QUELLE DEFINITION DU CONCEPT DE TANGENTE ? POUR QUELLES RAISONS ?

K. BALHAN, M. KRYSINSKA,
M. SCHNEIDER, Ladimath
Université de Liège

Cet article est également consultable en ligne sur le portail des IREM (onglet : Repères IREM) : http://www.univ-irem.fr/

Introduction

Que ce soit dans l'histoire ou dans les enseignements d'aujourd'hui, les définitions du concept de tangente sont multiples. Et les raisons de choisir telle définition ou telle autre pour enseigner le sont tout autant. Nous montrerons que le choix dépend de subtiles articulations entre conceptions, obstacles d'apprentissage et projets mathématiques institutionnellement situés.

Nous illustrerons également que, pour cette notion comme pour d'autres, les définitions diverses n'ont pas le même statut. Ainsi, comme l'a montré Bkouche (1982), une définition peut être une simple description d'un objet mathématique, laquelle n'a aucun rôle opératoire dans le raisonnement comme la notion de ligne droite chez Euclide qui est « également placée entre ses points ». Elle peut, au contraire, donner prise au raisonnement comme la définition du cercle en tant que lieu de points, toujours chez Euclide. Elle peut même avoir été créée pour permettre la mise en place d'une organisation déductive, au sens de Lakatos, comme le concept de limite dans l'œuvre de Cauchy (Job et Schneider, 2014).

Dans la partie 1, nous irons de l'histoire à l'enseignement actuel pour poser quelques jalons à des fins d'analyse didactique. Dans la partie 2, nous décrirons les grandes étapes d'un parcours destiné à faire évoluer les élèves dans leur perception du concept de tangente. Et, dans la partie 3, nous analyserons les enjeux a priori de ce parcours.

1. — De l'histoire à l'enseignement

Dans l'histoire, on observe des définitions nombreuses et variées de la notion de tangente à une courbe en un de ses points. Mais il n'est pas facile de tirer une leçon de cette variété en vue de faire un choix d'une définition à des fins d'enseignement. Il faut au préalable une grille de lecture de ces définitions comportant une double dimension épistémologique et didactique qui doit permettre d'éclairer à la fois les difficultés d'apprentissage des élèves et les difficultés éprouvées par les professeurs à enseigner cette notion. C'est l'objet de la présente section.

Il arrive aussi que les définitions ne soient pas explicitées en tant que telles par leurs auteurs, dans ce cas on les devine à travers l'emploi qu'ils en font et on parlera alors de conception au sens des didacticiens : un modèle élaboré à des fins de recherche pour interpréter des façons de faire observées chez les individus pour réaliser une tâche mathématique qui implique un concept donné.

La première question à se poser est de savoir quel est l'environnement culturel qui se cache derrière une définition mathématique de la tangente. C'est l'objet de la section 1.1. La section 1.2 traite des difficultés observées aujourd'hui chez les élèves et les professeurs.

1. 1. *Des contextes historiques variés*

Rouy (2007) fait un inventaire de plusieurs définitions avec le souci de montrer que les projets mathématiques qui en sont à l'origine ne sont pas de même nature. Premièrement, la détermination de la tangente peut être considérée comme un but en soi, soit un objectif lié à une étude géométrique, soit éventuellement avec une volonté de modélisation astronomique. On dira alors, pour reprendre le vocabulaire de Chevallard (1999), que la tangente est une *tâche*. Dans ce cadre, Rouy parle d'Euclide, d'Appolonius, de Fermat, de Barrow, de Descartes et de Roberval.

Les techniques utilisées par les uns et les autres pour réaliser cette tâche sont variées : certaines sont de nature géométrique, d'autres sont algébriques, d'autres encore de nature « infinitésimale ». Par exemple, Euclide parle de la tangente (au cercle) comme étant une droite qui n'a globalement qu'un seul point d'intersection avec la courbe tout en ne la traversant pas. Descartes, quant à lui, traduit cette idée en termes algébriques. Les procédures de type infinitésimal sont observées chez Fermat et Barrow qui font intervenir la notion d'accroissement infinitésimal jugé ambigu à leur époque. Ainsi Fermat, en mettant en œuvre sa méthode d'adégalité, considère cet accroissement tantôt non nul, tantôt nul. Notons une conception différente chez Roberval qui pense une courbe comme une trajectoire et la direction de la tangente comme résultat d'une composition de vitesses : « la direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe [étant] la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point là ».

Mais la tangente peut être aussi une *technique* (au sens de Chevallard, Ib.) au service de la réalisation d'une autre tâche. Rouy (2007) cite Archimède qui utilise la tangente à un arc de parabole pour « quarrer » un « segment » de parabole. Elle évoque aussi des démarches mathématiques toujours d'actualité aujourd'hui, en parlant, d'une part, des champs de tangentes pour tracer des courbes répondant à des conditions différentielles et, d'autre part, la tangente comme associée à une approximation affine locale d'une fonction quelconque.

Au-delà des tâches et techniques, les *technologies* au sens de Chevallard (Ib.) sont des discours qui justifient et rendent intelligibles, au regard des tâches, des techniques mathématiques nouvelles. La technique s'appelle ici le calcul infinitésimal et les historiens s'accordent à penser que Newton et Leibniz en sont les fondateurs :

« Both Newton and Leibniz must be credited with seeing the calculus as a new and general method, applicable to many types of functions. After their work, the calculus was no longer an appendage and extension of Greek geometry, but an independent science capable of handling a vastly expanded range of problems. » (Kline, 1972)

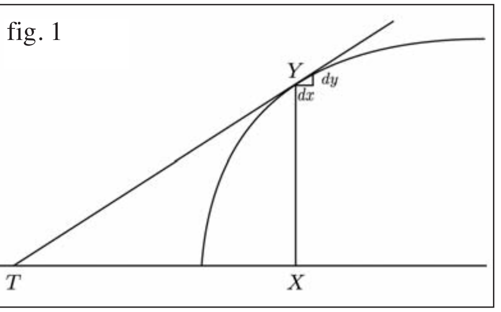
Mais les mêmes historiens distinguent les projets respectifs de Newton et de Leibniz, situant le premier plutôt dans la résolution de problèmes divers et le second dans le développement d'un calcul formel :

« The first principal idea was a philosophical one, namely Leibniz's idea of a characteristica generalis, a general symbolic language, through which all processes of reason and argument could be written down in symbols and formulas ; the symbols would obey certain rules of combination which would guarantee the correctness of the arguments » (Bos, 1980)

Dans l'œuvre de Leibniz, il semble bien que la notion même de tangente ait joué un rôle dans une perspective technologique au sens décrit plus haut. En particulier, dans l'établissement du théorème fondamental qui, chez Leibniz, se formule ainsi : le problème général des quadratures revient à construire une courbe dont les pentes obéissent à une loi donnée. Et, dans la preuve même (assez compliquée et que nous ne reprendrons pas ici), Leibniz fait intervenir la tangente en jouant sur la similitude d'un triangle qu'il appelle « assignable » et d'un autre qu'il qualifie d' « inassignable ». De quoi s'agit-il ? Le schéma fondamental sur lequel se base Leibniz est celui de la figure 1 ci-contre.

Dans ce dessin, on voit ce qu'il appelle son triangle caractéristique, soit le triangle inassignable, dont les côtés de l'angle droit sont notés dx et dy. Ce triangle est semblable au triangle « assignable » TXY et donc

fig. 1



$$\frac{dy}{dx} = \frac{YX}{TX} .$$

Dans ce schéma, dx est présenté par Leibniz lui-même comme une longueur arbitraire, dy étant l'accroissement correspondant de y évalué sur la tangente en Y. Il ne s'agit donc pas forcément d'infinitésimaux hormis que, dans son calcul symbolique, dx sera à terme considéré comme négligeable puisque, par exemple si $y = x^2$, $\frac{dy}{dx}$ sera égalé d'abord à $2x + dx$, puis à $2x$. Ce résultat, il l'égale au rapport $\frac{YX}{TX}$ et c'est ce qui lui permet de construire la tangente : il connaît YX et peut donc construire la sous-tangente TX telle que $\frac{YX}{TX} = 2x$. La tangente est alors tracée en joignant les points T et Y.

Avec une marge d'incertitude, on peut sans doute considérer la tangente comme participant, chez Leibniz, au souhait de tenir un discours technologique sur le nouveau calcul en évitant toute référence à la notion douteuse d' « infinitésimal ». Mais sa conception de la tangente que traduit son propos ci-dessous montre que ce rôle possible donné à la tangente est plus qu'ambigu.

> *Dans son principe, trouver la tangente consiste à tracer une droite joignant deux points infiniment proches de la courbe, c'est-à-dire tracer le côté d'un polygone infinitangulaire qui à mes yeux équivaut à la courbe.*

En effet, Leibniz en revient là à une notion d'infinitésimal en parlant de deux points infiniment proches de la courbe. Nous reviendrons plus loin à cette démarche de Leibniz.

Enfin, au-delà de projets purement mathématiques, Rouy (2007) parle de la « tangente comme technique didactique ». La tâche devient alors une tâche didactique, ici enseigner la dérivée; et la technique didactique correspondante est « utiliser la tangente pour voir que le quotient a une limite ». Dans l'histoire des mathématiques, cette chercheuse rapproche de ce point de vue un texte de d'Alembert, à propos duquel il est légitime de parler de projet didactique étant donné sa volonté de diffusion du savoir mathématique auprès d'un public plus large, dans le contexte d'écriture d'une encyclopédie. Sa conception de la tangente nous intéresse au plus haut point dans la mesure où on peut imaginer qu'elle a influencé notre enseignement autant en France qu'en Belgique. Voici son approche :

> *Je veux par exemple trouver la tangente d'une courbe* CAB *au point* A. *Je prends d'abord deux points à volonté* A, B *sur cette ligne courbe, et par ces deux points, je tire une ligne droite* A *indéfiniment prolongée vers* Z *et vers* X, *laquelle coupe la courbe, comme cela est évident; j'appelle cette ligne une « sécante » ; j'imagine ensuite une ligne fixe* CE, *placée à volonté dans le plan sur lequel est tracée la courbe, et par les deux points* A, B, *que j'ai pris sur la courbe, je mène des ordonnées* AD, BE, *perpendiculaires à cette ligne fixe* CE, *que pour abréger j'appelle l'« axe » de la courbe. Il est d'abord évident que la position de la sécante est déterminée par la distance* D *des deux ordonnées et par leur différence* BO *; en sorte que si on connaissait cette distance et cette différence, ou même le rapport des ordonnées à leur différence on aurait la position de la sécante.*
>
> *Imaginons à présent que des deux points* A, B, *que nous avons supposés sur la courbe, il y en ait un, par exemple* B, *qui se rapproche continuellement de l'autre point* A *; et que, par cet autre point* A *qu'on suppose fixe, on ait tiré une tangente* AP *à la courbe; il est aisé de voir que la sécante* AB, *tirée par ces deux points* A, B, *dont l'un est supposé se rapprocher de plus en plus de l'autre, approchera continuellement de la tangente, et enfin deviendra la tangente même, lorsque les deux points se seront confondus en un seul. La tangente est donc la limite des sécantes, le terme dont elles approchent de plus en plus sans pour autant y arriver tant qu'elles sont sécantes, mais dont elles peuvent approcher aussi près qu'on voudra. Or nous venons de voir que la position de la sécante se détermine par le rapport de la différence* BO *des ordonnées, à leur distance* DE. *Donc si on cherche la « limite » de ce rapport, c'est-à-dire la valeur dont ce rapport approche de plus en plus à mesure que l'une des ordonnées se rapproche de l'autre, cette limite donnera la position de la tangente, puisque la tangente est la limite des sécantes.*

Comme on le voit dans le texte de d'Alembert, celui-ci parle explicitement de « limite de sécantes », et c'est là le point singulier dans l'histoire des mathématiques par rapport à ce qu'on peut observer ailleurs. Mais l'expression même de limite de sécantes est sujette à caution tant du point de vue mathématique que du point de vue didactique. C'est l'objet de la section suivante.

1. 2. *Un obstacle épistémologique majeur : le positivisme empirique*

Partons d'un constat fait par plusieurs chercheurs et enseignants : les élèves, à qui l'on montre un dispositif qui rend compte de sécantes tournant autour d'un point jusqu'à obtenir la position de la tangente, n'établissent pas forcément de lien entre les pentes des sécantes et celle de la tangente :

> *La prise de conscience de la dépendance numérique de la position de la tangente à partir des positions de la sécante était très faible.* (Sierpinska, 1985)

Cornu (1983), Sierpinska (1985) et Schneider (1988) voient, dans ce constat, la trace de ce qu'ils appellent *l'obstacle géométrique de la limite*. Nous expliquons ci-dessous en quoi consiste cet obstacle, à travers l'analyse de Schneider qui l'étudie au-delà du seul contexte des tangentes. Dans ce dernier cas, Schneider (1988 et 1991 a) l'interprète comme suit. Pour les élèves, la tangente est l'objet premier et la pente est l'objet second :

> *Il s'agit pour eux de déterminer d'abord la tangente ensuite sa pente plutôt que le contraire. Ce qui fait qu'ils perçoivent le passage à la limite en termes géométriques, le mot limite ne renvoyant à aucune topologie préalablement définie sur l'ensemble des droites.*

Ce qui donne sens à ce processus, comme le développe Schneider (1991 a), c'est le mouvement où l'on *voit* une sécante tourner autour d'un point jusqu'à une position où elle sera tangente. Dans ce processus qui va jusqu'à son terme, les accroissements Δx et Δy, déterminés par les deux points de rencontre de la sécante et de la courbe, sont perçus comme des quantités qui tendent vers zéro de manière autonome jusqu'à devenir nulles au bout du compte.

On est là en présence de limites de variables et non pas de la limite d'une fonction qui est la limite de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ quand Δx tend vers zéro.

Ces variables sont implicitement fonctions d'une variable indépendante qui n'intervient pas dans le calcul et qui est le temps du déroulement de la pensée. Pour désigner ce point de vue, Krysinska et al. (2009) parlent de *variables temporelles*. Ce passage à la limite indu est mené à son terme car Δy et Δx représentent des grandeurs continues qui se réduisent en des points et donc deviennent effectivement nuls. Cette vision des choses empêche un retour à la pente car le quotient 0/0 n'a pas de sens et, qu'en outre, le triangle de côté Δy et Δx lui-même s'est réduit visuellement en un point peu porteur de l'idée de pente.

Schneider (1991 b) montre que cet obstacle géométrique de la limite n'est qu'une manifestation d'un obstacle épistémologique plus global qui est le *positivisme empirique*. Cet obstacle s'apparente à l'*expérience première* que Bachelard situe comme un obstacle majeur dans les sciences expérimentales et qu'il résume par un propos significatif :

> *On pense ce qu'on voit, on pense comme on voit* [...]

Ce positivisme empirique est une attitude épistémologique analysée par Schneider (1988 et 1991 b), dans de multiples contextes (tangentes, aires curvilignes, vitesses instantanées...). Elle se constitue en obstacle à la mise à distance par rapport aux faux objets empiriques, nés de l'illusion que les faits et les observations sont des donnés et non des construits. Elle s'oppose au passage des élèves du monde 1 des réalités physiques de Popper (1973) au monde 2 des états de conscience. Ainsi donc, on peut supposer que le texte de d'Alembert illustre cet obstacle géométrique de la limite puisqu'il parle de « limite de sécantes ». On peut aussi souligner que son approche fait écran au regard de Leibniz orienté non pas sur un infinitésimal isolé mais sur le rapport de deux infinitésimaux. En effet, comme nous l'avons expliqué, cet obstacle privilégie un supposé sens dynamique à dx comme étant la « limite » de Δx et dy comme « limite » de Δy. Alors que Leibniz est plus proche du concept de limite de la fonction $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ lorsque Δx tend vers 0.

1. 3. *Les conceptions induites par l'enseignement*

Comme le développe et l'illustre Schneider (2011), l'expérience première peut être d'ordre plus contractuel en ce sens que les élèves éprouvent des difficultés à changer leur rapport personnel (au sens de Chevallard, 2006) aux objets de savoir tel que nourri par leur scolarité antérieure. Le travail de Castela (1995) l'illustre parfaitement à propos des conceptions liées à la tangente, ainsi que nous l'expliquons dans la section suivante.

1. 3. 1 *Changer de conception*

Castela (1995) distingue en effet plusieurs conceptions qui « se différencient par la nature globale ou locale du regard, par la présence ou l'absence des problématiques de position relative et d'approximation ». Elle montre la difficulté éprouvée par les élèves à changer de conception en fonction du contexte; par exemple, pour passer de la tangente au cercle qui ne rencontre globalement le cercle qu'en un seul point sans le traverser à la conception telle que travaillée en analyse :

> *L'analyse tant qualitative que quantitative en termes de conceptions fait donc apparaître qu'en ce qui concerne la tangente, un enjeu de l'apprentissage en première et en terminale est la rupture partielle avec une conception primitive indûment généralisée et la prise en compte d'un point de vue radicalement nouveau.* (p. 31)

On touche là à ce que Brousseau (1998) appelle le contrat et les obstacles didactiques. On observe en effet, en Belgique comme en France, que le changement de conception est peu géré dans les manuels et les cours en général, et que certains volets du travail, comme celui de l'approximation numérique, sont peu développés.

1. 3. 2 *Pratiques ostensives sources d'un cercle vicieux*

Quant à Rouy (2007), elle montre que les pratiques enseignantes, en particulier dans le cadre d'une formation initiale, aggravent le rapport empiriste des élèves aux objets mathématiques. En particulier, elle relève dans les propos d'enseignants, autant que dans les propos de d'Alembert, une abondance d'expressions telles que « il est aisé de voir », « on montre que », « il est évident ». Il s'agit là de pratiques ostensives dont Salin (1999) souligne la récurrence et qui servent ici à boucher les « trous » d'une première approche de l'analyse mathématique ne s'encombrant pas de finesses liées aux propriétés topologiques des réels. Ces pratiques conduisent ici à un cercle vicieux décrit par Rouy (Ib.) à propos de la dérivée et de la tangente :

> [...] *la dérivée, objet de la leçon, est souvent définie sur base de la tangente, pourtant elle-même non définie ou parfois même définie ulté-*

> *rieurement sur base de la même dérivée. Ce « cercle vicieux » porteur de difficultés est dû au fait que les notions de dérivée et tangente sont effectivement intimement liées dans l'histoire* [...] *mais aussi que la tangente est un objet hybride : objet géométrique comme tangente aux coniques, objet analytique comme droite de coefficient directeur égal au nombre dérivé, mais surtout « objet mental »*. (Rouy, p. 137)

Ce cercle vicieux résulte du sens de parcours mental que Schneider (1991 a) observe chez les élèves entre pente et tangente : de la tangente comme objet premier à sa pente comme objet second plutôt que, comme en analyse mathématique, du nombre dérivé à la droite tangente définie par un point et par une pente qui est précisément ce nombre dérivé. Ce cercle vicieux relève, comme le montre Rouy (2007), d'une transposition didactique généralisée qui

> *présente la tangente à la fois comme une illustration géométrique de la dérivée (dans les programmes et les manuels) et comme « un moyen » d'introduire la dérivée ainsi qu'on le constate dans les activités dites introductives de la plupart des manuels. Cela a pour conséquence de ne plus faire exister la tangente en tant que question mathématique spécifique et d'installer comme une « double dialectique outil-objet » entre la tangente et le nombre dérivé, chacun des deux servant à définir l'autre*. (Rouy, p. 141)

Afin d'illustrer le cercle vicieux auquel conduisent les pratiques ostensives, nous analyserons ci-dessous une section d'un manuel belge.

Il s'agit d'une activité intitulée « à propos des tangentes... » qui sert d'introduction à la fois à la dérivée et à la tangente dans un manuel belge (Actimath 5, Van In, 2003). Cette activité peut être résumée par les trois étapes suivantes :

— On demande de calculer les valeurs numériques des pentes des droites coupant le graphique de la fonction notée $x \rightarrow x^2/4$ au point A d'abscisse $a = 2$ et au point B d'abscisse $a + h$ pour h égal successivement à 1,5 ; 1 ; 0,75 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,1 ; 0,01. Le graphique n'est ni fourni, ni demandé. L'organisation du calcul est imposée par un tableau à remplir, où l'on doit calculer d'abord $b = a + h$, ensuite $f(a + h) - f(a)$, et finalement $[f(a+h) - f(a)]/h$ présenté comme pente de la droite sécante.

— On pose la question : « Que constatez-vous quand h tend vers 0, c'est-à-dire quand le point B se rapproche du point A ? »

— On demande de calculer la limite : « Calculez la pente de la droite AB ainsi que la limite de celle-ci pour h tendant vers 0. Que concluez-vous? »

Voici les résultats du calcul, organisés ici dans un tableau plus compact que celui qui est imposé dans le manuel :

h	$[f(a+h) - f(a)]/h$
1,5	1,375
1	1,25
0,75	1,1875
0,5	1,125
0,25	1,0625
0,1	1,025
0,01	1,0025

La réponse attendue à la question « Que constatez-vous quand h tend vers 0, c'est-à-dire quand le point B se rapproche du point A ? » est que la pente de la sécante tend vers 1. Or, les élèves pourraient très bien constater autre chose: par exemple que tous les nombres dans la deuxième colonne se terminent par le chiffre 5 ou que les deux derniers chiffres deviennent 2 et 5, ... ou que tous ces nombres sont plus grands que 1, etc. Avec si peu de résultats numériques, il est difficile de conjecturer qu'ils s'approchent de 1. Quant à la question « Calculez la pente de la droite AB ainsi que la limite de celle-ci pour h tendant vers 0. Que concluez-vous ? », elle renvoie au calcul algébrique de la limite d'une fonction avec l'une des techniques déjà étudiées dans le manuel avant le thème de la dérivée. Le résultat attendu de ce calcul est que la limite est égale à 1. Quant à la conclusion attendue, elle est suggérée par le titre de l'activité « à propos des tangentes... ».

En paraphrasant Salin (1999), nous dirons que le caractère ostensif de ces questions se manifeste dans le fait qu'au lieu de montrer à l'élève ce qui est à voir, le manuel le dissimule derrière une fiction, l'élève étant supposé découvrir lui-même grâce à l'observation ou aux calculs. Comme le savoir à découvrir est très élaboré, le manuel est obligé de « manipuler » le milieu matériel pour rendre la lecture de ces propriétés la plus simple possible. Et, ainsi, l'apport d'information dans la partie théorique du manuel, qui est la réponse aux questions posées, peut être vécu par l'élève comme le signe manifeste de son incapacité à voir et comprendre ce qui est évident pour les auteurs du manuel. Cette situation pousse l'élève à décoder les intentions didactiques du manuel au lieu de chercher le sens des mathématiques en construction. Comme le dit si bien Salin (Ib.), l'ostension « déguisée » apparaît alors comme une solution de compromis : elle évite à l'enseignant tous les problèmes liés à la gestion d'une situation a-didactique, en laissant le manuel et le professeur maîtres du jeu, tout en faisant semblant de prendre en compte l'activité de l'élève.

Regardons maintenant en quoi consiste le cercle vicieux présent dans la partie théorique du même manuel. D'abord, on y définit la tangente de la manière suivante :

> « Considérons la courbe représentative G_f d'une fonction f continue en a et fixons un point A d'abscisse a sur la courbe. Considérons un point M d'abscisse x situé sur la courbe G_f, M étant différent de A, [...] et menons la droite AM. La droite AM est sécante à la courbe G_f.
>
> Lorsque le point M se déplace sur la courbe G_f, la sécante AM varie. Quand M se rapproche indéfiniment du point A, la sécante AM devient tangente à la courbe G_f. Nous pouvons dire que la tangente à la courbe G_f au point A d'abscisse a occupe la **position limite** de la sécante AM quand le point M se rapproche indéfiniment du point A.
>
> Cette observation va nous permettre de définir la notion de tangente à la courbe en un de ses points et ses conditions d'existence. »

Dans cette citation, on affirme que la tangente « occupe la position limite des sécantes », un fait qui est, paraît-il, issu des observations. Mais la position limite des sécantes n'est pas définie. Cela n'empêche pas de donner le statut de définition au résultat de cette observation. Dans la citation suivante, on définit la dérivée :

> « Lorsque le point M se rapproche du point A, son abscisse x tend vers le réel a. Les points A et M de la courbe G_f ayant respectivement pour coordonnées $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$, la pente de la droite AM est $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
>
> Pour obtenir la pente de la tangente en A, nous pouvons calculer
>
> $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

[...] Si la limite obtenue est finie, elle s'appelle alors le nombre dérivé de la fonction f en a.

Lorsque cette limite existe dans **R**, il est naturel de la considérer comme la pente de la droite tangente à la courbe G_f au point A. »

La tangente est d'abord présentée ici comme moyen d'introduire le nombre dérivé, elle devient ensuite son illustration. Cela aboutit à « recouvrement de discours » (Rouy, 2007) dans le sens qu'on y caractérise la tangente à la fois comme position limite de sécantes et comme droite dont la pente est le nombre dérivé. Une telle définition contribue à la confusion entre la tangente utilisée comme objet mental et la tangente que l'on cherche au même moment à définir comme objet mathématique.

1. 3. 3 *Absence de questionnement sur ce qu'est une meilleure approximation*

Enfin, un dernier obstacle didactique est lié au fait que, là où la tangente est bien présentée comme droite représentative de l'approximation affine locale d'une fonction, elle fait très peu l'objet d'un questionnement sur ce que l'on pourrait entendre par « en quoi cette approximation est-elle la meilleure ? ».

Relativement à cet aspect, Perrin-Glorian (1999) nous fait part de son étonnement face à un phénomène inattendu survenu au cours de la préparation d'un stage destiné à des enseignants sur le thème des dérivées et des tangentes. Au cours de celle-ci, et plus particulièrement en concevant une activité d'approximation affine d'une courbe à l'aide du logiciel « Geoplan », les formateurs sont amenés à se demander si la tangente est vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point et à préciser en quoi cette droite tangente serait considérée comme la meilleure.

A l'aide du logiciel, ils tracent la tangente d'une courbe en un point considéré ainsi que quelques sécantes passant par ce point. Pour chacune de ces droites, ils calculent la différence entre les ordonnées d'un point de la courbe et d'un point de la droite considérée de même abscisse. Leur idée était de montrer que cette différence resterait « nulle » (au sens de inférieure à la précision choisie) sur un intervalle plus grand pour la tangente que pour toute autre droite sécante. Or, leur observation fut autre. Selon le logiciel, certaines sécantes sont « confondues » avec la courbe sur un intervalle plus grand que pour la tangente.

Afin d'investiguer plus loin, ils affinent, dans un premier temps, leur étude en augmentant la précision du logiciel. Les formateurs constatent que certaines des sécantes restent toujours « confondues » avec la courbe sur un intervalle plus grand que pour la tangente; malgré cela, cette dernière est la seule droite qui ne pourra jamais être évincée de la liste des candidates en fixant une précision plus fine, toutes les autres pouvant être éliminées une à une en considérant un intervalle suffisamment petit. Dans un second temps, ils considèrent un intervalle centré en l'abscisse du point de tangence et les sécantes passant par ses extrémités. Ils comparent alors les sécantes à la courbe avec la tangente. Pour ces droites, soit ils fixent une précision et réitèrent l'expérience, soit ils fixent un intervalle et mesurent l'erreur maximale commise en remplaçant la courbe par la droite sur cet intervalle. Dans cette seconde investigation, la tangente n'est pas non plus la droite qui « approche » le mieux la courbe car elle n'est pas suffisamment proche de celle-ci aux extrémités de l'intervalle. Ils en arrivent à la conclusion suivante :

La tangente est vraiment une notion locale ! Il s'agit de la meilleure approximation affine de la courbe au voisinage d'un point, à condition de ne fixer à l'avance ni la longueur de *l'intervalle contenant le point, ni l'erreur admise dans l'approximation. Elles doivent pouvoir rester aussi petites que l'on veut.*

2. — Un parcours didactique

De la tangente au cercle à celle définie et utilisée en analyse... il y a loin de la coupe aux lèvres ! Le parcours didactique décrit ci-dessous dans les grandes lignes est balisé de sauts conceptuels majeurs. Le premier d'entre eux est constitué du passage à une approche « infinitésimale ».

2. 1. *Vers une approche infinitésimale*

Cette approche se réalise en deux temps : d'abord, une tâche qui va donner l'occasion, à propos d'une fonction du second degré, de confronter plusieurs techniques dont une de type « infinitésimal » ; ensuite, la recherche de tangentes relatives à une courbe du troisième degré qui va provoquer une confrontation de plusieurs conceptions de la tangente.

2. 1. 1 *Recherche du point de contact d'une tangente de pente donnée*

Une première tâche demandée aux élèves n'est pas, comme on le voit souvent, de déterminer une tangente en un point d'une courbe mais bien de trouver le point de contact d'une tangente parallèle à une droite donnée. Il s'agit d'abord d'une tâche graphique, la courbe et la droite donnée étant représentées à la figure 2 ci-contre.

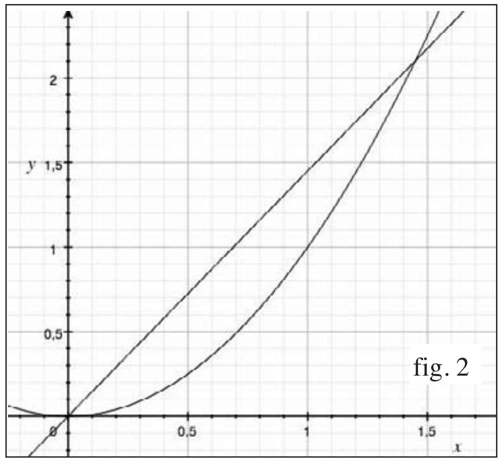


fig. 2

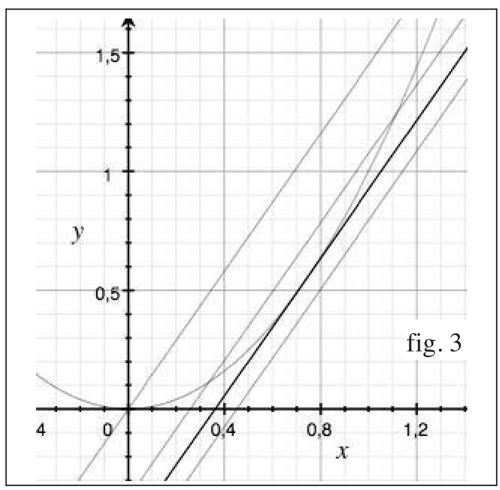


fig. 3

Les élèves peuvent placer la tangente à vue. Ils peuvent aussi tracer la tangente en glissant la règle graduée parallèlement à la droite donnée jusqu'au dernier point commun, ce qui revient aussi à creuser un écart maximum entre les ordonnées des points de la droite et de la sécante. Lors des manipulations effectuées, ils obtiendront soit une droite qui a, de façon nette, deux points communs avec la courbe, soit une droite qui semble se confondre localement avec la courbe, soit une droite qui ne la rencontre pas (voir figure 3). Mais ils ne pourront qu'estimer seulement l'abscisse du point de contact, autour de 0,7. Ensuite, on fournit aux élèves l'équation de la droite : $y = 1{,}45x$ et celle de la courbe : $y = x^2$. Ces données permettent de traduire les stratégies graphiques décrites ci-dessus en stratégies algébriques.

Premièrement, les élèves peuvent vérifier par calculs si, par exemple, la droite passant par le point de la courbe d'abscisse $x = 0{,}7$ (ou $x = 0{,}8$) et de pente 1,45 est sécante ou tangente à la courbe en résolvant le système d'équations :

$$\begin{cases} y = 1{,}45(x - 0{,}7) + 0{,}7^{2} \\ y = x^{2} \end{cases}$$

Ils trouveront ainsi deux solutions $x_1 = 0{,}7$ et $x_2 = 0{,}75$. Ensuite, vu la forme de la courbe avec sa concavité vers le haut, les élèves pourront en déduire que l'abscisse du point de contact est située dans l'intervalle [0,7 ; 0,75].

Deuxièmement, les élèves peuvent calculer la valeur de x pour laquelle l'écart entre la droite et la courbe est maximal, ce qui revient à chercher la valeur maximale d'une fonction du second degré donnée par : $1{,}45x - x^{2}$.

La réponse est $x = \dfrac{1{,}45}{2} = 0{,}725$.

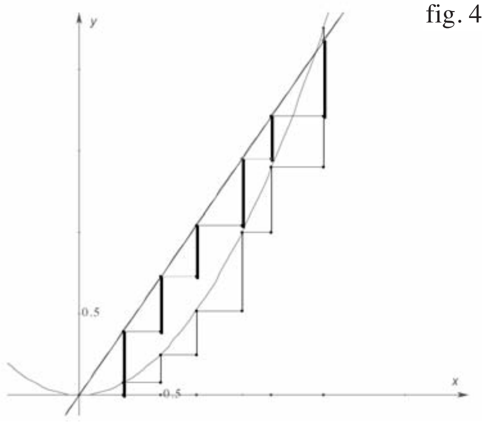
Troisièmement, certains élèves peuvent chercher la valeur du paramètre k pour laquelle le point d'intersection entre la courbe et une droite de pente 1,45 est unique. Cela revient à imposer une condition au paramètre k pour que le système

$$\begin{cases} y = 1{,}45x + k \\ y = x^{2} \end{cases}$$

ait une solution unique : $k = 0{,}525625$ et $x = \dfrac{1{,}45}{2} = 0{,}725$ comme abscisse du point de contact.

Une autre stratégie encore peut apparaître avec les données algébriques. Elle a été observée par Gantois et Schneider (2012) sur base d'une ingénierie dont la nôtre s'inspire et est illustrée par la figure ci-dessous :

fig. 4



Les élèves découpent l'intervalle [0 ; 1,45] en petits intervalles et comparent les pentes des sécantes sur ces intervalles avec la pente 1,45 de la droite donnée. L'abscisse du point de contact se trouvera alors dans l'intervalle où la pente de la sécante est égale à 1,45.

Cette dernière stratégie rejoint la première : toutes les deux fournissent un intervalle qui contient l'abscisse du point de contact de la tangente et de la courbe. Leur précision dépend donc de la longueur de cet intervalle : plus il est petit, plus de précisions on a au sujet du point de contact. Pour traiter d'un seul coup les intervalles de longueur arbitraire, on exprime algébriquement la structure commune de tous ces calculs en considérant les droites sécantes avec la courbe d'équation $y = x^{2}$ aux points d'abscisses x et $x + \Delta x$, et de pente 1,45 :

$$1{,}45 = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Pour une valeur numérique de Δx choisie, on obtient deux valeurs correspondantes de x et, de là, un encadrement de l'abscisse du point de contact avec une précision de Δx. Lorsque $\Delta x = 0$, on obtient $x = \dfrac{1{,}45}{2} = 0{,}725$, le même résultat que celui obtenu par les deux autres stratégies.

Ce résultat peut être contrôlé par une méthode algébrique qui consiste à vérifier que le système

$$\begin{cases} y = 1{,}45\left(x - \dfrac{1{,}45}{2}\right) + \left(\dfrac{1{,}45}{2}\right)^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

a une seule solution.

Ce travail débouche, à terme, sur une définition de la tangente en x à la courbe représentative de $y = x^2$ comme droite dont on connaît un point et dont la pente est $2x$, soit le résultat obtenu en annulant Δx dans l'expression simplifiée du taux d'accroissement

$$\frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Et on écrit $\dfrac{dy}{dx} = 2x$.

On peut parler ici de limite en un sens très « pratique » que nous commenterons dans la section 3. Précisons pour l'instant que cette acceptation du mot limite peut s'adapter à ce stade aux fonctions polynomiales, à la fonction $y = \dfrac{1}{x}$ et à la fonction $y = \sqrt{x}$ moyennant la technique du binôme conjugué.

Dans le cas des courbes relatives à un deuxième degré, la tangente ainsi définie est une droite qui possède un point commun avec la courbe sans la traverser. Elle correspond donc à la conception de la tangente héritée du cercle. Mais, ce ne sera plus le cas pour les courbes relatives à un polynôme du troisième degré et ce sera là une occasion de confronter plusieurs conceptions.

2. 1. 2 *La confrontation entre deux conceptions de la tangente*

On demande donc aux élèves de calculer, par la nouvelle procédure, les équations de deux tangentes à la courbe donnée par $y = x^3$, l'une de pente 0 et l'autre de pente 1/3, et de représenter les deux droites et la courbe sur un même graphique. On leur demande ensuite si les droites ainsi trouvées peuvent garder leur statut de tangentes. Pour les deux tangentes, on fait les mêmes calculs :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$$

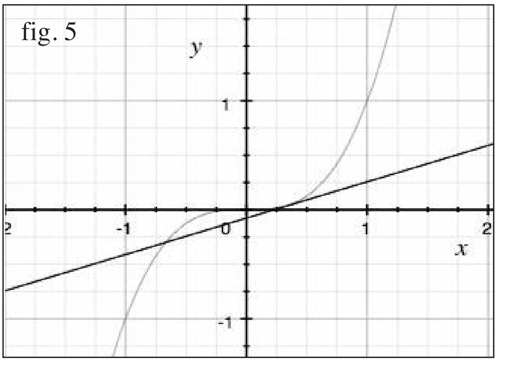
et $$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

La première tangente est l'axe des abscisses. La deuxième tangente a pour équation

$$y = \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3}) + \frac{1}{27}\ .$$

Les deux droites et la courbe sont représentées ci-dessous :

fig. 5



La première droite traverse franchement la courbe au point de contact, la seconde droite a plus d'un point en commun et elle aussi traverse franchement la courbe mais pas au point de contact.

Peut-on encore parler de tangente ? Sont ici confrontées une ancienne conception de la tangente inspirée par le cas du cercle (ou des coniques en général) et celle qui vient d'être construite. Il faut se donner ici de bonnes raisons de changer de conception... Ces raisons sont multiples : d'une part, les tangentes à la « mode » nouvelle fourniront des approximations affines locales (ce sera l'objet de la section 2.2 et nous y reviendrons à la section 2.4); d'autre part, les tangentes sont, en tant que « guides », de bons outils pour étudier l'allure graphique de fonctions (ce sera l'objet de la section 2.3).

2. 2. *La tangente comme source d'approximation affine locale d'une fonction*

Les ordinateurs et calculatrices graphiques offrent la possibilité de visualiser la linéarité locale d'une fonction : lorsqu'on fait des « zooms » successifs centrés au voisinage d'un point d'une courbe élémentaire, cette dernière apparaît comme un segment de droite. On s'appuie sur ce phénomène pour découvrir la tangente dans son nouveau rôle d'approximation affine d'une fonction.

D'abord, on demande aux élèves de constater que la courbe d'équation $y = x^3 - 0{,}5x + 1$ devient une droite après plusieurs zooms centrés en (0,1) et d'expliquer les raisons de ce phénomène. En effet, après quelques zooms, la courbe semble devenir un segment dans le voisinage du point (0,1). Pourtant, les deux fonctions ne sont égales qu'en $x = 0$. Ce phénomène s'explique par le fait que, dans la formule $y = x^3 - 0{,}5x + 1$, l'ordre de grandeur de x^3 est plus petit que l'ordre de grandeur de $-0{,}5x + 1$.

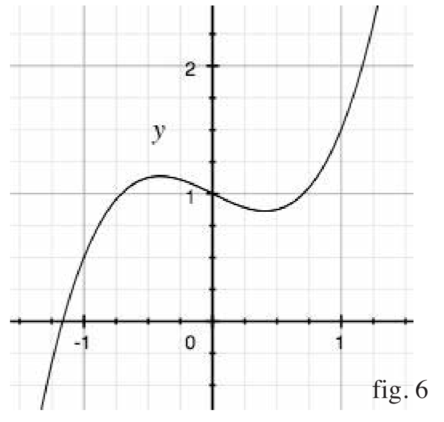


fig. 6

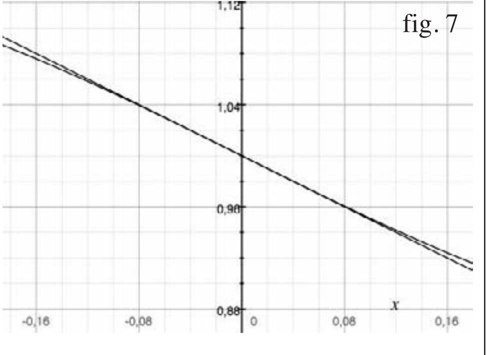


fig. 7

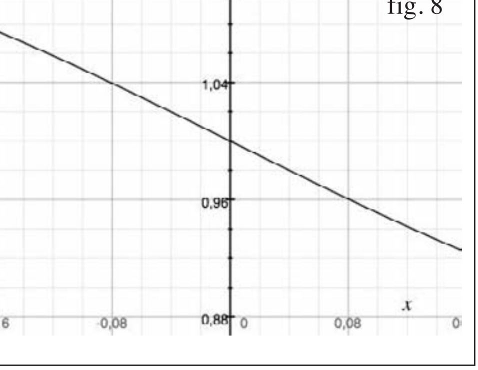


fig. 8

Cela signifie que le terme x^3 devient négligeable par rapport aux termes $-0{,}5x+1$ et que la fonction donnée par $y = x^3 - 0{,}5x + 1$ se comporte presque comme la fonction du premier degré $y = -0{,}5x + 1$ au voisinage de 0.

On peut vérifier, en plus, que la droite d'équation $y = -0{,}5x + 1$ est tangente à la courbe $y = x^3 - 0{,}5x + 1$ en $x = 0$. Donc, la tangente à l'origine est une bonne approximation de la courbe dans le voisinage de (0,1) : elle peut remplacer localement la courbe.

Dans la question suivante, on revient sur la courbe $y = x^2$ et sa tangente

$$y = 1{,}45\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right) + \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2$$

en $x = \frac{1{,}45}{2}$. On demande d'expliquer les raisons pour lesquelles la courbe et la droite semblent se confondre après plusieurs zooms centrés en $\left(\frac{1{,}45}{2} ; \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2\right)$. Pour le mettre en évidence, on va « développer » la fonction donnée par $y = x^2$ dans le voisinage du point $\left(\frac{1{,}45}{2} ; \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2\right)$, c'est-à-dire l'exprimer sous la forme d'un trinôme du deuxième degré en $\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right)$:

$$x^2 = \left(x - \frac{1{,}45}{2}\right)^2 + 1{,}45\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right) + \left(\frac{1{,}45}{2}\right)^2.$$

Dans la partie affine de cette expression, on reconnaît l'équation de la tangente. Le terme du second degré $\left(x - \frac{1{,}45}{2}\right)^2$ devient négligeable par rapport aux termes de la partie affine pour les valeurs de x proches de $\frac{1{,}45}{2}$ car son ordre de grandeur est plus petit que l'ordre de grandeur de la partie affine. Ici, encore, on peut associer une approximation affine locale à la tangente.

2. 3. *La tangente comme outil graphique pour étudier des fonctions*

Dans la nouvelle acception d'une droite représentative de l'approximation affine locale de la fonction, la tangente peut devenir un outil performant pour étudier certaines classes de fonctions. Considérons, par exemple, la classe de fonctions donnée par la formule paramétrée $y = ax^3 + cx + d$ et étudions son identité graphique. On peut vérifier par calcul infinitésimal que l'équation $y = cx + d$ est celle de la tangente en $x = 0$. En même temps, la fonction du premier degré donnée par $y = cx + d$ fournit une approximation, dans le voisinage de 0, de la fonction donnée par $y = ax^3 + cx + d$ car ax^3 est négligeable par rapport à $cx + d$.

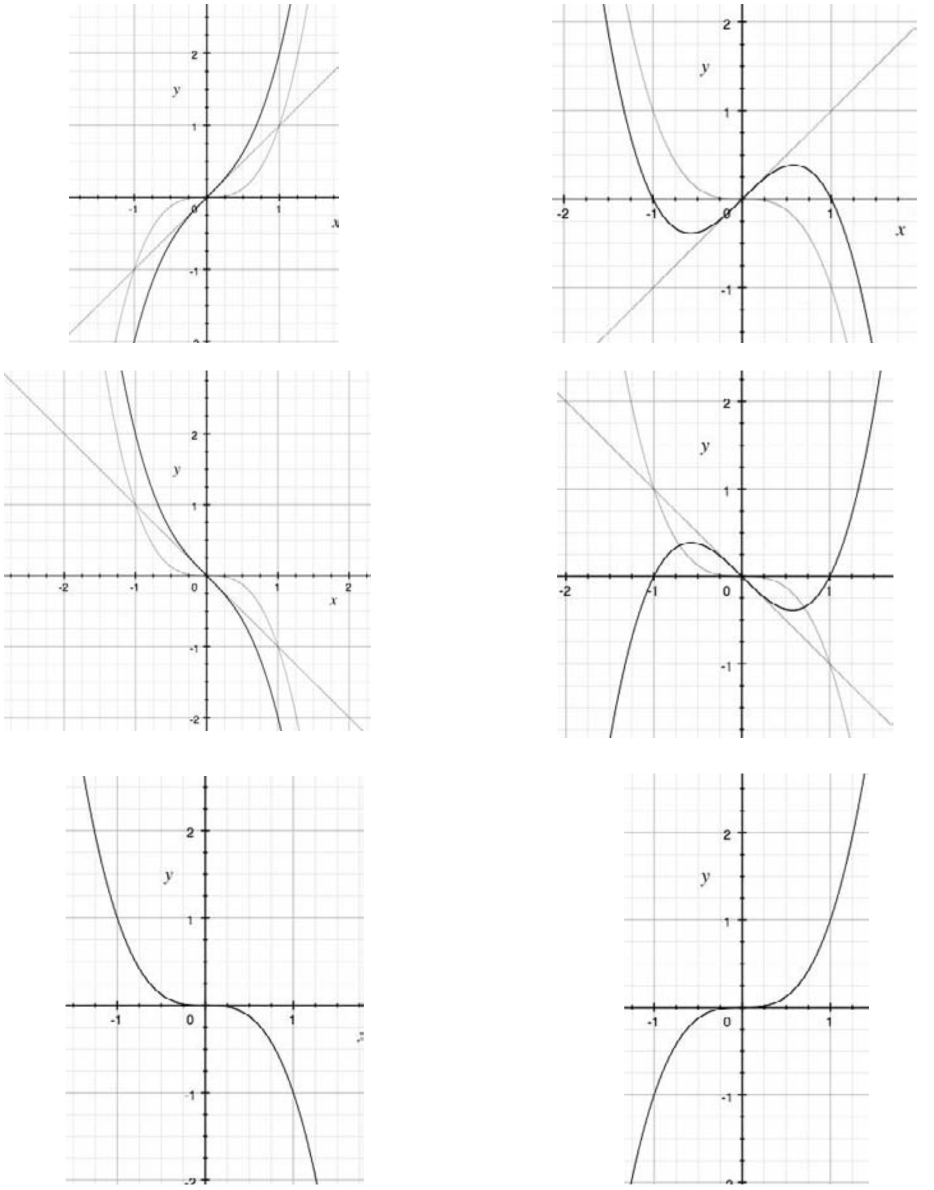
En particulier, la courbe d'équation $y = ax^3 + cx$ peut être obtenue par la « somme » de la courbe de $y = ax^3$ et de la droite $y = cx$. De tout cela, il résulte que la courbe « atterrit en douceur » sur la droite tangente et semble se confondre localement avec elle.

Les six cas de figure (voir encadré ci-contre) sont alors obtenus en fonction des signes de a ($a > 0$ ou $a < 0$) et de c ($c > 0$ ou $c < 0$ ou $c = 0$).

2. 4. *Vers une approche plus formalisée de dérivée : la meilleure approximation au sens de Chilov*

L'élimination des droites sécantes en tant que « meilleure approximation », au sens où l'entend Perrin-Glorian (1999), est ensuite rapfig. 9

Identité graphique de la famille de fonctions $y = ax^3 + cx$.



prochée de la conception de la tangente chez Chilov lequel définit un critère géométrique caractérisant, à ses yeux, une tangente en un point $A(x_0,y_0)$ d'une courbe :

> *La tangente en un point* A *du graphique* $y(x)$ *est définie en tant que droite* α *menée par le point* A *et telle que la courbe* $y(x)$*, en s'approchant du point* A*, pénètre dans tout angle de sommet* A *contenant la droite* α *et y reste, aussi petit que soit cet angle*. (cité et analysé par Schneider, 1988)

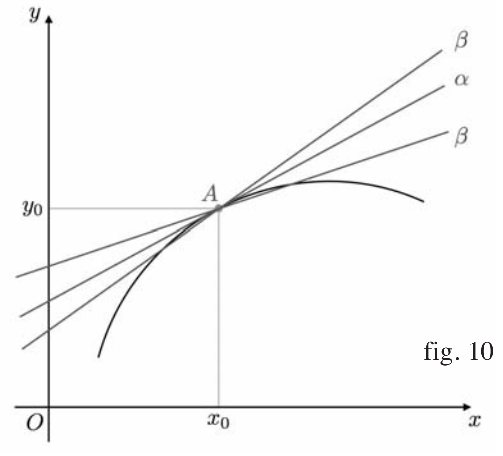


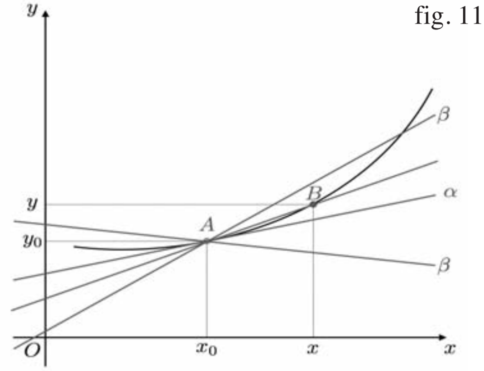
fig. 10

En effet, celui-ci imagine un « étau » formé des droites β qui enserrent la tangente et la courbe dans un voisinage du point A et, cet étau, il peut le resserrer autant qu'il le souhaite. A l'intérieur de l'étau, on peut trouver une portion de courbe qui est plus proche de la tangente que de n'importe quelle droite sécante extérieure à l'étau, pour autant que l'on considère un voisinage de l'abscisse du point A suffisamment petit. La conception de la tangente chez Chilov permet ainsi d'éliminer toutes les sécantes candidates en tant que « meilleure approximation de la courbe » : il suffit de considérer un étau suffisamment serré autour de la tangente qui ne contient pas une sécante considérée et, bien entendu, la tangente ne pourra jamais être disqualifiée (par construction).

On peut se demander si cette droite tangente est bien celle que l'on a défini plus haut, c'est-à-dire, une droite contenant le point A et dont la pente m est : $m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, cette limite ayant été définie par la suppression des termes contenant Δx dans l'expression simplifiée $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Appelons p la pente de la droite tangente telle que définie par Chilov. On peut supposer, sans restriction, que l'angle contenant α soit délimité par les droites de pentes $p - \varepsilon$ et $p + \varepsilon$ (tout angle contenant α contient et est contenu par un tel angle). Puisque la courbe rentre dans un tel angle, elle possède une portion sur laquelle tout point $B(x,y)$ détermine avec A une droite de pente comprise entre $p - \varepsilon$ et $p + \varepsilon$.

fig. 11



Il existe donc un voisinage de x_0 dans lequel

$$p - \varepsilon \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq p + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad -\varepsilon \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - p \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - p \right| \leq \varepsilon$$

et ce, quel que soit ε. On doit donc montrer que $p = m$ en confrontant deux définitions fort éloignées de la limite. Une première étape, facile, consiste à rapprocher $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ que ne distingue qu'un choix de notation. La deuxième étape, la plus importante, relève d'un approfondissement de ce que signifie une écriture quantifiée. L'unicité de la limite est évidemment en jeu ici. D'une part, on montre que pouvoir écrire $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sous la forme d'une somme dont m est un terme (fonction de x et indépendant de Δx) et dont les autres termes sont des puissances entières de Δx et seront donc "supprimés", entraîne de façon quasi évidente que :

$m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ au sens quantifié de Chilov.

D'autre part, il ne peut exister deux telles limites p et p'. En effet, l'existence d'un voisinage V de 0 et celle d'un voisinage V' de 0 dans lesquels, respectivement, $\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - p \right| < \varepsilon$ et $\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - p' \right| < \varepsilon$, pour tout ε, conduirait à une contradiction pour $\varepsilon < \frac{|p - p'|}{2}$ car, ainsi qu'illustré par le schéma ci-dessous, cela supposerait que, pour Δx dans l'intersection non vide de V et V', $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ soit à la fois dans l'intervalle de centre p et de rayon ε et dans celui de centre p' et de rayon ε.

La tangente telle que définie à la section 2.1 et la tangente au sens de Chilov sont donc une seule et même droite puisqu'elles passent par le même point de tangence et ont la même pente.

Un tel rapprochement n'est pas évident pour tous les élèves mais il permet, avec certains, de travailler le concept de limite tel que défini dans l'analyse formalisée, le concept de tangente donnant ainsi une occasion, parmi d'autres, d'établir un lien avec une approche plus intuitive de la limite.

2. 5. *Vers les développements limités*

L'étape précédente du parcours a permis de poser la question d'une meilleure approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point. La fonction affine associée à la tangente en ce point y a apporté une réponse et se devrait d'être exploitée sur des exemples de fonctions non polynomiales. Ces exemples, qui abondent en sciences, montrent l'intérêt de remplacer localement certaines fonctions par des fonctions plus « simples ». Se posent alors deux nouvelles questions : celle de l'erreur commise et celle d'une approximation polynomiale non affine.

La définition que donne Chilov de la tangente permet d'encadrer l'erreur tout en montrant que celle-ci dépend du caractère plus ou moins local de l'approximation. En effet, soit $A(x, f(x))$ un point de la courbe représentative d'une fonction f et $B(x + h, f(x + h))$ un autre point de cette courbe « voisin » de A (figure 12 page suivante).

Supposons la fonction f dérivable sur le tronçon considéré et donc continue. Approximer $f(x + h)$ par $f(x) + hf'(x)$, soit l'ordonnée d'un point C de même abscisse mais sur la tangente α de pente $f'(x)$, suppose une erreur égale en valeur absolue à

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x).h|,$$

soit la longueur du segment [BC].

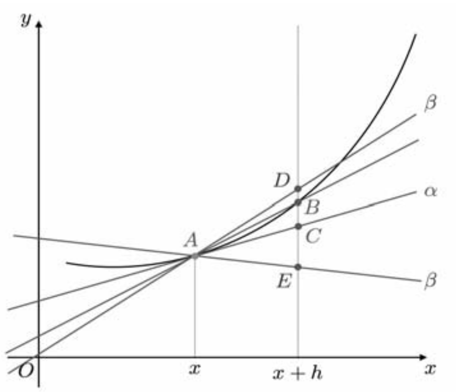


fig. 12

Cette erreur dépend de h et est évidemment de plus en plus petite au fur et à mesure que h est petit : c'est évident. Mais le critère de Chilov nous apprend davantage. Il nous dit que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de x dans lequel courbe et tangente sont dans l'étau formé par les sécantes β de pentes $f'(x) + \varepsilon$ et $f'(x) - \varepsilon$. Ce qui conduit à majorer, dans ce voisinage, la longueur de [BC] par celle de [DE], D et E étant les points respectifs de ces sécantes d'abscisse $x + h$. Cela se traduit par

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x).h|$$
$$< |f(x) + (f'(x) + \varepsilon).h - (f(x) + (f'(x) - \varepsilon).h)|$$
$$< |2\,h\,\varepsilon|$$

ou encore :

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x) - f'(x).h}{h}\right| < 2\varepsilon\ .$$

Cette inégalité est vérifiée pour ε quelconque, pourvu que $x + h$ soit dans un voisinage approprié de x ou, ce qui revient au même, pour h pris dans un certain voisinage de 0. On en conclut que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x).h}{h} = 0\ .$$

Par conséquent, l'erreur commise qui est égale à $f(x+h) - (f(x) + f'(x).h)$ et notée par $R(h)$, non seulement tend vers 0 mais, en outre, tend vers 0 « plus vite » que h. Le « tendre vers 0 plus vite que h » signifie que $R(h)$ est négligeable par rapport à h dans un voisinage suffisamment petit de 0. Ainsi, la définition de la tangente donnée par Chilov implique que l'erreur commise en remplaçant la courbe par sa tangente est *négligeable par rapport à l'accroissement considéré*.

A ce stade, nous concluons que, si une fonction f est connue en x, elle peut être approximée en $x + h$:

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x).h$$

l'erreur commise étant le « reste » $R(h)$[1] à ajouter pour que le signe « ≈ » devienne un signe d'égalité :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + R(h)\ .$$

Evidemment, ce reste ne peut être qu'estimé, l'important étant son ordre de grandeur. Etudions donc l'ordre de grandeur du reste $R(h)$ en nous appuyant sur la condition

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x).h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = 0.$$

La réflexion antérieure sur les calculs de limites et indéterminations peut faire prendre conscience qu'il n'y a qu'une manière de s'assurer de ce résultat : c'est d'exiger que l'ordre de grandeur de $R(h)$, pour des h

1 D'où le choix de la lettre R

proches de 0, soit l'équivalent de celui, non pas de h, mais de h^2.

Pensons en effet que, comme $h^2 < h$ dès que $h < 1$, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{kh^2}{h} = 0$ alors que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{kh}{h} = k$. La condition imposée par les mathématiciens entraîne celle-là : ils exigent que $|R(h)|$ puisse être majoré, dans un voisinage de 0, par une fonction du type $|kh^2|$:

$$|R(h)| < |kh^2|$$

dans ce voisinage. A cette condition, le reste $R(h)$ devient plus vite négligeable que le terme en h, soit $f'(x).h$ lorsqu'on « développe » $f(x + h)$ sous la forme $f(x) + f'(x).h + R(h)$.

Cela nous amène à imaginer une suite au « développement » $f(x) + f'(x).h$ en y ajoutant un terme du second degré c'est-à-dire en approximant $f(x + h)$ par

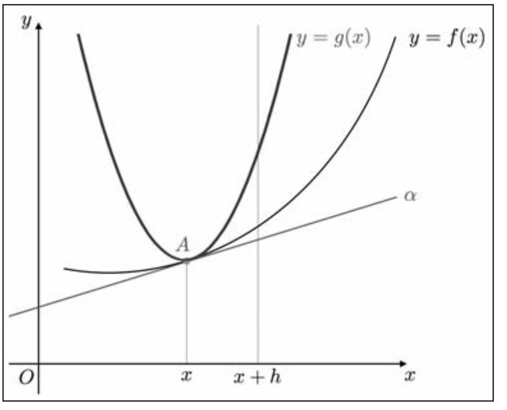
$$g(x + h) = f(x) + f'(x).h + a.h^2 .$$

En effet, une courbe s'ajuste mieux à une courbe qu'à une droite. Mais comment déterminer a ? Reconsidérons le but afin de répondre à cette question : on cherche à approximer localement une fonction f autour de x non pas par une fonction affine mais par une fonction du second degré g, afin de minimiser l'erreur commise lorsqu'on remplace $f(x + h)$ par $g(x + h)$.

Un dessin (figure 13) permet de comprendre aisément pourquoi on exige deux conditions pour ce faire :

1. f et g devraient avoir même tangente en x,
2. f et g devraient avoir même concavité en x ou, mieux, une même dérivée seconde, ce qui assurerait un bon contact de f' et g' et donc un meilleur ajustement de f et g autour de x.

fig. 13



La première de ces conditions est d'office respectée par la forme a priori de g. La seconde se traduit par $g''(x) = 2a = f''(x)$, c'est-à-dire : $a = \frac{f''(x)}{2}$. Il vient donc :

$$g(x + h) = f(x) + f'(x).h + \frac{f''(x)}{2}.h^2.$$

Evidemment, comme pour l'approximation affine, on peut se demander si $g(x + h)$ approxime bien $f(x + h)$. De manière analogue à ce qui s'est passé pour la tangente, la condition sera que le reste, ou l'erreur commise quand on remplace $f(x + h)$ par $g(x + h)$, soit d'un « ordre de grandeur », en h, inférieur à celui du terme du second degré du développement :

$$f(x + h) = f(x) + f'(x).h + \frac{f''(x)}{2}.h^2 + R(h)$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \frac{R(h)}{h^2} = 0$, ce que l'on obtient en exigeant, dans un voisinage de 0, la majoration de $|R(h)|$ par une fonction de type $|kh^3|$. Et, ainsi de suite, on développe $f(x + h)$ par des polynômes en h de degré sans cesse plus grand...

3. — Enjeux du parcours didactique

L'enjeu premier du parcours proposé est de faire évoluer la conception qu'ont les élèves du concept de tangente en même temps que sa définition : d'une droite qui ne rencontre globalement une courbe qu'en un seul point sans la traverser à son acception au sein de l'analyse mathématique. Mais ce parcours possède aussi un autre enjeu non moins important qui est lié aux raisons d'être de cette évolution et qui est l'acculturation des élèves à différentes problématiques liées à ce domaine mathématique. Comme on l'a vu, un travail sur la tangente en donne l'opportunité.

En guise de préambule, il convient de préciser que nous pensons cette acculturation dans une forme de progressivité laquelle s'exprime en termes de niveaux praxéologiques. Le concept de praxéologie de Chevallard (1999) est choisi en ce qu'il modélise les savoirs mathématiques autant par la pratique qu'ils autorisent que par la justification de cette même pratique.

Les niveaux en question ont été formalisés par Schneider (2008) en termes de praxéologies « modélisation » et de praxéologies « déduction » et retravaillés ensuite par Job et Schneider (2014) sous l'appellation « praxéologies pragmatiques » et « praxéologies déductives ».

Il n'est pas facile de donner une définition brève de ces concepts encore en évolution. Nous préférons les illustrer à travers la question de la tangente. D'abord, dans la section 3.1 où nous expliquons en quoi la tangente de l'analyse a évolué, dans l'histoire, d'un niveau praxéologique à l'autre. Ensuite en situant les enjeux successifs de ce parcours par rapport à ces deux niveaux praxéologiques (sections 3.2 et 3.3).

3. 1. *Sur l'évolution historique des tangentes, de leur modélisation à leur insertion dans une organisation déductive*

Une tangente est définie, en analyse mathématique, par un point et une pente. Cette pente est une image de la fonction dérivée et donc la limite d'un taux de variation de la fonction primitive. Cependant, le concept même de limite est susceptible d'une évolution dans le parcours des élèves tout comme il l'a été dans l'histoire des mathématiques. Au niveau d'une praxéologie « modélisation », Schneider (1988, 1991 b et 1992) l'envisage comme un « acte » de suppression de termes contenant l'incrément de la variable dans l'expression du taux moyen écrit sous la forme de la somme d'une fonction de x et d'un polynôme en Δx. C'est le point de vue de Lagrange (1736-1813) qui définit la dérivée comme « limite » du taux d'accroissement $P = [f(x + i) - f(x)]/i$, cette limite étant pensée comme le résultat d'une action qui consiste à annuler i et dont l'utilisation du verbe « faire » rend particulièrement bien compte :

> *« Or, P étant une nouvelle fonction de x et i, on pourra de même en séparer ce qui est indépendant de i et qui, par conséquent, ne s'évanouit pas lorsque i devient nul. Soit donc p ce que devient P lorsqu'on FAIT i* = 0. *»*

Comme on le verra plus loin, ce point de vue évoqué spontanément par les élèves est en même temps sujet à caution à leurs yeux. S'impose alors une validation « pragmatique » (Job et Schneider, 2014) qui consiste à contrôler, sur des exemples où c'est possible, que les tangentes ainsi obtenues sont bien les mêmes que celles fournies par des techniques déjà éprouvées. On rejoint ici la démarche de Fermat (1605 ou 1608, 1665) lequel cherche à justifier sa méthode d'adégalité — forme embryonnaire du calcul des dérivées où l'incrément de la variable est considéré tantôt nul, tantôt non nul — en la mettant à l'épreuve de deux problèmes déjà résolus dans l'Antiquité sans usage aucun d'une quelconque considération « infinitésimale » : l'optimisation de l'aire des rectangles isopérimétriques, déjà réglée par Euclide sur base d'une preuve exclusivement géométrique, et la détermination de la tangente en un point d'une parabole réalisée par Apollonius de Perge.

Ce premier niveau praxéologique a un champ d'opérationnalité non négligeable : Lagrange arrive, à partir de son point de vue sur la dérivée, à dériver non seulement des fonctions polynomiales mais aussi, au prix d'artifices techniques telle que la multiplication par un binôme conjugué, des fonctions de type « racine carrée » et de type « inverse ».

Car on débouche bien là sur une modélisation de la tangente équivalente à celle qu'en propose l'analyse. Cependant, celle-ci doit évoluer avec le concept de limite lui-même qui devient, dans une praxéologie déductive (Job et Schneider, 2014), ici une théorie mathématique au sens propre du terme qu'on appelle l'analyse, un « proof-generated concept » au sens de Lakatos (1984). Il s'agit bien, en effet, d'un concept né d'un souhait de prouver les théorèmes sans plus se référer ni à des intuitions géométriques ou graphiques, ni à des arguments cinématiques. C'est alors le concept de limite qui devient la base de validation de l'analyse en termes de quantificateurs et d'inégalités et le maillon central de son architecture déductive. Sur ce point, voir Job (2011 et soumis pour publication).

A ce niveau praxéologique, les tangentes sont formellement définies comme droites dont la pente est la limite, au sens théorique, de la fonction « taux d'accroissement ».

3. 2. *D'une première conception de la tangente à sa modélisation au sein d'une praxéologie pragmatique*

Cette modélisation se base sur deux tâches préalables concernant, l'une, des fonctions du deuxième degré et, l'autre, des fonctions du troisième degré.

3. 2. 1 *A propos des fonctions du deuxième degré*

La première tâche proposée aux élèves (section 2.1.1) est de déterminer le point de contact d'une tangente dont on connaît la direction, d'abord graphiquement puis algébriquement. On s'éloigne donc de la tradition venue de d'Alembert selon laquelle on suppose le point de contact connu et on cherche à déterminer la tangente comme « limite des sécantes ». Le rôle de ce choix didactique, tel qu'analysé par Schneider (1991 a, 1992) et par Gantois et Schneider (2012), est de favoriser l'identification d'un calcul de dérivée, qui plus est sous un point de vue d'emblée fonctionnel.

A première vue, il semble aisé de tracer la tangente parallèle à une droite donnée sur une feuille de papier ou sur un graphique fait par un logiciel. Mais, en pratique, il est difficile de localiser le point de contact car la droite semble se confondre localement avec la courbe et on ne peut alors qu'estimer sa position. Néanmoins, les manipulations graphiques, malgré qu'elles ne soient pas concluantes, préparent les stratégies calculatoires ultérieures. De ces stratégies graphiques qui sont décrites à la section 2.1.1, la première et la dernière conduisent à un calcul de type « infinitésimal ». Notons que le point de départ est ici une conception primitive de la tangente comme droite qui n'a qu'un point commun avec la courbe sans la traverser : cela élimine d'emblée toute droite parallèle à l'axe d'une parabole.

Le choix des équations et des valeurs de leurs coefficients a été dicté par la simplicité voulue des calculs algébriques et par la difficulté voulue de deviner le point de contact.

La courbe $y = x^2$ a été choisie pour une raison majeure : elle conduit à plusieurs stratégies dont certaines sont de type « infinitésimal » et d'autres non car elles débouchent sur des équations du second degré dont les techniques de résolution sont déjà connues des élèves. Les secondes stratégies vont ainsi permettre de valider les premières, au sens pragmatique précisé plus haut. C'est ce mode de validation qui va « justifier » ensuite une modélisation de la tangente comme droite dont la pente est obtenue par un calcul de limite « en acte » à la manière de Lagrange. Ce qui rend cette validation nécessaire, ce sont les doutes exprimés par les élèves sur la procédure infinitésimale en raison de l'annulation de Δx et selon l'interprétation donnée à la section 1.2. Pour l'illustrer, nous reprenons ci-après des extraits de Gantois et Schneider (2012) qui ont conçu une ingénierie — dont la nôtre s'inspire — dans laquelle la dérivée est construite tant comme vitesse instantanée que comme pente de candidate-tangente.

Il s'agit en effet, dans une première étape de cette ingénierie, de déterminer le plus précisément possible l'instant où deux mobiles en mouvement rectiligne ont la même vitesse lorsque leurs lois de mouvement sont données par les formules suivantes $\rho_1(t) = t^2$ et $\rho_2(t) = \sqrt{3}t$. A une étape du calcul, les élèves écrivent la vitesse moyenne du premier mouvement, soit

$$\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = t_2 + t_1 \ (ou\ \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = 2t + \Delta t)$$

et ils l'égalisent à la vitesse constante du second mouvement, soit $t_2 + t_1 = \sqrt{3}$ ou $2t + \Delta t = \sqrt{3}$.

Ainsi, les élèves obtiennent une équation à deux inconnues et, comme ils ne voient pas comment trouver une deuxième relation entre t_1 et t_2, ils décident de les égaler :

M1 Donc $t_2 = \sqrt{3} - t_1$.

E1 Donc... Oui, et $t_1 = \sqrt{3} - t_2$.

M1 Oui. Et ça nous fait quoi ?

E1 Et ça, et ça... Oui, c'est ça le problème : une fois qu'on a ça, on n'a toujours pas l'instant t.

N1 Mais, il faudra trouver une autre façon... Enfin... encore un autre truc où tu as $t_1 + t_2$ et alors on saurait obtenir un système. Tu vois ce que je veux dire ? S'il y a deux inconnues, il faudrait trouver une autre manière...

E1 Oui, mais qu'est ce que tu aurais d'autre comme équation à part ça ?

N1 Et si... A quel moment... On ne devrait pas juste prendre un seul t et dire : c'est une vitesse instantanée ? On pourrait prendre juste un t vu que c'est le seul moment.

M1 Oui, mais, limite, ils sont tellement proches, qu'on peut dire que $t_1 = t_2$.

N1 Oui, c'est ça, en fait.

Les élèves trouvent alors la réponse $t = \sqrt{3}/2$. Des doutes sont cependant exprimés sur la validité de ce résultat :

M1 Parce qu'en fait, ils sont tellement proches... Tu mets t_2 plus ou moins égal à t_1. Et donc, tu n'as qu'à dire $2t_1 = \sqrt{3}$. Donc $t_1 = \sqrt{3}/2$.

E1 Ça paraît bizarre d'égaliser t_1 et t_2.

C1 C'est un peu facile... Ca ne met pas vraiment en commun les deux équations.

Prof : En fait, vous avez fait... Vous avez rendu votre différence de temps...

E1 [qui coupe le Professeur et continue sa phrase] : ... tellement petite que t_2 est égal à t_1 ...

N1 Infiniment petite.

E1 Enfin, presque égale.

E1 Mais ce n'est pas imprécis, à ce moment-là ?

N1 Ben non : c'est logique. Si tu réduis à fond l'intervalle de temps, ça deviendra égal.

Comme on le voit donc, c'est bien la question posée qui induit l'identification du calcul « en acte » de dérivée et, aussitôt, un débat entre élèves sur sa validité.

3. 2. 2 *A propos des fonctions du troisième degré*

Ce premier travail sur les tangentes à un second degré met sur le tapis une nouvelle conception de la tangente qui n'est pas encore en rupture par rapport à la conception initiale en ce sens que toutes deux conduisent aux mêmes résultats. Ce qui est d'ailleurs la base d'une validation pragmatique. Mais les questions relatives à une fonction du troisième degré les opposeront. Le choix d'une conception s'impose alors sans pouvoir être réglé dans l'immédiat: on ne tranchera qu'après avoir travaillé l'idée d'approximation affine et celle d'une tangente « droite-guide » pour tracer le graphique d'une fonction.

Mais cette partie du parcours didactique suppose quelques précautions. En effet, la linéarité « à distance finie » observée dans les zooms successifs a été exploitée par Tall (1996) et l'a conduit à la notion de « tangente pratique ». Cette idée à été reproduite dans de nombreux manuels et cours d'analyse. Mais, elle présente deux faiblesses. D'abord, les exemples se limitent à la tangente dont l'équation est simple (la pente est un entier petit, de même que d'autres coefficients figurant dans son équation). Comment faire alors dans le cas où l'équation de la tangente n'a pas de coefficients commodes ? Ensuite, la droite tangente ainsi déterminée et tracée par le logiciel semble se confondre avec la courbe. Ce fait laissé sans commentaire risque d'introduire une fausse idée selon laquelle la courbe est localement un morceau de la tangente et ne fait qu'aggraver l'obstacle empiriste.

Nous présentons ici des interactions entre professeur et élèves (Krysinska et Schneider, 2010) qui invitent à une certaine prudence face à la linéarité « à distance finie ». D'abord, le professeur attire l'attention des élèves sur le phénomène observable de la linéarité locale lors des « zooms » successifs : une courbe semble devenir une droite, quelle que soit l'écriture de la fonction. Ensuite, les élèves sont invités à déterminer l'équation d'une courbe du troisième degré dont les racines sont égales à – 2 et 1 et qui, au bout des « zooms in » répétés autour de son point d'intersection avec l'axe des ordonnées, devient presque la droite d'équation $y = 2x + 3$. Après un certain temps de recherche individuel et collectif, les élèves obtiennent l'équation

$$y = -\frac{7}{4}x^3 - \frac{13}{4}x^2 + 2x + 3$$

Mais, quelques-uns expriment leur doute sur le fait qu'une courbe puisse devenir droite, fut-ce localement.

Le professeur revient donc à la question suivante : *la courbe* $y = -\frac{7}{4}x^3 - \frac{13}{4}x^2 + 2x + 3$ *devient-elle réellement une droite après le zoom ?* Certains élèves font afficher simultanément la droite et la courbe, et ils font suffisamment de zooms pour que l'une et l'autre se superposent.

D'autres répondent : « Ca ne peut pas devenir un segment de droite car il y a la partie en x^3 et en x^2. Il faudrait que $-\frac{7}{4}x^3 - \frac{13}{4}x^2$ soit égal à 0 pour les x autour de 0. C'est donc que la calculatrice nous a trompés. Nous voyons un segment, mais c'est un morceau d'une courbe » ou encore « Lorsqu'on résout l'équation

$$-\frac{7}{4}x^3-\frac{13}{4}x^2+2x+3=2x+3$$

en x, on a $x = 0$ ou $x = -\frac{13}{7}$, seulement deux points communs. »

Une nouvelle question surgit : *Pourquoi alors voyons-nous le segment de droite d'équation* $y=2x+3$ *?* A la demande du professeur, les élèves comparent, avec le tableau numérique affiché par la calculatrice, les valeurs numériques des deux expressions $-\frac{7}{4}x^3-\frac{13}{4}x^2+2x+3$ et $2x+3$: « il n'y a pas d'égalité car, en regardant le tableau numérique avec le pas de 1/100, nous pouvons constater une différence de 4/100 ».

Les comparaisons d'autres valeurs de ces expressions incitent certains à dire que la différence est petite mais qu'elle existe et qu'elle vient des termes $-\frac{7}{4}x^3-\frac{13}{4}x^2$. Mais, ajoutent-ils, « Pour des valeurs de x très proches de 0, cette expression est quasi nulle, est négligeable. La calculatrice ne fait plus de différence et la courbe se comporte comme un segment de droite dans le voisinage de 0. ».

Cette première partie du parcours qui s'inscrit dans une praxéologie « modélisation » débouche donc sur une nouvelle conception de la tangente qui est celle de l'analyse à ceci près que le concept de limite n'est pas encore formalisé comme il l'est dans ce domaine mathématique. Il reste du chemin à faire... c'est l'objet de la section suivante.

3. 3. *La tangente au sein de l'analyse, théorie déductive*

Un deuxième niveau praxéologique se met en place à partir d'un projet de mise en ordre déductive des objets (tangentes, vitesses, ...) modélisés au terme de praxéologies « modélisation ». Et c'est dans cette nouvelle perspective que nous avons envisagé les étapes suivantes de notre parcours didactique décrites aux sections 2.4 et 2.5.

Il s'agit d'abord de faire comprendre aux élèves ce que l'on entend, en analyse mathématique, par meilleure approximation locale dans un voisinage d'un point. La réflexion de Perrin-Glorian (1999) trouve ici sa place : la tangente disqualifie toute candidate-sécante à ce rôle parce qu'on exige de ne pas fixer *a priori* ni la précision de cette approximation, ni la longueur de l'intervalle sur lequel on l'envisage.

Ce point de vue est alors mis en relation avec la définition que donne Chilov (1974) du concept de tangente. Cette définition porte implicitement l'idée de quantification : la courbe doit bien pénétrer dans « tout angle » contenant cette tangente, « aussi petit que soit cet angle », et ce, « en s'approchant » du point de contact, c'est-à-dire dans un voisinage donné de ce point. Bien sûr, elle est formulée dans un langage géométrique et fait appel à des connotations de mouvement à travers les locutions « en s'approchant », « pénètre » et « y reste ». Mais elle donne l'occasion d'initier les élèves à sa traduction formelle et aux écritures typiques de l'analyse dite formalisée. Un discours approprié doit viser à leur faire comprendre que les connotations géométriques et/ou cinématiques sont délibérément évacuées en raison de leur ambiguïté (que veut dire « s'approcher » par exemple) et que le quantificateur « pour tout » portant sur un réel arbitraire ε évite de devoir considérer des idées intraduisibles quand on les prend isolées comme « ε tend vers 0 ».

Dans ce travail, la pente de la tangente apparaît comme une limite de fonction au sens du mathématicien. Mais, il est nécessaire de faire le lien, pour les élèves, avec le calcul de limite en acte fait antérieurement, à la manière de Lagrange. Le discours sur l'unicité de la limite, qui « tombe un peu du ciel » dans les manuels ou livres d'analyse, trouve pleinement sa place ici.

Mais le travail engagé sur l'idée de « meilleure approximation » appelle aussitôt une réflexion sur l'erreur commise et l'exigence que porte sur elle la nouvelle définition de la tangente dans l'analyse formalisée. L'enjeu, pour l'élève, est de saisir que ce reste doit être pensé en termes de fonction de l'écart des abscisses entre le point où la fonction initiale est connue et le point où l'on cherche à l'approximer : h ou, avec d'autres notations, $x - x_0$. On peut soulever ici l'opportunité de choisir un système de notations plutôt qu'un autre mais nos observations nous poussent à souligner une difficulté avérée dans les deux cas : celle de penser ce reste en termes fonctionnels par rapport à la variable indépendante *ad hoc*.

L'exigence portée sur le reste : tend vers 0 « plus vite » que h à « la manière de h^2 » laisse entrevoir, par ricochet, l'intérêt de poursuivre en « développant » la fonction suivant un second degré en h, puis un troisième degré,... Et, par conséquent, ouvre une fenêtre sur un potentiel horizon mathématique pour l'élève. L'ensemble du travail fait à ce niveau praxéologique prépare en effet, à plus ou moins long terme, plusieurs aspects de l'analyse dite supérieure : la « différentielle » en tant que fonction définie mathématiquement, la différentiabilité qui remplacera la dérivabilité pour les fonctions de plusieurs variables, la définition de fonctions en termes de développements illimités.

Conclusion

Cet article illustre, si besoin est, que le concept de tangente est, comme la plupart des concepts mathématiques, défini en lien avec un environnement global que nous avons exprimé en termes de niveaux praxéologiques, tantôt de type modélisation, tantôt de type déduction. Et que, en cela, il peut être « solidaire », du point de vue des apprentissages et enseignements, d'autres concepts faisant partie du même champ conceptuel (au sens de Vergnaud, 1991) qu'est l'analyse mathématique.

Au premier niveau praxéologique, les objets appréhendés de prime abord sur un mode plus ou moins intuitif et décrits souvent dans un contexte restrictif deviennent définis par la technique qui permet de les déterminer : ici, un calcul de limite « en acte » définit un nombre dérivé comme objet premier et, par là, une tangente comme objet second. Déjà là, pour de nombreuses fonctions relativement simples, un progrès doit être réalisé dans les pratiques enseignantes où l'on observe un cercle vicieux à propos de la tangente - lié à l'obstacle empiriste - dont il n'est pas clair qu'elle préexiste ou non à la dérivée. Quant à la définition primitive d'une tangente comme droite rencontrant la courbe en un seul point sans la traverser, qui peut être opératoire dans la géométrie affine des coniques, elle doit être disqualifiée à ce niveau aux yeux des élèves pour autant qu'on leur explique ceci : la définition d'un concept n'est jamais qu'un choix provisoire et l'on peut en changer, quitte à contredire la précédente, en raison de son champ d'opérationnalité dans une problématique donnée.

Au second niveau praxéologique, les définitions données aux objets : limite, fonction, dérivée, tangente se doivent de permettre la mise en place d'une organisation déductive autonome, l'analyse mathématique proprement dite, coupée de ses liens avec la géométrie et la physique d'où sont issues les problématiques qui lui ont donné naissance. Là aussi, l'empirisme se heurte à une perspective lakatosienne des définitions ainsi que montré par Job (2011 et soumis pour publication).

En effet, ce dernier dénonce globalement le risque majeur lié à l'entendement même de ce qu'est une « définition » réduite trop souvent, dans l'enseignement, à des « descriptions d'objet mental ». Et c'est bien pour éviter ce risque que nous avons construit le parcours didactique décrit et analysé dans cet article.

Références

Bkouche R. (1982). Euclide, Klein, Hilbert et les autres ..., IN Bkouche R., Borowczyck J., Kaleka G., Le Rest E., Le Rest M. et Plane H. (EDS), *La rigueur et le calcul*. Documents historiques et épistémologiques. Ed. Groupe Inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques.

Bos H. J. M. (1980). Newton, Leibniz and the Leibnizian tradition, dans *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910 ; an Introductory History*, I. Grattan-Guinness, Duckworth, London.

Brousseau G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Castela C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15/1, pp. 7-48.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2.

Chevallard Y. (2006). Journal du Séminaire DSMF, IUFM de l'Académie d'Aix-Marseille.

Chilov G. (1974). *Analyse mathématique dans la classe des fonctions rationnelles, Initiation aux mathématiques*. Moscou : Editions MIR.

Cornu B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Thèse de doctorat de 3ème cycle, Université de Grenoble.

Delfeld H., Pasquasy F., t'Kindt-Demulder I., Timmermans M.-M. (2003). *Actimath 5*. Van In.

Gantois J-Y., Schneider M. (2012). Une forme embryonnaire du concept de dérivée induite par un milieu graphico-cinétique dans une praxéologie « modélisation ». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32/1, pp. 57-99.

Job P. (2011). *Etude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques*. Thèse soutenue à l'Université de Liège.

Job P. (soumis pour publication). *Le couplage de la TAD et de la TSD, au travers du concept de situation fondamentale, comme grille d'interprétation des difficultés d'appréhension du concept de limite « formalisé »*.

Job P., Schneider M. (2014). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus, IN Chris Rasmussen, Marcelo C. Borba (EDS), *The teaching and Learning of Calculus - In memoriam Arnold Kirsch. ZDM The international Journal on Mathematics Education*, Vol 46, pp. 635-646, Issue 4. Heidelberg : Springer.

Kline M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press,

Krysinska M., Mercier A., Schneider M. (2009). Gestes d'instrumentation didactique de calculatrices graphiques dans l'étude de classes paramétrées de fonctions, IN Floris R., Conne F. (éds.), pp. 247-304. *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*. Bruxelles: De Boeck université.

Krysinska M. et Schneider M. (2010). *Emergence de modèles fonctionnels*. Presses universitaires de Liège.

Lakatos I. (1984). *Preuves et réfutations, Essai sur la logique de la découverte mathématique*, traduit par N. Balacheff et J.M. Laborde. Hermann, Paris.

Perrin-Glorian M.-J. (1999). La tangente est-elle vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point. *Repères Irem*, n° 34, p. 12.

Popper K. (1973). *La logique de la découverte scientifique*. Paris: éditions Payot.

Rouy E. (2007). *Formation initiale des professeurs (du secondaire supérieur) et changements de posture vis-à-vis de la rationalité mathématique*. Thèse soutenue à l'Université de Liège.

Salin M.-H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants, IN G. Lemoyne et F. Conne (eds), *Le cognitif en didactique des mathématiques*, pp. 327-352. Les presses de l'Université de Montréal.

Schneider M. (1988). *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*. Thèse dirigée par N. Rouche et soutenue à l'Université de Louvain, voir rubrique « Thèses et projets » à l'adresse www.ladimath.ulg.ac.be.

Schneider M. (1991 a). Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente. *Repères IREM*, n°5, pp. 65-81.

Schneider M. (1991 b). Un obstacle épistémologique soulevé par des « découpages infinis » des surfaces et des solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11/2.3, pp. 241-294.

Schneider M. (1992). A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané. *Educational Studies in Mathematics*, n° 23, pp. 317-350.

Schneider M. (2008). *Traité de didactique des mathématiques: La didactique par exemples et contre-exemples*. Les Editions de l'Université de Liège.

Schneider M. (2011). Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ? dans C. MARGOLINAS, M. ABBOUD-BLANCHARD, L. BUENO-RAVEL, N. DOUEK, A. FLUCKIGER & P. GIBEL. *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, pp. 175-206.

Sierpinska A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 6/1, pp. 5-67.

Tall D. (1996). *Functions and Calculus* in A.J. Bishop al. (eds). International Handbook of Research in Mathematics Education, pp. 289-325. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Vergnaud G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3, pp. 133-169.