REPERES - IREM. N° 100 - juillet 2015

QUELLES SONT LES CONCEPTIONS D'ELEVES, D'ENSEIGNANTS, DE MATHEMATICIENS CONTEMPORAINS SUR LA DEFINITION ?

Qu'en est-il de l'activité de définition ? Vers un modèle de l'activité de définition en mathématiques

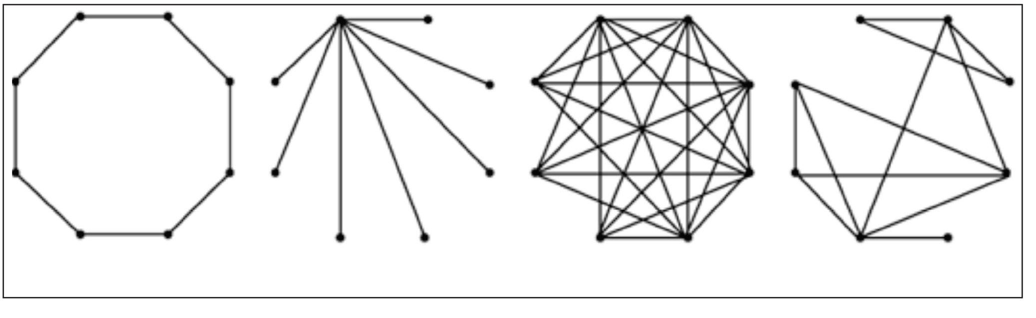
Cécile OUVRIER-BUFFET
CEREP – Université de Reims
Champagne-Ardenne

1. — Introduction - une problématique de la définition en mathématiques

Pour introduire la problématique de la définition qui sera abordée dans cet article, prenons la situation suivante :

« Parmi ces quatre graphes, lequel vous paraît le plus complexe ? Comment dire que tel graphe est plus complexe que tel autre ? Peut-on classer les quatre graphes par complexité croissante ? » (Bulletin 480 de l'APMEP, 2009).

Cette situation est commentée par l'auteur, Daniel Reisz, de la façon suivante : « Ces questions, volontairement vagues, ont été posées à des étudiants américains dans le cadre d'une compétition mathématique. Il n'y avait pas de



« réponse exacte » dans le cadre de leurs connaissances et chacun était donc amené à créer sa propre notion de complexité. »

Il s'agit ici d'une situation où une définition est demandée, avec la donnée d'exemples ou non-exemples de graphes dits complexes. L'énoncé qui serait produit aurait vraisemblablement une validité locale car il n'est *a priori* pas question de réutiliser la définition produite de « graphe complexe » (étant donné le contexte et l'énoncé). Par ailleurs, la (ou les) définition(s) produite(s), les caractéristiques retenues, les concepts interrogés, la génération d'autres exemples, non-exemples voire contre-exemples dépendraient clairement de la gestion de cette situation en classe, si celle-ci était proposée en classe. De même, la formulation de cette (ou ces) définition(s) serait influencée en particulier par les conceptions des élèves (voire enseignants) sur ce que doit être une définition, conceptions construites essentiellement implicitement lors de leur fréquentation de la culture mathématique dans le cadre scolaire voire extra-scolaire. En définitive, dans cette situation, ce n'est pas tant les définitions qui sont interrogées, mais l'activité de production de définitions elle-même : comment construit-on des définitions en mathématiques ? Peut-on caractériser et décrire finement l'activité de définition ?

Actuellement, dans les travaux portant sur l'étude des pratiques de mathématiciens, il n'existe que peu voire pas de travaux sur l'activité de définition elle-même : certains travaux identifient cependant des éléments constitutifs de conceptions (de mathématiciens, d'enseignants, d'étudiants) sur les définitions. L'activité de définition, qui relève de la pratique même des mathématiciens, peut intervenir à différents moments du processus de recherche et peut également dépendre de la branche des mathématiques étudiée.

Nous avons étudié la complexité de l'activité de définition en mathématiques et les heuristiques qui la composent par la modélisation de conceptions emblématiques sur le sujet, et par l'identification de types de problèmes qui permettent effectivement d'enclencher une activité de définition (Ouvrier-Buffet, 2013). L'un des éléments qui a permis cette étude est constitué d'entretiens avec des mathématiciens : nous nous proposons d'apporter cet éclairage dans cet article.

La première partie de cet article recensera des conceptions de chercheurs étudiant les définitions dans l'enseignement, mais fera aussi état des résultats de travaux sur les conceptions d'élèves et d'enseignants sur les définitions en mathématiques. La deuxième partie présentera les résultats d'entretiens conduits avec huit mathématiciens sur leur activité de définition : une présentation de différents moments de travail sur les définitions en sera la finalité. La conclusion permettra de revenir sur la modélisation de l'activité de définition et sur l'implémentation en classe d'une activité proche de l'activité de recherche en mathématiques.

2. — Conceptions de chercheurs, d'élèves et d'enseignants sur la définition

L'objectif principal de l'état de ces conceptions (ce terme est à prendre dans une acception usuelle et non théorique) est de mettre en évidence ce que sont des définitions mathématiques pour des élèves et enseignants et de rapporter deux stratégies de définitions déterminées par Zaslavsky & Shir (2005) lors d'une étude sur les conceptions justement. Nous commençons par faire état de ce que doit être une définition en mathématiques pour les chercheurs ayant travaillé sur les conceptions d'élèves et d'enseignants.

2. 1. *Conceptions de chercheurs travaillant sur les conceptions sur la définition*

Zaslavsky & Shir (2002, 2005) précisent ce que doit être une définition, ce qui conditionne implicitement leur façon de construire des questionnaires afin de déterminer les conceptions d'étudiants ou d'enseignants sur les définitions en mathématiques.

Pour eux, une définition doit être :

— non contradictoire ;
— non ambigüe ;
— indépendante des représentations ;
— non circulaire (éviter le cercle vicieux et définir en amont les termes qui la composent) ;
— minimale.

Nous trouvons davantage de précisions sur les critères des définitions dans Van Dormolen & Zaslavsky (2003), sur l'exemple du concept de « fonction périodique ». Dans ce texte, une définition « doit » satisfaire plusieurs critères :

— sur le plan logique, elle doit satisfaire les critères :
  • de hiérarchie (il s'agit de définir en amont les termes nécessaires) ;
  • d'existence ;
  • d'équivalence (la preuve de l'équivalence de caractéristiques doit être établie, une définition est retenue, les autres caractéristiques étant des théorèmes) ;
  • d'axiomatisation (une définition doit être un élément d'une théorie axiomatique) ;
— et sur le plan des habitudes (c'est-à-dire la culture commune, partagée par tous), la définition doit satisfaire les critères :
  • de minimalité ;
  • d'élégance ;
  • de dégénération : il s'agit du cas où l'on ne veut pas inclure certains cas particuliers dans la définition d'un concept (par exemple, pour définir les polynômes du second degré $ax^2 + bx + c$, on exclut le cas $a = 0$).

Les différents critères d'une définition mathématique recensés ici sont classiques et conditionnent inévitablement la façon dont ces chercheurs vont construire leurs questionnaires pour étudier les conceptions d'étudiants, d'élèves et d'enseignants sur la définition. Soulignons qu'aucun cadre théorique particulier n'est utilisé dans ces travaux pour modéliser une conception. De plus, la définition y est vue essentiellement comme un énoncé particulier impliquant des propriétés mathématiques, énoncé à caractère définitif et immuable, et n'est pas étudiée comme le résultat d'une activité de construction de définitions (où les définitions évoluent). Ainsi, il n'est pas étonnant que les critères listés ci-dessus en réfèrent à une vision axiomatique de la définition, la définition considérée comme élément d'une théorie mathématique préexistante. On peut donc s'interroger sur la place que pourraient avoir des activités où seraient construites des définitions. Nous y reviendrons dans la suite de ce texte.

2. 2. *Conceptions d'élèves sur la définition*

Zaslavsky & Shir (2002) proposent une étude de conceptions d'élèves sur les définitions « acceptables » en géométrie. Elles utilisent le même questionnaire pour des élèves et pour des enseignants, où huit énoncés relatifs au carré sont proposés : ceux-ci sont à accepter ou rejeter comme définition du carré, et une explication est demandée. Zaslavsky & Shir (2002) répertorient ainsi les arguments d'élèves de 12 ans suivant trois critères : des critères mathématiques, des critères perceptifs et des critères relatifs à la fonction de communication d'une définition. Ainsi, les justifications mathématiques des élèves, pour accepter ou rejeter une définition du carré s'attachent à étudier si l'énoncé est bien une condition nécessaire et suffisante, s'il est équivalent à une définition connue, s'il est utile (aspect opératoire), s'il est minimal, s'il est basé sur des concepts connus. La fonction de communication d'une définition fait ressortir différentes exigences pour les définitions de nature langagière chez les élèves, qui nous renseignent sur leur culture mathématique : une définition doit être simple, claire, courte, élégante, familière. Les travaux de Zaslavsky & Shir (2005) mettent également en évidence deux stratégies chez des élèves de 12 ans pour définir des concepts familiers (il s'agit de concepts géométriques tels le carré, le triangle isocèle pour lesquels le critère d'avoir une définition minimale est très explicite tout comme la recherche de définitions équivalentes). Il s'agit de :

— l'*example-based reasoning* : des exemples (ou non-exemples [1], ou contre-exemples) sont ici utilisés par les élèves pour se convaincre ou convaincre autrui de la validité d'un énoncé, pour déterminer les frontières d'un concept, pour exclure un énoncé comme définition d'un concept ;

— le *definition-based reasoning* : pour accepter ou rejeter une définition, les élèves se réfèrent à des caractéristiques des définitions, au rôle des définitions en mathématiques (celles et ceux évoqués dans le paragraphe précédent § 1.1.).

Nous retrouvons certains de ces aspects dans les activités proposées par Borasi (1992), où les deux élèves (14 ans) prenant part aux expérimentations considèrent les mathématiques comme quelque chose de prédéterminé : il existe « une bonne définition quelque part » (Borasi, 1992, p. 67). Lors des activités, ces mêmes élèves recherchent la meilleure définition possible, la plus universelle, et tendent à vouloir une définition précise, marquant la nouveauté (ibid. p.74).

2. 3. *Conceptions d'enseignants sur la définition*

Zaslavsky & Shir (2001) exploitent le même questionnaire avec les enseignants (34 enseignants du secondaire) que celui utilisé avec les élèves. Il ressort de cette étude des conceptions (ce terme est ici toujours utilisé de manière ordinaire) que nous pouvons reclasser suivant des conceptions langagières, logiques et pédagogiques, ou plutôt cognitives en fait.

Les conceptions d'un niveau logique comprennent les éléments suivants : une définition est une condition nécessaire et suffisante, elle doit être minimale, non redondante et constituée à partir de mots déjà définis antérieurement.

Les conceptions langagières s'intéressent au fait qu'une définition doit être claire, simple, familière. La *familiarité* à l'égard d'une définition comprend deux aspects liés : une définition n'utilisant que des termes déjà connus apportera aux élèves une certaine familiarité ; de plus, ce qui suit renforce celle-ci. Ce que nous avons appelé aspects pédagogiques reprend le point suivant développé par les enseignants : il ne faut pas faire intervenir dans une définition des éléments ne semblant pas appartenir à l'objet à définir (comme les diagonales dans un carré).

Enfin, l'intérêt pour des définitions procédurales est noté, bien que l'usage fasse que celles-ci sont peu nombreuses : notons qu'en particulier, de telles définitions règlent la génération de l'objet défini et ainsi le problème de l'existence, ce qui ne semble pas ressortir chez les enseignants d'après Zaslavsky & Shir (2001).

1 Un non-exemple est un énoncé non équivalent à la définition, et/ou ne vérifiant pas l'une des caractéristiques fondamentales de la définition.

Notre étude (Ouvrier-Buffet, 2003), davantage centrée sur le processus de définition que les travaux de Zaslavsky & Shir (2001, 2002, 2005), nous permet de compléter le panorama précédent sur les conceptions des enseignants (à partir de questionnaires diffusés auprès d'enseignants du secondaire en particulier), de la façon suivante :

— Nous retrouvons les aspects logiques et langagiers tels : l'existence et l'unicité à vérifier ; la redondance, le formalisme excessif, et le cercle vicieux à éviter ; l'aspect « dénomination » (« donner un nom ») restant prédominant.
— Les fonctions des définitions données par les enseignants que nous avons interrogés concernent quant à elles : utiliser une définition dans une démonstration (pour régler des inférences) ; abréger le discours (raccourci de langage) ; préciser le sens d'un mot nouveau ; résoudre un conflit, lever une ambigüité.
— Une place reste possible pour la construction de définitions, même si les enseignants parviennent difficilement à la cerner : ils proposent généralement des activités de redéfinition de concepts familiers.

Nous allons maintenant nous concentrer sur l'activité de définition elle-même afin de déterminer ce qu'elle est en mathématiques et ce qu'elle pourrait être dans l'enseignement.

3. — Qu'en est-il de l'activité de définition ?

Lorsque nous parlons de « l'activité de définition », il est question de tout processus impliquant la construction de définitions, de l'amorce de la résolution d'un problème à la construction formelle de théories. L'idée force de notre recherche est de caractériser le processus de production de connaissances en prenant pour balises des définitions en construction. Cela se situe nécessairement en lien avec la résolution de problèmes et la preuve.

L'étude de l'activité de définition occupe une place discrète mais récurrente dans les travaux internationaux, depuis les années 90 : déjà soulignée — plutôt du côté formel — par Mariotti & Fischbein en 1997 [2], elle apparaît dans des travaux plus récents comme un moyen d'appréhender les concepts mathématiques, dans une nouvelle perspective d'enseignement. Cela recouvre, dans la littérature internationale, les expressions suivantes : *defining, defining processes, definitional procedure, defining activity* [3]. Dans notre recherche, il s'agit d'identifier les situations et concepts propices à la construction de définitions et à la dialectique entre le processus de définition et le processus de preuve, mais aussi de modéliser l'activité de définition et bien de la considérer comme une partie de l'activité mathématique permettant d'ouvrir de nouveaux problèmes pour la recherche en didactique des mathématiques.

Au niveau théorique, des cadres spécifiques pour l'étude de l'activité de définition commencent à émerger dans les travaux internationaux. Certains exploitent la méthode des *Preuves et Réfutations* de Lakatos (1961, 1976, 1984), d'autres développent des outils de nature cognitive découlant des travaux de Freudenthal (1973) notamment. Dans notre recherche, nous proposons une modélisation avec un cadre spécifique pour les conceptions (Ouvrier-Buffet, 2013), mais nous n'en présenterons qu'un volet ici. Ce qui est certain, c'est que les auteurs des expérimentations mettant en jeu une activité de définition concluent majoritairement sur l'intérêt de ce genre de situations, intérêt double : du point de vue du raisonnement et de la démarche de recherche engagés par les

2 "(...) learning to define is a basic problem of mathematical education." (Mariotti & Fischbein, 1997, p. 219).
3 Ces expressions, très semblables, pourraient être imparfaitement traduites par : définir, processus définissants, procédure définissante, activité de définition. Il en ressort une préoccupation certaine autour de « l'activité de définition ».

élèves et les étudiants et du point de vue de l'exploration fructueuse de concepts nouveaux ou familiers (les expérimentations en question concernaient des concepts de la géométrie tels les quadrilatères, mais aussi, au niveau de la fin du secondaire et du début du supérieur, des concepts tels les arbres en théorie des graphes et les propriétés des objets géométriques sur la sphère par exemple).

Comment étudier et modéliser l'activité de définition en mathématiques ? L'objectif est d'avoir une référence afin de concevoir des situations d'apprentissage mettant en jeu une construction de définitions (dans l'enseignement secondaire et supérieur), de pouvoir les analyser, et d'avoir des éléments tangibles pour en assurer la gestion. Nous pouvons nous référer à l'épistémologie contemporaine en travaillant avec des mathématiciens puisque la construction de définitions est l'une des composantes de l'activité du chercheur. Certains chercheurs se sont penchés sur la caractérisation des heuristiques et attitudes des mathématiciens (par exemple : Burton, 2004 ; Carlson & Bloom, 2005 ; Schoenfeld, 1985), mais aucun travaux ne porte sur une modélisation effective du processus de définition. L'activité de définition, transversale aux mathématiques, est difficile à appréhender. Nous allons approfondir l'activité du chercheur en proposant dans cet article les conclusions relatives à des entretiens conduits avec huit mathématiciens contemporains.

4. — Entretiens avec des mathématiciens contemporains en mathématiques sur l'activité de définition

4. 1. *Les travaux existants sur les pratiques des mathématiciens : l'activité de définition encore inexplorée*

Il est généralement admis, dans les travaux s'intéressant en didactique à la preuve, qu'une preuve peut soulever la nécessité d'une « meilleure » définition, l'une des fonctions de la preuve étant ici l'exploration du sens d'une définition (en l'impliquant dans la rédaction d'une preuve) et/ou l'étude des implications d'une assertion (Hanna, 2000). C'est effectivement une voie à explorer dans l'enseignement pour appréhender la compréhension que les élèves et les étudiants ont des définitions qui leur sont enseignées, tout comme le sont les situations permettant un enrichissement des *concepts images*[4] des étudiants (Tall, 1991 ; Vinner, 1991). Mais cela ne prend pas en compte ce qui se trouve en amont, c'est-à-dire l'activité même de recherche mathématique où coémergent définitions et preuves, à l'image du processus continuel de révision conceptuelle de Lakatos (1961, 1976, 1984). Conduire des entretiens et expérimentations avec des chercheurs en mathématiques appartenant à différents champs des mathématiques[5] est ce qui nous intéresse ici. La question sous-jacente est de déterminer s'il existe une façon de « penser » (concevoir, juger) les définitions, transversale aux mathématiques.

Une étude de la preuve toujours prédominante. Notre étude s'inscrit dans un mouvement relativement récent d'étude des pratiques des mathématiciens, où l'étude de la preuve est centrale. Rav (1999, p. 20) soulignait déjà que ce sont les preuves et non les théorèmes qui sont les porteurs de la connaissance mathématique. Hanna & Barbeau (2008) étendent cela en disant que les preuves peuvent aussi introduire de nouvelles méthodes, des outils et des stratégies pour appréhender de nouveaux problèmes. Et jus-

4 Pour schématiser rapidement : dans la structure cognitive, Vinner (1991) affirme l'existence de deux pôles en interactions mutuelles : le *concept definition*, qui s'apparente à une définition formelle d'un concept, et le *concept image* qui, lui, est non verbal et de type « image mentale ».

5 Nous pouvons en effet faire l'hypothèse d'une dépendance de l'activité mathématique aux concepts mathématiques.

tement, lors d'entretiens avec des mathématiciens, Weber (2011) montre que les mathématiciens lisent les preuves de collègues pour :

— transposer des idées et des techniques à leur propre recherche ;
— comprendre la preuve ;
— utiliser des exemples pour comprendre et s'abstraire du niveau formel logico-déductif.

Wilkerson-Jerde & Wilensky (2011) analysent le raisonnement de mathématiciens et d'étudiants face à une preuve non familière (en géométrie topologique). On y retrouve la mobilisation de connaissances issues de l'expérience des participants, mais aussi : des générations d'exemples, des décompositions d'un concept ou d'une idée en éléments plus petits permettant ainsi une manipulation et une exploration d'éléments composant le concept, des tests et exploration de définitions, ainsi que des essais pour connecter des définitions.

Watson, Mason et différents collègues ont exploré le rôle spécifique des exemples, en particulier ceux générés par les apprenants pour illustrer les propriétés génériques d'idées mathématiques et appréhender de nouveaux concepts. Actuellement, ils considèrent et analysent la génération et l'utilisation des exemples dans un processus de preuve (Watson & Mason, 2002 ; Sandefur et *al*., (2013)).

Shriki (2010) aborde la question du développement de la connaissance par la créativité et propose une expérimentation avec des enseignants de mathématiques où ils (re)définissent des concepts géométriques. On retrouve un processus de génération de concepts géométriques proche de celui décrit dans les travaux de Larsen, Zandieh et Rasmussen (voir par exemple Rasmussen et *al*., 2005 ; Larsen & Zandieh, 2008), décrit de manière linéaire, où émerge une activité de définitions. Le focus sur la créativité met en évidence le fait que les enseignants projettent de proposer ensuite des activités à leurs élèves montrant que les mathématiques peuvent être une (re)construction.

Plus récemment, Gardes (2013) propose de modéliser la notion de « geste » pour analyser les pratiques des mathématiciens, et ainsi, en conséquence didactique, d'étudiants ; la conjecture d'Erdös-Straus est le problème mathématique considéré. Elle construit une nouvelle définition de la notion de « geste », en prenant appui sur les travaux de Cavaillès et de Châtelet & Longo. Des marqueurs pour baliser l'avancée dans la résolution d'un problème sont ainsi pointés, tout comme les gestes de nature combinatoire et opératoire, ces derniers permettant une relecture de la catégorisation syntaxe / sémantique. La dimension pragmatique est effectivement prise en compte par l'action située au cœur des processus. Sept gestes particuliers sont alors définis dans le traitement par des mathématiciens de la conjecture d'Erdös-Straus et permettent une analyse effective de travaux d'étudiants. Les travaux de Gardes (2013) ouvrent clairement de nouvelles pistes de recherche en épistémologie contemporaine, et plus particulièrement du côté de l'activité de définition.

Une étude épistémologique et didactique de l'activité de définition. La modélisation de l'activité de définition en mathématiques représente l'aboutissement de notre recherche (Ouvrier-Buffet, 2013). Chronologiquement, elle a été conçue en différentes phases. Nous avons tout d'abord identifié trois conceptions emblématiques permettant de décrire l'activité de définition. Les auteurs qui nous ont servi de points d'appui étaient nombreux : nous avons choisi de qualifier les conceptions de lakatosienne, aristotélicienne, et poppérienne, les travaux de ces trois auteurs alimentant majoritairement les conceptions en question. Nous avons ensuite pu procéder à une validation de cette modélisation initiale par des expérimentations, en montrant en particulier l'efficience de celle-ci pour anticiper et décrire les processus définissants des étudiants. Ces expérimentations ont aussi permis de compléter notre modélisation. Nous avons conduit des entretiens avec des mathématiciens, et ainsi pu enrichir notre modélisation par l'apport de la description de quatre moments de travail sur la définition (issue des entretiens avec des mathématiciens) : ces moments de travail sur la définition ne sont pas hiérarchiques, mais coexistent et interagissent. Ils sont donc éclairés en partie par les conceptions, ils montrent comment celles-ci s'articulent et interviennent simultanément dans l'activité de définition. Nous nous proposons de rendre compte de l'apport des entretiens avec les mathématiciens dans cet article et renvoyons le lecteur à Ouvrier-Buffet (2013) pour le reste de l'étude.

4. 2. *L'activité de définition selon des mathématiciens contemporains – premiers résultats : différents moments de travail sur les définitions*

4. 2. 1. *Le dispositif et le recueil de données*

Nous avons orienté les entretiens semi-dirigés (enregistrés et retranscrits) autour de quatre pôles :

— Une meilleure connaissance des mathématiciens interrogés, via des questions concernant leur parcours et leur choix (ou non-choix) de domaine de prédilection en mathématiques.

— Leur pratique des mathématiques, via les questions suivantes :
  - Quand vous cherchez en mathématiques, pouvez-vous expliquer sur quoi se fondent vos choix (choix de problèmes, de preuves, de définitions, d'axiomes ...), ce qui les oriente le plus ?
  - À quoi reconnaissez-vous un problème ? une question (de recherche) ? une création mathématique ? un résultat ?
  - (et à la fin de l'entretien) Quand on est chercheur depuis longtemps, peut-on dire que le rapport à l'activité de définition, à la preuve, est modifié ? Si oui, comment ?

— Leur pratique des définitions et de la dialectique entre preuve et définitions :
  - À quoi reconnaissez-vous une définition ? une preuve ?
  - Quand construisez-vous des définitions ? ou : dans votre pratique, à quel(s) moment(s) avez-vous une activité de définition ?
  - Pour quoi faire ? ou : quelles sont les raisons de cette construction de définitions ?
  - Pour vous, existe-t-il différents types de définitions ? Si oui, lesquels ? Répondent-ils à des besoins ou problèmes particuliers ? Si non, à quoi vous sert une définition dans votre pratique ?
  - D'où vient la validation d'une définition ?
  - Quels liens y a-t-il, dans votre pratique des mathématiques, entre « définitions » et « preuve » ?

— Une question en lien avec leurs enseignements : Faites-vous ou seriez-vous prêt(e) à implémenter des situations de construction de définition dans vos enseignements ?

En cas de « blocage » de la discussion, nous avions prévu trois situations pour les soumettre à analyse et débat (nous n'en avons pas eu besoin, mais nous les avons utilisées dans la discussion) :

— Voici quelques exemples de situations : quel(s) type d'activité est/sont en jeu ? (autres questions possibles : Quels questionnements vous viennent ? Champ mathématique ? Quels outils mathématiques ? Type de solutions ? Quelles perspectives ?)
  - Une situation de classification (avec comme question sous-jacente : finalement, n'y a-t-il pas que des situations de classification en mathématiques ?)
  - Une situation du type « déplacements sur la grille » [6] (cf. Ouvrier-Buffet, 2011)
  - Une situation du type présenté en introduction : « Définir la mesure de la complexité d'un graphe. L'essayer sur plusieurs exemples et prouver quelques propriétés de la mesure. »

Nous avons conduit à ce jour huit entretiens, d'autres sont programmés afin de compléter les champs des mathématiques représentées.

4. 2. 2. *L'analyse des données*

L'analyse des retranscriptions a été réalisée suivant six axes, avec pour objectifs de valider et de compléter la modélisation des conceptions sur l'activité de définition (voir Ouvrier-Buffet, 2013 pour plus de détails sur les conceptions épistémologiques en question) :

— les différents types de définitions explicités par les chercheurs ;

— les caractéristiques de leur activité de définition ;

— les raisons qui font évoluer une définition ;

— les éléments qui permettent la validation (le contrôle) d'une définition ;

— l'identification (si possible) de différents moments de l'activité de définition au sein de l'activité mathématique globale ;

— leur vision de la place de l'activité de définition dans l'enseignement supérieur.

Nous faisons l'hypothèse que l'ensemble des mathématiciens interrogés est suffisamment représentatif pour les résultats qui suivent. Au-delà d'éléments de réponses suivant ces six axes, nous définirons des moments de travail sur les définitions à partir des entretiens réalisés avec les mathématiciens.

4. 2. 3. *Résultats*

4. 2. 3. 1. *Différents types de définition ?*

Les mathématiciens [7] ont une vision des définitions en tant qu'énoncés mathématiques. Quand ils les définissent (seulement trois mathématiciens sur huit le font), ressortent les points suivants :

— « Quelque chose dont on a besoin et qu'on ne démontre pas » : on définit en fait des choses qui n'existent pas déjà ;

— « On appelle ainsi quelque chose qui possède telle et telle propriété » ;

— Définir, c'est « (...) s'intéresser à une classe d'objets. »

Les chercheurs interrogés identifient effectivement différents types de définition. Il s'agit :

6 Soit G une grille discrète (on peut prendre par exemple un maillage carré). Un point de G est un point à l'intersection de deux droites du maillage. Un déplacement sur G est défini par deux entiers positifs et deux directions (haut, bas, gauche, et droite). Par exemple, « 2 carrés à droite et 3 carrés en bas » est un déplacement.
Problème : soit $E_k = \{d_1, \dots, d_k\}$ un ensemble de k déplacements d_i, $k \geq 1$ et $1 \leq i \leq k$. Partant d'un point de la grille, n'importe lequel, quels points de la grille peut-on atteindre en utilisant des combinaisons entières positives de E_k ?

7 Les extraits des entretiens avec les mathématiciens sont entre guillemets.

— Des définitions qui restent et qui appartiendront au domaine public, ou, plus fréquemment des définitions locales, d'objets intermédiaires (destinées à un groupe de personnes, pour raccourcir le discours). D'après les chercheurs, il existe une pyramide dans la recherche mathématique : il est plutôt rare de construire de nouveaux concepts qui auront un avenir pérenne. Une remarque cependant sur la fausse modestie des chercheurs qui disent ne pas définir de nouveaux concepts pour la postérité : il s'agit vraisemblablement d'un point de vue idéologique, les « grands » mathématiciens paraissant inatteignables. D'ailleurs, la construction de définitions est reconnue unanimement comme fréquente dans leur activité de recherche, même lorsque le concept défini n'a qu'une portée locale ou une durée de vie « indéfinie » (ce qui est le cas lorsque la portée du nouveau concept défini sera révélée ultérieurement, notamment dans la résolution de nouveaux problèmes de recherche dans un cadre identique ou lors d'un changement de cadre).
— Les définitions que l'on connaît à l'avance et celles que l'on déduit de résultats.
— Les définitions à l'essai (on part de l'intuition des objets et de ce que l'on veut en faire) qui commandent en quelque sorte la façon dont on cherche – elles sont là pour travailler sur des objets – d'une part, et les définitions qui seront rédigées et qui auront un aspect esthétique et formel d'autre part.

Ces types de définitions soulignent en fait déjà différents moments de l'activité mathématique : le moment où l'intuition des objets et des problèmes permet d'engager le travail de recherche, le moment où des définitions de travail (à l'essai) qui peuvent être locales donnent un statut particulier à un objet et orientent d'une certaine façon la recherche (que nous pouvons rapprocher essentiellement des *zéro-définitions* au sens de Lakatos (1961, 1976, 1984), voir définition plus loin dans ce texte), et le moment où les définitions deviennent formelles et revêtent alors certaines caractéristiques propres à l'inscription de ces définitions dans une théorie (dimensions formelle, esthétique, et axiomatique).

4. 2. 3. 2. *L'activité de définition et sa dialectique avec la preuve*

Il ressort clairement des entretiens que les définitions formalisées viennent « après » dans la construction, mais il existe aussi une difficulté à déterminer un moment précis de l'activité mathématique et ses caractéristiques. La construction de théorie s'oppose à la résolution de problèmes : les mathématiciens soulignent que des personnes différentes sont concernées et que cela porte sur des moments de l'activité mathématique différents (« Les gens ne font pas tout en même temps »).

Plus précisément sur l'activité de définition, selon les chercheurs, la preuve commande, et les définitions évoluent (« La preuve t'apporte la preuve justement que ta définition n'est pas tout à fait correcte » ; « Si la définition était la mauvaise, mal posée en quelque sorte, je vais modifier la définition pour que la preuve donne quelque chose. »).

Il s'agit de définir pour plusieurs raisons : accéder à une meilleure compréhension, simplifier, généraliser des concepts, explorer d'autres domaines (d'autres cadres et structures connexes), communiquer. Les chercheurs ne développent pas spécialement des critères de non-redondance, minimalité etc. dans la mesure où ils se situent exclusivement dans l'activité mathématique (et cela est induit par les questions de l'entretien). De même, les éléments relatifs à une construction de théorie sont peu présents.

La définition (et même la redéfinition) d'objets intervient dans la preuve, pour pouvoir continuer la recherche dans un premier temps, puis pour délimiter le domaine d'applicabilité d'une idée ou d'une preuve, dans un deuxième temps, et enfin pour étudier ensuite des cas plus généraux ou au contraire plus particuliers. Il est important de souligner que les chercheurs définissent toujours à partir d'une intuition des objets et des résultats, ce qui implique déjà une certaine familiarité avec les objets et problèmes (« Il faut (...) avoir une idée au départ des objets, de ce que l'on veut montrer. Affiner pour pouvoir faire la preuve (enlever les cas dégénérés…) »). Dans certains cas, la définition d'un nouveau concept (complètement nouveau) apparaîtra lors de l'activité de preuve, et pourra avoir un caractère local ou global : la portée du nouveau concept ne pourra être révélée que lors de résolutions ultérieures, sur un temps long donc et lors de rencontres de nouveaux problèmes où la définition sera mise à l'épreuve en quelque sorte.

4. 2. 3. 3. *Pourquoi et comment une définition évolue ?*

Reprenant l'aspect « communication », les chercheurs indiquent qu'une définition va évoluer lorsqu'il sera question de transmettre des résultats (dans différentes institutions donc les impacts se situeront à un niveau local ou à un niveau plus formalisé – cela peut être un séminaire, une publication, ou même un ouvrage d'enseignement). Le rôle des exemples et contre-exemples est évoqué et décrit comme difficile, et peu fréquent, surtout pour les contre-exemples (des exemples et contre-exemples « déjà construits » pourront être utilisés). On peut souligner une différence suivant les champs mathématiques concernés où les champs concrets et/ou discrets apparaissent comme plus favorables à l'utilisation et à la génération d'exemples et contre-exemples. L'exhaustivité des cas possibles est aussi recherchée. Les problèmes qui permettent de faire évoluer une définition sont essentiellement : poser la question de la généralité du problème, poser la question des analogies. En cas de blocage, construire la définition du dual peut permettre de faire évoluer la situation et ensuite d'effectuer un retour au problème initial (et donc d'impacter la définition en cours de construction), mais aussi de générer de nouveaux problèmes.

4. 2. 3. 4. *Comment valide-t-on une définition ?*

Celle-ci s'effectue essentiellement à différents niveaux : auto-validation, par les collègues, par la communauté. Le fait que la preuve fonctionne est un élément de validation, de même que si la conjecture est « presque démontrée » ou s'il n'y a plus de contre-exemple, « dans les cas les plus intéressants ». On retrouve aussi le contrôle de la validité d'une assertion par des essais sur des exemples déjà évoqué par Arnold (1998). Enfin, une définition est validée lorsqu'elle présente une bonne résistance aux transformations naturelles ou à un changement de cadre. Cela étant, un chercheur souligne qu'il y a des cas où on ne peut pas valider, on ne sait pas si le travail de recherche est réellement terminé, ce qui rejoint la conception lakatosienne. Nous retrouvons ici, et cela est normal, les éléments décrits par Weber (2008) permettant la validation de la preuve (par des mathématiciens), à savoir, en particulier, le fait d'utiliser un exemple pour (re)construire une preuve générique, la validation par un seul exemple, le fait de ne pas trouver de contre-exemple, la recherche de régularités dans des catégories d'exemples (cela converge également vers les phases proposées par Boero (1999)).

4. 2. 3. 5. *Les définitions interviennent dans différents moments de l'activité mathématique*

Nous pouvons identifier différents moments de l'activité mathématique où l'activité de définition est effective. Ces différents moments mettent en jeu des définitions de types différents, nous allons y revenir en détail ci-après.

Dans les résultats précédents, apparaissent déjà trois grands moments : celui de l'intuition des premiers objets et problèmes (où les définitions ne sont pas explicites), celui des définitions de travail, et celui, plus théorique et axiomatique, des définitions formelles. Au niveau de l'activité mathématique autour des définitions, les mathématiciens ne prennent pas forcément en charge l'ensemble du processus, tout dépend de leurs objets d'étude et de leurs champs de recherche.

Nous reconnaissons dans leurs discours des types de définitions que nous avions déjà identifiés et caractérisés au niveau épistémologique, qui s'articulent dans le processus de construction de définitions et entrent en dialectique avec le processus de preuve (les *définitions-en-acte*, les *zéro-définitions*, et les *proof-generated definitions* [8]), mais aussi deux nouveaux types de définition, que nous avons nommés *définitions formalisées* et *définitions théoriques*.

Les *zéro-définitions* et *proof-generated definitions* sont empruntées au travail de Lakatos. Reprenons l'exemple de Lakatos (1961, 1976, 1984) pour illustrer ces types de définitions qu'il met en évidence. Il propose une définition *naïve* (qui n'évoluera pas mais sera remplacée) de polyèdre : « un solide avec des faces planes, des arêtes rectilignes ». Un exemple de *zéro-définition* (il en existe plusieurs dans le travail de Lakatos) dans ce même contexte de construction de classe d'objets vérifiant la formule d'Euler : « solide dont la surface est constituée de faces polygonales ». Mais le cube creux est un contre-exemple. Donner un exemple de *proof-generated definition* est plus délicat car il faudrait expliciter une preuve et la dialectique entre cette preuve et la définition en construction.

La nécessité d'introduire un autre niveau de définitions dans l'activité de définition, celui des *définitions-en-acte*, est illustrée dans Ouvrier-Buffet (2011) dans une situation impliquant des concepts non familiers des étudiants. Cela rejoint la dimension de l'intuition évoquée ci-dessus par les mathématiciens. Nous avons défini une *définition-en-acte* de la façon suivante : il s'agit d'un énoncé utilisé comme un outil (et non comme objet) permettant aux étudiants (mais aussi aux chercheurs) d'être opérationnels dans l'avancée d'un problème, sans avoir recours à une définition explicite. Ce niveau de définition vient avant celui des *zéro-définitions* et pourra même peser contre une *zéro-définition*. De la même façon que les définitions dépendent des propositions, les *définitions-en-acte* sont en lien avec des *propositions-en-acte* (Vergnaud, 1991).

Les *définitions formalisées* et *définitions théoriques* viennent compléter le panorama des différents types de définitions, et sont d'un autre ordre que les précédentes. Les *définitions formalisées* sont complètement dans la lignée des *proof-generated definitions* : elles en sont une formalisation dans un but de communication de résultats essentiellement. Quant aux *définitions théoriques*, elles s'inscrivent dans la construction d'une théorie, d'une axiomatique (qui pourra être locale dans un premier temps et témoignent ainsi d'un moment particulier de l'activité de définition (« Je n'ai pas inventé de nouveaux objets ni de nouvelles théories sauf très localement. Localement, n'importe qui peut être amené à définir, provisoirement. »).

8 Nous avons volontairement conservé le terme anglais afin de ne pas dénaturer son sens originel par une traduction.

4. 2. 3. 6. *Panorama des différents moments de l'activité de définition*

Rappelons qu'un tel panorama n'a été possible que par la conduite de trois types d'études et d'analyses :

— une étude épistémologique qui s'est concentrée sur la caractérisation de conceptions emblématiques permettant de rendre compte de l'activité de définition (il s'agit des conceptions aristotélicienne, lakatosienne, poppérienne) ;

— des expérimentations dans le secondaire et en première année d'université qui ont permis de mettre en évidence les *définitions-en-acte* et l'opérationnalité des conceptions pour décrire des processus de construction de définitions chez des étudiants ;

— des entretiens avec des mathématiciens, présentés ici, qui ont apporté intrinsèquement une validation des conceptions épistémologiques et un enrichissement de celles-ci : en effet, l'explicitation de différents moments de travail sur la définition chez les mathématiciens permet de rendre compte de la coexistence et de l'opérationnalité des conceptions pour décrire l'activité de définition de ces professionnels, mais aussi de la nécessité d'expliciter d'autres composantes pour accéder à la description complète de cette activité.

Venons-en maintenant à la présentation de ces moments de travail sur la définition : chaque moment est, dans la figure 1 ci-dessous, carac-

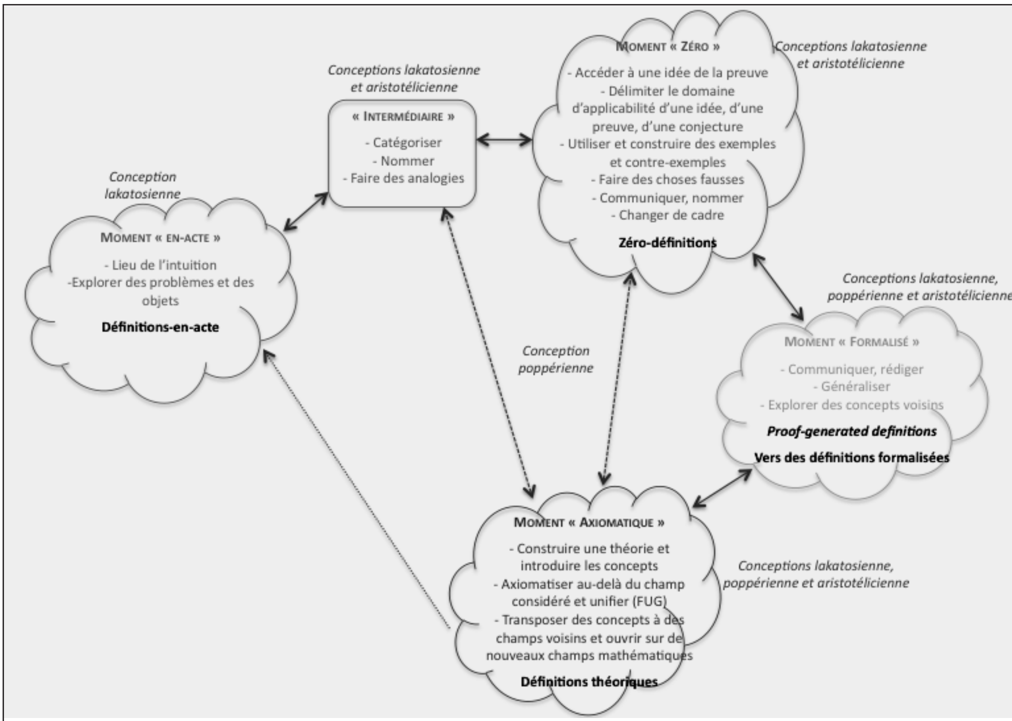


Figure 1 – Moments de travail sur les définitions chez les mathématiciens

térisé par les propos des mathématiciens et mis en lien avec un type de définition. Dans chacun de ces moments, des conceptions précisent également l'activité de définition (elles sont indiquées près de chaque nuage, mais ne sont pas présentées dans cet article). Les flèches marquent simplement la transition entre ces différents moments de travail sur les définitions et soulignent les conceptions pouvant être utilisées pour passer d'un moment à un autre : ces conceptions agissent comme des leviers pour faire évoluer l'activité mathématique.

Ces moments de travail peuvent être décrits ainsi, en reprenant les éléments recueillis dans les interviews avec les mathématiciens :

Le moment « en-acte ». Il s'agit du lieu de l'intuition des objets, des idées, des résultats. L'activité mathématique pendant ce moment est principalement une activité d'exploration et d'imprégnation d'un ou de plusieurs problèmes, mais aussi des objets en jeu pour mieux les connaître (fréquentation d'exemples, non-exemples, contre-exemples). Des analogies et des champs mathématiques voisins peuvent alors être mobilisés, de même que des problèmes plus faibles peuvent être formulés. C'est là que des définitions-en-acte et des *concepts images* apparaissent (Vinner, 1991). Ici, la conception lakatosienne est opérationnelle, les opérateurs concernant les changements de cadres et formulations de problèmes, mais aussi la génération d'exemples et contre-exemples étant prédominants.

Un moment intermédiaire entre « en-acte » et « zéro ». Lien possible avec le moment « axiomatique ». Ce moment a deux versants : il s'agit de faire des premières catégories d'objets, de classer et d'exploiter des classifications existantes, mais aussi d'essayer des analogies et de faire des liens avec des concepts existants et théories existantes. Ce qui oriente l'activité de définition ici est principalement la classification, la catégorisation d'objets, et la dénomination de ceux-ci. Les conceptions aristotélicienne et lakatosienne peuvent être opérationnelles. C'est dans le lien avec le moment « axiomatique » et les ponts réalisés avec des théories axiomatiques préexistantes que nous retrouvons la conception poppérienne.

Le moment « zéro ». C'est le lieu des *zéro-définitions* (définitions de travail), mais aussi de définitions locales de portée plus faible. L'activité mathématique peut se décrire avec des opérateurs lakatosiens (par exemple : utiliser et construire des exemples et contre-exemples, reléguer les monstres) et intègre également d'autres aspects : faire des choses fausses, accéder à une idée de la preuve (la preuve forçant les concepts et les définitions selon les mathématiciens). Ainsi, les *zéro-définitions* et autres définitions locales auront ici différentes fonctions : nommer ; proposer différentes voies d'accès sur un concept ; travailler sur la preuve ; délimiter le domaine d'applicabilité d'une idée, d'une conjecture ou d'une preuve ; communiquer. L'opérateur lakatosien « changer de cadre » pourra aussi être mobilisé et un lien pourra être construit avec le moment « axiomatique », en particulier pour les changements de cadres où existe déjà une théorie (finalisée ou locale, voire même en construction).

Le moment « formalisé ». Nous avons retenu cette dénomination afin de souligner l'importance de la dimension « communication » qui intervient à la fois pendant la recherche heuristique mais aussi lors d'une nécessité de formalisation. Il peut s'agir d'une communication impliquant un assujettissement aux règles de l'institution considérée (discussion, séminaire, prépublication etc.) et/ou de la rédaction d'un texte davantage formalisé permettant de régler des inférences. Un saut d'abstraction est réalisé par rapport au moment « zéro ». L'activité mathématique pendant ce moment « formalisé » s'appuie sur certains contrôles de nature lakatosienne tels que : une bonne résistance des définitions et conjectures et/ou preuves et donc la fin des contre-exemples. Lorsqu'une preuve est en jeu, des *proof-generated definitions* peuvent émerger. Des opérateurs poppériens peuvent également être mobilisés, notamment en ce qui concerne l'élaboration d'axiomatiques locales. La rédaction de définitions formalisées impliquera de fait la convocation de la conception aristotélicienne (la recherche de l'esthétisme des définitions construites apparaîtra vraisemblablement aussi), et l'accès au *concept definition* de Vinner (1991). Par ailleurs, la formulation de nouveaux problèmes que nous avons identifiée et décrite dans l'un des opérateurs lakatosiens permettra à l'activité mathématique de se poursuivre et d'explorer de nouvelles ramifications au problème initial. Il s'agit essentiellement d'interroger la généralisation et l'utilisation des définitions, problèmes et résultats, mais aussi la compréhension des nouveaux concepts (ce qui rejoint la dimension « communication » précédemment évoquée). L'exploration de concepts voisins ouvrira également de nouvelles perspectives de travail et s'inscrira dans un nouveau moment « en-acte ».

Le moment « axiomatique ». Nous avons choisi de nommer les définitions produites dans ce moment « théoriques » afin de souligner leur inscription dans une théorie. Il s'agit ici de construire une théorie (qui pourra être momentanément locale) et d'introduire de nouveaux concepts au sein de cette théorie, donc de répondre à certaines contraintes axiomatiques, ce qui nous permet de mettre en évidence l'opérationnalité de la conception poppérienne (NB : l'opérateur concernant la résistance aux réfutations est encore présent). La construction de la théorie en question sera guidée par la recherche du plus petit nombre de conditions initiales pour obtenir le plus grand nombre de résultats et/ou des résultats de plus grande portée. L'axiomatisation pourra également être conduite au-delà du champ mathématique initialement considéré pour unifier des concepts (c'est le cas dans les notions FUG[9], cf. Dorier et *al*. (1997)). La transposition de concepts à d'autres champs mathématiques ouvrira également de nouvelles perspectives et de nouveaux champs de recherche (c'est le cas par exemple de la topologie et de la géométrie des espaces de Banach).

4. 2. 3. 7. *L'activité de définition dans l'enseignement, au niveau du supérieur*

Il ressort que les chercheurs interviewés pensent que cela peut avoir un intérêt de faire vivre de telles activités à des étudiants, mais ne parviennent pas à concevoir la forme que cela pourrait prendre, d'autant plus que cela nécessiterait un temps long. Tous sont intéressés par la suite des recherches dans le domaine. Il est, à l'heure actuelle, difficile de faire un état des lieux exhaustifs des situations utilisées dans l'enseignement supérieur pour faire pratiquer une activité de définition. De plus, les contraintes de temps notamment sont réelles, et il est nécessaire de disposer d'un temps suffisamment long et continu pour faire pratiquer une activité de recherche (et donc de définition) à des étudiants.

Cela étant, nous pouvons mentionner les travaux de Larsen & Zandieh (2008) : ils reprennent les notions de convergence uniforme et de séries de fonctions (comme Lakatos, 1984) et choisissent le cadre de la théorie des groupes afin de calquer le modèle de situation de Lakatos (1984). À cet effet, le questionnement consiste à rechercher le plus petit nombre de conditions suffisantes pour qu'un sous-ensemble d'un groupe soit un sous-groupe, les défini-

9 Ces notions introduisent de la généralité en unifiant des notions antérieures grâce à un nouveau formalisme.

tions de groupe et de sous-groupe étant données. Si le travail attendu des étudiants réside dans la production de conjectures et de contre-exemples, il n'en demeure pas moins que le rôle de l'enseignant dans la gestion reste majeur (en particulier, il fournira les contre-exemples). La production finale est un théorème (et non pas une définition) issu du travail sur la preuve fournie. En définitive, pour ces auteurs, l'activité de définition intervient essentiellement au niveau de la relégation des monstres (au sens de Lakatos) dans une dialectique entre contre-exemple et définition. La prise en compte des exceptions impacte sur la conjecture et l'analyse de la preuve également, sans forcément aboutir à de nouveaux concepts.

Il est également possible de considérer des travaux spécifiques portant sur l'enseignement supérieur (Bridoux, 2011, par exemple) afin de les prolonger dans une perspective de nouvelles situations impliquant une activité de définition. D'autres travaux sont actuellement en cours, en France (sur le concept de limite par exemple, travaux de T. Lecorre en cours, mais plus généralement sur l'analyse, travaux du groupe sur l'enseignement supérieur du Laboratoire de Didactique André Revuz).

5. — Conclusions et perspectives

5. 1. *Conclusions*

Les différents moments présentés ci-dessus, en lien avec différents types de définition utilisés par les mathématiciens, permettent d'avoir une vision dynamique de l'activité de définition. Au niveau didactique, les implications sont nombreuses et un champ de recherche s'ouvre véritablement du côté de la recherche de nouvelles situations d'apprentissages où la construction de définitions de nouveaux concepts serait en jeu. Nos travaux ont également permis de proposer une liste qui tend à être exhaustive de types de problèmes permettant de générer une activité de définition (voir Ouvrier-Buffet, 2013). La question maintenant est d'évaluer la faisabilité dans les cadres scolaire et universitaire, déjà fortement contraints par les programmes, de telles situations qui permettraient aux élèves et étudiants d'appréhender la démarche du chercheur en mathématiques. Il s'agit maintenant de générer de nouvelles situations impliquant une activité de définition et d'étudier leur transmission à des enseignants. Ce point ouvre de nouvelles questions en particulier quant à l'activité mathématique qu'il serait possible de favoriser en classe.

5. 2. *Ouverture vers des niveaux de transposition de l'activité mathématique et lien avec la démarche de recherche*

Dans les questions de didactique concernant l'activité mathématique, que ce soit dans le cadre général de la résolution de problèmes ou dans des cas plus particuliers de **Si**tuations de **R**echerche pour la **C**lasse (SiRC) (Grenier & Payan, 2003 par exemple), ou de construction de définitions, c'est bien une représentation de la démarche du chercheur qui transparaît et qui est prise plus ou moins explicitement comme modèle de référence : nous pourrions même dire qu'il s'agit d'une représentation transposée de l'épistémologie du chercheur, avec des arguments centrés sur le type de raisonnement (en mathématiques sur une approche par conjectures, preuves et réfutations ; et en sciences, on retrouve le même phénomène [10] et on se concentre sur l'approche hypothético-déductive et l'abandon de l'approche inductiviste).

Nous pourrions donc interroger une telle transposition car elle est à visée didactique, et

10 Dans les deux cas, des auteurs de référence, tels Bachelard ou Lakatos, sont cités.

ainsi envisager plusieurs « niveaux » de transposition possibles relativement à l'épistémologie de la discipline. En fait, le terme de « niveaux » ici n'implique pas une hiérarchisation : la question est de voir comment des concepts scientifiques sont problématisés dans les démarches de recherche et d'investigation et comment la démarche de recherche ou d'investigation permet effectivement de construire ces concepts [11] ; une question importante est aussi de déterminer comment une telle démarche prend en charge la place d'un concept dans un système de concepts et dans une théorie scientifique. Si l'accent est mis surtout sur la démarche et non sur la construction de concepts, on sera davantage du côté « outil ». Et si l'accent est porté aussi sur la construction de concepts, on sera du côté « objet » (au sens de Douady, 1986). Est-il alors possible de définir différents « niveaux » de transposition qui pourraient être du côté des concepts-objets et/ou du côté des concepts-outils (la dialectique entre les deux étant fondamentale au niveau conceptuel dans le champ de la recherche mathématique) ?

Il est *a priori* concevable d'envisager (au moins) trois niveaux de transposition : les considérations qui suivent sont à ce jour essentiellement théoriques et ont pour but de soulever des questions de recherche en didactique sur ce que sont les démarches de recherche en classe, tant en mathématiques qu'en sciences, à l'heure où l'*inquiry-based learning* est fortement de mise. Ces niveaux pourraient être ébauchés en pensant à une « mesure » de la transposition qui est réalisée relativement à l'épistémologie d'un concept, en prenant en compte la transposition qui est faite de trois composantes (les trois composantes qui suivent font échos au modèle de l'activité de définition présenté ci-dessus) : le ou les problème(s) initiaux qui permettent de générer un concept (ou un ensemble de concepts), l'activité mathématique (la démarche) qui permet de construire ce (ou ces) concept(s), et la place de la construction de théorie mathématique (même locale) dans un tel processus.

Dans une telle perspective, on pourrait concevoir un niveau de transposition épistémologique forte (ou épistémologico-historique), qui prendrait complètement en charge la dimension épistémologique du concept, de la démarche, et de la construction théorique ; un niveau de transposition théorique forte qui prendrait appui sur des théories, mais sans les construire, et où la problématisation de concepts se ferait indépendamment de leur genèse historique (il y a donc là la construction d'une genèse scolaire) ; et un niveau de transposition théorique faible où la démarche pourrait être centrée sur la construction de concepts (genèse scolaire), mais sans enjeux théoriques ni questionnements relatifs à la construction de théories (même locales). Nécessairement, des éléments de théories interviendraient dans la démarche, plutôt comme des « outils » et ne seraient donc pas problématisés. En fait, dans ce niveau, le savoir visé n'obéirait pas forcément aux mêmes lois que le savoir enseigné (SIC Brousseau), et c'est là que se situe la difficulté dans l'étude d'une telle transposition. On voit dans un tel niveau la perte qui se ferait dans différents moments de l'activité de définition, tel celui du changement de cadre du moment « zéro » par exemple.

Ces éléments sont pour l'heure actuelle des ébauches d'une réflexion qui se veut centrée sur l'activité mathématique que l'on souhaite faire pratiquer aux élèves ou étudiants : comment ne pas travestir l'activité de recherche de la discipline et permettre, dans un cadre scolaire ou universitaire, des apprentissages transversaux en lien avec une telle activité ? Pour répondre à une telle question, des études telles

11 En tant qu'objet donc, ou même de les mobiliser en tant qu'outil.

celle présentée ici dans le cas particulier de la définition sont nécessaires, avec une caractérisation fine des démarches de recherche (on peut citer les travaux des groupes de recherche *Maths à Modeler* et *Dream* qui vont dans ce sens). Dans un tel questionnement, la place et le rôle des enseignants et des enseignants-chercheurs, ainsi que la question de leurs formations initiale et continue sont fondamentaux. En effet, la démarche de recherche peut être considérée comme un nouveau « savoir » pour les enseignants : la question de l'appropriation de nouveaux « savoirs » par les enseignants se pose de manière forte, pour des contenus transversaux, de nature essentiellement heuristique, tels ceux impliqués dans la démarche mathématique ou l'activité de définition : comment se fait-elle ? Avec quelles ressources ? Comment les transmettent-ils ? Un retour à l'épistémologie et surtout à la nature des problèmes que l'on prend comme référents est ici nécessaire.

Bibliographie

ARNOLD, V. I. (1998). Sur l'éducation mathématique. *Gazette de la SMF*, 78, 19-29.

BOERO, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html (consultée le 4 janvier 2015)

BORASI, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. New Hampshire: Heinemann.

BRIDOUX, S. (2011). *Enseignement des premières notions de topologie à l'université. Une étude de cas*. Thèse de l'Université Paris Diderot. Disponible en ligne : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00660249 (consulté le 23 mai 2015)

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

BURTON, L. (2004). *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*. Berlin: Springer.

CARLSON, M. P., & BLOOM, I. (2005). The cyclic nature of problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 58(1), 45–75.

DORIER, J-L. (Ed) (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7 (2), 5-31.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

GARDES, M-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Thèse, Université Claude Bernard - Lyon I. Disponible en ligne : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00948332 (consulté le 20 février 2014).

GRENIER, D & PAYAN, C. (2003). Situations de recherche en "classe", essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du Séminaire National de didactique des mathématiques*, pp. 189-205. IREM de Paris 7, ARDM. Paris.

HANNA, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.

HANNA, G., & BARBEAU, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM*, 40(3), 345–353.

LAKATOS, I. (1961). *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*. Thesis. Cambridge University Library.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Library.

LAKATOS, I. (1984). *Preuves et réfutations*. Traduction de N. Balacheff & J.-M. Laborde. Hermann.

LARSEN, S. & ZANDIEH, M. (2008). Proofs and Refutations in the Undergraduate Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 205-216.

MARIOTTI, M.A. & FISCHBEIN, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219–248.

OUVRIER-BUFFET, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse, laboratoire Leibniz, Grenoble (disponible en ligne : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515/en/).

OUVRIER-BUFFET, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics*, 76(2), 165-182.

OUVRIER-BUFFET, C. (2013). *Modélisation de l'activité de définition en mathématiques et de sa dialectique avec la preuve – Étude épistémologique et enjeux didactiques*. Note de synthèse, Habilitation à Diriger des Recherches. Université Paris 7 (disponible en ligne http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00964093).

RASMUSSEN, C., ZANDIEH, M., KING, K., TEPPO, A. (2005). Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7:1, 51-73.

RAV, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 7, 5–41.

SANDEFUR, J., MASON, J., STYLIANIDES, G.J., & WATSON, A. (2013). Generating and using examples in the proving process. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 323-340.

SCHOENFELD, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic.

SHRIKI, A. (2010). Working like real mathematicians: developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 159-179.

TALL, D.O. (Ed.) (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.

VAN DORMOLEN, J., & ZASLAVSKY, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 91-196.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10(2/3) 133-169.

VINNER, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 65-80. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

WATSON, A., & MASON, J. (2002). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2(2), 237–249.

WILKERSON-JERDE, M.H. & WILENSKY, U.J. (2011). How do mathematicians learn math? Resources and acts for constructing and understanding mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 78, 21–43

WEBER, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 39, n°4, 431-459.

WEBER, K. (2011). Why and how mathematicians read proofs: an exploratory study. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 329-344.

ZANDIEH, M. & RASMUSSEN, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 29, 57–75.

ZASLAVSKY, O., & SHIR, K. (2001). What constitutes a (good) definition? The case of a square. In *Proceedings of 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, 161-168. Netherlands, Utrecht University.

ZASLAVSKY, O., & SHIR, K. (2002). Students' conceptions of an acceptable geometric definition. In A. D Cockburn & E. Nardi (Eds), *26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 4, 201-208. University of East Anglia, UK.

ZASLAVSKY, O., & SHIR, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 317–346.