REPERES - IREM. N° 107 - avril 2017

ROGER APERY, L'HUMOUR AU SERVICE D'UNE PENSEE LIBRE ET ORIGINALE SUR LES MATHEMATIQUES CONSTRUCTIVES

Henri LOMBARDI
Stefan NEUWIRTH
Irem de Franche-Comté

Cet article est un commentaire d'un texte célèbre de Roger Apéry que nous reproduisons en fin d'article. Ce texte de Roger Apéry, « Mathématique constructive », est paru dans le livre *Penser les mathématiques* aux éditions du Seuil en 1982, p. 58-72. Nous le reproduisons avec l'aimable autorisation de son fils, François Apéry.

Le texte original de la conférence donnée en 1976 au « Séminaire Loi » est disponible sur Numdam sous :

http://www.numdam.org/item?id=SPHM_1976___1_A1_0.

François Apéry a écrit une courte note biographique de son père pour la revue *The Mathematical Intelligencer* en 1996. Une traduction française est disponible sous :

http://peccatte.karefil.com/PhiMathsTextes/AperyFR.htm.

Notre commentaire

En l'an 1976, en pleine période de bourbakisme triomphant, Roger Apéry est invité à donner une conférence au Séminaire de philosophie et mathématiques de l'École normale supérieure. Jean Dieudonné, représentant officiel du bourbakisme parmi les organisateurs du Séminaire, est un ami personnel de Roger Apéry, comme on peut le voir dans la biographie citée. Ainsi, malgré le slogan « A bas Euclide » (appuyé par un célèbre pensum de géométrie sans figures ni intuition publié par Dieudonné), la guerre n'est pas totale et les adeptes du paradis de Cantor dans la version formaliste tolèrent que l'on développe une philosophie des mathématiques en s'opposant au cadre officiel dominant. Et pourtant Bourbaki avait déclaré la guerre terminée par triomphe complet et autoproclamé des vainqueur-e-s.

Le texte est empli d'un humour parfois dévastateur, comme la fin du premier paragraphe.

Enfin, aucun argument solide ne permet d'affirmer que L. Kronecker, H. Poincaré ou H. Weyl étaient plus angoissés que Cantor, Hilbert ou Russell.

Le texte de la conférence est parfois plus direct et mordant que le texte remanié paru dans *Penser les mathématiques,* même s'il n'y a aucune variation dans la pensée philosophique.

A titre d'exemple, voici le passage décrivant la position du formalisme dans le texte de la conférence. Beaucoup moins argumenté dans les détails que le texte remanié, beaucoup plus court, il n'en est que plus incisif.

Soucieux d'éliminer les antinomies issues du cantorisme et d'extirper toute trace de subjectivisme, les formalistes réduisent la mathématique à un simple jeu défini par des règles. Ils abandonnent dédaigneusement au psychologue l'activité mentale du mathématicien dont l'examen leur semble inutile pour juger la validité des résultats. L'adéquation au monde physique leur parait due à une « harmonie préétablie » ou à un « miracle ». Ils ne veulent connaître des mathématiques, de la musique, de la littérature que leur formalisation écrite conservée par les bibliothèques.

Attachés sentimentalement au « paradis créé pour nous par Cantor », ils pratiquent le double langage : quand le profane croit qu'ils démontrent des vérités, ils se contentent d'établir la possibilité d'obtenir leurs résultats en respectant les règles d'un jeu formel, de façon analogue au problème d'échecs énonçant : les blancs jouent et gagnent.

Leur hostilité à la liberté du sujet les pousse à la création d'un dieu mathématique à plusieurs personnes, qui tente d'être immortel en renouvelant périodiquement ses membres ; ce dieu révèle aux populations les bonnes définitions et les bonnes théories.

En face de ceux qui refusent la science au nom du bon sens, de la poésie, de la religion, les formalistes rejettent comme démunis de sens les concepts d'espace, de temps, de liberté.

Le dieu mathématique à plusieurs personnes qui tente d'être immortel est bien évidemment le groupe Bourbaki, et il occupe dans le discours d'Apéry la position symétrique des gens qui refusent la science au nom de la religion. Il écrit ceci après avoir montré que Leibniz et Cantor avaient besoin de Dieu pour se convaincre de croire en l'infini actuel. Voici donc les platonicien-ne-s et les formalistes renvoyé-e-s au paradis, bien loin de la science. Naturellement, la plupart des mathématicien-ne-s sont plutôt platonicien-ne-s que formalistes, car il-elle-s ne croient pas que les mathématiques se réduisent ni à un plan de carrière de mathématicien-ne, ni à un jeu formel, qui, « par miracle », s'accorde avec le monde réel objectif [1].

L'ironie mordante d'Apéry se manifeste aussi contre la réforme des mathématiques modernes, qui s'avèrera effectivement catas-

1 Comme le montrent la mécanique de Newton, les équations de Maxwell, les lentilles de Fresnel, la prévision météo, le vol des avions, le lancement des satellites, les technologies modernes, les disques compacts, les téléphones portables ou non, le GPS, et, hélas !, les bombes à fragmentation, la bombe atomique (« et c'est depuis qu'ils sont civilisés… »), les drones et les mathématiques financières.

trophique. C'est le point n° 10 du formalisme dans le texte remanié.

Uniformiser les esprits par l'enseignement des « mathématiques modernes », où on laisse croire aux enfants qu'entourer des petits objets par une ficelle est une activité mathématique au lieu de leur apprendre à compter, à calculer et à examiner les propriétés des figures.

L'aspect le plus stimulant du texte d'Apéry est la comparaison étroite qu'il établit entre les mathématiques et d'autres activités humaines comme la littérature et la musique, qui n'existent qu'avec le déroulement du temps et eu égard à la psychologie humaine. En insistant sur le fait que « celui qui possède des textes mathématiques dont il ne comprend pas l'articulation ne possède rien », il nous rappelle une évidence profonde que nous oublions quand nous prenons les mathématiques comme une sorte de vérité absolue préétablie révélée et non soumise à discussion.

Que sont donc les objets mathématiques ? Les platonicien-ne-s les conçoivent comme préexistants de toute éternité dans un monde idéal des idées, la plupart du temps ensembliste de surcroît.

Comme le platonicien et contrairement au formaliste, le mathématicien constructif reconnaît une certaine réalité aux objets mathématiques, mais les différencie essentiellement des objets matériels, en ne leur attribuant que les propriétés susceptibles de démonstration. Une distinction analogue différencie les héros de roman des personnages historiques.

Suit une comparaison savoureuse entre les statuts de vérité différents concernant Vercingétorix et Don Quichotte, aboutissant à cette magnifique chute :

[…] *l'ensemble des réels, comme Don Quichotte, est un être essentiellement incomplet.*

Sous une forme particulièrement condensée, la conception des objets mathématiques d'Apéry est résumée comme suit :

Selon la conception constructive, il n'y a pas de mathématique sans mathématicien. En tant qu'êtres de raison, les êtres mathématiques n'existent que dans la pensée du mathématicien et non dans un monde platonicien indépendant de l'esprit humain.

Cela ne conduit cependant pas Apéry jusqu'à la position « intuitionniste » de Brouwer. Voici comment il s'en explique dans le texte initial de la conférence.

En face des « statiques » qui veulent détruire l'intuition (on connait les résultats désastreux dans l'enseignement), Brouwer lui laisse une trop large part en considérant comme prouvé ce qui est intuitivement clair ; la clarté intuitive varie souvent d'un mathématicien à l'autre.

Nous préférons au vocable « intuitionnisme » utilisé par Brouwer, le vocable « constructivisme » qui évoque mieux les méthodes de preuve permises.

En résumé, Apéry se situe dans les courants des mathématiques constructives représentés à son époque par Bishop et Shanin (cités à la fin de son texte), sans prendre parti entre leurs différences d'approche.

La section finale dans laquelle il explique très clairement pourquoi la logique constructive est plus riche que la logique classique est une œuvre de salubrité publique qui a dû résonner de manière bizarre aux oreilles de Dieudonné. Cette réalité objective est toujours mal assimilée (et souvent simplement ignorée) par la plupart des mathématicien-ne-s. Les théoricien-ne-s de l'informatique sont en général mieux informé-e-s.

Avec l'avènement des calculs sur machine inaccessibles aux humains mais contrôlés par eux, l'idéal constructif, poursuivi par Gauss, Kronecker et Bishop, que tout théorème de mathématiques sérieux corresponde à un algorithme qui le rend explicite est devenu beaucoup plus crédible et concret. Presque tou-te-s les mathématicien-ne-s considèrent aujourd'hui qu'une version explicite d'un théorème présente un réel intérêt par rapport à une version purement idéale.

Peut-être est-ce ici un bon endroit pour expliquer ce qui distingue les mathématiques constructives « minimales » à la Bishop des mathématiques constructives à la Shanin. En très bref et avec certainement un peu d'exagération, les mathématiques de Bishop sont un cadre commun de base pour toutes les mathématiques pratiquées aujourd'hui. Les objets mathématiques sont essentiellement les mêmes et les mathématiques non minimales ajoutent des axiomes sujets à discussion.

Les mathématiques classiques ajoutent le principe du tiers exclu et l'axiome du choix. Le principe du tiers exclu est le ver dans le fruit qui empêche presque toujours que les démonstrations classiques recèlent un contenu algorithmique évident. Un travail de décryptage est presque toujours nécessaire, parfois facile, parfois fort délicat. Comme ce travail n'a en général aucune incidence positive sur « la carrière » (tout au contraire il la ralentit souvent) il n'est que rarement entrepris par les gens inquiets pour leur insertion professionnelle dans les structures de la recherche.

Les mathématiques à la Shanin affirment une « thèse de Church-Turing renforcée » selon laquelle tout objet mathématique est codable en machine de Turing et tous les théorèmes de mathématiques relèvent de programmes de calculs à la Turing. Cette position radicale conduit à des ennuis sérieux avec des théorèmes peu intuitifs d'une part et en contradiction immédiate avec les mathématiques classiques d'autre part. Par exemple toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est continue en tout point, mais il y a des fonctions uniformément continues sur l'intervalle $[0,1]$ partout strictement positives avec une borne inférieure nulle. C'est une rançon cher payée pour le fait de n'admettre a priori et à tout jamais que les réels « calculables sur machine ». Mieux vaut penser que les réels ressemblent plus à Don Quichotte qu'à Vercingétorix.

En fait la source de divergence la plus importante entre Bishop et Shanin porte sur la question de la notion même de construction. Cela se manifeste dès les suites calculables de nombres entiers. Shanin pense que ce concept est bien défini dans l'absolu, par le recours aux machines de Turing. Bishop dit que l'on a là affaire à une notion de base, la notion de construction, non susceptible d'être définie et sur laquelle les mathématicien-ne-s doivent s'accorder au cas par cas. Quand un-e mathématicien-ne imagine une suite calculable d'entiers, ce n'est généralement pas en termes de programme de Turing. Même si en pratique il-elle arrive en fin de compte à en déduire un programme, il s'agit d'un nouveau travail qui n'a aucun caractère mécanique. Les calculs mécaniques à la Turing ne sont donc pas a priori la même chose que les constructions au sens intuitif et indéfini de la chose. En outre, et c'est là un point très important, affirmer qu'un programme donné produira bien un calcul fini qui terminera un jour demande une démonstration constructive qui ne peut en aucun cas être considérée comme mécanisable. Cela résulte du fameux « théorème de l'arrêt » de Turing, qui n'est autre que la version machine de Turing de la méthode diagonale de Cantor.

Une bibliographie commentée

Nous donnons ci-dessous une liste de références en rapport avec notre propos.

Le-la lecteur-rice trouvera quelques références purement techniques à la fin de la note technique qui suit, et l'article de Roger Apéry a sa propre liste de références, qui recoupe la nôtre.

Signalons aussi qu'une bibliographie commentée est déjà parue à la fin de l'article « Le programme de Hilbert et les mathématiques constructives », Repères Irem n° 50, 2003, p. 85-104,

http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique24&id_numero=50.

Voici tout d'abord deux textes qui parlent de Roger Apéry.

P. Ageron, « La philosophie mathématique de Roger Apéry », *Philosophia Scientiæ*, cahier spécial 5, 2005, p. 233-256.

Résumé de l'auteur. *Pour qui s'intéresse à la philosophie des mathématiques, Roger Apéry (1916-1994) incarne le défenseur de la mathématique constructive et l'adversaire résolu du formalisme et du bourbakisme. On sait moins qu'il est aussi l'un des premiers universitaires français à avoir fait la promotion de la théorie des catégories, pourtant hautement structuraliste et souvent jugée comme très formelle. L'objectif principal de notre étude est de préciser les conditions historiques et la teneur philosophique du double enthousiasme d'Apéry, afin de vérifier la cohérence d'une pensée libre, originale et attachante.*

F. Apéry, « Roger Apéry, 1916-1994: a radical mathematician », *The Mathematical Intelligencer*, vol. 18, n° 2, 1996, p. 54-61.

Ensuite des textes de Roger Apéry lui-même.

R. Apéry, « Axiomes et postulats », dans *Actes du Xème congrès international de philosophie (Amsterdam, 11-18 aout 1948)*, vol. II, Amsterdam : North-Holland, 1949, p. 708-710.

R. Apéry, « Le rôle de l'intuition en mathématiques », dans *Congrès international de philosophie des sciences (Paris, 17-22 octobre 1949)*, vol. III, Paris : Hermann & Cie, 1951, p. 85-88.

R. Apéry, « Les mathématiques sont-elles une théorie pure ? », *Dialectica*, vol. 6, 1952, p. 309-310.

Enfin quelques textes importants pour les mathématiques constructives, avec quelques commentaires.

Quand Errett Bishop publie en 1967 le livre *Foundations of Constructive Analysis*, où il interprète en termes constructifs les bases de l'analyse moderne, il réalise un morceau substantiel du programme de Hilbert relu sous la forme suivante :

- lorsqu'un résultat concret est démontré en mathématiques par des méthodes douteuses, certifier ce résultat par des méthodes sûres ;

- réaliser ce travail de manière aussi systématique (voire automatique) que possible.

Dans le livre de Bishop, tous les théorèmes d'analyse ont la signification d'algorithmes qui calculent des objets concrets à partir d'autres objets concrets, conformément à certaines spécifications requises, et ces algorithmes sont prouvés par des méthodes sûres : en particulier personne ne conteste qu'ils aboutissent certainement en un temps fini au résultat souhaité. Ainsi les bases de l'analyse sont ramenées à un degré de certitude comparable à celui qui règne en théorie élémentaire des entiers naturels.

Bishop va bien au delà de ce qu'avait pu faire auparavant un logicien remarquable comme Goodstein : non seulement sont traités une quantité incomparablement plus grande de résultats, mais encore, le style d'exposition est direct, sans autre différence sensible avec le style mathématique usuel qu'une attention scrupuleuse accordée aux aspects effectifs.

On pourra lire à ce sujet l'article de D. Knuth dans lequel il analyse la « page 100 » de différents livres de mathématiques, dont celui de Bishop, du point de vue de la pensée algorithmique.

Non seulement, le programme de Hilbert (revisité) n'est pas utopique, mais il a de bonnes chances de pouvoir être développé en grand après un tel coup de maître.

Mais au lieu d'être acclamé comme le travail d'un bienfaiteur des mathématiques, ce livre a été accueilli par une quasi-indifférence des professionnel-le-s. Ceci ne s'explique que par le poids de la routine (qu'est-ce que c'est que ce type qui prétend faire changer nos standards ?) et par le manque presque total de questionnement des professionnel-le-s concernant la signification de leur activité scientifique. L'épistémologie des mathématiques n'est pas à l'ordre du jour, elle ne fait pas partie du cursus normal: elle n'est presque pas enseignée, et quand elle l'est c'est en général uniquement à titre de spécialité. Le livre de Bishop a été rapidement épuisé. Il a été réimprimé récemment. Il a fait l'objet d'études approfondies chez les logicienne-s (voir par exemple les textes de M. Beeson). Une deuxième édition en collaboration avec D. Bridges, dans laquelle la théorie de l'intégrale de Lebesgue a été « simplifiée », est parue en 1985.

En algèbre, le point de vue algorithmique a toujours eu des défenseurs. Il y a de quoi, puisque le mot « algèbre » est tiré de « al-jabr », extrait du titre d'un livre écrit il y a fort longtemps par un auteur qui s'appelait « M. Algorithme » (Al-Khwarizmi). Il faut bien évidemment souligner la tradition de Gauss et Kronecker, entièrement dans le style algorithmique. Bien que les méthodes abstraites soient ensuite devenues quelque peu hégémoniques sous l'influence de Hilbert puis de Bourbaki, il est encore fréquent d'enseigner et de publier des algorithmes. Signalons entre autres les travaux de Seidenberg. En 1988, le merveilleux petit livre de Mines, Richman et Ruitenburg a fait pour les bases de l'algèbre moderne ce qu'avait fait le livre de Bishop pour celles de l'analyse.

La nouvelle discipline du calcul formel (calculs symboliques et algébriques sur machine) se rattache de facto à cette tradition, même si les auteur-e-s ne comprennent pas toujours la différence entre preuve constructive et algorithme : un algorithme qui met en œuvre un théorème d'algèbre est parfois prouvé par des méthodes abstraites non constructives, auquel cas le programme de Hilbert n'est réalisé que très imparfaitement pour le théorème en question. Voir le livre édité par Cohen, Cuypers et Sterk et celui de Cox, Little et O'Shea.

Le livre de Bridges et Richman est une très bonne introduction aux différentes variantes des mathématiques constructives.

Le livre d'Aberth est une présentation simple de la variante récursiviste russe (dans laquelle tous les objets sont supposés récursifs).

Le livre de David, Nour et Raffalli est un livre d'enseignement universitaire. Il doit être salué comme le premier livre de ce type (à notre connaissance) écrit en français et qui accorde la place qu'elle mérite à la logique intuitionniste (la logique des mathématiques constructives). Cependant il est écrit du point de vue des mathématiques classiques, ce qui est paradoxal quand on veut traiter sérieusement la question des fondements (il est vrai que ce n'est pas l'objet essentiel de l'ouvrage).

Le livre de Gilles Dowek est un excellent petit texte de présentation de la logique, mais écrit pour un public large, donc sans description précise des outils de la logique mathématique.

Le livre de Jean-Louis Krivine, d'une clarté remarquable, doit être lu par tout-e mathématicien-ne qui veut comprendre ce qu'est la théorie formelle des ensembles : l'étude d'une structure particulière, non pas celle d'anneau commutatif, ni celle de treillis distributif, mais celle d'univers, i.e. la structure des ensembles naïfs munis d'une relation, notée « $\in$ » vérifiant un système d'axiomes mis au point pour éviter le paradoxe de Russell.

En informatique, les auteur-e-s clairvoyant-e-s ne cachent pas que la seule logique qui vaille pour l'informatique théorique est la logique intuitionniste. Voir par exemple le beau livre de R. Lalement.

Le livre de Lakatos reste une source importante de réflexion sur les fondements. Notamment, la place centrale qui est accordée aux preuves par rapport aux théorèmes est en accord profond avec le dicton constructif : ce qui est vrai est ce qui peut être prouvé.

L'article d'Abraham Robinson, le fondateur de l'analyse non standard, montre à quel point ce visionnaire des infinitésimaux doute de la réalité de l'infini cantorien.

Le livre de Nagel, Newman, Gödel et Girard donne une traduction française de l'article original de Gödel avec le théorème d'incomplétude. Il contient aussi la traduction française d'un texte de Nagel et Newman exposant de manière simple les idées à l'œuvre dans l'article de Gödel. Enfin on trouve un commentaire de J.-Y. Girard dans lequel il assassine avec brio un certain nombre de positions adverses, dont celle de Hilbert.

Le livre édité par Toraldo di Francia est un recueil d'articles, en français, en italien et en anglais, de physicien-ne-s, de logicien-ne-s, de philosophes et d'historien-ne-s des sciences sur le problème de l'infini dans les sciences. Sa lecture pourrait aider les mathématicien-ne-s à sortir de leur bulle et à jeter un regard critique sur ce qui leur semble évident par habitude professionnelle.

Le livre de Feferman reprend une série d'articles importants concernant les fondements des mathématiques. Tout son livre tend à la conclusion que pour faire des mathématiques, la théorie des ensembles ne sert à rien. Elle sert évidemment à développer des intuitions fructueuses, mais, sur le fond, elle n'apporte aucun outil que ne nous apporterait pas la théorie des entiers naturels. Le point de vue personnel de Feferman semble être essentiellement un développement de la position défendue par Hermann Weyl dans *Das Kontinuum*. Un des systèmes formels proposés par Feferman essaie de traduire au plus près les intuitions de Weyl, et ce système est « complètement sûr » puisque c'est une extension conservative de la théorie formelle de Peano pour les entiers naturels.

O. Aberth, *Computable analysis*, New York : McGraw-Hill, 1980.

P. Ageron, *Logiques, ensembles, catégories : le point de vue constructif*, Paris : Ellipses, 2000.

M. Beeson, *Foundations of constructive mathematics*, Berlin : Springer, 1985.

M. Beeson, « Some theories conservative over intuitionistic arithmetic », dans *Logic and computation: proceedings of a workshop held at Carnegie Mellon University, June 30-July 2, 1987* (éd. par W. Sieg), Providence : American Mathematical Society, 1990, p. 1-15.

E. Bishop, *Foundations of constructive analysis*, New York : McGraw-Hill, 1967 ; réimpression, New York : Ishi Press International, 2012.

E. Bishop et D. Bridges, *Constructive analysis*, Berlin : Springer, 1985.

M. Bridger, *Real analysis : a constructive approach*, Hoboken : Wiley, 2007.

D. Bridges et F. Richman, *Varieties of constructive mathematics*, Cambridge : Cambridge University Press, 1987.

L. Brouwer (éd. par D. van Dalen), *Brouwer's Cambridge lectures on intuitionism, Cambridge* : Cambridge University Press, 1981.

A. Cohen, H. Cuypers et H. Sterk (éds.), *Some tapas of computer algebra*, New York : Springer, 1999.

D. A. Cox, J. Little et D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms : an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, 4e édition, Cham : Springer, 2015.

R. David, K. Nour et C. Raffalli, *Introduction à la logique : théorie de la démonstration*, 2e édition, Paris : Dunod, 2004.

G. Dowek, *La logique*, Paris : Flammarion, 1995.

S. Feferman, *In the light of logic*, Oxford : Oxford University Press, 1998.

H. Friedman, « Classically and intuitionistically provably recursive functions in Peano », dans *Higher set theory: proceedings, Oberwolfach, Germany, April 13-23, 1977* (éd. par G. H. Müller et D. S. Scott), Berlin : Springer, 1978, p. 21-27.

R. Goodstein, *Recursive number theory*, Amsterdam : North-Holland, 1957.

D. Hilbert, « Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik », dans *Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, Leipzig : Teubner, 1905, p. 174-185. Traduction par P. Boutroux: « Sur les fondements de la logique et de l'arithmétique », *L'enseignement mathématique*, vol. 7, 1905, p. 89-103.

D. Knuth, « Algorithmic thinking and

mathematical thinking », *American Mathematical Monthly*, vol. 92, no 3, 1985, p. 170-181.

J.-L. Krivine, *Théorie des ensembles*, Paris : Cassini, 1998.

I. Lakatos, P*reuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique*, Paris : Hermann, 1984, traduit par N. Balacheff et J.-M. Laborde.

R. Lalement, *Logique, réduction, résolution*, Paris : Masson, 1990.

H. Lombardi et C. Quitté, *Algèbre commutative : méthodes constructive*s, Paris : Calvage & Mounet, 2011.

R. Mines, F. Richman et W. Ruitenburg, *A course in constructive algebra*, New York : Springer, 1988.

E. Nagel, J. R. Newman, K. Gödel et J.-Y. Girard, *Le théorème de Gödel*, Paris : Éditions du Seuil, 1989.

B. Pire, « Hilbert (Problèmes de) », dans *Encyclopædia universalis*, vol. 11, 1989, p. 412-418.

H. Poincaré, *Dernières pensées*, Paris : Flammarion, 1913.

A. Robinson, « Formalism 64 », dans *Logic, methodology and philosophy of science: proceedings of the 1964 International Congress* (éd. par Y. Bar-Hillel), Amsterdam : North-Holland, 1965, p. 228-246.

E. Schechter, *Handbook of analysis and its foundations*, New York : Academic Press, 1997.

A. Seidenberg, « Constructions in algebra », *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 197, 1974, p. 273-313.

A. Seidenberg, « What is noetherian ? », *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, vol. 44, 1974, p. 55-61.

G. Toraldo di Francia (éd.), *L'infinito nella scienza*, Rome : Istituto della Enciclopedia Italiana, 1987.

J. van Heijenoort (éd.), *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*, Cambridge : Harvard University Press, 1967.

H. Weyl, *Das Kontinuum: kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Leipzig : Veit & Comp., 1918. Traduction par J. Largeault dans *Le continu et autres écrits*, Paris : Vrin, 1994.

Au sujet de la théorie de la mesure, une note technique.

La théorie de la mesure a pour ambition de généraliser la théorie des grandeurs héritée de la mathématique grecque. Après les succès du calcul différentiel et intégral dans le calcul des longueurs, aires et volumes de toutes sortes de courbes, surfaces et objets solides définis en mathématiques, des problèmes de fondements sont apparus lorsqu'on a introduit, à la fin du 19e siècle, sous l'impulsion de Cantor, Dedekind et Hilbert, de nouveaux objets beaucoup plus généraux, comme des parties arbitraires de la droite, du plan ou de l'espace.

L'ambition d'attribuer une mesure, analogue à la longueur d'un segment, à toute partie de la droite réelle, a été l'objet de tentatives multiples, dont les plus marquantes ont été la définition de la mesure des boréliens par Borel et la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

On doit définir ce qu'est une partie mesurable, et ce qu'est sa mesure, lorsque du moins la partie n'est pas trop grande. En particulier toute partie mesurable bornée doit avoir une mesure finie.

L'idée centrale pour fonder une théorie qui tienne la route est d'imposer la « σ-additivité » : si l'on a une réunion dénombrable de parties mesurables disjointes, si chacune de ces parties a une mesure finie, et si la somme de ces mesures finies est elle-même finie, alors cette somme doit être la mesure de la réunion dénombrable. Les parties mesurables de la droite réelle doivent admettre comme cas particuliers les segments, elles doivent être stables par réunion et intersection dénombrable, et par passage au complémentaire. Borel définit ce que nous appelons aujourd'hui les boréliens comme les parties de la droite qui peuvent être construites selon les processus invoqués ci-dessus à partir des segments ouverts. Et il démontre que l'on peut attribuer une mesure finie à tout borélien contenu dans un segment fermé borné en respectant la propriété de σ-additivité. Cette magnifique théorie a été reprise par Bishop de manière entièrement constructive, mais elle a été éclipsée par l'intégrale de Lebesgue. C'est la théorie de Lebesgue qui est aujourd'hui couramment enseignée à l'université, en troisième année de licence ou première année de master. La théorie de Borel est plutôt considérée comme une théorie de spécialistes, trop compliquée pour être enseignée dans le cursus usuel.

De manière générale, toutes les questions concernant la théorie de la mesure présentent des défis intéressants.

Un-e mathématicien-ne classique donne souvent l'argument suivant : si l'on ne considère que les nombres réels récursifs, ils forment un ensemble dénombrable, donc de mesure nulle, et les mathématiques usuelles s'effondrent. Vouloir se restreindre aux êtres mathématiques explicites est donc une catastrophe.

Encore un argument qui oublie la différence entre Vercingétorix et Don Quichotte !

En fait, en théorie de la mesure classique, une partie mesurable de [0,1] de mesure strictement positive peut très bien ne contenir aucun réel que l'on soit capable d'expliciter. Ceci devrait plutôt être considéré comme une faiblesse de la théorie classique que comme une force. Et c'est un résultat qu'en général on cache soigneusement aux étudiant-e-s pour ne pas les décourager. On leur demande d'admettre que l'ensemble **R** peut être muni d'une relation de bon ordre, sans trop insister sur l'étrangeté de la chose, mais on ne leur parle guère du « paradoxe » apparent que nous venons d'indiquer en théorie de la mesure.

Quand on lit Bishop au contraire, on voit que non seulement il est impossible d'énumérer les réels, conformément à Cantor, mais aussi que toute partie mesurable de mesure strictement positive contient vraiment des réels explicites [2], que l'on sait calculer. Ceci est naturellement un point très positif en faveur de l'approche minimale de Bishop. Et il n'y a là aucune contradiction flagrante avec le « paradoxe » classique précédent. En effet, force recours au tiers exclu est nécessaire aux mathématicien-ne-s classiques pour énumérer les réels récursifs. Du point de vue de Bishop, il est tout simplement impossible de montrer que les réels récursifs forment une partie mesurable dans l'intervalle [0,1]. A fortiori ils ne forment pas une partie que l'on puisse énumérer de manière effective.

2 En fait on peut expliciter un ensemble de Cantor dans toute partie mesurable de mesure strictement positive. Une preuve constructive dans un cas particulier est donnée dans le livre *Épistémologie mathématique* (H. Lombardi, Paris : Ellipses, 2011), section 8.3.

Maintenant, la preuve en mathématiques minimales, par Bishop, que tout borélien explicite de mesure strictement positive contient une infinité non dénombrable de points explicites est aussi une preuve en mathématiques classiques que tout borélien de mesure strictement positive contient une infinité non dénombrable de points. Il suffit en effet de relire la preuve de Bishop en vidant de son sens intuitif le mot « explicite » et en décrétant en son for intérieur, que, vu le principe du tiers exclu, on est autorisé à admettre que tout est explicite en mathématiques, mais en un sens affaibli.

En fait, à quoi sert vraiment la théorie de la mesure ? A mettre en valeur des bizarreries purement formelles sans réalité concrète comme le paradoxe précédent [3] ? Ou à obtenir des résultats concrets qui ont une signification claire pour tout le monde ?

Vers la fin de l'article, Apéry rappelle le problème ouvert suivant :

> *Pour presque tout réel* $\alpha > 1$*, c'est-à-dire sauf sur un ensemble de mesure nulle, les* α^n *sont « bien répartis » sur le groupe additif de* $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ *; néanmoins, un problème important et non résolu est de nommer un* α *tel que les* α^n *soient bien répartis.*

D'après les spécialistes du sujet, le problème semble avoir été résolu positivement en russe dès 1961 et en anglais vers 1996. Un livre de référence sur les questions de distribution de réels modulo 1 est le suivant :

> Y. Bugeaud, *Distribution modulo one and Diophantine approximation*, New York : Cambridge University Press, 2012.

L'auteur nous a recommandé de lire la page 46. Citons l'extrait suivant (nous traduisons en français) :

> *Levin* [430] *(voir aussi* [429, 431] *et Kulikova* [412]*) ont construit des nombres réels* α *tels que la suite des* α^n *est distribuée uniformément modulo* 1 […]. *Dans un manuscrit non publié, Lerma* [424] *a donné une construction alternative très compliquée de nombres réels ayant cette même propriété.*

Les références citées par Bugeaud sont les suivantes :

> [412] M. F. Kulikova, A construction problem concerned with the distribution of the fractional parts of an exponential function, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 143, 1962, p. 522-524 (en russe). Traduction anglaise : *Soviet Mathematics: Doklady*, vol. 3, 1962, p. 422-425.
>
> [424] M. A. Lerma, Construction of a number greater than one whose powers are uniformly distributed modulo one, *prépublication*, 1996, http://sites.math.northwestern.edu/~mlerma/papers/constr_ud_mod1.pdf.
>
> [429] M. Levin, Completely uniform distribution of fractional parts of the exponential function, *Trudy Seminara im. I. G. Petrovskogo*, vol. 7, 1981, p. 245-256 (en russe). Traduction anglaise : *Journal of Soviet Mathematics*, vol. 31, 1985, p. 3247-3256.
>
> [430] M. Levin, Эффективизация теоремы Коксма [Effectivisation du théorème de Koksma], *Matematicheskie Zametki*, vol. 47, 1990, p. 163-166.
>
> [431] M. Levin, Jointly absolutely normal numbers, *Matematicheskie Zametki*, vol. 48, 1990, p. 61-71 (en russe). Traduction anglaise : *Mathematical Notes*, vol. 48, 1990, p. 1213-1220.

3 Ou encore le fameux paradoxe de Banach-Tarski ?

Il est dommage que la référence [430] n'ait pas fait l'objet d'une traduction. Nous ne savons pas si les démonstrations fournies sont vraiment constructives, mais il est probable qu'elles le soient.

MATHEMATIQUE CONSTRUCTIVE

Par Roger Apéry

in *Penser les mathématiques : séminaire de philosophie et mathématiques de l'École normale supérieure* (J. Dieudonné, M. Loi et R. Thom), (éd. par F. Guénard et G. Lelièvre).

Version modifiée et abrégée d'un texte de même titre, multigraphié à l'Université de Caen, publié aussi dans *Langage et pensée mathématiques : actes du colloque international (Luxembourg, 9-11 juin 1976)*, Luxembourg : Centre Universitaire de Luxembourg, 1976, p. 391-410 ; également comme *Séminaire de philosophie et mathématiques de l'École normale supérieure (séance du 26 avril 1976)*, Paris : Irem Paris-Nord, 1980, 15 p.

« Qui veut tuer son chien l'accuse de la rage. » Pour combattre une dissidence religieuse, philosophique ou politique, un pouvoir commence toujours par la discréditer, en lui ôtant son caractère de doctrine soutenue par des chercheurs de bonne volonté attachés à leur conviction intime par des arguments solides pour la présenter comme une entreprise criminelle (hérétique, asociale) vouée à la disparition. Selon la caricature présentée par ses adversaires sous le nom d'intuitionnisme, la conception constructive détruirait une grande part de la mathématique classique, notamment l'axiome de choix et ses conséquences ; contrairement au caractère objectif de la science, elle adopterait comme critère de vérité l'intuition particulière de chaque mathématicien, elle ne serait qu'une singularité historique, liée à une métaphysique particulière destinée à disparaitre ; elle n'exprimerait que l'angoisse de quelques mathématiciens. A défaut de convaincre, ce texte pourra dissiper des malentendus : nous montrons que la conception constructive ne mutile pas la mathématique classique, mais au contraire l'enrichit. Nous ne traitons pas de l'axiome de choix dont la discussion n'est pas essentielle. Nous indiquons les critères objectifs de preuve utilisés par les mathématiciens constructifs. Enfin, aucun argument solide ne permet d'affirmer que L. Kronecker, H. Poincaré ou H. Weyl étaient plus angoissés que Cantor, Hilbert ou Russell.

1. — Les principales philosophies des mathématiques

Le platonisme mathématique
(Bolzano, Frege, Cantor, Russell)

Comme toute science, la mathématique traite d'une réalité indépendante de chaque mathématicien particulier : la géométrie étudie des droites et des cercles idéaux, non des traits et des ronds dessinés. La conception platonicienne reporte sur le monde mathématique le désir d'absolu et d'éternité de l'esprit humain.

Les principales affirmations du platonisme mathématique sont les suivantes :

1° Toute question mathématique concerne des objets aussi réels (et même plus réels) que les astres, les animaux ou les végétaux ; elle a donc une réponse (éventuellement inconnue) affirmative ou négative : c'est la logique bivalente et son corollaire, le principe du tiers exclu.

2° La notion d'ensemble, définie par Cantor comme « un groupement en un tout d'objets bien distincts de notre intuition et de notre pensée (1) », est simple, primitive et constitue à elle seule le fondement de toutes les mathématiques. Par exemple, le nombre 1 est défini par Russell comme l'ensemble de tous les ensembles E non vides tels que $x \in E$ et $y \in E \Rightarrow x = y$.

3° L'existence simultanée de tous les êtres mathématiques exige de traiter comme une unité achevée tout ensemble infini ; c'est la doctrine de l'infini actuel soutenue par Leibniz et étendue par Cantor pour des raisons métaphysiques.

« Je suis tellement pour l'infini actuel qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer la perfection de son auteur. Ainsi, je crois qu'il n'y a aucune partie de la matière qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée, et, par conséquent, la moindre particule doit être considérée comme un monde plein d'une infinité de créatures différentes » (Leibniz).

« Sans un petit grain de métaphysique, il n'est pas possible, à mon avis, de fonder une science exacte. La métaphysique telle que je la conçois est la science de ce qui est, c'est-à-dire de ce qui existe, donc du monde tel qu'il est en soi et pas tel qu'il nous apparait » (Cantor).

« La plus haute perfection de Dieu est la possibilité de créer un ensemble infini et son immense bonté le conduit à le créer » (Cantor).

Les difficultés de la théorie cantorienne se manifestèrent sous forme d'antinomies. L'édifice s'effondra quand Russell montra que le monde cantorien lui-même, c'est-à-dire l'ensemble de tous les ensembles, est contradictoire.

Le formalisme

Le formalisme, conçu par Hilbert et poussé à l'extrême par Bourbaki, veut créer un ordre mathématique dont les commandements sont les suivants :

1° Que la réglementation des méthodes autorisées soit suffisamment rigide pour empêcher toute discussion.

2° Que l'on ne rencontre pas de contradiction et, en particulier, que l'on évite les paradoxes.

3° Que l'on conserve la mythologie du transfini qu'Hilbert appelle le « paradis créé pour nous par Cantor ».

Cet objectif est atteint par la méthode suivante :

1° Rejeter l'ordre ancien en lui reprochant simultanément d'être trop libéral (mot d'ordre : « A bas Euclide », lancé par Bourbaki) et d'être autoritaire (Hilbert traitant Kronecker de Verbotsdiktator).

2° Considérer comme infranchissable le fossé entre les mathématiques et les autres disciplines.

3° Attribuer la réussite de l'application des mathématiques aux autres sciences à l'« harmonie préétablie » (Leibniz) ou à un « miracle » (Bourbaki).

4° Réduire la mathématique au texte écrit, ce qui rejette à la fois comme inexistant le monde platonicien et comme épiphénomène la pensée du mathématicien.

5° Refuser comme dénués de sens les concepts d'espace, de temps, de liberté.

6° « Imposer au domaine mathématique des bornes en grande partie arbitraires » (Bourbaki, Théorie des ensembles, p. E IV.67).

7° Pratiquer le double langage (2) , d'une part en laissant croire qu'une seule école possède la « bonne mathématique » et en adoptant la terminologie des platoniciens ; d'autre part en considérant les mathématiques comme un simple jeu, où, par exemple, « les mots "il existe" dans un texte formalisé n'ont pas plus de "signification" que les autres, et [où] il n'y a pas à considérer d'autres types d'"existence" dans les démonstrations formalisées (3) » (Bourbaki).

8° Extirper l'intuition, notamment en refusant l'usage des figures dans l'enseignement.

9° Considérer comme « métamathématiques » toutes les questions gênantes sur la structure des mathématiques.

10° Uniformiser les esprits par l'enseignement des « mathématiques modernes », où on laisse croire aux enfants qu'entourer des petits objets par une ficelle est une activité mathématique au lieu de leur apprendre à compter, à calculer et à examiner les propriétés des figures.

11° Créer un dieu mathématique à plusieurs personnes qui tente d'assurer son immortalité en renouvelant périodiquement ses membres et qui assure l'unité de la communauté mathématique en révélant périodiquement les bonnes définitions et les bonnes théories.

Hilbert espérait démontrer la cohérence de sa conception, mais Gödel, en montrant que toute théorie contenant au moins l'arithmétique élémentaire contient des résultats vrais mais non démontrables par l'axiomatique, mettait en évidence l'échec du formalisme hilbertien.

Il faut distinguer entre la méthode formaliste et la philosophie formaliste. Tous les logiciens utilisent la méthode formaliste pour préciser les types de déductions valables ; la philosophie formaliste considère le texte formalisé non comme un outil commode, mais comme la seule réalité mathématique (les physiciens connaissent une distinction analogue entre la méthode positive, qui est la méthode de tous, et le positivisme, qui est la philosophie de quelques-uns). On fixe une théorie mathématique en indiquant les propriétés de départ (axiomes) et les règles de déduction admises. Le scepticisme vis-à-vis de certains principes traduit généralement un dogmatisme sous-jacent qui refuse d'expliciter ses propres principes et de les laisser critiquer.

Ainsi les formalistes, qui soumettent à une critique poussée les propriétés mathématiques élémentaires, avalent sans examen les règles traditionnelles de logique, en refusent la mise en cause, oublient que ces règles, issues de l'expérience courante comme la géométrie euclidienne, n'ont comme elle qu'un champ d'application limité. Ils ne sont pas sûrs de la vérité de 2 + 2 = 4, considèrent comme un axiome gratuit, donc susceptible d'être rejeté, qu'en enlevant le dernier signe de deux suites isomorphes on obtient des suites isomorphes, ce qui entraine l'« axiome » de Peano selon lequel deux nombres naturels ayant mêmes successeurs sont égaux. Par contre, ils considèrent comme évident et incontestable l'axiome logique de Peirce selon lequel, quelles que soient les propositions p, q, on peut déduire de la proposition $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ la proposition p ; toute mise en cause du principe du tiers exclu leur apparait non comme une opinion discutable, mais comme un scandale intolérable.

Le mathématicien idéal
selon le constructivisme

Selon la conception constructive, il n'y a pas de mathématique sans mathématicien. En tant qu'êtres de raison, les êtres mathématiques n'existent que dans la pensée du mathématicien et non dans un monde platonicien indépendant de l'esprit humain ; quant aux textes mathématiques, ils ne prennent un sens que par une interprétation qui exige un lecteur connaissant le langage utilisé par l'auteur du texte. Le mathématicien idéal se définit par un certain comportement mental dont la pensée effective du mathématicien concret n'est qu'une image approchée.

Les hypothèses nécessaires pour l'activité mathématique sont les suivantes :

1° On peut toujours ajouter un nouveau signe à une formule ; en particulier, après tout nombre entier, on peut en considérer un autre.

2° Le mathématicien raisonne toujours en appliquant des règles de déduction explicitement précisées.

3° Tout résultat démontré est définitivement acquis.

4° L'aptitude à tirer des déductions ne se détériore pas et ne s'améliore pas.

Toutes ces propriétés supposent que le mathématicien satisfasse aux conditions suivantes :

1° Il est immortel, c'est-à-dire qu'il peut toujours continuer un calcul inachevé.

2° Il est imperméable à la douleur, aux passions, aux souffrances, ce qui maintient la rigueur nécessaire de sa pensée.

3° Grâce à une mémoire parfaite, il n'oublie ni ne déforme aucun résultat acquis.

4° Il ne se fatigue pas et effectue des performances sans entrainement préalable.

Les mathématiciens suppléent à leur différence évidente avec le mathématicien idéal :

1° Par l'entraide : l'erreur qui échappe à un mathématicien peut être décelée par un autre.

2° Par les mémoires mécaniques (textes manuscrits ou imprimés) qui suppléent aux défaillances de la mémoire individuelle.

3° Par les machines à calculer qui leur permettent d'effectuer en un temps raisonnable des calculs que, sans machine, leur vie n'aurait pas suffi à achever.

S'il extrapole la réalité, le mathématicien constructif refuse les hypothèses fantastiques des platoniciens. En effet :

1° Il ne se croit pas éternel : l'activité mathématique a eu un commencement.

2° Il croit que les êtres mathématiques sont des êtres de raison ; ils apparaissent au moment où le mathématicien les définit et non antérieurement à tout mathématicien.

3° Il constate que la mathématique se déroule dans le temps. Un raisonnement est une méthode pour montrer que si certaines affirmations sont supposées vraies avant, d'autres deviennent vraies après.

4° Son immortalité lui permet d'atteindre des nombres aussi grands qu'il veut, mais pas de définir tous les nombres ; il croit à l'infini potentiel, pas à l'infini actuel.

Alors que les mathématiciens idéaux sont interchangeables, les mathématiciens concrets sont divers, et chacun d'entre eux se modifie dans le temps ; cette diversité entraine dans l'activité mathématique une part subjective qui ne peut être supprimée. Cette part subjective se manifeste dans la création, dans l'apprentissage, dans la reproduction. Malgré son importance, ce n'est pas elle qui constitue la différence entre mathématique statique et mathématique constructive.

Mathématique et durée

Comme le platonicien et contrairement au formaliste, le mathématicien constructif reconnaît une certaine réalité aux objets mathématiques, mais les différencie essentiellement des objets matériels, en ne leur attribuant que les propriétés susceptibles de démonstration. Une distinction analogue différencie les héros de roman des personnages historiques. Une question concernant Vercingétorix admet une réponse, même si elle échappe à nos moyens d'investigation ; la même question concernant Don Quichotte n'a pas de réponse si celle-ci ne peut être déduite des affirmations du roman de Cervantès. En revanche, l'existence d'ensembles de réels plus nombreux que l'ensemble des entiers et moins nombreux que l'ensemble des réels n'a pas de réponse, car, comme Paul Cohen l'a démontré, ni cette existence ni sa négation ne peuvent être déduites des définitions usuelles des réels : l'ensemble des réels, comme Don Quichotte, est un être essentiellement incomplet.

Le mathématicien constructif refuse le tabou philosophique interdisant de parler de temps et de liberté, car toute activité mathématique exige un esprit libre opérant dans le temps. Laissant au moraliste le temps irréversible, ce fameux « temps perdu » qui ne se rattrape jamais, les mathématiciens, comme les musiciens, utilisent un temps reproductible. Une statue, un tableau, un monument, essentiellement situés dans l'espace, se maintiennent par eux-mêmes ; les forces extérieures peuvent les user ou les détruire, mais ne sont pas nécessaires à leur maintien ; l'examen de leurs diverses parties s'opère selon un ordre arbitraire et pendant une durée arbitraire. Au contraire, la musique se situe essentiellement dans le temps. Une mélodie n'est pas un ensemble, mais une suite de notes subtilement reliées : contrairement aux monuments qui perdurent, la mélodie disparait ; pour réapparaitre, elle doit être reproduite ; elle est conservée par des procédés de mémorisation artificiels (partitions musicales, disques). Nous connaissons les outils ou les dessins de nos ancêtres préhistoriques, nous ignorons leurs paroles ou éventuellement leurs chants.

De même, un raisonnement mathématique, essentiellement fragile, doit être refait pour être compris : un texte mathématique se lit la plume à la main. Bien que la durée semble moins contraignante qu'en musique, l'examen d'un raisonnement mathématique exige d'embrasser simultanément à chaque étape les prémisses, la conclusion, la règle de raisonnement utilisée ; une compréhension authentique s'adresse à l'ensemble des articulations du raisonnement, de façon que le résultat apparaisse dû à une méthode applicable à d'autres problèmes et non à un heureux hasard. Schématiquement, l'activité mathématique comporte deux phases, caractérisées par la boutade : 5 % d'inspiration, 95 % de transpiration.

Dans la première phase, l'activité est mentale, subjective, indépendante du langage, étroitement liée à la durée intuitive. Malgré ses deux faiblesses (fugacité et incommunicabilité), cette phase constitue l'activité mathématique authentique. Dans la seconde phase, le mathématicien note, formalise, traduit (partiellement) son intuition en termes communicables ; chacun peut examiner ses résultats devenus objectifs. Les diverses exécutions d'une œuvre musicale ne sont jamais rigoureusement identiques, elles dépendent de la personnalité du chef d'orchestre. De même, la reproduction d'un raisonnement contient une part subjective irréductible ; en rappelant qu'un chien dévorant une oie emmagasine de la graisse de chien et non de la graisse d'oie, H. Poincaré illustre la nécessité pour chacun d'incorporer à sa propre personnalité toute connaissance extérieure. Celui qui possède des textes mathématiques dont il ne comprend pas l'articulation ne possède rien.

2. — Quelques outils et concepts des mathématiques constructives

Nombres naturels

Comme Bourbaki (Théorie des ensembles, chap. I, § 1), nous commençons les mathématiques par l'étude d'assemblages de signes extraits d'un alphabet ; un tel assemblage est une suite, non un ensemble. Tous les mathématiciens s'accordent sur la philosophie des signes : tout signe est indestructible, peut être reproduit sans changement ni usure autant de fois qu'on le désire, peut servir à construire des formules de longueur arbitraire. Un texte mathématique se présente comme une suite d'arguments correctement déduits, non comme un ensemble d'affirmations en vrac. Les assemblages construits avec un alphabet à un seul signe, noté |, sont les nombres naturels. L'assemblage vide est noté 0, les assemblages |, ||, |||, sont notés respectivement 1, 2, 3.

Devant une question mathématique élémentaire, par exemple rechercher s'il existe un entier naturel qui vérifie une propriété simple (c'est-à-dire une propriété qui peut être effectivement décidée pour chaque entier donné), trois situations se rencontrent pratiquement :

a) on connait une solution ;
b) on peut montrer que l'existence d'une solution conduit à une contradiction ;
c) on ne sait pas.

Les mathématiciens s'accordent sur la réponse au problème dans les cas a) et b). Les différences d'attitude apparaissent dans le cas c), qui est le plus intéressant (il recouvre tous les problèmes mathématiques non résolus, c'est-à-dire toute la mathématique vivante).

Une attitude empiriste n'admettrait que des réponses à des questions déjà tranchées. L'attitude statique considère notre incapacité de répondre comme infinité humaine, mais admet une réponse « en soi ».

L'attitude constructive est intermédiaire. Devant une proposition p non tranchée, le mathématicien constructif ne refuse pas toujours de poser p ou non p.

Mais il n'admet la validité de cette expression logique (application du principe du tiers exclu à l'énoncé p) que s'il possède un algorithme qui au bout d'un nombre fini d'étapes permettra de trancher, quelle que soit par ailleurs la longueur de l'algorithme. Comme un tel algorithme n'existe pas toujours, il y a donc des énoncés auxquels le principe du tiers exclu ne s'applique pas.

Suite de nombres

Une suite d'entiers (ou de rationnels) est un processus qui associe à chaque nombre naturel un entier (ou un rationnel) $u(n)$, noté encore u_n. C'est à l'occasion des suites d'entiers qu'apparaît le point crucial du débat : infini actuel ou infini potentiel. Selon la conception constructive, une suite infinie, par exemple la suite des nombres naturels, n'est jamais finie, c'est-à-dire n'est jamais achevée : après tout nombre entier, on peut en construire un autre ; c'est la conception de l'infini potentiel qui fut soutenue par Gauss et Poincaré. Il n'existe pas d'ensemble effectivement infini. Une propriété qui exige de tester tous les éléments d'une suite ne relève pas de la loi du tiers exclu. On appelle suite fugace une suite dont tous les éléments effectivement calculés sont nuls, mais dont on ignore si le calcul de nouveaux éléments donnera toujours des zéros. Des problèmes importants posés aux mathématiciens équivalent à la question de savoir si une suite fugace est nulle ou non (conjecture de Fermat ou de Riemann). La comparaison de deux suites u_n et v_n revient à examiner si la suite $|u_n - v_n|$ est nulle. L'existence de suites fugaces montre que, contrairement aux nombres (naturels, entiers relatifs ou rationnels), deux suites ne sont pas nécessairement égales ou inégales.

Logique constructive

Platoniciens et formalistes utilisent une même logique « classique », que nous comparons à la logique constructive. On distingue la logique propositionnelle qui examine les propositions complexes bâties à l'aide de propositions élémentaires et de connecteurs (généralement $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) et la logique des prédicats (à une ou plusieurs places) qui utilise notamment les quantificateurs $\forall, \exists$. La logique classique n'a besoin que des connecteurs $\wedge, \neg$ et du quantificateur $\forall$; les connecteurs $\vee, \Rightarrow$ et le quantificateur $\exists$ sont, selon les classiques, des abréviations :

$p \vee q$ signifie $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

$p \Rightarrow q$ signifie $\neg(p \wedge \neg q)$

$\exists x$ P(x) signifie $\neg \ \forall \mathrm{x} \ \neg$P($x$).

Certains énoncés complexes bâtis avec des propositions élémentaires indéterminées constituent des thèses logiques, c'est-à-dire sont considérés comme « vrais » quelles que soient les propositions considérées, par exemple :

$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

Toutes les thèses de la logique classique sont vraies en logique constructive ; autrement dit, contrairement à la légende, la mathématique constructive ajoute quelque chose à la mathématique classique et ne lui retranche rien. L'originalité de la logique constructive est l'introduction de connecteurs que nous noterons $\tilde{\vee}$, $\tilde{\Rightarrow}$, et d'un quantificateur que nous noterons $\tilde{\exists}$, qui ne peuvent s'exprimer en logique classique.

$p \ \tilde{\vee} \ q$ signifie : il existe un procédé régulier qui permet soit d'affirmer p, soit d'affirmer q.

$\tilde{\exists} \, x$ P(x) signifie : il existe un procédé régulier qui permet de construire un élément vérifiant la propriété P.

C'est un faux problème de demander qui a raison, du classique affirmant la thèse $p \vee \neg p$, qui n'est pour lui que l'abréviation de $\neg(\neg p \wedge \neg\neg p)$ et se déduit du principe de non-contradiction, et du constructiviste qui nie la thèse $p \ \tilde{\vee} \ \neg p$, qui supposerait une méthode pour résoudre tous les problèmes mathématiques. En toute rigueur, le mathématicien classique qui accepte le principe du tiers exclu et le mathématicien constructif qui le rejette ne parlent pas de la même chose. Même avec les connecteurs constructifs, il existe des propositions pour lesquelles le tiers exclu s'applique. Les arguments mettant en cause le flou des affirmations courantes ne justifient pas le rejet du tiers exclu : la mathématique exige l'existence d'énoncés que l'on puisse nécessairement affirmer ou nier. Le tiers exclu cesse de s'appliquer pour des propositions dont la démonstration ou la réfutation exigerait de décider d'une infinité de questions. Il arrive qu'une méthode adéquate permette de trancher un problème par un raisonnement fini, mais ce n'est pas toujours le cas.

Les symboles constructifs $\tilde{\vee}$, $\tilde{\Rightarrow}$, $\tilde{\exists}$ n'acquièrent un sens précis qu'après une définition précise d'un procédé régulier. Les diverses définitions de la calculabilité tentées par les logiciens se sont révélées équivalentes (4).

Le continu constructif

Trois illusions contribuent à l'adoption du continu classique : la « continuité » des grandeurs physiques, l'intuition géométrique, les constructions mathématiques de Cauchy, Weierstrass, Dedekind ou Cantor. Une grandeur physique n'est jamais un nombre réel, mais présente une certaine indétermination ; par exemple, il n'y a pas de sens à définir la longueur d'une règle avec une erreur inférieure au rayon de l'atome.

La droite réelle a des propriétés qui choquent l'intuition : il existe un ouvert de mesure $< \varepsilon$ contenant tous les rationnels contrairement aux apparences. La définition des réels par les coupures de Dedekind ou les suites de Cauchy est insuffisante, puisque, d'après le théorème de Cohen, l'hypothèse du continu ou sa négation peut être ajoutée comme axiome sans créer de contradiction.

A la place du continu « classique », nous présentons le continu constructif. La notion primitive n'est pas le réel dont la définition par les coupures de Dedekind exige une question décidable pour tout rationnel, mais le duplexe constitué par une suite de rationnels et un régulateur de convergence. Un *duplexe* est constitué par une suite de rationnels et un régulateur de convergence, c'est-à-dire une suite $u(n)$ de rationnels et une suite $c(n)$ d'entiers tels que :

$$m, m' \geq c(n) \Rightarrow | u(m) - u(m') | < 2^{-n} .$$

On définit la valeur absolue d'un duplexe, le maximum, le minimum, la somme, la différence, le produit de deux duplexes et, pour tout duplexe non nul, son inverse. Ces opérations ont toutes les propriétés classiques. On pose $x = 0$ s'il existe une suite $d(n)$ telle que :

$$m \geq d(n) \Rightarrow | u(m) | < 2^{-n}.$$

Il faut distinguer $x \neq 0$ (x différent de 0), qui signifie simplement que x ne peut être nul, et $x \# 0$ (x séparé de 0), qui signifie qu'il existe un entier m tel que $| x | > 1/m$. La notion de duplexe équivaut à celle de suite contractante d'intervalles rationnels et à celle de coupure constructive (5) .

Nombres irrationnels et transcendants

Dès 1899, Émile Borel soulignait le caractère non constructif des démonstrations d'irrationalité et de transcendance et donnait la première mesure de transcendance de e. Depuis, on ne se contente pas d'affirmer l'irrationalité ou la transcendance de telle ou telle constante de l'analyse, mais on indique une mesure d'irrationalité ou de transcendance. Par exemple, on ne se contente pas de dire que π ou e^{π} est transcendant, mais on précise que, pour chaque rationnel p/q,

$$| \pi - p/q | > q^{-42}$$

$$| e^{\pi} - p/q | > q^{-c \log(\log q)}$$

Pour presque tout réel $\alpha > 1$, c'est-à-dire sauf sur un ensemble de mesure nulle, les α^n sont « bien répartis » sur le groupe additif de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$; néanmoins, un problème important et non résolu est de nommer un α tel que les α^n soient bien répartis. Les traités de théorie des nombres posent, et éventuellement résolvent, de nombreux problèmes d'effectivité qui, dans une optique non constructive, ne pourraient pas être posés.

Nous espérons avoir montré que l'école constructiviste, loin de renier aucun des résultats des mathématiques classiques, pose les problèmes de façon plus fine ; c'est à ce titre qu'elle demande qu'on reconnaisse l'intérêt de ses méthodes et l'importance de ses résultats (6).

Notes :

1 - G. Cantor, « Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre », *Mathematische Annalen*, vol. 46, 1895, p. 481-512. Réimprimé dans G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Heidelberg : Springer, 1932, et Hildesheim : Olms, 1966, p. 282-311.
2 - Les *Provinciales* de Pascal montrent comment le double langage permet à deux groupes qui défendent des thèses opposées de s'unir pour en écraser un troisième.
3 - N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Paris : Hermann, nouvelle édition, 1970, p. E IV.71, note 1.
4 - Voir l'appendice 2 : « Récursivité », p. 126 *sq*. [dans le volume *Penser les mathématiques*] (*N.d.É.*)
5 - Une suite contractante d'intervalles est définie par une suite d'intervalles $]\, u_n, v_n\, [$ tels que :

$$\forall n \quad u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$$

et $\quad \forall n\ \exists m \quad | v_m - u_m | < 2^{-n}.$

6 - Peut-être est-ce là le sens des travaux de certains mathématiciens qui, tels A. D. Gelfond, C. L. Siegel et A. Baker, sans professer ouvertement une philosophie constructiviste ou intuitionniste, n'en ont pas moins apporté des résultats relevant de méthodes constructives, et dont l'importance a été unanimement reconnue. Est-il besoin de rappeler que, depuis la première version de ce texte, R. Apéry, à un âge où l'on n'est plus éligible pour la médaille Fields (limite d'âge : quarante ans ; pas de limite pour les prix Nobel !), a démontré l'irrationalité de $\zeta(3)$, nombre qui résistait depuis Euler à tous les efforts pour en déterminer la nature. Ce résultat étonna la communauté mathématique, au point qu'au début certains n'osèrent y croire. (*N.d.É.*)

BIBLIOGRAPHIE

J.-P. Azra et B. Jaulin, *Récursivité,* Paris : Gauthier-Villars, 1973.

E. Bishop, *Foundations of constructive analysis,* New York : McGraw-Hill, 1967.

G. S. Boolos et R. C. Jeffrey, *Computability and logic,* Cambridge : Cambridge University Press, 1974 ; 2e éd. revue et augmentée, 1980.

N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Paris : Hermann, 1954-1957.

M. Davis, *Computability and unsolvability,* New York : McGraw-Hill, 1958.

R. L. Goodstein, *Recursive analysis*, Amsterdam : North-Holland, 1961.

H. Hermes, *Enumerability, decidability, computability : an introduction to the theory of recursive functions*, Heidelberg : Springer, 1965.

A. Heyting, *Les Fondements des mathématiques : intuitionnisme, théorie de la démonstration*. Paris : Gauthier-Villars, 1955.

D. Hilbert, Über das Unendliche, *Mathematische Annalen*, vol. 95, 1926, p. 161-190. [Traduction par J. Largeault : Sur l'infini, dans *Logique mathématique: textes*, Paris : Armand Colin, 1972, p. 215-245.]

N. D. Jones, *Computability theory: an introduction*, New York : Academic Press, 1973.

S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*, Amsterdam : North-Holland, 1952.

S. C. Kleene et R. E. Vesley, *The foundations of intuitionistic mathematics, especially in relation to recursive functions*, Amsterdam : North-Holland, 1965.

J. Loeckx, *Computability and decidability: an introduction for students of computer science*, Heidelberg : Springer, 1972.

P. Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Heidelberg : Springer, 1955; 2e éd., 1969.

A. I. Mal´cev, *Algorithms and recursive functions*, Groningue : Wolters-Noordhoff, 1970.

A. A. Markov, *Theory of algorithms*, Jérusalem : Israël Program for Scientific Translations, 1961.

V. A. Ouspenski, *Leçons sur les fonctions calculables*, Paris : Hermann, 1966.

R. Peter, *Recursive functions*, New York : Academic Press, 1967.

H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Paris : Flammarion, 1902.

- *La valeur de la science*, Paris : Flammarion, 1905.

- *Science et méthode*, Paris : Flammarion, 1908.

H. Rogers, *Theory of recursive functions and effective computability*, New York : McGraw-Hill, 1967.

N. A. Shanin, *Constructive real numbers and constructive function spaces*, Providence : American Mathematical Society, 1968.

H. Weyl, *Das Kontinuum: kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Leipzig : Veit & Comp., 1918. [Traduction par J. Largeault dans *Le continu et autres écrits*, Paris : Vrin, 1994.]

A. Yasuhara, *Recursive function theory and logic*, New York : Academic Press, 1971.