REPERES - IREM. N° 105 - octobre 2016

RACONTE-MOI UNE NIMSTOIRE

Lisa ROUGETET
Irem de Lille

Introduction

Dans le projet de programmes pour le cycle 4 du 9 avril 2015, celui de mathématiques est présenté structuré autour des quatre thèmes traditionnels : organisation et gestion de données, fonctions ; nombres et calculs ; géométrie ; grandeurs et mesures, et un nouveau thème intitulé « algorithmique et programmation ». Les ressources mises à disposition par Éduscol (mars 2016), reprenant la lettre de saisine du Conseil supérieur des programmes du 19 septembre 2014, précisent : « L'enseignement de l'informatique et de l'algorithmique au cycle 4 n'a pas pour objectif de former des élèves experts [...]. La maîtrise des langages informatiques n'est pas la finalité de l'enseignement, mais leur pratique est le moyen d'investir d'autres démarches d'investigation, d'autres modes de résolution de problèmes, de simulation ou de modélisation. ». Les compétences à développer sont la décomposition (analyser un problème compliqué, le découper en sous-problèmes), la reconnaissance de schémas (invariants, répétitions), la généralisation et l'abstraction, et la conception d'algorithme.

Pour ce faire, une des modalités de l'apprentissage correspondant proposée est le travail en mode débranché, c'est-à-dire sans l'utilisation d'un dispositif informatique. L'approche par les jeux y est fortement conseillée ; les activités suggérées par Éduscol sur le logiciel Scratch sont des jeux à trois personnages, ou le tic-tac-toe, et on trouve dans les repères pour la construction de l'attendu de fin de cycle, « programmer des applications ludiques (labyrinthes, pong, bataille navale, nim, tic-tac-toe...) ». Avant de se lancer dans des algorithmes et une programmation de ces jeux, il nous semble pertinent de donner (et de se donner) quelques bases, sur le jeu de Nim par exemple, ses variantes, sa résolution, ses enjeux, etc. dans une dimension historique. L'intérêt de cette démarche est double : d'une part, elle permet la mise en œuvre d'activités interdisciplinaires qui mêlent histoire, mathématique et informatique. En effet, les jeux présentés s'inscrivent dans une histoire mathématique avec le développement de la théorie des jeux dits combinatoires, mais également dans une histoire de l'informatique, quand ils furent programmés. D'autre part, réinvestir ces jeux dans leur pratique et leur analyse permet de « proposer aux élèves des situations qu'ils puissent vivre et dans lesquelles les connaissances vont apparaître comme la solution optimale et découvrable aux problèmes posés. » [G. Brousseau, 1998, p. 49].

Cette dimension expérimentale est présente dans la théorie des situations à travers les situations d'action et permet une approche épistémologique des jeux mathématiques et de leur résolution. Par ailleurs, le jeu de Nim et ses variantes peuvent aisément être adaptées à différents niveaux selon les compétences et savoirs visés, et constituer des exemples pertinents de certaines notions de mathématiques ; vous trouverez des suggestions tout au long de cet article. Enfin, ces jeux favorisent le travail en groupe, pouvant mobiliser des groupes de trois élèves – deux joueurs et un observateur –, sans nécessiter un réaménagement de la classe ni le besoin d'avoir du matériel trop élaboré (des jetons et du papier quadrillé suffisent).

Avant toute chose, voici quelques définitions pour aider à la compréhension du reste de l'article. Les jeux de Nim font partie d'une classe de jeux plus vaste appelée les *jeux combinatoires*. Ce sont des jeux finis qui se jouent à deux joueurs, alternativement, à information complète (pas de cartes cachées ou de lancers de dés) et dont le gagnant est souvent déterminé par le dernier coup. Les plus connus sont les Échecs, les Dames, le Tic-Tac-Toe (Morpion) et les jeux de Nim [1]. Parmi les jeux combinatoires, il faut distinguer la *version normale* – quand le dernier joueur qui joue a gagné – de la *version misère*, quand le dernier joueur qui joue a perdu. Les Échecs, par exemple, se jouent en version normale tandis que le jeu des bâtonnets à Fort Boyard se joue en version misère (celui qui retire le dernier bâtonnet a perdu).

Les jeux combinatoires portent bien leur nom, car en théorie il est possible de dénombrer toutes les positions de jeu possibles et de déterminer quel enchaînement de coups optimal mène à la victoire. En théorie seulement, car pour les Échecs par exemple, un rapide calcul approximatif – en considérant qu'en moyenne 40 coups sont joués dans une partie, et que chaque joueur à le choix en moyenne entre 30 coups possibles – montre que le nombre total de parties qui aient un sens (c'est-à-dire qui ne soient pas seulement légales) s'élève à $(30 \times 30)^{40}$ soit environ 10^{120} (cette approximation trouve sa place dans des activités sur les puissances et les grandeurs à des niveaux 4ème et 3ème). Cette valeur est appelée *Nombre de Shannon*, en hommage à Claude Shannon (1916 - 2001) qui fut le premier à donner une estimation de la complexité du jeu d'Échecs. Voilà qui explique la nécessité d'utiliser l'outil informatique pour mener rapidement un grand nombre de calculs, ce qui a permis au superordinateur Deep Blue de gagner contre le champion du monde Garry Kasparov en 1997, en analysant près de 300 millions de positions par seconde…

Mais revenons aux jeux de Nim. Dans la suite de l'article, nous ferons la différence entre

1 Le Mancala, Awalé ou Awari sont aussi des jeux d'origines africaines, caribéennes ou asiatiques récemment importés et pratiqués en Europe et aux États-Unis, qui sont combinatoires, mais dont le gagnant est déterminé après un comptage final des graines (et non parce qu'un joueur ne peut plus jouer). Il en est de même pour le jeu de Go.

le jeu de Nim (au singulier) et les jeux de Nim (qu'il faut comprendre comme les jeux *de type Nim*). En effet, à nos yeux, le jeu de Nim, le seul et l'unique, est celui proposé par le mathématicien Charles Leonard Bouton en 1901, nous le présentons dans la section suivante.

Nous verrons au cours de cet article l'intérêt d'introduire et de pratiquer des jeux combinatoires pour faire apprendre des mathématiques et aborder des notions d'algorithmique et de programmation.

Cette proposition rejoint la thèse centrale de Nicolas Pelay pour qui « il est possible de jouer et apprendre des mathématiques simultanément et sans contradiction dans une animation » [N. Pelay, 2011, p. 53]. Le cadre dans lequel il a mené son travail – animations scientifiques en séjour de vacances – est néanmoins différent du cadre scolaire classique, mais son hypothèse fondamentale « le jeu est un moteur déterminant de la dévolution d'une situation adidactique » [N. Pelay, 2011, p. 52] nous paraît tout à fait adaptée à la pratique de jeux combinatoires en classe pour découvrir des notions de théorie des jeux (position gagnante, position perdante, stratégie, etc.). Par ailleurs, introduire des jeux « anciens » permet de prendre un certain recul historique et d'objectiver la potentialité ludique de jeux mathématiques d'il y a plusieurs siècles.

Le jeu de Nim de Bouton

Il est difficile de dater la première apparition d'un jeu, surtout quand celui-ci peut se jouer avec des objets quelconques (des pièces, des allumettes, des cailloux, des jetons, etc.) et sur n'importe quel support (une table, dans le métro ou à même le sol). C'est le cas pour le jeu de Nim dont on date l'origine en 1901, seulement parce que c'est la première fois qu'il est appelé de la sorte dans un article qui expose sa résolution complète, rédigé par le mathématicien d'Harvard Charles Leonard Bouton (1869 – 1922). Le nom « Nim » suscitera quelques interrogations – certains y verront une origine chinoise – et l'explication la plus probable serait que le mot *nim* vienne de l'impératif du verbe allemand *nehmen* (qui signifie prendre) : *nimm*. Bouton a effectivement passé quelques années à Leipzig où il a obtenu son doctorat.

Voici donc la description qu'il donne du jeu de Nim : deux joueurs A et B s'opposent autour d'une table sur laquelle sont placés trois tas d'objets, disons des jetons. Le nombre de jetons contenus dans chaque tas est arbitraire et diffère au début du jeu. Le joueur dont c'est le tour sélectionne un des tas et retire autant de jetons qu'il veut : un, deux, trois… ou le tas en entier. La règle essentielle à respecter est que les jetons ne sont ôtés que d'un seul tas, et au moins un jeton doit être retiré. Bouton se place dans la version normale du jeu,

NIM, A GAME WITH A COMPLETE MATHEMATICAL THEORY.

BY CHARLES L. BOUTON.

Titre de l'article publié en 1901 par Charles L. Bouton dans le journal *The Annals of Mathematics*.

celle où le joueur prenant le (ou les) dernier(s) jeton(s) gagne la partie [2].

La solution, c'est-à-dire la stratégie gagnante, au jeu de Nim repose, d'une part, sur les propriétés des positions *gagnantes* et *perdantes* que nous allons définir dans un instant et, d'autre part, sur l'utilisation du système binaire. On définit ici une position *gagnante* comme étant une position qui présente une stratégie gagnante pour le joueur qui vient de jouer.

Une position sera dite *perdante* si elle ne présente pas de stratégie gagnante au joueur qui vient de la jouer. (On trouve aussi dans la littérature les définitions inversées, tout dépend du point de vue qu'on adopte : celui du joueur qui a joué ou celui qui va jouer). Les positions gagnantes et perdantes présentent des propriétés très intéressantes qui permettent de comprendre la résolution du jeu de Nim et des jeux combinatoires en général :

1. Si le joueur A laisse une position gagnante pour lui sur la table, B ne pourra pas laisser de position gagnante pour lui.

2. Si le joueur A laisse une position gagnante pour lui sur la table, et que B diminue un des tas, A pourra toujours diminuer un des deux autres tas et laisser une position gagnante pour lui.

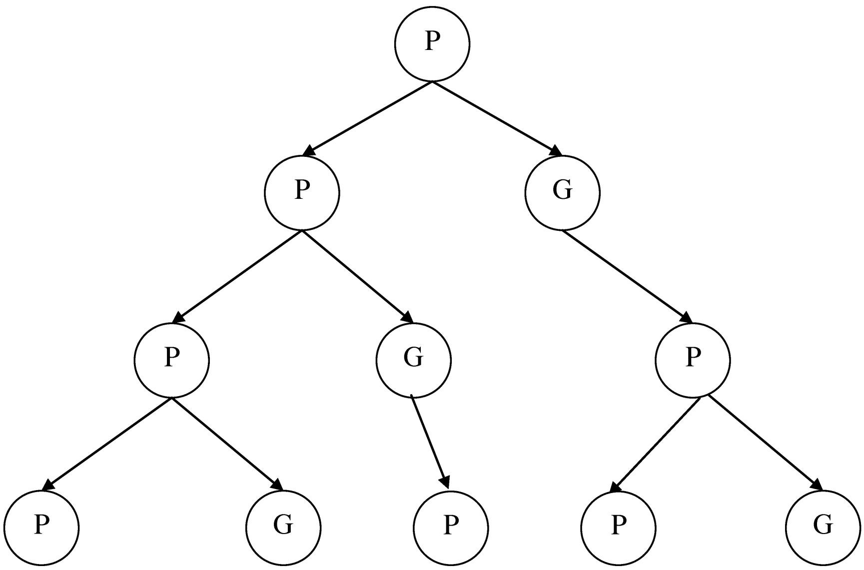
Pour résumer : d'une position gagnante, on ne peut atteindre qu'une position perdante, mais d'une position perdante, il est possible d'atteindre une position gagnante. Ce résultat peut se représenter par l'arbre de la page ci-contre [3].

Ainsi, le joueur qui se place dans une position gagnante peut y rester tout au long de la partie et la remporter, quoi que joue son adversaire et à condition de ne pas commettre d'erreur. (D'où la fameuse réplique d'un des personnages du film d'Alain Resnais de 1961 *L'Année dernière à Marienbad* : « Je peux perdre. Mais je gagne toujours. » [4]).

Maintenant, le tout est de savoir comment déterminer si une position est gagnante ou perdante. C'est là que le système binaire intervient. Nous caractérisons une position par un triplet dont chaque composante indique le nombre de jetons restants dans un tas, par exemple (9, 5, 12). Pour savoir si (9, 5, 12) est une position gagnante, on transcrit dans un premier temps toutes les composantes dans le système binaire. On obtient 1001, 101 et 1100. Ensuite, on pose l'addition de ces trois nombres, en respectant l'alignement des colonnes de la même unité. Puis, on additionne les chiffres de chaque colonne et on prend le résultat modulo 2 (on ne tient pas compte des retenues).

Cette addition correspond à la fonction booléenne OU exclusif, très utile pour l'algorithmique et la programmation en informatique (pour combiner deux bits), qui associe un résultat qui est VRAI si et seulement si les deux opérandes ont des valeurs distinctes [5].

2 Pour jouer à un jeu de Nim à cinq tas, chacun contenant respectivement 1, 3, 5, 7 et 9 jetons, voir : http://irem.univ-reunion.fr/IMG/html/nimled1.html, proposé par Alain Busser.
3 La notion d'arbre n'est plus au programme au collège, mais il peut néanmoins être introduit pour la représentation d'un problème, de la 5ème à la 3ème.
4 Notons toutefois que le jeu pratiqué à plusieurs reprises dans le film est une version misère d'un jeu de Nim à quatre tas, chacun contenant respectivement 1, 3, 5 et 7 objets (cartes, allumettes, dominos en bois selon les scènes). Cette réplique, ainsi que la séquence du film dans laquelle est jouée une partie entière de jeu de Nim, constitue une introduction intéressante au raisonnement.
5 Un opérande ne pouvant prendre que deux valeurs : VRAI ou FAUX (0 ou 1 pour un bit).



Arbre représentant les propriétés des positions gagnantes et perdantes : le joueur confronté à une position gagnante G n'aura pas d'autre possibilité que de laisser une position perdante P à son adversaire qui lui, en revanche, pourra atteindre une nouvelle position gagnante G.

Voilà ce qu'on obtient pour la position (9, 5, 12) :

$$\begin{array}{r} 1\,0\,0\,1 \\ 1\,0\,1 \\ 1\,1\,0\,0 \\ \hline 0\,0\,0\,0 \end{array}$$

Quand les sommes de chacune des colonnes se ramènent toutes à 0, alors les trois tas forment une position gagnante, sinon, si il y a un 1 en résultat d'une des colonnes, ou plusieurs, la position est perdante.

Dans notre exemple, (9, 5, 12) est donc une position gagnante. Le joueur qui joue vers cette position prend alors l'avantage. En revanche, celui qui doit jouer à partir de cette position ne peut prendre l'avantage.

Les propriétés des positions gagnantes et perdantes s'expliquent maintenant plus facilement avec le système binaire : en effet, quel que soit le tas choisi par B après que A ait laissé une position gagnante, et quel que soit le nombre de jetons qu'il retire, une ou plusieurs composantes du nombre binaire correspondant verra un de ses 1 changé en 0, et/ou un 0 changé en 1. Il faudra alors que A repère comment rétablir toutes les sommes des colonnes à 0 en prenant le nombre de jetons adéquat dans le tas correspondant. Illustrons ce procédé par les deux exemples suivants.

Exemple 1 : quand il faut modifier une seule colonne.

Prenons la position initiale (7, 5, 3) qui est une position perdante, en effet :

$$\begin{array}{c} 1\,1\,1 \\ 1\,0\,1 \\ \underline{0\,1\,1} \\ 0\,0\,1 \end{array}$$

Le premier joueur, A, peut alors se ramener à une position gagnante en ne modifiant qu'une seule des composantes de la 3ème colonne (la somme des deux autres étant déjà égales à 0). Il peut au choix retirer un jeton dans un des trois tas, pour transformer un 1 en 0. Disons que A retire un jeton du tas de 7, il se ramène alors à la position gagnante suivante (6, 5, 3) :

$$\begin{array}{c} 1\,1\,0 \\ 1\,0\,1 \\ \underline{0\,1\,1} \\ 0\,0\,0 \end{array}$$

Le deuxième joueur, B, décide de prendre quatre jetons dans le tas qui en contient 5. Il arrive alors à la position perdante suivante (6, 1, 3) :

$$\begin{array}{c} 1\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \\ \underline{0\,1\,1} \\ 1\,0\,0 \end{array}$$

Par un raisonnement identique au précédent, A peut se ramener à une position gagnante (2, 1, 3) en transformant le 1 de la première colonne en 0, c'est-à-dire en retirant quatre jetons du tas qui en contient 6.

Ainsi, par les propriétés du système binaire, le joueur A pourra toujours se ramener à une position gagnante, et ce quel que soit le coup joué par B.

Exemple 2 : quand il faut modifier plusieurs colonnes.

Prenons la position initiale (9, 5, 12) qui, nous l'avons vu précédemment, est gagnante. Supposons que le joueur A décide de diminuer le deuxième tas de trois jetons. Il arrive alors à la position perdante suivante (9, 2, 12) :

$$\begin{array}{c} 1\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \\ \underline{1\,1\,0\,0} \\ 0\,1\,1\,1 \end{array}$$

Ici, il faut retirer un nombre de jetons dans un des tas qui entraîne des modifications dans les trois dernières colonnes pour que leurs sommes soient égales à 0. Le joueur B pourrait envisager de modifier le 1er ou le 3ème tas pour faire apparaître un nouveau 1 ou bien un 0 dans la deuxième colonne (la somme de la 1ère colonne étant déjà égale à 0). Mais le changement du 0 en 1 dans le premier tas n'est pas possible, car cela signifierait que B a augmenté le nombre de jetons, ce qui est contraire aux règles du jeu. La seule modification possible est donc celle du 3ème tas, dans lequel il faudra modifier le 1 de la deuxième colonne, mais aussi les 0 des deux dernières. Cela revient à passer de 1100 (soit 12 jetons) à 1011 (soit 11 jetons). B arrive alors à la position gagnante suivante (9, 2, 11) :

$$\begin{array}{c} 1\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \\ \underline{1\,0\,1\,1} \\ 0\,0\,0\,0 \end{array}$$

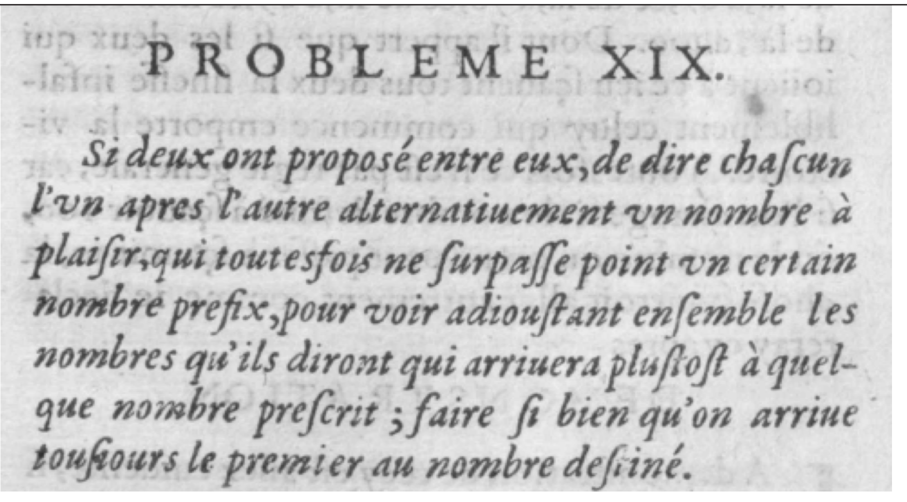
Il en résulte qu'en présence de deux joueurs qui connaissent la stratégie, le premier perd ou gagne selon la nature de la position de départ. L'addition des tas transcrits en binaire présentée ci-dessus est maintenant couramment appelée *Nim-somme* ou *Nim-addition* dans le vocabulaire de la théorie des jeux combinatoires, c'est dire la place importante qu'occupent le jeu de Nim et le travail d'analyse de Bouton dans le développement de la théorie.

Cette approche du jeu de Nim par le système binaire peut être adaptée pour des élèves de cycle 4, le système binaire étant introduit (sans les puissances) dès la 5ème. Correctement aménagée sur un cas simple et guidée pas à pas, la résolution du jeu de Nim peut s'envisager en classe de 4ème, avec une approche par une séquence du film *L'Année dernière à Marienbad*. Nous pensons également qu'il est possible aux élèves d'appréhender les propriétés des positions gagnantes et perdantes (si on laisse telle ou telle position à son adversaire, on est sûr de gagner quoi qu'il joue), et de réussir à déterminer les positions gagnantes les plus simples à travers la pratique du jeu. Le jeu de Nim, ainsi que les autres jeux dont nous parlerons par la suite, présente un ressort ludique de la situation (gagner contre son adversaire) directement lié à l'enjeu mathématique de la situation (trouver la stratégie gagnante). Cet aspect est amplement décrit et analysé par Guy Brousseau dans le jeu de « la course à 20 » qui lui permet d'en tirer une classification générale des situations didactiques [G. Brousseau, 1998].

Nous avons pu expérimenter le jeu de Nim avec des élèves entre 14 et 16 ans, et après quelques parties jouées, ils se rendent vite compte que laisser la position (1, 1) à leur adversaire leur permet de gagner la partie, mais qu'en revanche la position (1, 1, 1) les fait perdre. En poussant un peu plus loin, on trouve que la position (2, 2) est une position gagnante, et plus généralement toute position de la forme (n, n), car il suffit de retirer du tas que l'adversaire n'a pas touché le même nombre de jetons que lui a retiré, et rétablir ainsi l'équilibre entre les deux tas. Il s'en suit que la position $(1, n, n)$ est une position perdante, car en retirant le jeton du tas qui n'en contient qu'un, on se ramène à la position (n, n). De proche en proche, on peut ainsi déterminer un certain nombre de positions gagnantes. Il est intéressant de soumettre aux élèves des positions et de leur demander d'en déterminer la nature en justifiant leur réponse. Ils peuvent alors confronter leurs idées et valider ou invalider leurs hypothèses directement en jouant. Dans ces situations d'actions, le jeu en lui-même constitue le « milieu » sur lequel et avec lequel l'élève agit. Il permet à la fois de le solliciter et de l'impliquer dans une dimension ludique tout en s'opposant « dans une certaine mesure à ce qu'il obtienne à tout coup le résultat voulu » [G. Brousseau, 1998, p. 87], et ce pour l'encourager à chercher la stratégie optimale.

Au delà de cet aspect, la pratique du jeu de Nim tel qu'il est présenté par Bouton reste un bon entraînement au calcul mental (on pourrait envisager des situations-problèmes en classe de 5ème, faisant appel à du calcul mental, voire littéral en introduisant des formules) et développe des capacités d'abstraction (imaginer ce que l'adversaire va jouer pour mieux le contrer). On peut également envisager de travailler le dénombrement en cherchant, à partir d'une position donnée relativement simple – comme (1, 2, 3) – quels sont les coups suivants possibles, et construire un arbre modélisant les différentes configurations rencontrées. En classes de collège, il sera sûrement plus judicieux de commencer par des jeux de Nim plus simples, parfois appelés jeux *de soustraction* [6], et qui se trouvent être les « ancêtres » du jeu de Nim, car bien antérieurs à ce dernier.

6 Nous renvoyons à l'article http://revue.sesamath.net/spip.php?article761 (partie VI) d'Alain Busser et de Patrice Debrabant sur la programmation de tels jeux.



PROBLEME XIX.

Si deux ont proposé entre eux, de dire chaſcun l'vn apres l'autre alternatiuement vn nombre à plaiſir, qui toutesfois ne ſurpaſſe point vn certain nombre prefix, pour voir adiouſtant enſemble les nombres qu'ils diront qui arriuera pluſtoſt à quelque nombre preſcrit ; faire ſi bien qu'on arriue touſiours le premier au nombre deſtiné.

Problème arithmétique XIX proposé par Claude-Gaspard Bachet (1581 – 1638) dans son ouvrage de 1612, *Problemes plaisans et delectables, qui se font par les nombres*.

Les ancêtres du jeu de Nim

Les jeux auxquels nous allons nous intéresser maintenant sont considérés comme les *ancêtres* du jeu de Nim, dans la mesure où ce sont des configurations où il n'y a qu'un seul tas d'objets, leur analyse s'en trouve simplifiée. Cependant, les toutes premières occurrences ne se présentent pas sous la forme d'un jeu avec des objets qu'on retire, mais davantage sous la forme d'un problème. En effet, on les retrouve dans le cadre des récréations mathématiques au début du 16ème siècle puis aux siècles suivants, notamment dans les problèmes dits « arithmétiques ».

Contrairement à ce que leur nom pourrait suggérer, les problèmes arithmétiques ne sont pas destinés à faire travailler individuellement le lecteur sur une notion mathématique particulière. Leur pratique n'est pas solitaire et s'apparente davantage à résoudre mystérieusement et spectaculairement une difficulté devant une assistance pour qui la solution paraît introuvable. La forme problématique donnée aux récréations permet, d'une part, d'exciter la curiosité (aspect ingénieux), et d'autre part, de satisfaire le désir de savoir (aspect plaisant). Nicolas Pelay a souligné l'intérêt de l'étude des récréations mathématiques – celles de Jacques Ozanam (1694) notamment – dans la perspective de concevoir des situations didactiques avec des potentialités ludiques. Elles constituent un exemple « qui montre comment la dimension récréative contient une dimension éducative du point de vue de l'émergence d'une rationalité mathématique nécessaire à toute compréhension. » [N. Pelay, 2011, p. 198].

Dans les premières récréations dans lesquelles on trouve l'ancêtre du jeu de Nim[7] (Luca Pacioli en 1508 puis Claude-Gaspard Bachet

7 Pour plus de détails concernant les ancêtres du jeu de Nim, nous vous invitons à consulter [L. Rougetet, 2012].

en 1612), le jeu est présenté de la façon suivante : on propose à deux personnes d'atteindre un nombre n fixé à l'avance en additionnant à tour de rôle des chiffres compris entre 1 et k, k étant également fixé à l'avance. Le premier joueur qui atteint n remporte la partie. « La course à 20 », conçue et mise en place par Brousseau au début des années 1970 en est un exemple[8].

Exemple de partie : avec $n = 30$ et $k = 6$ (valeurs prises par Luca Pacioli) :

A dit 5.
B dit 6, donc il atteint 11.
A dit 4, donc il atteint 15.
B dit 3, dont il atteint 18.
A dit 5, donc il atteint 23.
B dit 1, dont il atteint 24.
A dit 6, et gagne la partie en atteignant 30.

Cette version *additive* est équivalente dans sa résolution à un jeu de Nim à un seul tas, duquel on ne peut retirer plus qu'un certain nombre de jetons (version *soustractive*). Cette variante du jeu de Nim se prête beaucoup mieux à une activité au niveau collège, surtout pour le codage, un tas étant représenté par un nombre, ce qui enlève beaucoup de difficultés de représentations de données.

Par ailleurs, elle permet un entraînement ludique au calcul mental nécessitant peu de moyens. L'intérêt de cette récréation est qu'elle présente – tout comme le Nim de Bouton – une stratégie gagnante : il existe des positions gagnantes qui, à condition de bien jouer pour les atteindre, permettent de gagner à chaque fois, quoique joue l'adversaire. Voyons comment les déterminer, intuitivement d'une part, avec l'exemple ci-dessus, puis dans le cas général.

Intuitivement. Pour résoudre la version additive, il faut raisonner « en partant de la fin », on dit qu'on fait un *raisonnement rétrograde* : si je ne veux pas que mon adversaire gagne en atteignant 30, je dois lui proposer le plus grand nombre tel qu'en lui ajoutant 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 il ne puisse atteindre 30. Ce nombre est 23, car quel que soit le nombre qu'il ajoute à 23, il obtiendra un nombre supérieur ou égal à 24, mais inférieur ou égal à 29. Je pourrai alors compléter la somme jusqu'à 30 au tour suivant. En raisonnant de la même façon avec 23 – qui est donc une position gagnante – on trouve que la position gagnante précédente est 16, puis 9, puis 2. Ainsi, si je m'arrange pour atteindre le premier une de ces positions, puis les suivantes, j'arriverai à 30 le premier.

On remarque que les positions gagnantes sont séparées d'un intervalle de $1 + 6 = 7$ où 6 est le chiffre maximal qu'on peut ajouter à la somme. Elles se déterminent donc itérativement en partant de la somme finale à atteindre et en soustrayant 7 à chaque pas.

Cas général. La première position gagnante à atteindre est celle obtenue après avoir enlevé un certain nombre de fois $k + 1$, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus le faire. Cela revient à déterminer le reste de la division euclidienne de n par $k + 1$. Si ce reste est nul, la première position gagnante est $k + 1$ elle-même (dans ce cas, il vaut mieux laisser commencer son adversaire), sinon c'est le reste (et dans ce cas, il est préférable de commencer pour atteindre dès le début une position gagnante). Les positions gagnantes s'écrivent donc sous la forme $n - p(k + 1)$. Cette écriture peut s'introduire en 5ème pour travailler le calcul littéral.

8 « La course à 20 » a permis à Brousseau de donner une première présentation détaillée des principes qui l'ont conduit à la théorie des situations didactiques. Pour davantage de détails, consulter [G. Brousseau, 1998, pp. 25-43].

Cette variante du jeu de Nim peut se pratiquer avec différentes valeurs pour n et k. Pacioli, le premier chez qui on trouve cette récréation, la propose avec $n = 30$ et $k = 6$. Bachet la reprend en prenant pour valeurs $n = 100$ et $k = 10$, et c'est la configuration qui sera la plus largement répandue dans les ouvrages de récréations mathématiques aux siècles suivants – très certainement parce que le genre des récréations mathématiques évolue peu du début du 17ème siècle à la fin du 18ème siècle, et qu'il se réduit pour l'essentiel à une collection de problèmes déjà publiés. Mais, libre à chacun de choisir ses propres valeurs, d'où l'intérêt d'utiliser des simulateurs aléatoires dans ce type de jeux pour générer des nombres différents à chaque partie.

Pour une pratique en classe, ce jeu nous semble plus adapté dans sa version soustractive, (en utilisant 30 jetons alignés, chaque joueur pouvant en retirer un, deux, trois… ou six à chaque coup), et ce pour deux raisons. D'une part, le jeu acquiert une dimension ludique plus prononcée grâce à la manipulation des jetons : « Manipuler des objets fait partie de l'univers à la fois ludique et mathématique. Le plaisir ludique est beaucoup dans la manipulation du jeu lui-même (les pièces, les dés, les jetons, les cartes, mais aussi jeux de construction, etc.). » (N. Pelay, 2011, p. 204).

L'élève s'immerge ainsi peut-être plus facilement dans la tâche et a moins l'impression d'être à la recherche d'une démarche mathématique qui lui permettra de trouver la stratégie gagnante. D'autre part, l'utilisation de jetons permet une visualisation beaucoup plus concrète du problème – plus aisé que de tout calculer de tête – et permet de rapidement représenter une situation de jeu donnée à un moment précis de l'activité, que l'enseignant soit en phase de dévolution ou d'institutionnalisation.

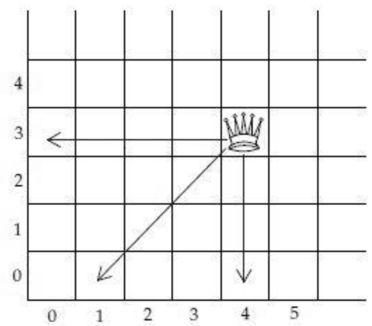
Le Wythoff's Queens

L'article de Bouton, publié dans *The Annals of Mathematics*, n'est pas passé inaperçu, et peu de temps après sa publication, d'autres mathématiciens s'y intéressent en apportant de légères modifications dans les règles initiales, ce qui aboutit à de nouvelles résolutions n'impliquant plus le système binaire. C'est le cas du Nim de Wythoff, également appelé le *Wythoff's Queens*. Cette variante du Nim de Bouton est due au mathématicien néerlandais Willem Abraham Wythoff (1865 – 1939) qui publie un article en 1907 pour la revue *Nieuw Archief voor Wiskunde*.

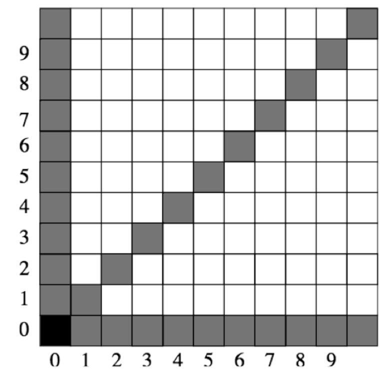
Les règles du jeu sont les suivantes : deux joueurs ont face à eux deux piles contenant chacune un nombre arbitraire de jetons. Les joueurs prennent alternativement un nombre de jetons dans une des deux piles OU prennent le même nombre de jetons dans les deux tas. Le gagnant est celui qui prend le (ou les) dernier(s) jeton(s). Nous travaillerons sur la version analogue au Nim de Wythoff, appelée Wythoff's Queens, car elle permet une représentation visuelle plus parlante.

Dans le Wythoff's Queens, une reine est placée n'importe où sur un plateau de jeu quadrillé, et l'objectif pour les deux joueurs est de l'amener sur la case en bas à gauche. Le premier qui y arrive remporte la partie. La reine ne peut être déplacée que vers l'ouest (à l'horizontale), vers le sud (à la verticale) ou vers le sud-ouest (en diagonal) d'autant de cases voulues, comme le montre la figure ci-contre.

Les coordonnées de la reine sur le plateau de jeu correspondent aux deux tas de jetons dans le Nim de Wythoff ; quand on retire des jetons d'un seul tas, la reine se déplace horizontalement ou verticalement (selon le tas choisi), et quand on retire un même



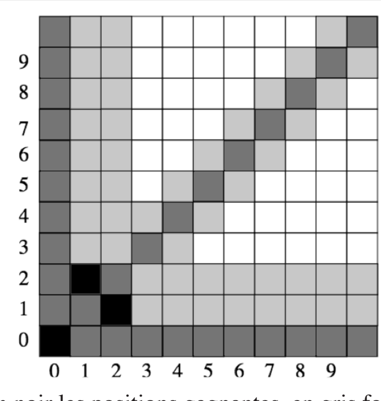
Déplacements possibles de la reine dans le jeu du Wythoff's Queens.



La case (0,0) est la position gagnante finale à atteindre. Les cases gris foncé sont les positions perdantes sur lesquelles je ne dois pas placer la reine, au risque que mon adversaire la mène sur la case (0,0) et gagne.

nombre de jetons des deux tas, la reine se déplace en diagonale [9]. La résolution de ce jeu est également basée sur les propriétés des positions gagnantes et perdantes, qu'il est facile de représenter sur le plateau quadrillé. Une fois de plus, on raisonne en partant de la fin par le raisonnement rétrograde suivant : la position finale gagnante à atteindre est la case de coordonnés (0,0), représentée en noir sur la figure en haut à droite. Si je ne veux pas que mon adversaire l'atteigne, je ne dois pas placer la reine sur les lignes horizontale, verticale et diagonale qui mènent directement à cette case (elles sont représentées en gris foncé sur la figure de droite).

Les positions gagnantes suivantes apparaissent automatiquement comme étant les cases (2,1) et (1,2), représentées en noir sur la figure ci-contres (il y a bien sûr une symétrie des positions gagnantes de part et d'autre de la droite $y = x$). En menant le même raisonnement, pour éviter que mon adversaire n'atteigne une de ces deux positions, je ne dois pas le laisser sur une des lignes représentées en gris clair sur la figure ci-dessous :



En noir les positions gagnantes, en gris foncé les positions perdantes qui mènent à (0,0), en gris clair les positions perdantes qui mènent à (1,2) et (2,1).

9 Il est possible de jouer au jeu de Wythoff à cette adresse : http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article857

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
x	0	1	3	4	6	8	9	11
y	0	2	5	7	10	13	15	18

Tableau représentant les positions gagnantes, en prenant l'abscisse inférieure à l'ordonnée, et en leur assignant un rang.

En travaillant ainsi itérativement, on trouve que les positions gagnantes sont (0,0), (1,2), (3,5), (4,7), (6,10), etc. ainsi que leur symétrique.

Pour la suite de la résolution, on ne considérera que les positions où l'abscisse de la coordonnée est inférieure à l'ordonnée. Si on assigne un rang n à chaque position, on peut représenter les positions gagnantes dans le tableau ci-dessus.

Une fois déterminées les premières positions gagnantes, on peut remarquer les choses suivantes :

— l'ordonnée y se trouve en additionnant à l'abscisse x la valeur du rang de la position. *Ex :* au rang 3, l'ordonnée de la position vaut $7 = 4 + 3$.

— l'abscisse x d'un rang correspond au plus petit nombre entier qui *n'apparaît pas* dans les coordonnées des rangs précédents. *Ex :* l'abscisse au rang 3 est égale à 4, et 4 est le plus petit entier qui n'apparaît pas dans la liste $\{0,1,2,3,5\}$.

On peut alors définir les coordonnées des positions gagnantes suivantes par récursivité.

Pour aller plus loin, et pour trouver une position gagnante sans avoir à calculer les précédentes, voici la méthode expliquée par Wythoff qui fait appel au nombre d'or, $\Phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, ainsi qu'à la fonction partie entière :

$$\lfloor x \rfloor = \max \{n : n \leq x\} .$$

Wythoff montre dans son article de 1907 que les coordonnées des positions gagnantes au rang n se génèrent grâce aux formules suivantes :

$$\lfloor \Phi.n \rfloor \text{ pour l'abscisse } x$$

et

$$\lfloor \Phi.n \rfloor + n \text{ pour l'ordonnée } y.$$

On retrouve ainsi les mêmes valeurs que trouvées précédemment par récursivité : voir le tableau de la page ci-contre.

Le Wythoff's Queens est analysé dans des ouvrages mathématiques traitant de la théorie des graphes et de ses applications, par Claude Berge ou Rufus Isaacs dans les années 1960 notamment. On trouve également des variantes à ce jeu en modifiant les déplacements de la reine sur le plateau selon ses coordonnées. La version sur plateau permet une meilleure visualisation de ce qui se passe dans le jeu – pour anticiper les coups de son adversaire – ainsi qu'une meilleure compréhension de comment obtenir les positions gagnantes. L'explication avec le nombre d'or est évidemment plus difficile à mettre en place, et même Wythoff se garde bien d'expliquer comment il a trouvé cette solution. Toujours est-il que le jeu de Wythoff fut d'un inté-

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\Phi \cdot n$	0	1,618	3,236	4,854	6,472	8,090	9,708	11,326
$\lfloor \Phi \cdot n \rfloor$	0	1	3	4	6	8	9	11
$\lfloor \Phi \cdot n \rfloor + n$	0	2	5	7	10	13	15	18

Le tableau des postions gagnantes du Wythoff's Queens,
déterminées grâce au nombre d'or.

rêt considérable pour l'étude des séquences complémentaires.

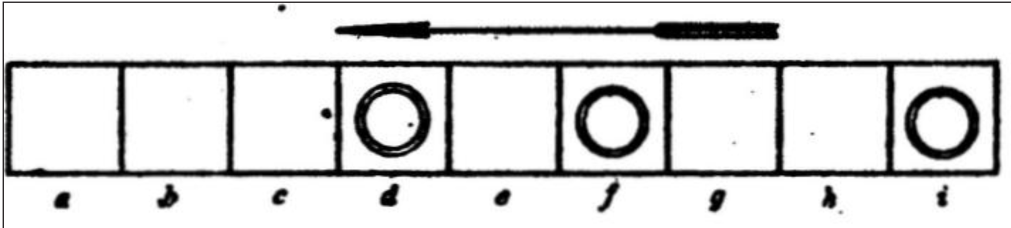
Le Wythoff's Queens nous semble approprié pour une première approche de la représentation graphique et de la localisation de points par des coordonnées dans un repère cartésien en classe de 4ème, voire pour travailler le repérage dans le plan avec les nombres relatifs en classe de 5ème. Les déplacements de la reine peuvent s'intégrer dans la séquence sur les translations en classe de 3ème, et la symétrie axiale des positions gagnantes de part et d'autre de la droite $y = x$ en classe de 6ème et 5ème.

Au delà de l'aspect graphique, l'écriture des positions gagnantes sous la forme d'un tableau permet de mieux visualiser les relations entre les abscisses et les ordonnées des différentes positions gagnantes et d'aborder la notion de récursivité [10]. Le travail autour du nombre d'or peut s'envisager dès la classe de 5ème (en donnant une valeur approchée de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) pour aborder les notions de partie entière et partie décimale. La notation avec la racine carrée pourra s'intégrer dans la séquence sur le théorème de Pythagore. Par ailleurs, le jeu se prête assez bien à un travail de programmation pour le déplacement de la reine sur le plateau, car le problème se décompose en différentes étapes (sous-tâches) : 1. donner la position de la reine, 2. localiser les positions gagnantes, 3. si la reine est en position gagnante, jouer aléatoirement, sinon se ramener à la position gagnante la plus proche [11]. On peut également proposer aux élèves de monter un projet collaboratif de programmation d'un jeu qu'ils auraient eux-mêmes inventé et analysé, en s'inspirant des règles du Wythoff's Queens (en changeant les déplacements possibles de la reine par exemple).

Donnons à présent un dernier exemple de jeu combinatoire, qu'on trouve dans un ouvrage de 1910 sur les récréations mathématiques, rédigé par le mathématicien allemand Wilhelm Ahrens. Ce dernier présente le Nim de Bouton ainsi que son analyse, et le complète d'un jeu nommé *Der Letzte gewinnt !* (*Le dernier gagne !*) qui présente l'intérêt, malgré une forme tout à fait différente, de se traduire en une configuration particulière du jeu de Nim.

10 Même si la notion de récurrence n'est pas au programme du collège, on peut envisager de le remplir étape par étape, après avoir exhibé les relations entre les abscisses et les ordonnées.

11 Voir l'article d'Alain Busser : http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article857



Rangée de 9 cases supportant 3 pierres situées sur les cases d, f et i.

Le dernier gagne !

Dans la configuration de jeu présentée ci-dessus, deux joueurs choisissent alternativement une des trois pierres et la déplacent d'autant de cases voulues, seulement dans le sens de la flèche, c'est-à-dire de la droite vers la gauche. La pierre choisie peut être amenée sur une case déjà occupée, ou bien sauter par dessus une autre pierre. Le joueur qui amène la dernière pierre sur la case a remporte la partie.

Comment être sûr de gagner à chaque fois ? Les pierres situées sur les cases d, f, et i sont respectivement à une distance de 3, 5 et 8 cases de a. Ainsi, une autre façon de voir ce jeu est de considérer que c'est un jeu de Nim avec 3 tas contenant respectivement 3, 5 et 8 jetons. Il suffit alors de raisonner comme précédemment avec le système binaire et la Nim-somme ($(3, 5, 8)$ étant une position perdante, le premier joueur peut prendre l'avantage).

De tels jeux, qui dans la forme sont assez éloignés du jeu de Nim mais qui se ramènent en réalité à une configuration particulière de celui-ci, sont actuellement appelés des *NimIn* (pour *NimIncognito*).

La pratique et l'analyse de divers jeux tels que les NimIn permettent de développer la « reconnaissance de schémas », une des compétences requises dans l'enseignement de l'algorithmique et la programmation au cycle 4. En effet, bien que la forme des jeux diffère de l'un à l'autre, les mécanismes mis en œuvre pour élaborer une stratégie gagnante restent les mêmes, centrés autour des propriétés des positions gagnantes et perdantes.

Les jeux que nous venons d'exposer, le Nim et ses variantes, ont pour intérêt de présenter une stratégie gagnante. Donc, correctement programmées, des machines peuvent être conçues pour se confronter à l'homme. Ce fut le cas quand les techniques ont été suffisamment développées pour fournir les matériaux adéquats à la création d'automates et de machines, puis d'ordinateurs, capables de jouer à ces jeux contre l'homme, et de gagner à chaque fois. Ces aspects de l'histoire ne sont pas présentés dans cet article, car moins exploitables pour l'enseignement des mathématiques. Le lecteur trouvera davantage d'informations dans les références [L. Rougetet, 2015] et [L. Rougetet, 2016].

En guise de conclusion

Le jeu de Nim, ses variantes, ainsi que d'autres jeux combinatoires non présentés ici proposent une grande diversité d'activités en classe de mathématiques autour du calcul mental, de l'algorithmique et de la programmation, et donnent une large place au potentiel du jeu dans l'apprentissage. D'un point de vue didactique, ils ont cette qualité d'être de « vrais » jeux qui, dans l'immédiat, ne nécessitent pas de remaniement ou d'adaptation. La modélisation de la situation d'enseignement est portée par le jeu en lui-même et simplifie ainsi le travail nécessaire d'introduire un système « milieu » dans le jeu didactique de l'élève [G. Brousseau, 1998, p. 80]. L'enjeu mathématique de la situation, trouver la stratégie gagnante, est entièrement relié à son ressort ludique.

Ces jeux donnent lieu à des situations qui permettront aux élèves d'être acteurs de leur apprentissage et de pouvoir le confronter directement en jouant pour valider ou invalider leur théorie et construire leur connaissance. Par ailleurs, la pratique du jeu à travers la manipulation d'objets permet une approche nouvelle de certaines notions mathématiques parfois mal ressenties par les élèves.

Nous espérons avoir présenté dans cet article un ensemble de jeux dans la diversité de leurs utilisations pédagogiques, qui offrira aux enseignants des ressources qu'ils pourront s'approprier et sur lesquelles ils pourront s'appuyer pour préparer leurs séquences. Nous sommes convaincus de la puissance du jeu dans l'apprentissage et les caractéristiques qu'il partage avec la dévolution (implication, action, liberté, responsabilité) en font un outil incontournable de l'enseignement des mathématiques.

Bibliographie :

Ahrens, W. (1921). *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*. Leipzig et Berlin : Verlag von B.G. Teubner, 3ème édition.

Bachet, C.-G. (1612). *Problemes plaisans et delectables, qui se font par les nombres*. Lyon, 1ère édition.

Bouton, C. L. (1901). Nim, a Game with a Complete Mathematical Theory. *The Annals of Mathematics*, 2nd ser., *3*(4), 35-39.

Brougère, G. (1995). *Jeu et éducation*. Paris : l'Harmattan.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Condon, E. U. (1942 mai). The Nimatron. *The American Mathematical Monthly*, *49*(5), 330-332.

Pelay, N. (2011). *Jeu et apprentissages didactiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, sous la direction de Pierre Crépel et Viviane Durand-Guerrier, Lyon, Université Claude Bernard, 358 pp.

Rougetet, L. (2012 octobre). Les multiples ancêtres du jeu de Nim. *Pour la Science* 420, 80-83.

Rougetet, L. (2015 novembre). Raconte-moi une NIMstoire. *MathémaTICE* 47, disponible en ligne : http://revue.sesamath.net/spip.php?article777

Rougetet, L. (2016). Machines designed to play Nim games, teaching supports for mathematics, algorithmics and computer science (1940-1970). In Radford, L., Furinghetti, F., & Hausberger, T. (Eds.). Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics. Montpellier, France: IREM de Montpellier, pp. 569-580.