROYE.
Grandeurs et mesure Cycle3. Enseigner et apprendre les grandeurs pour la résolution des problèmes. Scéren. CRDP NORD-PAS DE CALAIS. 2007.
- [9]. J.-L.Vauléard. La nouvelle algèbre de Monsieur Viète (1630), « Corpus des œuvres de 1986, philosophie en langue française » Fayard Paris.