LES « FRACTIONS EGYPTIENNES »[1]

Daniel AUSTIN[2]
Michel GUILLEMOT[3](*)

En mettant entre guillemets l'expression « fractions égyptiennes », nous voulons mettre en garde le lecteur. D'une part, traitant principalement de la pratique des scribes de l'Égypte ancienne, il n'est pas question de leur attribuer la connaissance de ce que nous appelons habituellement le concept de fraction. D'autre part, alors qu'aujourd'hui de nombreux auteurs dénomment fractions égyptiennes les seuls inverses des entiers naturels que nous préférons appeler *quantièmes*, nous sommes obligés d'adjoindre à ce corpus le nombre 2/3. En fait, nous distinguons aussi les *fractions élémentaires* qui dans l'Égypte ancienne ont des écritures particulières, à savoir, nos 2/3, 1/2, 1/3 et 1/4 que nous appelons respectivement deux-tiers, un-demi, un-tiers et un-quart[4]. Après un bref historique nous examinerons les diverses écritures numériques, puis les différentes pratiques calculatoires.

L'étude des mathématiques égyptiennes est à la fois fascinante et frustrante[5]. Fascinante, car, comme pour la construction des pyramides, nous sommes loin d'en avoir percé tous les secrets. Frustrante, car la faible quantité de documents « mathématiques » qui nous sont parvenus, une quinzaine, ainsi que le peu d'explications qu'ils contiennent, empêchent des conclusions trop générales. Aussi, nous devons naviguer entre deux écueils : celui de l'enthousiasme débordant exprimé par l'australien Richard Gillings[6], attribuant aux Égyptiens des connaissances trop modernes ou, à l'opposé, le scepticisme de Roger Caratini[7]. Ce dernier préfère minimiser les mathématiques égyptiennes en mettant en avant les savoirs mésopotamiens, et va jusqu'à considérer les mathématiques égyptiennes comme

(*) Les notes sont en fin d'article

étant une imposture. Ce dernier obstacle est aisé à franchir car, surtout à propos des « fractions égyptiennes », nous pouvons parler d'un « art égyptien du calcul » qui n'a son équivalent dans aucune civilisation. Par exemple, les « savants grecs », plus préoccupés de réflexions philosophiques, ont sans doute été conduits à développer les démonstrations mathématiques accordant ainsi moins d'importance aux calculs. Ils ont transposé les écritures numériques égyptiennes en notations « alphabétiques » ce qui revient à considérer le même corpus de « fractions ». Nous aurons l'occasion d'en voir des exemples dans le *Papyrus Michigan 621*[8], document écrit en grec au IVème siècle de notre ère ou dans le *Papyrus d'Akhmîm*[9] rédigé, aussi en grec, à l'époque byzantine.

Quant aux louanges excessives, elles semblent provenir d'un usage trop abusif des notations modernes[10]. Certes, en nous adressant principalement à des enseignants de mathématiques, nous utiliserons les outils d'aujourd'hui, mais, dans la mesure du possible, nous essaierons d'en préciser leur signification. Ainsi, nous écrirons les notations classiques : 2/3, 1/2 mais, dans nos transcriptions « égyptiennes », 1/2 1/4, par exemple, désignera la somme de 1/2 et de 1/4 c'est-à-dire notre 3/4. Toutefois, nous savons que, aujourd'hui, cette notation 3/4 peut être entendue de diverses façons : celle d'un véritable nombre rationnel, par exemple égal au décimal 0,75 ou celle du résultat d'une opération qui peut être la multiplication du quart par trois ou la division de 3 par 4. Diverses interprétations de l'expression 1/2 1/4 peuvent en découler.

Un peu d'histoire

La civilisation égyptienne a une longue histoire : Plus de trois millénaires. Les égyptologues distinguent plusieurs périodes. Dans le tableau ci-dessous, nous indiquons en regard les écrits mathématiques qui nous sont parvenus.

Époque archaïque (3150-2700)[11]	
Ancien Empire (2700-2200)	
Ière Période Intermédiaire (2200-2065)	
Moyen Empire (2065-1785)	*Papyrus de Moscou*, *Tablettes du Caire*, *Fragments de El Lahoun*, *Fragments de Berlin*
IIème Période Intermédiaire (1785-1580)	*Papyrus Rhind* (copie), *Rouleau de cuir*
Nouvel Empire (1580-1090)	*Ostracon du Caire*, *Ostracon de Turin*
IIIème Période Intermédiaire (1085-715)	
Basse Époque (715-332)	
Période Gréco-Romaine (332 av J. C-395ap. J. C.)	*Papyrus mathématiques démotiques*

Fig. 1. Chronologie.

Tout d'abord, au quatrième millénaire avant notre ère, l'Époque Prédynastique marque la naissance de l'écriture dite *hiéroglyphique*, principalement gravée sur les monuments. L'écriture *hiératique*, forme rapide utilisée par les scribes, figure dans des textes qui datent des premières dynasties [12], à l'Ancien Empire, époque où ont été érigés des complexes funéraires monumentaux caractérisés par des pyramides ayant marqués l'imagination collective à travers le temps comme les fameuses pyramides de Gizèh. Après une Première Période Intermédiaire vient, dans la première moitié du deuxième millénaire, le Moyen Empire suivi d'une Deuxième Période Intermédiaire. Ce sont les deux moments où ont été rédigés ou recopiés les principaux documents hiératiques « scientifiques », médicaux ou mathématiques, que nous possédons. D'autres textes mathématiques, écrits en *démotique*, à la Basse Époque, nous sont aussi parvenus. Nous les évoquerons à la fin de l'exposé car ils correspondent aux périodes d'occupation grecque ou romaine.

Ceci n'exclut pas le fait que nous pouvons « réfléchir » sur d'autres types de documents contenant des « fractions » comme par exemples les feuilles de salaires [13], d'inventaires ou les *Annales* que nous évoquerons plus avant à l'instar de la *Pierre de Palerme*. Autant dire qu'en basant nos réflexions seulement sur une petite quantité de textes écrits entre 1800 et 1500 avant notre ère, il nous est difficile d'avoir une connaissance complète de l'utilisation de certaines « fractions » dans l'Égypte ancienne. Toutefois, la persistance de l'utilisation comme seules « fractions » du deux-tiers et des inverses d'entiers a perduré, en particulier, dans l'arithmétique « pratique » grecque. Ainsi, ces « fractions », dénommées « égyptiennes » par les historiens, jointes aux techniques que nous trouvons dans les textes de l'Égypte ancienne, qu'ils soient mathématiques ou administratifs, ont sans aucun doute été les moteurs des calculs et des résolutions de nombreux problèmes qui ont pu être menés pendant plus de quatre millénaires, les situant alors dans une certaine interculturalité. Aujourd'hui, les « fractions égyptiennes », comprises cette fois comme seuls inverses de nombres entiers naturels non nuls, connaissent un regain d'intérêt : les recherches concernent les écritures des rationnels sous la forme de sommes de ces inverses [14]. Par exemple, aujourd'hui, nous pouvons écrire,

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{7} \times 2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} \ ,$$

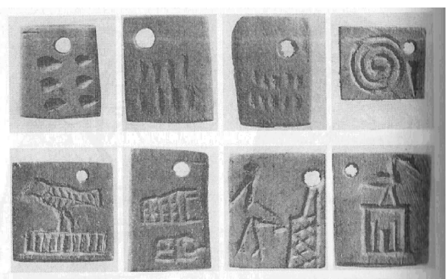
« traduction moderne » d'une relation très utilisée par les savants égyptiens. La plus célèbre conjecture qui « généralise » cette expression a été formulée par Erdös et Strauss en 1948. Il est possible de décomposer toute fraction de la forme $4/n$ où n est un entier naturel non nul, en la somme de un, deux ou trois inverses de nombres entiers naturels non nuls distincts. Resituée dans le contexte égyptien, cette conjecture revient à affirmer qu'il est toujours possible d'écrire le double de chaque inverse d'un nombre impair sous la forme d'une somme de deux ou trois inverses de nombres pairs distincts.

Cette « situation mathématique » constituera un fil rouge reliant entre eux les trois millénaires de l'histoire égyptienne ainsi marquée par un certain conservatisme dont témoignent la royauté pharaonique et une administration puissante. L'écriture hiéroglyphique s'inscrit dans cette logique. Elle est partie intégrante de l'art et de la vision de l'espace définis par les artisans peintres et les sculpteurs [15]. À l'inverse, la trace écrite en *hiératique* relève de la pratique des scribes. Leurs besoins de rapidité et d'efficacité les conduisent à des signes cursifs toujours plus épurés. C'est ainsi que, vers 700 avant notre ère, l'écriture *démotique* supplantera peu à peu l'écriture hiératique. Pour notre propos, dans ce monde égyptien, une constante prévaut : les « scribes comptables » sont omniprésents car ils notent tout, contrôlent tout, avec un souci maniaque de la précision. Ainsi, par exemple, dans le *Papyrus Harris I*, le scribe donne à l'unité près le nombre de sacs de grains [16] que Ramsès II, pharaon du Nouvel Empire qui régna de 1279 à 1212, environ, a donné pour les offrandes divines : 5 279 552. En Mésopotamie, nous pouvons parler de « savants calculateurs » qui, adoptant le système positionnel de base 60 créé par les savants babyloniens [17], leur permet d'effectuer facilement des calculs comportant des nombres très grands. Malgré les nombreux contacts qui ont pu exister entre les civilisations égyptienne et mésopotamienne, chacune semble avoir conservé ses habitudes numériques [18].

La cohésion sociale de l'Égypte ancienne est basée sur la distribution et aussi la redistribution en respectant des principes de sociétés hautement inégalitaires. Distribution quand un temple rémunère en nature son personnel ; redistribution quand un temple à collationné des biens et les rétrocède à une autre entité économique. Le fractionnement mathématique devient l'outil de base pour les calculs de tout ce qui touche la vie en communauté. Calculs des biens mobiliers et immobiliers, des terrains, des récoltes, des rations en tout genre, des salaires, du commerce, des transports, des planifications de chantiers, des constructions et des héritages. Et la vie dans l'au-delà n'y échappe pas non plus. Ce sont ces réalités qui conduisent ceux qui ont la tâche de ces répartitions de mettre en œuvre des pratiques opératoires qui se sont perfectionnées au fil des générations et dont le pivot est constitué par les « fractions égyptiennes ».

L'écriture hiéroglyphique des nombres

Nous ne savons pas comment les scribes égyptiens sont parvenus à élaborer leurs différents signes numériques. « *La découverte de probables signes d'écriture dans la tombe U-j d'Abydos fait remonter à 3300 ans environ av. J.C. les débuts de l'écriture en Égypte. Elle apparaît étroitement liée à la fonction royale* » [19]. Certaines incisions figurant sur des étiquettes de jarres peuvent être interprétées comme signifiant des signes numériques :

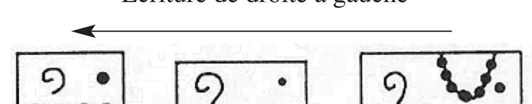


57. Abydos. Les étiquettes de jarres (d'après G. Dreyer *et al.*, 1993, pl. 7c-j).

Fig. 2. Abydos, quelques étiquettes de jarres.
Midant-Reynes, 2003, *Aux origines de l'Égypte*, p. 214.

Quelques étiquettes comportent les premiers signes qui, en écriture hiéroglyphique, seront employés durant toute la civilisation égyptienne pour désigner les unités, les dizaines et les centaines.

Écriture de droite à gauche



185 175 164

Fig. 3. Tablettes de Nagada CG 14101 ; 14102 et 14103.
Imhausen, 2007, Egyptian mathematics, p. 13.

1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
						

Fig. 4. Signes numériques hiéroglyphiques.

Plus généralement, nous avons les signes hiéroglyphiques ci-dessus (écriture de gauche à droite).

Le système numérique hiéroglyphique égyptien est additif et de base dix, chaque signe étant répété autant de fois que nécessaire. Comme pour les chiffres romains, il n'y pas de signe pour noter le zéro. Ainsi, par exemple, sur le socle de la statue du roi Khasékhèm (figure 5), dernier roi de la deuxième dynastie, qui régna vers 2700 avant notre ère, on peut lire le nombre d'adversaires tués au combat que nous écrivons aujourd'hui 47 209, où, bien sûr, il n'y a pas de marque des dizaines.

S'agissant le plus souvent d'inscriptions sur des objets ou des monuments, la disposition des signes numériques est alors liée à l'interprétation artistique que veut en donner l'auteur. Ces marques peuvent être de tailles diverses, plus ou moins serrées ou encore groupées diffé-

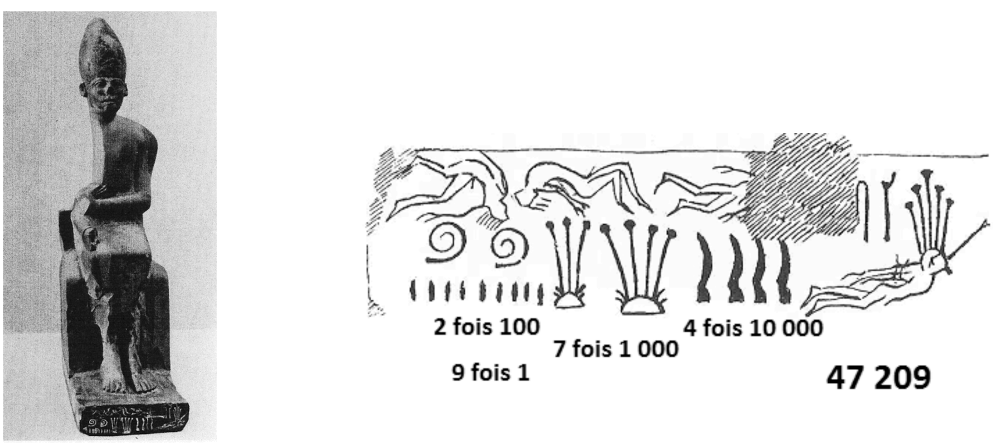


Fig. 5. Statue du roi Khasékhèm ; inscription numérique sur le socle.
Quibell, 1900 (1989), *Hierakonpolis*.

remment avec des ordres d'écriture parfois variables. De manière générale, la lecture d'un texte hiéroglyphique s'effectue de droite à gauche mais les scribes peuvent aussi écrire de gauche à droite, verticalement ou horizontalement et ce dans ce que l'on appelle les carrés imaginaires. Dans ce contexte, pour nos fractions d'aujourd'hui, il semble difficile de mettre en évidence le numérateur et le dénominateur sauf à utiliser un nom ou un signe particulier pour les spécifier dont nous n'avons pas de témoignage. Nous pouvons distinguer les « fractions élémentaires », comme deux-tiers, un-demi, un-tiers et un-quart pour lesquelles les scribes égyptiens ont utilisé des notations particulières. Mais pour les autres, ils ont seulement considéré celles qui correspondent aux partages en parts égales, ce qui revient à prendre en compte un seul type de « fraction générale », à savoir celui où le numérateur est fixe et égal à 1, autrement dit les inverses des entiers naturels non nuls que nous appelons *quantièmes*.

Comme les entiers naturels non nuls, les « fractions élémentaires » sont aussi apparues très tôt. Par exemple, nous les trouvons gravées sur la *Pierre de Palerme*, sans doute sous la V^{e} dynastie soit approximativement, entre 2500 et 2300 avant notre ère [20]. Rappelons que les fameuses pyramides de Chéops, Chéphrèn ou Mykérinos ont été érigées durant le siècle précédent. La *Pierre de Palerme* doit son nom au fait que le fragment le plus important qui nous soit parvenu est conservé dans le musée de cette ville [21]. Il s'agit d'une dalle de basalte noir. Lorsqu'il était complet, le monument comportait la description et ce, dès les premières dynasties, des évènements importants, dont, en particulier, la hauteur atteinte par la crue du Nil, exprimée en coudées, paumes, doigts et fractions de doigts. Or, la coudée dite royale vaut 7 paumes et une paume vaut 4 doigts. Les égyptologues considérant que ce type de coudée mesure entre 52 et 53 centimètres, un doigt représente donc une longueur d'un peu moins de deux centimètres. Mais, les scribes égyptiens éprouvaient le besoin d'en noter diverses « fractions» : 3/4, 2/3, 1/2, 1/3 et 1/4. Ici encore, on peut souligner un souci de précision : la différence entre 3/4 et 2/3, ou entre 1/3 et 1/4, étant égale à 1/12, les scribes expriment ainsi certaines mesures de la hauteur de la crue du Nil à moins de deux millimètres près ! Par exemple (figure 6 ci-contre), pour la deuxième dynastie, nous pouvons trouver les données suivantes : 2 coudées 4 paumes 1 1/2 doigt, 3 2/3 coudées, 4 coudées 2 paumes 2 2/3 doigts.

Seule l'écriture de 1/4 et, dans une moindre mesure, celle de 2/3, ont « perduré ». Tout semble tourner autour du signe de la bouche. Ce type d'écriture sera adopté pour noter, de manière générale, les *quantièmes* distincts de 1/2 : le signe de la bouche « précédant » l'écriture du nombre dont le *quantième* est l'inverse. On peut penser qu'en choisissant le signe de la bouche, les Égyptiens ont désiré mettre l'accent sur les partages alimentaires.

Toujours soucieux d'esthétique, les scribes ou les « artistes » disposent différemment les diverses marques d'écriture, comme nous pouvons en juger en comparant celles figurant sur quelques coudées pour indiquer les « fractions de doigt » (figures 7 - 8 - 9) : selon les auteurs ces coudées peuvent servir comme « mesure-étalon », leur longueur étant alors de 53 centimètres environ, ou avoir une valeur « votive ».

Ces trois coudées datent de la XVIII^{e} dynastie soit, approximativement, entre 1550 et 1300 avant notre ère. La première se distingue fortement des deux autres : elle se lit de gauche à droite et les fractions sont toutes écrites sous la même forme, le signe de la bouche précédant celui de l'écriture du nombre dont on considère l'inverse.

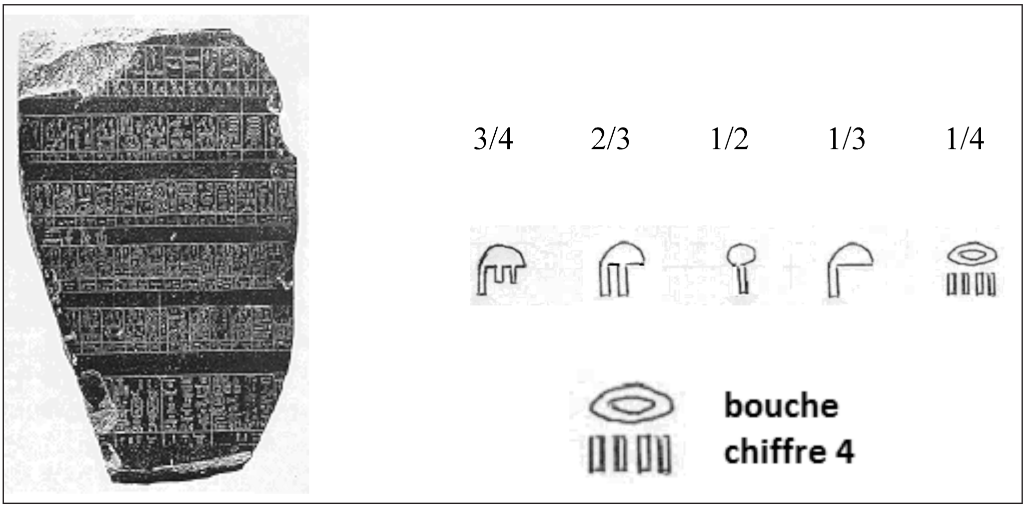


Fig. 6. Écriture hiéroglyphique de « fractions » dans la *Pierre de Palerme*.

Quant aux deux autres coudées, nous retrouvons la lecture « classique » de droite à gauche et l'utilisation d'un signe spécifique qui sera repris dans l'écriture hiératique : celui d'une graphie particulière, peut-être, de la côte d'animal (voir figure 10 page suivante, Aa16 dans la classification de Gardiner[22], écriture de gauche à droite).

La représentation particulière relevée sur la *Pierre de Palerme* a été, sans doute, vite abandonnée au profit d'un nouveau signe semblant mieux signifier le partage équitable d'une paire de côtes. Mais les écritures des autres quantièmes diffèrent en ce sens que l'artiste qui a gravé la *Coudée d'Aménémipèt* a pris soin de

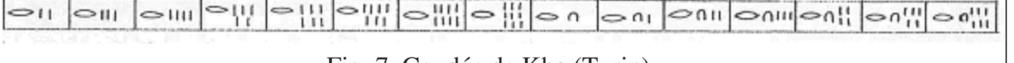


Fig. 7. Coudée de Kha (Turin).

Fig. 8. Coudée de Maya (Louvre).

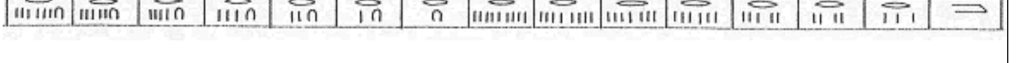


Fig. 9. Coudée d'Aménémipèt (Turin).

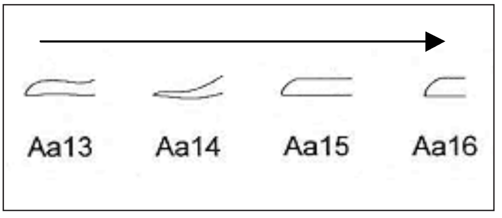


Fig. 10. Diverses écritures hiéroglyphiques d'une côte d'animal (?).

centrer le signe de la bouche à la hauteur du « milieu » du nombre, ce dernier étant écrit avec un souci certain de symétrie.

Quant à l'écriture de deux-tiers, elle a suscité diverses interrogations. Les témoignages hiéroglyphiques sont rares mais les auteurs en donnent des représentations fort différentes, principalement :

Fig. 11 Quelques écritures hiéroglyphiques de deux-tiers.

La grande majorité des égyptologues retiennent le premier signe, celui de la bouche d'où pendent deux barres verticales de même longueur disposées symétriquement. Dans les deux autres signes une barre est le double de l'autre comme pour signifier, selon une remarque de Francis Llewellyn Griffith [23], que 2/3 est l'inverse de 3/2, c'est-à-dire de 1 1/2.

Ces signes « *dissymétriques* » ne sont pas retenus dans les fontes hiéroglyphiques communes récentes. Quant au dernier signe, toujours d'après Griffith, on le trouverait à la XXII^e^ dynastie.

L'écriture hiératique des nombres

L'écriture *hiéroglyphique* se prête mal à une notation rapide. Pour des raisons pratiques, les scribes égyptiens ont été amenés à développer une cursive à partir des hiéroglyphes : l'écriture *hiératique* qui, en général, est écrite horizontalement, de droite à gauche. Le plus souvent elle est un décalque, signe à signe de la notation hiéroglyphique, chaque caractère étant simplement une schématisation de son original lapidaire.

Au cours du temps, des simplifications ont été adoptées, des ligatures (groupement de plusieurs signes en une seule abréviation) sont aussi apparues permettant ainsi, parfois, de dater certains textes [24]. Dans le domaine numérique, nous retrouvons ces particularités : mais les scribes peuvent adopter, dans un même texte, diverses écritures dues principalement à la nature des ligatures utilisées. Par exemple, dans le *Papyrus Rhind*, le plus important document mathématique qui nous soit parvenu, écrit vers 1550 avant notre ère par le scribe Âhmès à partir de textes plus anciens rédigés au Moyen Empire, le chiffre 6 est écrit de plusieurs manières (figure 12).

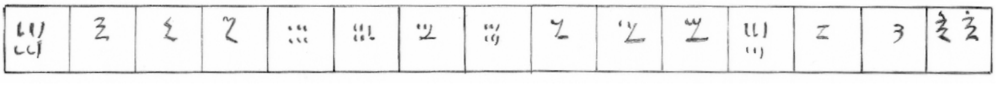


Fig. 12. Plusieurs écritures hiératiques du chiffre 6 (en dernier pour 1/6).

On peut penser qu'il s'agit d'une copie de textes provenant de « bassins » culturels, d'écoles de scribes où ceux-ci ont des pratiques différentes d'écritures. Nous avons regroupé le tout sous le titre hypothétique d'un personnage que nous avons qualifié de l'Auteur.

En général, lorsque la quantité de signes numériques de même nature est importante, on peut considérer que la nature additive de leur écriture hiéroglyphique laisse la place à un procédé « multiplicatif ». Ainsi, par exemple, pour écrire le nombre 5 279 552 qui figure dans le *Papyrus Harris I* précité, le scribe place le nombre 52 sous le signe du têtard qui représente le chiffre 100 000, cet ensemble signifiant alors 52 fois 100 000 c'est-à-dire le nombre 5 200 000. Il en est de même pour l'écriture du chiffre 70 000 à partir des chiffres 10 000 et 7.

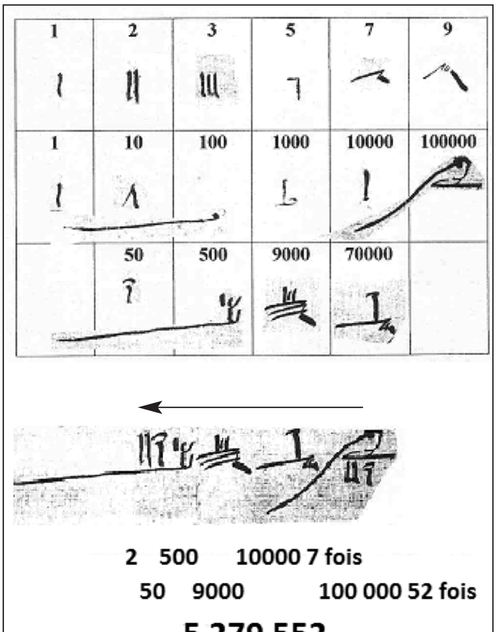


Fig. 13. Quelques signes numériques hiératiques dans le *Papyrus Harris I.*

De plus certaines abréviations sont utilisées. Ainsi, par exemple, les huit barres verticales qui signifient le chiffre 8 sont souvent remplacées par deux traits horizontaux. Ce trait est aussi 4. Mais, pour 4, il peut aussi écrire quatre barres verticales ou quatre points ! Autant dire que les écritures hiératiques des nombres entiers sont diverses.

Pour les « fractions », en hiératique, le signe de « la côte d'animal » est repris pour signifier un demi. Si, d'un point de vue mnémotechnique on peut considérer, aujourd'hui, que le signe du demi est la moitié du signe de la bouche, ses écritures tant hiéroglyphiques que hiératiques montrent qu'il n'en est rien aux yeux des scribes égyptiens. En effet, par exemple, dans le *Papyrus Rhind*, par deux fois, Âhmès écrit le signe de la bouche de manière ouverte et très souvent, pour le demi, il trace deux traits obliques.

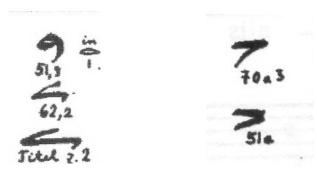


Fig 14. Écritures du signe de la bouche et du signe du demi dans le *Papyrus Rhind.*
Möller, 1909 (1965). *Hieratische Paläographie*, 91, 668.

Autrement dit, le signe hiératique n'est pas un décalque de la graphie hiéroglyphique. L'accent n'est plus mis sur des partages alimentaires, mais sur le partage d'une paire de côtes, ce qui ressemble fort au dédoublement utilisé lors des divisions. Il se peut donc que le caractère arithmétique ait prévalu comme, de manière plus simple, il en est de la distinction entre le pair et l'impair.

Nous trouvons une autre distinction à propos de l'écriture hiératique du quart. Les scribes choisissent la croix de Saint André, celle de notre signe de multiplication. Il se peut que, cette fois, cette marque ait une origine géométrique, celle du partage d'un carré en quatre parties égales selon ses diagonales. En effet, au Nouvel Empire, et, en particulier dans le *Papyrus Harris*, ce signe est seulement retenu pour le quart de la principale unité de superficie, à savoir, la *sétchat*, alors que pour les poids ou les capacités, le scribe croit utile d'ajouter le point habituel qui est la marque des quantièmes.

Pour le deux-tiers et le un-tiers les scribes font aussi preuve d'originalité. Il semble que, pour deux-tiers, un crochet ait été tout d'abord employé. Ensuite, il a été barré d'un trait oblique. Âhmès écrit un signe plus « simple » constitué par un trait vertical complété par deux traits obliques mis, de part et d'autre, aux deux extrémités comme si le scribe avait voulu insister sur deux fois une « part ». Pour le tiers, il emploie aussi un signe particulier : un trait oblique terminé par un petit trait horizontal. Ainsi, un lecteur peu averti peut aisément distinguer ces deux signes. Enfin, l'écriture hiératique des autres quantièmes est très simple : le signe hiéroglyphique de la bouche est remplacé par un point mis au-dessus du premier signe numérique.

Ces procédés d'écriture des nombres ont pour conséquence immédiate que les signes numériques hiératiques sont ainsi plus nombreux que ceux utilisés dans l'écriture hiéroglyphique. En effet, à chaque « puissance de dix » correspond un signe hiéroglyphique tandis que nous avons un signe hiératique pour presque toutes les unités et pour tous les multiples de ces puissances. De plus, sans entrer dans le détail des diverses « fractions » liées à la métrologie, l'adjonction de celles-ci fournit un corpus encore plus vaste.

Nous citons seulement ici celles qui sont le plus souvent retenues par ceux qui s'intéressent à l'égyptologie et qui sont « improprement » appelées « fractions de l'œil d'Horus ». Elles sont relatives aux mesures des capacités et nous les trouvons dans divers textes administratifs, mathématiques ou encore relevant de la médecine. Il nous est difficile de savoir s'il s'agit de « fractions de la *héqat* » ou de « multiples de *ro* », une *héqat* valant 320 *ro*[25] soit cinq litres environ. Dans une récente publication fort bien documentée, Jim Ritter[26] nous invite à clore cette interprétation « mythologique » et préfère parler de « *capacity system submultiples* » : pour notre part, nous avons choisi l'appellation « *notations spécifiques de capacité* »[27]. Voici (figure 16) les écritures employées par Âhmès.

	2/3	1/2	1/3	1/4	1/6	1/12
Rhind						

Fig. 15. Les écritures hiératiques de quelques « fractions » dans le *Papyrus Rhind*.

1/2 *héqat* ou 160 *ro*	1/4 *héqat* ou 80 *ro*	1/8 *héqat* ou 40 *ro*	1/16 *héqat* ou 20 *ro*	1/32 *héqat* ou 10 *ro*	1/64 *héqat* ou 5 *ro*
					

1 *ro*	2 *ro*	3 *ro*	4 *ro*
			

Fig. 16. Les *notations spécifiques* de capacité dans le *Papyrus Rhind*.

Une nouvelle fois, les scribes peuvent « abuser » d'une trop grande précision. Ainsi, dans l'exemple [28] R66 [29] du *Papyrus Rhind*, il s'agit de déterminer la part quotidienne de graisse sans doute utilisée pour les besoins d'un temple. Sachant que, pour l'année, elle s'élève à 10 *héqat*, il en résulte qu'elle est égale, pour un jour, à 8 2/3 1/10 1/2190 *ro*. Or un *ro* représente la valeur d'une petite cuillère, une bouchée : 1/2190 *ro* de graisse nous file entre les doigts ! Il n'en demeure pas moins que tous ces signes numériques hiératiques constituent une véritable création qui dépasse et bouscule le décalque des marques hiéroglyphiques. Seul, le contexte permet de comprendre leur signification et l'on peut penser que la spécialisation très poussée des diverses fonctions de scribes a pu amener une profusion de signes dont la lecture était comprise des seuls initiés.

Ainsi, peu à peu, les scribes égyptiens ont limité leur « ensemble » numérique aux entiers naturels non nuls pas trop grands car limités par le signe du million et certaines formes multiplicatives, à leurs inverses et à deux-tiers. Toute autre « fraction d'aujourd'hui » devait être écrite additivement à l'aide des signes précités. Par exemple, la « fraction 3/4 » qui reçoit une écriture particulière dans la *Pierre de Palerme* est écrite sous la forme correspondant à 1/2 1/4, tout en n'empêchant pas certaines ligatures comme nous pouvons en voir dans le *Papyrus Rhind* [30]. Comme toujours ceci n'exclut pas le souci méticuleux de la précision, tel qu'il est pratiqué par les scribes égyptiens. Par exemple [31], l'ouvrier qui travaille au temple d'El-Lahoun [32] reçoit une ration d'une certaine sorte de bière égale à 2/3 1/4 1/180 : le directeur a un salaire 30 fois plus élevé soit 27 2/3. Un modèle à mettre en regard de certains salaires qui atteignent, aujourd'hui, des montants … pharaoniques !

Les « tables »

Les exemples que nous venons de citer montrent que la pratique du calcul égyptien et plus particulièrement celui portant sur des

« fractions » est, *a priori*, difficile. En particulier, nous pouvons penser que les scribes égyptiens savaient qu'un « nombre fractionnaire » pouvait s'exprimer de plusieurs manières. Par exemple, aujourd'hui, en reprenant leurs témoignages, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{13} \times 2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104} = \frac{1}{7} + \frac{1}{91}.$$

En fait, il s'agit d'un véritable art, tant les scribes excellent à trouver des expressions que nous pouvons aisément qualifier de bien appropriées tant sur le plan du résultat que de leur obtention. En ce qui concerne les « fractions », cet art du calcul va s'exercer à partir de tables, parfois de règles explicites mais surtout d'exemples où les scribes indiquent des procédures susceptibles d'être imitées. C'est sans doute le sens de l'introduction formulée par le scribe Âhmès dans le *Papyrus Rhind* : *Bon exemple pour aller au fond des choses, pour apprendre à connaître tout ce qui est, tout ce qui est obscur, percer tous les secrets*. Deux domaines sont concernés : l'expression des résultats et la réduction de diverses sommes, le premier relevant de la multiplication et de la division tandis que le second a trait à l'addition et la soustraction.

Il semble que les savants égyptiens aient possédé des tables donnant le deux-tiers de divers entiers car ils en donnent le résultat immédiatement. Nous avons le témoignage de plusieurs textes de ce type, écrits en grec ou en copte [33]. Par exemple, dans le *Papyrus d'Akhmîm*, daté de l'époque byzantine, nous trouvons les expressions du deux-tiers des unités, dizaines, centaines et milliers [34]. Outre de nombreuses autres tables ce document comporte, en particulier, une table de dixièmes différente de celle figurant dans le *Papyrus Rhind*. Ce fait n'est pas fortuit. Au cours du temps, les civilisations qui ont succédé aux Égyptiens ont délaissé l'art du calcul au profit d'une pratique plus encadrée, plus algorithmique. Ici, selon les auteurs des tables, le chiffre deux-tiers est plus ou moins pris en considération :

N	Rhind	Michigan 621(grec) [35]	Akhmîm (grec)	Copte (f. 7v) [36]
1	1/10	1/10	1/10	1/10
2	1/5	1/5	1/5	1/5
3	1/5 1/10	1/5 1/10	1/4 1/20	1/4 1/20
4	1/3 1/15	1/3 1/15	1/3 1/15	1/3 1/15
5	1/2	1/2	1/2	1/2
6	1/2 1/10	1/2 1/10	1/2 1/10	1/2 1/10
7	2/3 1/30	1/2 1/5	1/2 1/5	2/3 1/30
8	2/3 1/10 1/30	2/3 1/10 1/30	1/2 1/4 1/20	1/2 1/4 1/20
9	2/3 1/5 1/30	1/2 1/3 1/15	1/2 1/3 1/15	1/2 1/3 1/15

Fig. 17. Tables de dixièmes dans divers documents.

Le *Papyrus Rhind* comporte aussi des tables de conversions de mesures de capacité (voir les exemples R47, R80 et R81) où les « fractions » figurent principalement sous la forme des « *notations spécifiques de capacité* ». Ainsi, en R81, nous constatons que si une *héqat* vaut 10 *hin*, 2/3 de *héqat* vaut **1/2 1/8 1/32**[37] *héqat* et 3 1/3 *ro* ou encore 6 2/3 *hin*. Aujourd'hui, ceci revient à écrire :

$$10 \times \frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3}$$

et $$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{320} \times \left(3 + \frac{1}{3}\right).$$

Quittant le domaine métrologique, l'exemple R61 du *Papyrus Rhind* est une sorte de table de multiplications de « fractions ».

Nous y trouvons les « fractions élémentaires » mais aussi d'autres fractions comme 1/7, 1/9 ou encore 1/11 principalement sous deux formes générales d'exposition dissociant l'ordre de « multiplication des facteurs » : « x de y : z » et « x, son y : z ». Par exemple, nous avons « 2/3 de 1/6 : 1/12 1/36 » et « 1/9, son 2/3 : 1/18 1/54 », relations que nous pouvons traduire aujourd'hui sous diverses formes :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{36}$$

et $$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{18} + \frac{1}{54}.$$

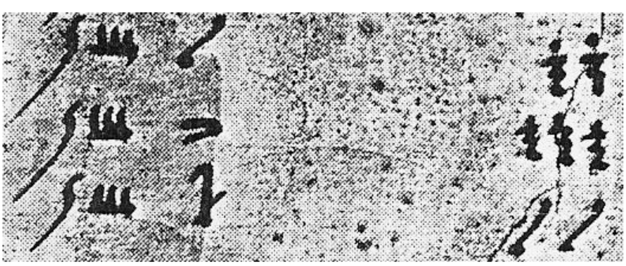
Si besoin était, ceci montre certaines difficultés de « traduction » ou d'interprétation.

De même, le *Rouleau mathématique de cuir*, texte rédigé sur du cuir au lieu du papyrus et qui a des points communs d'écriture de forme et de fond avec le *Papyrus Rhind*, peut être aussi considéré comme étant une table, écrite en double exemplaire, non plus de multiplications mais de réductions de « fractions ». Elles peuvent concerner des répétitions ou des « doublons » tels celui de 1/10,

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5},$$

mais aussi des relations obtenues par *dédoublements successifs* à partir d'une relation élémentaire comme

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{96} + \frac{1}{192} = \frac{1}{64},$$



1/6 1/6	c'est 1/3
1/6 1/6 1/6	c'est 1/2
1/3 1/3	c'est 2/3

Fig. 18. Extrait du *Rouleau mathématique de cuir*.
Van der Waerden, 1954 (1975), *Science Awakening*, pl. 3.

ou encore des relations plus particulières, voir, par exemple,

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{1}{4}.$$

Comme dans de nombreux travaux de recopie, des erreurs peuvent être commises. Dans ce document, le scribe indique une relation que nous pouvons rendre par :

$$\frac{1}{28}+\frac{1}{49}+\frac{1}{196}=\frac{1}{13},$$

égalité inexacte qui, sans doute aurait due être remplacée par une écriture que nous aurions traduite par :

$$\frac{1}{28}+\frac{1}{49}+\frac{1}{98}+\frac{1}{196}=\frac{1}{14}.$$

Une autre table nous est parvenue. Il s'agit du *Fragment de El-Lahoun* : UC 32159-f = K IV. 2 [38]. Un exposé plus complet figure, environ trois siècles plus tard [39], au début du *Papyrus Rhind*. Il occupe tout le recto de la partie BM 10058 de ce texte [40]. Autant dire l'importance que lui a accordée le scribe Âhmès qui a recopié un ou plusieurs documents. Il s'agit, selon notre propre appellation, d'*expressions de deux à partir d'un entier*, cet entier étant impair et prenant toutes les valeurs comprises entre 3 et 99. Par exemple, pour l'entier 5 nous lisons dans les deux écrits divers nombres, certains étant écrits en rouge dans le *Papyrus Rhind* (nous les avons mis en gras et souligné). Nous pouvons leur faire correspondre plusieurs relations, les principales étant indiquées dans l'encadré ci-dessous.

En sommant les nombres soulignés, nous voyons que le résultat est égal à 2/5 c'est-à-dire que, considérée sous la forme d'une table, il exprime le double du quantième 1/5 ou que, par ailleurs, ce résultat peut être obtenu en divisant 2 par 5. Effectivement nous pouvons penser que l'objectif premier de ces deux textes est de donner l'expression du double des inverses des nombres entiers impairs en la « somme » de quantièmes distincts et différents du quantième considéré. Les scribes se sont sans doute imposé quelques contraintes. Ainsi, ces expressions comportent deux, trois ou quatre quantièmes distincts que nous pouvons traduire, aujourd'hui, pour les nombres 5, 13 et 29, par les égalités suivantes :

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}, \quad \frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104},$$

$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{272}.$$

De plus, sans rentrer dans d'autres détails, ils ont sans doute désiré que les quantièmes soient assez grands, supérieurs à 1/1000. En effet, le plus petit quantième est 1/890.

5 **<u>1/3</u>** 1 2/3 **<u>1/15</u>** 1/3

$$\boxed{2\div 5=2\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}} \qquad \boxed{\left(1+\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}=2}$$

Fig. 19. Les *expressions de deux à partir de 5*.

Un deuxième type de relation revient à sommer cette fois les nombres écrits en noir. Le résultat est 2. Autrement dit, nous avons ainsi une décomposition de l'entier 2 qui permet de mettre en évidence certaines réductions. Ainsi, pour les entiers précités, nous avons :

$$2 = \left(1 + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3},$$

$$2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{8},$$

$$2 = \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\ .$$

Afin de prendre conscience de l'art égyptien du calcul, nous pouvons considérer le cas du nombre 13. Cette « expression du double du quantième 1/13 » figure dans le *Fragment de El-Lahoun* précité, mais aussi dans les *Tablettes JE 25 367 et 25 368 du Musée du Caire*[41]. En revanche, dans le *Papyrus Michigan 621*[42] et dans le *Papyrus d'Akhmîm*[43] nous trouvons une autre décomposition à laquelle correspond l'égalité

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{7} + \frac{1}{91},$$

preuve, si besoin était, qu'en d'autres lieux ou à d'autres époques, dans d'autres civilisations, les savants ont emprunté des chemins différents de ceux pris par Âhmès et ses prédécesseurs.

Le quantième 1/7 est rarement employé, ce qui peut expliquer le « choix » de ce scribe. Ici, pour effectuer la division de 2 par 13, Âhmès emploie la procédure des *dédoublements successifs* qui peut être utilisée de manière tout à fait générale. Quant au résultat que nous trouvons dans le *Papyrus Michigan 621* et le *Papyrus d'Akhmîm*, si nous nous situons dans le cadre de l'arithmétique égyptienne, il s'avère être beaucoup plus délicat à obtenir que celui donné par Âhmès car il faut introduire le *multiplicateur* 1/7 dans la division de 2 par 13. De manière générale, lorsque le nombre $(2k + 1)$ est premier, nous savons qu'il existe une seule *décomposition* de $2/(2k + 1)$ en deux quantièmes distincts :

$$\text{(I)} \qquad \frac{2}{2k+1} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(2k+1)}\ .$$

Si l'entier $(k + 1)$ n'est pas « simple », il n'est pas toujours facile de faire intervenir son inverse comme *multiplicateur*. De plus, ce quantième doit figurer dans la *décomposition de* 2 associée. Ici, par, exemple, nous avons

$$\frac{1}{7} \times 13 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} =$$

$$= 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{42}$$

et

$$2 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}\right) + \frac{1}{7} =$$

$$= \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{42}\right) + \frac{1}{7}$$

ce qui permet de montrer la complexité de certaines solutions qui, théoriquement, paraissent simples. Toutefois, la considération des autres exemples R2/n du *Papyrus Rhind* montre que les scribes auraient pu utiliser de telles *décompositions de deux* (voir R2/49 et R2/97). En fait, ceci revient à considérer les égalités

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} \quad \text{et} \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42},$$

la première étant bien connue des scribes (voir, par exemple, le *Rouleau de cuir*). Mais, avant tout, nous devons reconnaître que l'introduction du multiplicateur 1/7 et de ses sous-multiples est bien artificielle : les nombres 7 et 13 ne nous portent pas chance !

En fait, pour la multiplication, l'exercice le plus difficile reste la multiplication d'un quantième par un entier. Les scribes utilisent alors les *doublements successifs* ce qui revient à trouver l'expression du double d'un quantième. Lorsqu'il est l'inverse d'un nombre pair, le résultat est immédiat :

$$\frac{1}{2n} \times 2 = 2 \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

En revanche, dans le cas contraire, les scribes doivent déployer toutes les ressources de l'art égyptien du calcul. En effet, ils ne peuvent pas se contenter de l'expression sous la forme de la répétition du quantième :

$$\frac{1}{2n} \times 2 = 2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}.$$

Lors des *doublements successifs*, cette manière de procéder entraînerait la considération d'un nombre trop important de quantièmes et ce, sans signification véritable. Dans le même ordre d'idée, nous appuyant sur l'égalité

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

nous pouvons en déduire la relation générale

$$\frac{1}{n} \times 2 = \frac{1}{n} \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}.$$

Mais en considérant le quantième $1/n$, on aboutit à une impasse lorsque l'on veut effectuer un *doublement* à partir de cette égalité. En effet, nous avons :

$$\frac{2}{n} \times 2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}\right) \times 2 =$$

$$= \left(\frac{1}{n} \times 2\right) + \left(\frac{1}{2n} \times 2\right) + \left(\frac{1}{3n} \times 2\right) + \left(\frac{1}{6n} \times 2\right)$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$$

$$= \left(\frac{1}{n} \times 2\right) + \left(\frac{1}{2n} \times 2\right) + \left(\frac{1}{3n} \times 2\right) + \left(\frac{1}{6n} \times 2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}\right) \times 2.$$

Nous obtenons la même expression et donc nous ne pouvons pas simplifier. Autrement dit, cette expression est pratiquement inutile et nous comprenons mieux pourquoi elle a été « retenue », de manière particulière par l'Auteur du *Papyrus Rhind*, seulement pour le dernier entier qu'il considère, à savoir 101. Aujourd'hui, nous savons qu'il n'existe pas d'expression de 2/101 en la somme de deux, trois ou quatre quantièmes distincts et différents de $1/n$ et supérieurs à 1/1000. Autrement dit, dans le cadre qu'il s'est sans doute fixé, le scribe ne peut opérer autrement.

De manière générale, Âhmès effectue la division de 2 par l'inverse du quantième :

$$\frac{1}{2n+1} \times 2 = 2 \div (2n+1).$$

Dans des cas particuliers, comme pour les nombres 35 et 91, il donne un résultat auquel correspond la relation générale :

$$\frac{2}{pq} = \frac{1}{p\left(\frac{p+q}{2}\right)} + \frac{1}{q\left(\frac{p+q}{2}\right)},$$

à savoir,

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}, \quad \frac{2}{91} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}.$$

Voici (encadré de la page suivante) une adaptation du texte de l'exemple relatif au nombre 35 (si nous mettons à part les traits de sommation il ne comporte que des expressions numériques). Nous retrouvons le cas du nombre 35 dans le *Papyrus démotique BM 10520* daté du début de l'époque romaine [44]. Cette fois le scribe est plus loquace qu'Âhmès. Il décrit les opé-

	35		**30**	1 1/6	**42**	2/3 1/6
	6		7		5	
\	1/30	1 1/6				
\	42	2/3 1/6				

Fig. 20. Adaptation du texte de l'expression de deux à partir de 35 dans le *Papyrus Rhind*.

rations à effectuer que nous pouvons rendre par les égalités suivantes :

$$5 \times 7 = 35 \;,\; 5 + 7 = 12 \;,\; 12 \div 2 = 6 \;,$$
$$5 \times 6 = 30 \;,\; 6 \times 7 = 42 \;.$$

Nous pouvons dire qu'il s'agit d'une transposition démotique de l'exemple R35. En particulier, le scribe termine en indiquant les résultats des divisions de 35 respectivement par 30 et 42, où pour être plus conforme à R2/35, les éléments correspondants de la décomposition de deux, relations que nous pouvons écrire aujourd'hui sous la forme suivante :

$$\frac{1}{30}(35) = 1 + \frac{1}{6} \;,\quad \frac{1}{42}(35) = \frac{5}{6} \;.$$

Notons que l'expression hiératique d'Âhmès, 2/3 1/6, a donné lieu à une ligature signifiant alors 5/6. Beaucoup plus tard, le scribe « byzantin » qui rédige le *Papyrus d'Akhmîm* insiste sur la recherche des facteurs de 35 et sur la seule division de 2 par 35 :

> *Cherchez le 1/35 de 2. Quels sont les facteurs de 35 ?*
> *5[]7[=]35 ; 5 + 7 = 12 ; 12 : 2[=]6 ;6 5[=]30 ; 6 7[=]42.*
> *Résultat : 1/30 1/42*[45].

Ainsi, l'art égyptien du calcul sera oublié. En effet, la relation générale précitée donne le plus souvent des expressions compliquées et, par suite, Âhmès « l'applique » seulement pour des cas particuliers.

Une règle

Les textes mathématiques hiératiques qui nous sont parvenus comportent peu de règles. La plus importante concerne sans doute l'expression du deux-tiers de l'inverse d'un nombre impair. Nous la trouvons dans l'exemple R61B du *Papyrus Rhind* :

> *La manière de faire 2/3 d'un « quantième impair ». S'il t'est dit : « Qu'est 2/3 de 1/5 ? ». Tu feras son double (et) son sextuple. C'est son 2/3. Vois, on fait de même pour tout « quantième impair » qui se présentera !*

Autrement dit, ceci peut être rendu sous la forme générale suivante :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \times \frac{2}{3} =$$
$$= \frac{1}{(2n+1) \times 2} + \frac{1}{(2n+1) \times 6} \;.$$

Les termes employés par Âhmès *tit gébèt* ou *tiat gébèt*, ne permettent pas de savoir s'il s'agit exactement de l'inverse d'un nombre entier impair. De plus, nous savons que les scribes écrivent immédiatement les résultats pour le deux-tiers de l'inverse d'un nombre entier pair, ce qui, aujourd'hui, peut être traduit par la relation générale suivante :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \times \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{1}{(2n \div 2) \times 3} + \frac{1}{3n} \; .$$

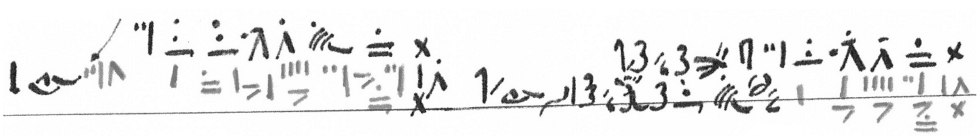
Enfin, le cas particulier du nombre « générique » 1/5 nous pousse à le penser.

Les « auxiliaires numériques »

Pour additionner ou soustraire des expressions numériques, les scribes égyptiens peuvent utiliser les tables précitées qui leur permettent d'effectuer des réductions portant sur des « fractions simples ». Nous avons des exemples dans le *Rouleau de cuir* ou les « *décompositions de 2* ». Mais, dans des cas plus complexes, les réductions peuvent aussi ressembler à nos réductions au même dénominateur.

Les scribes choisissent alors un « réducteur commun » à l'aide duquel ils écrivent, le plus souvent en rouge, et sous les nombres qui doivent être additionnés, des expressions qui sont égales aux « numérateurs » de nos réductions d'aujourd'hui. Les historiens parlent alors souvent de technique des « auxiliaires rouges » ou de l'utilisation « d'auxiliaires numériques ».

Voici, par exemple, la soustraction proposée par Âhmès dans l'exercice 23 dont on trouvera la traduction ci-dessous :



Soustrais 1/4 1/8 1/10 1/30 1/45 de 2/3 !

<u>11</u> <u>5</u> <u>4</u> <u>1</u> <u>1</u>

<u>1/4</u> <u>1/2</u> <u>1/2</u> <u>1/2</u>

<u>1/8</u>

Alors, 1/9 1/40 est ce qui lui est ajouté faisant 2/3.

1/4 1/8 1/9 1/10 1/30 1/40 1/45 1/3 fait 1.

11 **<u>5</u> <u>5</u> <u>4</u> <u>1</u> <u>1</u> <u>1</u> <u>15</u>**

1/4 **<u>1/2</u> <u>1/2</u> <u>1/2</u> <u>1/8</u>**

<u>1/8</u>

Fig. 21. Adaptation de l'exemple R23 du Papyrus Rhind.

Nous pouvons constater que le « *nombre réducteur* » est égal à 45. Il correspond ici au plus petit quantième de l'expression à « réduire ». Les « numérateurs » correspondant sont écrits verticalement, en noir pour 1/4 et en rouge pour les autres. Par ailleurs, les « *auxiliaires numériques* » ont dû être calculés par *dédoublements successifs* puisque les seuls quantièmes qui sont utilisés pour les exprimer sont des inverses de puissances de deux :

$$45 \div 4 = 11 + \frac{1}{4}\ ,\ \ 45 \div 8 = 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\ ,$$

$$45 \div 10 = 4 + \frac{1}{2}\ ,\ \ 45 \div 30 = 1 + \frac{1}{2}\ ,$$

$$45 \div 45 = 1 \quad .$$

Ceci montre, si besoin était, que, de ce point de vue, le choix du « *nombre réducteur* » est alors de peu d'importance sauf à faire en sorte que l'on ait le plus possible d'entiers et un faible nombre d'inverses de puissances de deux distinctes.

La somme des « *auxiliaires numériques* » est égale à 23 1/2 1/4 1/8 :

$$\left(11 + \frac{1}{4}\right) + \left(5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) + \left(4 + \frac{1}{2}\right) + \\ + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1 = 23 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

La différence est donc de 6 1/8 car

$$\frac{2}{3}(45) = 30$$

$$\text{et} \quad 30 - \left(23 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 6 + \frac{1}{8}\ .$$

Il nous reste alors à diviser 6 1/8 par 45 et essayer de parvenir au résultat donné par Âhmès, à savoir 1/9 1/40. Nous laissons au lecteur le soin de terminer !

Quelques règles implicites

L'examen des procédés employés pour effectuer les multiplications ou les divisions permet d'établir quelques règles que les scribes égyptiens ont implicitement appliquées. Dans la pratique, les divisions étaient considérées sous une forme multiplicative : diviser x par y est envisagé comme la recherche de z tel que la multiplication de y par z donne x comme résultat. Les règles implicites concernent donc principalement la multiplication. Les scribes égyptiens semblent connaître ce que nous nommons aujourd'hui la commutativité de la multiplication ainsi que la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c\ .$$

Ainsi, il suffit de connaître comment on peut obtenir le produit des divers objets numériques : entiers, deux-tiers et quantièmes.
En ce qui concerne deux-tiers, nous avons supposé l'existence de tables donnant les deux-tiers des nombres entiers fondamentaux, unités, dizaines, centaines, milliers,… . Par exemple, dans le problème R33, Âhmès écrit que 2/3 de 5432 est 3621 1/3. En R61, nous apprenons que 2/3 de 2/3 est égal à 1/3 1/9. Enfin, il semble que les savants égyptiens aient distingué les nombres pairs des impairs, de sorte que le deux-tiers de l'inverse d'un nombre impair soit calculé selon la règle R61B précitée et que, pour les nombres pairs, ils donnent des résultats que nous pouvons traduire sous la forme générale suivante :

$$\text{(II)} \quad \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3n}\ .$$

Toujours dans le problème R33, nous relevons, par exemple, que 2/3 de 1/776 vaut 1/1184.

Pour les quantièmes, leur multiplication par des entiers s'effectue à l'aide de doublements successifs de sorte que les scribes ont besoin de connaître seulement les doubles des quantièmes. Une nouvelle fois, la parité est considérée implicitement de sorte que nous sommes renvoyés aux *expressions de deux à partir d'un entier*. La multiplication des quantièmes entre eux obéit à la règle implicite

$$\frac{1}{p} \times \frac{1}{q} = \frac{1}{pq} \ .$$

Ainsi, toujours dans l'exemple R33, Âhmès écrit que 1/7 de 16 1/56 1/679 1/776 vaut 2 1/4 1/28 1/392 1/4753 1/5432.

Enfin, pour mener à bien les divisions, les scribes doivent trouver un procédé qui pallie au « manque de notre écriture fractionnaire ». Nous prenons ici l'exemple R31 (voir le texte commenté en annexe) du *Papyrus Rhind* dont une adaptation de l'énoncé est la suivante :

> ***Une quantité, son 2/3, son 1/2, son 1/7 lui sont ajoutés. Il en résulte 33.*** *<Quelle est cette quantité ?>*

Le scribe présente la division de 33 par 1 2/3 1/2 1/7. Il est amené à écrire que 1/97 de 1 2/3 1/2 1/7 vaut 1/42. Ailleurs, dans le *Papyrus Rhind*, au R38, nous trouvons l'opération suivante qui n'a rien à voir avec le problème traité et qui devrait appartenir à l'exemple R31 :

1	42
2/3	28
1/2	21
1/7	6
Total	97

Nous savons que les scribes égyptiens présentent leurs multiplications et divisions considérées comme opérations inverses des multiplications, sous une forme comptable en deux colonnes. Ici, nous pouvons remarquer que dans la première colonne figurent tous les nombres de l'expression 1 2/3 1/2 1/7. Par ailleurs, la somme des nombres correspondant de la deuxième colonne est égale à 97 ce qui est le total indiqué. Autrement dit, nous pouvons considérer qu'il s'agit de la multiplication de 42 par 1 2/3 1/2 1/7, opération que nous pouvons traduire par l'égalité :

$$42 \times \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) = 97 \ ,$$

d'où, par inversion, le résultat indiqué par Âhmès. Comme pour les « *auxiliaires numériques* », le scribe a donc opéré, dans l'exemple R31, à partir d'un nombre « *réducteur* », ici 42. Il procèdera d'ailleurs de même lors de la totalisation. Autrement dit, nous n'avons point nos écritures fractionnaires qui conduiraient à écrire :

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{97}{42} \ ,$$

mais nous en avons tous les termes qui sont essentiels pour la conduite des diverses opérations, numérateur et dénominateur. En fait, la considération des quantièmes, inverses d'entiers a conduit à privilégier certains procédés d'inversion.

Nous pouvons leur donner la forme générale suivante : de l'égalité

$$a \times b = c \ ,$$

on peut déduire

$$\frac{1}{c} \times b = \frac{1}{a} \ .$$

Mieux, toujours dans l'exemple R33, à partir de

$$\frac{2}{3} \times 42 = 28 \ ,$$

le scribe peut écrire un résultat que nous pouvons traduire comme suit :

$$\frac{1}{28} \times 42 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \, ,$$

en jouant cette fois sur l'inversion du deux-tiers.

Le rôle du deux-tiers dans les divisions

En fait, l'art égyptien du calcul prend toute son importance lors des divisions. Celles fournies lors des divisions de 2 par un entier en sont un exemple remarquable. Contentons nous ici de considérer seulement le cas des « multiples de trois ». Aujourd'hui, de l'égalité

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

nous déduisons les relations générales :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}$$

et

$$2\left(\frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n} = 2 \div 3n\ .$$

Certes les résultats donnés par les scribes peuvent être considérés de cette manière, mais leur obtention obéit à une autre logique où la notion de « multiple de 3 » doit sans doute être comprise dans le cadre de la prise en compte du deux-tiers. Plus précisément, il n'est pas sûr que les scribes égyptiens aient pris conscience du caractère « multiple de 3 ». En revanche, ce multiple doit être vu sous un angle particulier à la pratique égyptienne : son deux-tiers est un entier et on peut inverser. De manière générale, nous avons

$$3n \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 3n = 2n\ \text{, d'où :}$$

$$3n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \times 3n = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

de sorte que l'algorithme utilisé par Âhmès peut se traduire par l'égalité :

$$2 \div (3n) = \frac{1}{3n} \times 2 = 2 \times \frac{1}{3n} = \frac{1}{\frac{2}{3} \times 3n} + \frac{1}{3n \times 2)}$$

Par exemple, la division commentée de 2 par 21 pourrait se présenter comme dans l'encadré ci-dessous.

Comme nous l'avons indiqué, il se peut que les scribes égyptiens aient disposé de tables de deux-tiers. Ici, le deux-tiers de 21 est un nombre entier, 14. Nous pouvons donc inverser :

$$21 \times \frac{2}{3} = 14 \quad \text{d'où} \quad 21 \times \frac{1}{14} = 1 + \frac{1}{2}\ .$$

Devant chercher par quoi il faut multiplier 21 pour obtenir 2, nous avons un « quotient partiel », 1/14 qui donne comme résultat partiel 1 1/2. Dès lors, pour parvenir à 2, il manque 1/2 puisque

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 2\ .$$

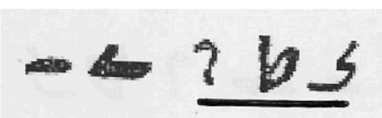
Autrement dit, le reste partiel est égal à 1/2. Pour achever la division, nous devons déterminer par quoi multiplier 21 pour obtenir 1/2 : il suffit de doubler 21 et d'en prendre l'inverse. Ainsi, nous avons :

$$2 \div 21 = \frac{1}{14} + \frac{1}{42} = 2 \times \frac{1}{21}\ .$$

1	21	(initialisation)
2/3	14	(table de deux-tiers ?)
\ 1/14	1 1/2	(inversion)
Reste partiel	1/2	(pour parvenir à 2 il manque 1/2)
\ 1/42	1/2	(inversion-multiplication)

Les Papyrus mathématiques démotiques

Huit papyrus mathématiques démotiques nous sont parvenus. Ils datent tous de la Période Gréco-Romaine. Comparés aux textes hiératiques, ils montrent une certaine continuité, mais aussi quelques changements où l'on peut déceler des emprunts aux savoirs babyloniens. En ce qui concerne les fractions[46], il ne semble pas qu'il y ait eu d'influence mésopotamienne. Nous retrouvons le deux-tiers et les quantièmes mais aussi 5/6 sous la forme d'une ligature de 2/3 et 1/6. De plus, dans certains écrits, nous voyons apparaître des écritures mixtes dans lesquelles figurent ces « fractions » mais aussi d'autres avec un « numérateur » distinct de l'unité et non entier. Ainsi, dans le *Papyrus du Caire J. E. 89127-30*, document qui date du troisième siècle avant notre ère, le scribe affirme que 1/2 est équivalent à 23 1/2 47 : le « numérateur », 23 1/2, est écrit d'abord et est souligné, puis vient le « dénominateur », ici 47.



7 40 1/2 3 20

$$\frac{1}{2} = \frac{23 + \frac{1}{2}}{47}$$

Nous avons ici une pratique de cette écriture des « fractions » qui dépasse la seule comparaison avec les « *auxiliaires numériques* » du *Papyrus Rhind*, domaine dans lequel R. Parker veut placer cette nouvelle notation. Le scribe l'utilise dans les problèmes 2, 3, 10 et 13. On la retrouve, avec, cette fois, le soulignage du dénominateur, au problème 51 du *Papyrus 10399 du British Museum* daté de la Période Ptolémaïque. Néanmoins, de telles notations ne semblent pas avoir été retenues par les autres savants, qu'ils soient Grecs ou Coptes.

Quelques « transmissions »

Nous avons eu l'occasion de citer des documents grecs, coptes ou encore byzantins attestant la considération du deux-tiers et des seuls quantièmes. Comme exemple significatif, nous pouvons encore prendre en compte la méthode d'approximation des racines carrés telle qu'elle figure dans les *Métriques* de Héron d'Alexandrie, savant grec du début de notre ère : « *Puisque 720 n'a pas de côté rationnel, nous extrairons le côté avec une très petite différence de la façon suivante. Comme le premier nombre carré plus grand que 720 est 729 qui a pour côté 27, divise 720 par 27, cela fait 26 et 2/3, ajoute 27 cela fait 53 2/3 ; prends-en la moitié, cela fait 26 1/2 1/3. En fait, 26 1/2 1/3 multiplié par lui-même donne 720 1/36 ...* »[47]. Toutefois, l'art égyptien du calcul perd peu à peu de son intérêt. Les écrits sont plus algorithmiques, le deux-tiers est moins pris en considération mais certaines opérations spécifiques comme le doublement ou le dédoublement continuent à figurer dans de nombreux ouvrages. « *Les chapitres traditionnels sur la duplication et sur la médiation que l'on retrouve dans la plupart des livres de calcul connus du centre et de l'est de l'empire musulman comme ceux d'AL-KHWĀRIZMĪ (m. 850), d'AL-UQLĪDISĪ (ca X^e) ou d'AL-KĀSHĪ (m. 1436) et qui ont encore leur place dans le Bayan d'AL-HASSĀR (XII^e) disparaissent de son Kāmil et sont absorbés respectivement par les chapitres de la multiplication et de la division* »[48]. Les savants arabes continueront à employer les inverses des unités mais, par exemple, 1/25 sera énoncé sous la forme de 1/5 de 1/5. Au Moyen Âge, Léonard de Pise dans son fameux *Liber Abbaci* emploie d'autres écritures des fractions tout en présentant la première démonstration de la décomposition de fractions en la somme de quantièmes.

En guise de conclusion

Il semble que les scribes égyptiens aient disposé de tous les outils nécessaires pour pratiquer ce que nous appelons l'Art égyptien du calcul : tables, règles plus ou moins explicites et auxiliaires numériques sorte de palliatif à nos réductions au même dénominateur. L'examen des problèmes traités dont nous avons seulement donné un aperçu montre que les résolutions proposées ne sont pas quelconques mais qu'elles découlent de certains choix. La considération des seuls quantièmes et du deux-tiers laisse la place à plusieurs possibilités. Par exemple, la division de nombres entiers peut être facilement conduite lorsque l'on considère tout d'abord des dédoublements successifs mais elle peut donner lieu à des expressions trop complexes du résultat qui en découle. Il arrive que le passage par le multiplicateur deux-tiers soit plus efficace. Parfois, il sera plus commode d'utiliser d'autres multiplicateurs auxiliaires. Ainsi, dans l'exemple R56 du *Papyrus Rhind*, premier problème concernant les pyramides, l'Auteur est amené à diviser 180 par 250. Il donne comme résultat 1/2 1/5 1/50 alors que les dédoublements successifs conduiraient à l'expression beaucoup plus complexe 1/2 1/8 1/16 1/32 1/1000 1/4000 qui, en outre, serait plus difficile à utiliser pour les transformations métrologiques ultérieures. Il semble que l'Auteur ait utilisé le multiplicateur 1/10.

En conséquence les scribes savent que si tous les chemins ne mènent pas toujours très bien à Memphis, certains sont meilleurs que d'autres. Cette expérience de « navigation » ne va pas sans efforts. La connaissance de tables est indispensable. La connaissance de relations fondamentales l'est aussi. Mais ce b.a.- ba ne suffit pas. C'est la pratique quotidienne qui fera la différence. La pratique de la mathématique égyptienne c'est l'art du choix. Le Nil est l'envers de l'Euphrate. D'ailleurs les Égyptiens le qualifiaient de fleuve qui coule à l'envers. Il semble que leurs successeurs, les Grecs, par exemple, aient adopté un point de vue plus algorithmique [49]. Chemin faisant nous avons rencontré aussi d'autres textes écrits, en Égypte, en copte ou en grec au premier millénaire de notre ère, témoignages de gens instruits qui, en ce qui concerne les « fractions égyptiennes », assurent un pont entre les Égyptiens, les Grecs et le monde arabo-musulman dont nous pouvons trouver encore la trace dans le fameux *Liber abaci* de Léonard de Pise [50].

ANNEXE

Exemple R31

L'exemple R31 est relatif à la division de 33 par 1 2/3 1/2 1/7. Âhmès donne sur cet exercice un procédé qui a une portée plus générale, celui de la division d'un entier par une expression « fractionnaire ». En voici une adaptation où nous avons corrigé certaines incorrections numériques :

Une quantité, son 2/3, son 1/2, son 1/7 lui sont ajoutés. Il en résulte 33.

1	1 2/3 1/2 1/7				
\ 2	4 1/3 1/4 1/28				
\ 4	9 1/6 1/28		***(dans R38)***	1	42
\ 8	18 1/3 1/7			2/3	28
1/2	1/2 1/3 1/4 1/14			1/2	24
\ 1/4	1/4 1/6 1/8 1/28	Total, 32 1/2. Reste, 1/2		1/7	6
/ 1/97	1/42	1		Total	97
/ 1/56 1/679 1/776	1/21	2			
/ 1/194	1/84	1/2			
/ 1/388	1/168	1/4			

1/7	1/8	1/14	1/8	1/28
6	5 1/4	3	1 1/2	1 1/2
17 1/4			3 1/2 1/4	

Total 33 1/2 21

Dans ce corpus numérique il est difficile de distinguer les diverses étapes de l'algorithme. Nous l'explicitons en utilisant les ressources des notations modernes. Puisque $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}=\frac{97}{42}$,

la valeur de la quantité cherchée est $x=\frac{33\times 42}{97}$.

Le nombre premier 97 ne divisant pas les nombres 33 et 42, l'expression égyptienne de la quantité doit comporter un ou plusieurs quantièmes inverses de multiples de ce nombre. Âhmès donne comme résultat (somme des nombres de la première colonne précédés d'un trait oblique)

$$14+\frac{1}{4}+\frac{1}{56}+\frac{1}{97}+\frac{1}{97\times 2}+\frac{1}{97\times 4}+\frac{1}{97\times 7}+\frac{1}{97\times 8}\ .$$

Autrement dit, la **première étape** qui figure dans l'exemple R38 est essentielle, puisqu'elle permet d'obtenir le nombre 97 ou, en choisissant un autre nombre, un multiple de 97. C'est un palliatif à notre réduction au même dénominateur, ici le nombre 42 est le « réducteur ». Cette opération peut être traduite par l'égalité $42\times\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)=97$, qui sera utilisée dans la dernière étape sous la forme multiplicative suivante $\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)\times\frac{1}{97}=\frac{1}{42}$.

La **deuxième étape** consiste à calculer la partie entière de la quantité à l'aide de doublements successifs. C'est l'objet des quatre premières lignes. En sommant les nombres de la première colonne précédés d'un trait oblique nous obtenons ainsi 14.

Mais la somme des expressions numériques correspondantes de la deuxième colonne est trop éloignée du nombre que l'on désire obtenir, à savoir 33. Dans une **troisième étape** nous devons chercher une « bonne » approximation par défaut, nous pouvons dire à moins d'une unité près. C'est ce qu'Âhmès propose en utilisant des dédoublements successifs ce qui l'amène à considérer les multiplicateurs 1/2 et 1/4.

La totalisation des nombres correspondants de la deuxième colonne n'est pas facile. Le scribe distingue deux parties. Pour la première, nous avons, dans une **quatrième étape**, à calculer le total de la plupart des « nombres élémentaires »

$$\left(4+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(9+\frac{1}{6}\right)+\left(18+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=32+\frac{1}{2}$$

et le manque, à savoir 1/2, qu'il reste à trouver pour parvenir au nombre 33.

Dans une **cinquième étape**, le total des autres nombres est effectué à l'aide de l'auxiliaire numérique ou « réducteur » choisi dans la première étape, à savoir, ici, 42. Âhmès écrit les nombres que nous devons considérer ainsi que leurs correspondants, en dessous, soit

$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$
6	$5+\frac{1}{4}$	3	$1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}$

Dans une **sixième étape**, il faut exprimer le manque correspondant au « réducteur » choisi. D'une part on doit calculer le total des nombres correspondants :

$$6+\left(5+\frac{1}{4}\right)+3+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)=17+\frac{1}{4}\ .$$

D'autre part, puisque le manque est de 1/2 et que

$$\frac{1}{2}=\frac{21}{42}\ ,\ 21-\left(17+\frac{1}{4}\right)=3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ ,$$

le manque « exprimé en quarante-deuxièmes » est donc égal à 3 1/2 1/4.

Enfin dans une **dernière étape**, il faut faire apparaître ce nombre, en quarante-deuxièmes dans la deuxième colonne. En fait, Âhmès écrit en plus les nombres correspondants dans une troisième colonne détaillant ainsi la procédure. D'où le résultat.

NOTES

1 Cet article est issu d'une version remaniée d'une présentation réalisée lors du colloque « Mathématiques et interculturalité » organisé à l'IREM de Lille en 2009. Il repose à la fois sur la conférence donnée par Michel Guillemot et sur l'atelier animé par Daniel Austin et Michel Guillemot. Agissant dans le cadre d'une formation continue destinée principalement aux enseignants de mathématiques, nous avons préféré insister sur l'aspect mathématique de la question afin de permettre d'utiliser au mieux les documents présentés. Dans le domaine de l'égyptologie, ceux-ci proviennent essentiellement des études que nous avons conduites en vue de la publication d'une édition critique commune du *Papyrus mathématique Rhind* : voir notre site *papyrusrhind.unblog.fr*. Autrement dit, nous présentons seulement quelques aspects de l'histoire des « fractions égyptiennes ».

2 IREM de Lille, daniel.austin@sfr.fr.

3 IRES de Toulouse, guimiche@numericable.fr.

4 Nous avons mis des traits d'union pour indiquer des écritures spécifiques. Est-ce le poids d'une certaine tradition ? Nous retrouvons des symboles distincts pour ces quatre fractions, au Maghreb, au XIIe siècle. Voir Djebbar, 1992, Le traitement des fractions dans la tradition mathématique arabe du Maghreb, p. 240. Pour des références bibliographiques plus complètes, nous renvoyons le lecteur à la bibliographie qui se trouve en fin du document.

5 Imhausen, 2007, Egyptian mathematics, p. 7.

6 Gillings, 1972 (1982), *Mathematics in the time of the pharaohs*.

7 Caratini, 2002, *Égyptomanie, une imposture*, chap. VIII, La mathématique égyptienne : une fable et une imposture.

8 Voir, par exemple, Robins, 1923, A Greco-Egyptian mathematical papyrus, p. 332.

9 Baillet, 1892, *Le Papyrus mathématique d'Akhmîm*, p. 29.

10 C'est parfois le cas dans la dernière publication, en français, consacrée aux mathématiques égyptiennes. Voir Michel, 2014, *Les mathématiques de l'Égypte ancienne*.

11 Les dates varient selon les auteurs. Nous avons retenu celles de Vercoutter, 1992, *L'Égypte et la vallée du Nil*, t. 1, p. 82.

12 Les deux premières dynasties forment l'Époque dite archaïque ou Monarchie thinite.

13 Voir, par exemple, la répartition des salaires du temple d'El-Lahoun (on trouve aussi les appellations Kahun, Illahun) *in* Guillemot, 1992, Les notations et les pratiques opératoires permettent-elles de parler de "fractions égyptiennes" ? pp. 54-60.

14 Paul Campbell du Benoit College dans le Wisconsin a relevé plus de trois cents publications.

15 Voir Fischer, 1986, *L'écriture et l'art de l'Egypte ancienne*.

16 Grandet, 1994 (2005), *Le Papyrus Harris I*, t. 1, p. 332.

17 L'introduction de la « base » 60, dans un contexte additif, a été effectuée durant la civilisation sumérienne.

18 Dans son ouvrage « *Aux origines de l'Égypte* », Béatrix Midant-Reynes s'aide du lapis-lazuli, traceur sans contestation possible de relations entre l'Égypte et un plus extrême Orient, pour traiter des influences mésopotamiennes en Égypte (voir pp. 296-301). Voir aussi Friberg, 2005, *unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics*.

19 Midant-Reynes, 2003, *Aux origines de l'Égypte*, p. 133.

20 La date est difficile à déterminer car nous ne possédons qu'une partie du document. Le dernier pharaon qui y est cité est Néférirkarê-Kakaï qui régna entre 2490 et 2480 environ.

21 Voir, par exemple, Vercoutter, 1992, *L'Égypte et la vallée du Nil*, pp. 76-77 ou, pour des explications plus complètes ainsi que la traduction, Clagett, 1989, *Ancient Egyptian Science*, vol. 1, pp. 47-141, 771-784.

22 De manière générale, les égyptologues utilisent principalement la classification établie par Sir Alan Gardiner. Voir, Gardiner, 1957(1982), *Egyptian grammar being an introduction to the study of hieroglyphs*. La côte d'animal donne lieu à diverses graphies hiéroglyphiques notées de Aa 13 à Aa 16.

23 Griffith, 1894, The Rhind Mathematical Papyrus, p. 168.

24 Voir, par exemple, Posener, Sauneron, Yoyotte, 1970, *Dictionnaire de la civilisation égyptienne*, pp. 129-130.

25 Au lieu du *ro*, certains égyptologues parlent aussi d'une *bouchée*.

26 Ritter, 2002, Closing the Eye of Horus: The Rise and Fall of "Horus–eye Fractions". Notons que Annette Imhausen suit l'interprétation donnée par cet auteur : elle ne transcrit pas hiéroglyphiquement ces signes hiératiques, voir Imhausen, 2003, *Ägyptische Algorithmen*, p. 58.

27 Le dernier ouvrage publié sur le sujet (Tanja Pommerening, 2005, *Die altägyptischen Hohlmasse*) comporte plus de 500 pages. Il traite seulement des mesures des capacités (voir, p. 122 pour 7 documents de la XIIe à la XVIIe dynastie) ! Autant dire l'importance du sujet qu'il est difficile de ramener à quelques lignes. Nous excluons de notre étude les autres sous-multiples métrologiques.

28 Nous préférons parler d'exemples plutôt que de problèmes car il s'agit de mettre en évidence une possibilité de résolution pouvant être imitée différente d'un algorithme qui serait impérativement appliqué.

29 Nous reprenons la classification habituelle de divers exemples du *Papyrus Rhind*, tout en les faisant précéder de la lettre R.

30 Voir les exemples R64 et R81 pour les notations spécifiques de capacité et aussi R86.

31 Voir Guillemot, 1992, Les notations et les pratiques opératoires permettent-elles de parler de « fractions égyptiennes » ? *in* Benoit et alii, 1992, *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, pp.53-69.

32 Notons que selon les auteurs le lieu égyptien est écrit Kahun, Illahun ou el-Lahun.

33 Voir Fowler, 1987, *The mathematics of Plato's Academy, a new reconstruction*, pp. 270-276.

34 Baillet, 1892, *Le Papyrus mathématique d'Akhmîm*, p. 24.

35 Voir le site de la Collection de l'Université Michigan : http://www.lib.umich.edu/pap.

36 Voir Drescher, 1948, A coptic calculation manual, pl. II.

37 Nous mettons en gras car il s'agit de notations spécifiques.

38 Anciennement, les égyptologues parlaient de Kahun, ou encore de Kahoun. Nous donnons d'abord la nouvelle côte puis l'ancienne. Voir Imhausen, Ritter, 2004, Mathematical Fragments, p. 93.

39 Le *Papyrus Rhind* a été recopié par Âhmès à partir d'un ou plusieurs documents écrits sous le règne d'Aménémhat III c'est-à-dire entre 1850 et 1800 environ. Les textes originaux sont donc approximativement de la même époque.

40 Le *Papyrus Rhind* nous est parvenu de manière incomplète. Au British Museum ont été déposés les deux parties essentielles, BM 10057 et BM 10058 achetées par Rhind, tandis que quelques fragments, désignés sous les côtes 37.1784E (A) et 37.1784E (B), se trouvent au Brooklyn Museum.

41 Daressy, 1906, Calculs égyptiens du Moyen Empire, p. 68.

42 Voir, par exemple, Robins, 1923, A Greco-Egyptian mathematical papyrus, p. 332.

43 Baillet, 1892, *Le Papyrus mathématique d'Akhmîm*, p. 29.

44 Parker, 1972, *Demotic Mathematical Papyri*, p. 66.

45 Baillet, 1892, *Le Papyrus mathématique d'Akhmîm*, p. 77.

46 Parker, 1972, *Demotic Mathematical Papyri*, pp. 8-10.

47 Chabert et autres, 1993, *Histoire d'algorithmes*, p. 231.

48 Aballagh, Djebbar, 1987, Découverte d'un écrit mathématique d'Al Hassar …., p. 151.

49 Voir, par exemple, Knorr, 1982, Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece ; Fowler,1987, *The mathematics of Plato's Academy*.

50 Nous remercions vivement le Comité de rédaction de la revue *Repères* pour les nombreuses suggestions qui ont permis d'améliorer la rédaction de cet article.

Bibliographie

ABALLAGH Mohamed, DJEBBAR Ahmed. 1987. « Découverte d'un écrit mathématique d'AL-HASSĀR (XII[e]) : le livre I du Kāmil ». *Historia Mathematica* 14 (1987) 147-158.

BAILLET Jean. 1892. « Le Papyrus mathématique d'Akhmîm ». *Mémoires publiés par les membres de la Mission Archéologique Française au Caire*: 9. fasc. 1.

BENOIT Paul, CHEMLA Karine, RITTER Jim (éd.). 1992. *Histoire de fractions. fractions d'histoire*. Bâle, Boston, Berlin, Birkhäuser.

CARATINI Roger. 2002. *Égyptomanie. une imposture*. Paris, Albin Michel.

CAVEING Maurice. 1992. « Le statut arithmétique du quantième égyptien ». *In* Benoit, Chemla, Ritter. 1992. *Histoire de fractions, fractions d'histoires*, pp. 39-52.

CHABERT J.-L. et autres. 1993 (2010). *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*. Paris, Belin.

CLAGETT Marshall. 1989. *Ancient Egyptian Science. A Source Book. Volume One. Knowledge and Order*. Philadelphie, American Philosophical Society.

DARESSY Georges. 1906. « Calculs égyptiens du Moyen Empire ». *Recueil de travaux relatifs à l'archéologie égyptienne et assyrienne* 28 (1906) 62-72.

DJEBBAR Ahmed. 1992. « Le traitement des fractions dans la tradition mathématique arabe du Maghreb ». *In* Benoit, Chemla, Ritter. 1992. *Histoire de fractions, fractions d'histoires*, pp. 225-245

DE BUCK Adriaan. 1967. *Grammaire élémentaire du Moyen Egyptien*. Traduite par B. Van De Walle et J. Vergote. revue par l'auteur ; 1[ère] édit. 1952 ; réimp. Leyde, Brill.

DRESCHER James. 1948. « A Coptic Calculation Manual ». *Bulletin de la Société d'Archéologie Copte* 13 (1958) 137-160 + 4 pl. .

DUVILLIÉ Bernard. 1999 (2015). *Sur les traces de l'Homo mathematicus, Les mathématiques avant Euclide, Mésopotamie, Egypte, Grèce*. Paris, Ellipses.

FISCHER Henri Georges. 1986. *L'écriture et l'art de l'Egypte ancienne*. Paris, Presses Universitaires de France.

FOWLER David. 1987. *The mathematics of Plato's Academy. a new reconstruction*. Oxford, Clarendon Press.

FRIBERG Jöran, 2005. *unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics*. New Jersey, World Scientific.

GARDINER Alan (Sir), 1957 (1982). *Egyptian Grammar being an introduction to the study of hieroglyphs*. 1[ère]éd. 1927 ; 3[ème] éd., Oxford, Griffith Institute.

GILLINGS Richard. 1972 (1982). *Mathematics in the time of the pharaohs*, Cambridge. 1972 ; réimp.. New York. Dover.

GRANDET Pierre. 1994-2005. *Le Papyrus Harris I (BM 9999)*. Le Caire, Institut Français d'Archéologie Orientale.

GRIFFITH Francis Llewellyn. 1894. « The Rhind Mathematical Papyrus ». *Proceedings of the Society of Biblical Archaeology* 16 (1894) 164-173, 201-208, 230-248 + 2 pl. .

GUILLEMOT Michel. 1992. « Les notations et les pratiques opératoires permettent-elles de parler de "fractions égyptiennes" ? ». *In* Benoit, Chemla, Ritter. 1992. *Histoire de fractions, fractions d'histoires*, pp. 53-69.

IMHAUSEN Annette. 2003. *Ägyptische Algorithmen*. Wiesbaden, Harrassowitz Verlag.
IMHAUSEN Annette. 2007. « Egyptian Mathematics ». *In* Katz, The *Mathematics of Egypt* . 2007. pp. 7-56.
IMHAUSEN Annette. 2016. *Mathematics in Ancient Egypt. A Contextual History*. Princeton, Oxford, Princeton University Press.
IMHAUSEN Annette, RITTER Jim. 2004. « Mathematical Fragments : UC 32114B. UC 32118B. UC 32134A+B. UC 32159-UC 32162 ». *In* Collier. Quirk. 2004. *The UCL Lahun Papyri*, pp. 71-96. Voir aussi
http://www.digitalegypt.ucl.ac.uk/lahun/ucarchivelahun/uc32159-f.jpg.
KATZ Victor. (éd.). 2007. *The Mathematics of Egypt. Mesopotamia. China. India and Islam. A sourcebook*. Princeton, Oxford, Princeton University Press.
KNORR Wilbur. 1982. « Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece ». *Historia Mathematica* 9 (1982) 133-171.
MICHEL Marianne. 2014. *Les mathématiques de l'Égypte ancienne, Numération, métrologie, arithmétique, géométrie et autres problèmes*. Bruxelles, Éditions Safran.
MIDANT-REYNES Béatrix. 2003. *Aux origines de l'Égypte, du Néolitique à l'émergence de l'État*. Paris, Fayard.
MÖLLER Georg. 1909 (1965). *Hieratische Paläographie*, die aegyptische Buchschrift in ihrer Entwicklung von der fünften Dynastie bis zur römischen Kaiserzeit ; http://www.egyptology.ru/lang/moeller
PARKER Richard. 1972. *Demotic Mathematical Papyri*. Providence, Brown University Press.
POMMERENING Tanja. 2005. *Die altägyptischen Hohlmasse*. Hambourg, Helmut Buske Verlag.
POSENER Georges, SAUNERON Serge, YOYOTTE Jean. 1959 (1970). *Dictionnaire de la civilisation égyptienne*, Paris, 1ère éd. 1959 ; rééd. Fernand Hazan.
QUIBELL James Edward. 1900 (1989). *Hierakonpolis*, Part I, with notes by W. M. F. P. . Londres, 1900 ; Réimp., Londres, Histories & Mysteries of Man.
RITTER James. 1989. Chacun sa vérité: les mathématiques en Égypte et en Mésopotamie. *In* Serres. 1989. *Éléments d'histoire des sciences* : 39-61.
RITTER Jim. 1992. « Metrology and the prehistory of fractions ». *In* Benoit, Chemla, Ritter. 1992. *Histoire de fractions, fractions d'histoires*, pp. 19-34.
RITTER James. 2002. « Closing the Eye of Horus: The Rise and Fall of "Horus–eye Fractions" ». *In* Steele, Imhausen. 2002. *Under One Sky. Astronomy and Mathematics in the Ancient Near East*, pp. 297-323.
ROBBINS. Frank, Egleston. 1923. « A Greco-Egyptian Mathematical Papyrus ». *Classical Philology* 18 (1923) 328-333.
SERRES Michel. (dir.). 1989. *Éléments d'histoire des sciences*. Paris, Bordas.
STEELE John, IMHAUSEN Annette. 2002. *Under One Sky. Astronomy and Mathematics in the Ancient Near East*. Münster, Ugarit-Verlag.
VERCOUTTER Jean. 1992. *L'Égypte et la vallée du Nil. t. 1. Des origines à la fin de l'Ancien Empire 12000-2000 av J. C.* . Paris, Presses Universitaires de France.