UN DISPOSITIF DE RECHERCHE DE PROBLEMES DE MATHEMATIQUES AU CYCLE 3

Gilles ALDON
Olivier GARREAU
Irem de Lyon

Introduction

Chercher à résoudre des problèmes est au coeur de l'activité du mathématicien. Nous faisons l'hypothèse, comme d'autres auteurs (Gardes 2013, Front 2015, Dias & Durand-Guerrier 2005, Dias 2008) que pour présenter les mathématiques, dès l'école élémentaire, la recherche de problème est un levier fécond permettant de développer des compétences de raisonnement, de communication et de rigueur, permettant de “faire fonctionner” les connaissances mais aussi permettant de développer la créativité des élèves (Essonier & Trgalova, 2015). Le projet présenté dans cet article commence sa troisième année d'existence et regroupe une grande partie des classes de CM2 et des classes de sixième d'une circonscription de Vénissieux, dans la banlieue de Lyon.

Les écoles participent à ce projet avec la collaboration de l'IFé (Institut Français de l'Éducation - ENS de Lyon) et la Maison des Mathématiques et de l'Informatique (MMI). La MMI [1] a été créée en 2012 comme un lieu de diffusion de la culture mathématique et informatique dans le cadre du laboratoire d'excellence Milyon. Elle propose des expositions, des ateliers, des activités, des conférences et s'adresse à tous, et en particulier aux scolaires. Elle a également pour vocation de fédérer, d'organiser et d'amplifier les diverses actions de diffusion mathématique et informatique qui ont lieu à Lyon dont ce projet particulier fait partie. Le dispositif, intitulé « Chercher en mathématiques », mis en place dans les classes repose sur l'expérience de MATH en JEANS [2] même si il diffère sur les classes enga-

1 http://www.mmi-lyon.fr/
2 http://www.mathenjeans.fr/

gées qui, dans ce projet, impliquent tous les élèves de chaque classe. Il diffère également sur le temps de recherche du problème, environ un mois, qui permet aux enfants du cycle 3 à la fois de trouver des résultats mais aussi de ne pas se lasser d'une activité trop longue.

Le projet présenté dans cet article repose en grande partie sur les enseignants volontaires pour engager leurs classes dans ce travail et pour accompagner leurs élèves tout au long des recherches et jusqu'à la phase de communication et de restitution des aventures mathématiques vécues tout au long de l'année. Le travail réalisé par les enseignants dans leurs classes est bien sûr essentiel pour la réussite de l'action et ne pourrait être réalisé sans qu'en contrepartie, ils n'y trouvent un intérêt, pour l'engagement des élèves mais aussi pour une approche différente des mathématiques.

Description du contexte

La circonscription REP+ de Vénissieux regroupe autour du collège Michelet les écoles primaires du Centre, Henri Wallon, Saint Exupéry et Jean Moulin. L'action soutenue par l'institution cherche à développer chez les élèves des attitudes de recherche en mathématiques en s'appuyant sur des problèmes ouverts n'engageant pas les procédures de résolution habituellement utilisées dans le cadre de la résolution de problèmes dans les classes de cycle 3. Il s'agit aussi de donner la possibilité aux élèves de vivre une situation mathématique de façon différente et les inviter à conduire une réflexion sur leurs propres procédures. Elle cherche à engager les élèves dans un travail portant sur la recherche de modalités de résolution à partir d'un problème résistant. Pour les enseignants, il s'agit d'engager sa classe dans des pratiques pédagogiques différentes et de faire vivre le réseau de la circonscription. L'idée de créer des situations d'apprentissage favorables à de nouveaux rapports enseignants/élève est sous-jacente à l'action mais aussi, le questionnement de sa pratique pédagogique dans les autres domaines d'enseignement au regard de l'observation de l'action de ses élèves au cours des séances de recherche est apparu comme un élément fort de cette action. En effet, dans le déroulement du projet, les élèves ont été amenés à chercher le problème posé "de l'extérieur de la classe" et les enseignants n'étaient plus aux yeux des élèves "ceux qui détiennent la solution" mais plutôt des organisateurs des recherches. Il est intéressant de noter que les enseignants qui ont participé au projet ont noté dans leur classe une certaine modification du contrat dans le sens où les élèves ont pris une plus grande responsabilité de leur activité, ce qui bien sûr, a pu se répercuter dans les autres moments de la classe.

Le dispositif

Le dispositif est construit en quatre phases qui sont résumées dans le tableau 1 ci-contre.

La phase de découverte

C'est une phase importante tant pour les enseignants que pour les élèves. Il s'agit de construire une culture commune de recherche de problèmes où les essais, les erreurs, les expériences, la communication d'une démarche sont valorisés. Bien entendu, les enseignants volontaires pour s'engager dans le projet se posent a priori des questions sur la place de ce travail dans l'avancée du programme de mathématiques de leur classe, et notamment sur la délicate question de l'institutionnalisation des connaissances : que devra-t-il rester de ces recherches ? Quelles connaissances mais aussi quelles compétences seront institutionnalisées ? Comment faire prendre conscience aux élèves de tout ce qu'ils apprennent ? Ces questions font l'objet

Phases	Objectif	Mise en oeuvre
Phase de découverte	Faire entrer les élèves dans une démarche de recherche de problème, créer une culture commune autour des problèmes.	Un temps de formation avec les enseignants. Un temps de diffusion de problèmes dans les classes et de communication des réponses. Un deuxième temps de formation
Phase de recherche	Le coeur du dispositif.	Présentation du problème à des groupes de classes CM2 et 6eme Temps de recherche en classe Visite et relance dans toutes les classes
Phase de communication	Valoriser le travail des élèves. Être capable d'expliquer et de présenter son travail.	Accueil de toutes les classes dans une demie-journée de conférence ; chaque classe présente son poster aux autres.
Phase de prolongement	Permettre aux élèves de découvrir les mathématiques sous une forme ludique.	Découverte de la MMI : atelier de jeux mathématiques

Tableau 1 : les phases du projet

des moments de formation. Cette phase de découverte devient ensuite comme un rituel dans la classe.

Elle est organisée par les professeurs de façons différentes mais pour permettre aux élèves de s'engager dans la recherche et de produire un compte rendu qui est posté sur une plateforme et lu par des tiers extérieurs à l'école (CPC et chercheur impliqué). Les commentaires en retour encouragent les élèves à proposer de nouveaux documents. Un exemple d'énoncé qui a été proposé durant cette phase de recherche, la réponse proposée par la classe et le commentaire laissée sur la plateforme, commentaire volontairement positif pour encourager les élèves dans la recherche des problèmes (voir encadré page suivante).

9. DES CARRÉS EMPILÉS (Cat. 5, 6, 7, 8)

Huit carrés de 10 cm de côté, désignés par des lettres A, B, C, D, E, F, G et H, ont été collés dans un certain ordre, l'un après l'autre, sur un carton carré de 20 cm de côté.

Les voici dessinés :

A	A	A	A	B	B	B	B
A	A	A	A	B	B	B	B
A	A	E	E	E	E	C	C
A	A	E	E	E	E	C	C
G	G	E	E	E	E	D	D
G	G	E	E	E	E	D	D
F	F	F	F	H	H	D	D
F	F	F	F	H	H	D	D

Retrouvez dans quel ordre les carrés ont été collés. Expliquez votre démarche.

Fig. 1 Un énoncé de problème

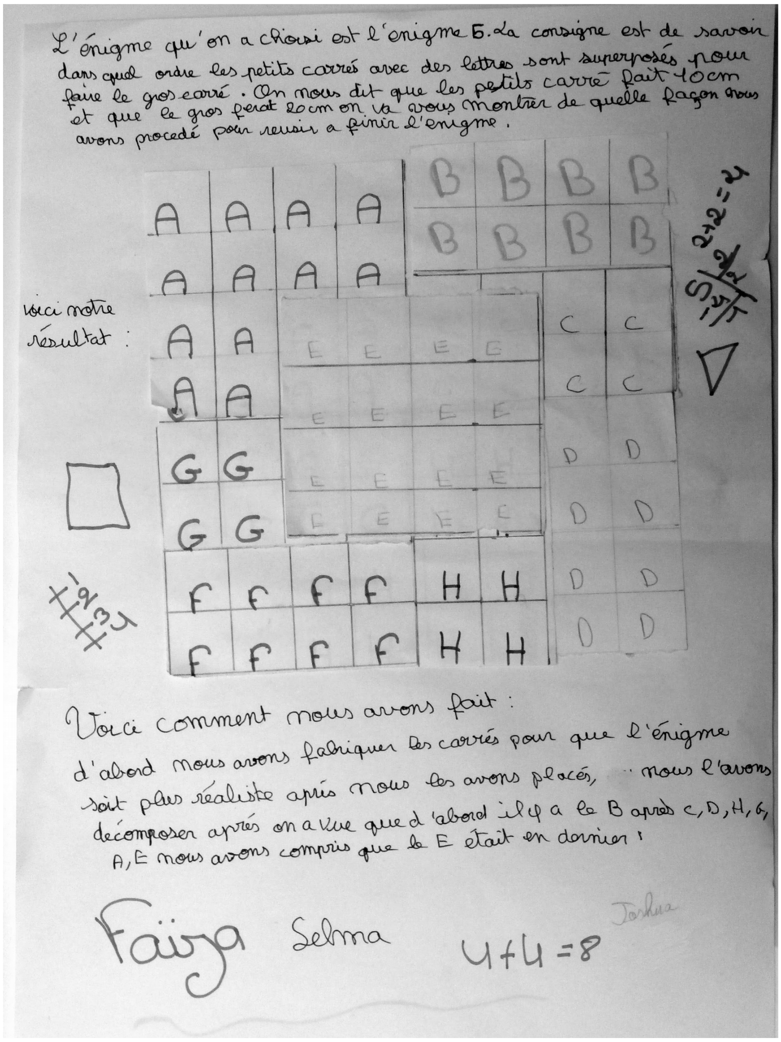
Les échanges de réponses entre classes (exemple page ci-contre) sont encore, dans ce dispositif, à améliorer, chacune des classes se souciant plus de sa production que des productions des autres classes. Les problèmes proposés dans les classes proviennent d'énoncés de rallyes mathématiques ou de petites énigmes. Certaines écoles ont profité de cette phase pour construire un “mur des recherches” dans l'école permettant de mettre en évidence le travail mathématique réalisé et facilitant une diffusion dans les classes d'une même école. Cette phase reste informelle et est dirigée par chaque enseignant ou chaque groupe d'enseignants prenant en compte la spécificité de l'école ou des classes.

Phase de recherche

C'est bien sûr le coeur du dispositif et on peut la subdiviser encore en trois temps : le temps de la découverte, le temps de recherche et le temps de relance.

Le temps de découverte est organisée en regroupant les classes par deux, une de CM2 et une de 6eme. Le chercheur propose un problème et laisse un premier temps de recherche aux enfants qui travaillent en groupes mixtes, CM2 et 6eme. Cette présentation est directement dépendante du problème qui doit permettre très rapidement de trouver quelques premiers résultats mais aussi de s'apercevoir que le problème se prolonge. Les élèves retournent alors dans leur classe et le professeur organise un temps de recherche sur deux à trois semaines. A l'issue de cette première recherche, un temps de rencontre est organisé avec toutes les classes : les enfants présentent ce qu'ils ont fait comme illustré dans la figure 2 de la page suivante, souvent doivent expliquer le vocabulaire utilisé, les pistes suivies, quelques résultats auxquels ils sont arrivés.

Dans un dialogue avec la classe, le chercheur relance les recherches en validant des résultats mais surtout des méthodes et peut fixer des objectifs plus précis de recherche liés au travail réalisé par les élèves. Ces temps de travail sont toujours excessivement intéressants et intenses comme en témoigne ce tableau rempli collectivement pendant notre rencontre (Fig.3). Les enfants commencent alors la deuxième partie de leurs recherches qui vont s'orga-



Bonjour Selma, Faïza, Joshua et Jonathan,
Bravo pour votre affiche et pour la solution du problème mais aussi pour vos explications qui m'ont permis de comprendre votre raisonnement !
A bientôt
Gilles

Fig. 2 les propositions des élèves

niser autour de la préparation de la conférence finale : quels résultats doit on montrer ? Comment les présenter ? Que faut-il écrire ? Là encore ce travail est complètement orchestré par le professeur dans chaque classe.

Phase de communication

Enfin les enfants viennent présenter leurs travaux dans une grande conférence qui regroupe toutes les classes (ou, suivant les années et le nombre de classes engagées, la moitié des classes). Cette conférence, organisée comme une conférence scientifique alterne les séances de posters et une conférence de mathématique. Il est toujours intéressant de voir les élèves défendre leur travail et expliquer leurs résultats avec beaucoup de fougue et d'implication.

Phase de prolongement

Ce dernier moment avec les élèves a aussi son importance : les enfants se sont familiarisés avec une certaine vision des mathématiques qui développent des compétences de créativité et de rigueur, ils se sont confrontés à des justifications, à des recherches, à des raisonnements, et viennent découvrir un lieu consacré aux mathématiques et à l'informatique. Cette phase participe aussi à rendre la discipline scolaire plus humaine et proche de leur quotidien. Ils sont accueillis à la MMI, visi-

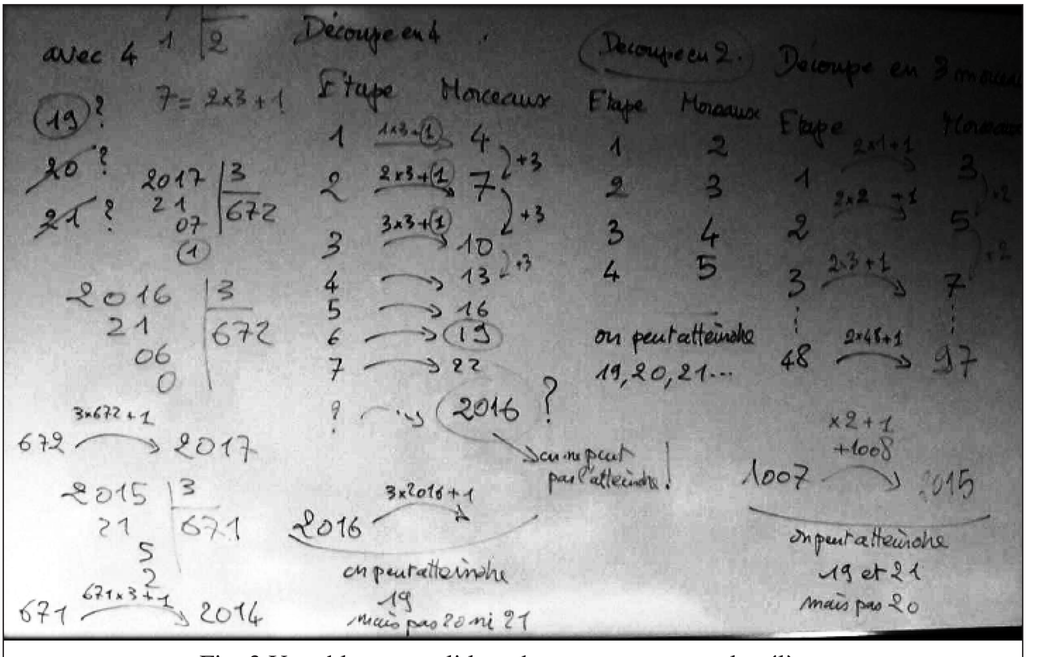


Fig. 3 Un tableau rempli lors des rencontres avec les élèves
dont une partie est reproduite ci-dessous.

avec 4	Découpe en 4		
	Etape		Morceaux
		1x3+1	
	1	→	4
		2x3+1	+3
	2	→	7
		3x3+1	+3
	3	→	10
	4	→	13
	5	→	16
	6	→	19
	7	→	22
	…..		

2016 ? on ne peut pas l'atteindre parce que le reste dans la division par 3 de 2016 n'est pas 1
On peut atteindre 19, mais pas 20 et 21.

tent l'exposition (cette année Magimatique, dédiée à la magie, aux mathématiques et à l'informatique), participent à un atelier de jeux mathématiques et se construisent une idée vivante des mathématiques.

Un exemple détaillé

Le problème qui a été proposé durant l'année scolaire 2015-2016 avait les qualités souhaitées : une approche facile, permettant des expérimentations simples puis des premiers résultats débouchant sur de nouvelles questions et la nécessité d'utiliser et de mettre en rapport des connaissances pour construire des solutions à ces questions.

Un énoncé en deux parties

Première partie

Tout part d'une feuille de papier que l'on va couper en plusieurs morceaux.

Imaginons : je la coupe en deux, puis je prends un des deux morceaux et je le recoupe en deux, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en deux et ainsi de suite. Combien de fois je devrais faire cette opération pour avoir 2016 morceaux de papier ?

Maintenant : je la coupe en trois, puis je prends un des trois morceaux et je le recoupe en trois, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en trois et ainsi de suite. Est-ce que je pourrais avoir un jour 2016 morceaux ?

Et si je faisais la même opération mais en coupant chaque fois en quatre ? En cinq ? … Plus généralement, quelles sont les découpes qui me permettraient d'obtenir 2016 morceaux ? Et si je voulais obtenir 2017 morceaux ? 2018 morceaux ?

Quelques éléments de solution

Si je considère la découpe en n morceaux, j'obtiens la suite de morceaux de papier :

$$1 \rightarrow n \rightarrow 2n-1 \rightarrow 3n-2 \rightarrow ...$$

c'est-à-dire la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison $n-1$. 2016 sera atteint s'il est congru à 1 modulo $n-1$: voir le tableau ci-dessous.

Ainsi pour 6 découpes, on obtient :

$$1 \rightarrow 6 \rightarrow 11 \rightarrow \ldots$$
$$\rightarrow 2001 \rightarrow 2006 \rightarrow 2011 \rightarrow 2016$$

n	Atteint ?	mod(2016,n-1)
2	Oui	1
3	Non	0
4	Non	0
5	Non	0
6	Oui	1
…		

Plus généralement, 2016 sera atteint pour toute découpe n si et seulement si

$$1 + (n - 1)k = 2016$$

si et seulement si $mk = 2015$ avec $m = n - 1$.

Donc m est nécessairement un diviseur de 2015 et comme $2015 = 5 \times 13 \times 31$. Les diviseurs de 2015 sont donc :

$$\{1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015\}$$

et donc les valeurs de n qui permettent d'atteindre 2016 sont :

$$\{2, 6, 14, 66, 156, 404,2\,016\}.$$

D'une façon encore plus générale, un nombre p sera atteint par des découpes en n si et seulement si $n - 1$ est un diviseur de $p - 1$.

Ainsi, 2017 sera atteint pour des découpes n avec $n - 1$ diviseur de 2016, c'est-à-dire lorsque n appartient à :

$$\{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 15, 17, 19, 22, 25, 29, 33, 37, 43, 49, 57, 64, 73, 85, 97, 113, 127, 145, 169, 225, 253, 289, 337, 505, 673, 1009, 2017\}.$$

Mais 2018, dont le prédécesseur 2017 est premier, ne sera atteint que par 2 et 2018 !

Cette recherche pour les élèves de cycle 3 a été l'occasion de travailler avec les nombres, avec les multiples, la division euclidienne ; le problème peut se généraliser pour des plus grands et notamment en proposant ce prolongement :

Maintenant, je choisis de couper ma feuille en deux ou en trois parties. Est-ce que je peux atteindre 2016 ? De combien de façons différentes ?

Et si je coupe en trois ou quatre parties ? En six ou huit parties ? … Est-ce que je peux toujours obtenir 2016 morceaux de papier ? Si oui, pourquoi et sinon, quand est-ce que je ne peux pas ?

Cette deuxième partie n'a pas été utilisée avec les élèves de cycle 3 mais elle donne l'occasion de développement que des élèves de collèges et même de lycée pourraient chercher. Sans rentrer dans les détails, ce développement sera modélisé pour des découpes en p et q morceaux par la résolution de l'équation diophantienne :

$$(p - 1)x + (q - 1)y + 1 = n \quad (1)$$

Soit encore :

$$(p - 1)x + (q - 1)y = n - 1 \quad (2)$$

Le problème se ramène ainsi à la résolution d'une équation diophantienne de la forme $ax + by = c$.

Par exemple, si on découpe en 3 ou 4 parties, et que l'on cherche à atteindre 2016 l'équation à résoudre est :

$$2x + 3y = 2015 \qquad (3)$$

dont les solutions sont :

$$S_{2,3} = \{(-2015 + 3k, 2015 - 2\,k)\ ;\ k \text{ dans } \mathbf{Z}\}$$

avec $672 \leq k \leq 1007$; soit 336 solutions.

Par exemple avec $k = 1000$, en coupant 985 fois en 3 parties et 15 fois en 4, on obtient 2016 morceaux. En effet, en coupant 985 fois en 3 parties, on obtient $985 \times 2 + 1 = 1971$ morceaux. Puis, en coupant 15 fois en 4 à partir des 1971 morceaux, on obtient $1971 + 15 \times 3 = 2016$ morceaux.

Si on coupe en 6 ou 8 morceaux, l'équation à résoudre est :

$$5x + 7y = 2015 \qquad (4)$$

et on trouve des solutions ; en revanche, en coupant en 7 morceaux et 9 morceaux, on obtient l'équation

$$6x + 8y = 2015 \qquad (5)$$

qui n'a pas de solutions !

D'une façon plus générale si on veut découper en p et q morceaux, on pourra atteindre tous les nombres si le pgcd de $p - 1$ et de $q - 1$ est égal à 1.

Si le pgcd de $p - 1$ et de $q - 1$ est égal à d, l'équation $px + qy = n - 1$ a des solutions (c'est-à-dire, des nombres atteints) si et seulement si d divise $n - 1$. Par exemple, pour $p = 7, q = 9$, $\mathrm{pgcd}(p - 1, q - 1) = 2$.

Du côté des élèves

Avec l'énoncé de départ, les élèves se sont lancés dans des expériences en découpant en 2, puis en 3, puis en 4. Très rapidement, ils ont pu écrire la suite des nombres de morceaux :

1 2 3 4 …

et en déduire que tous les nombres peuvent être atteints et qu'en particulier 2016 peut être atteint en 2015 découpages.

Ce résultat est apparu dès la première rencontre, ce qui était important pour qu'ils puissent s'approprier suffisamment le problème pour continuer leurs recherches. Il a débouché également sur une question qui a été reprise par la suite et qui concerne le nombre de découpages. S'il paraît évident que le nombre de découpages ne dépend pas du cas étudié et que si on obtient n morceaux de papier alors il y a eu $n - 1$ découpes, ce nombre a permis aux élèves de formaliser leurs calculs et de nommer les variables : dans le cas où on découpe en n morceaux, il faut considérer le nombre de morceaux de papier, le nombre de découpes réalisées, le numéro de l'étape. Voir la dépendance de ces variables est déjà un résultat tout à fait intéressant.

De plus, les élèves ont, là encore dès la première rencontre, pu examiner le cas d'une découpe en 3, faire l'expérience et écrire la suite des nombres de morceaux, 1, 3, 5, 7 … Certains ont d'ores et déjà pu continuer la suite en remarquant que les nombres impairs apparaissent mais sans une formalisation vraiment stabilisée. Il n'empêche que cette première recherche leur a permis de s'apercevoir qu'ils pouvaient trouver des résultats et les a incité à continuer le processus, en coupant en 4, en 5, etc.

La recherche a continué avec les professeurs et la rencontre dans les classes a été un moment important de formalisation des résultats. La plupart des classes avaient préparé des posters ou des synthèses de leurs recherches et la rencontre s'est déroulée à partir de ces travaux. En particulier, le vocabulaire a été précisé et les résultats parfois donnés un peu en désordre ont été organisés dans des tableaux (voir fig. 1).

Par exemple, un résultat intéressant proposé et développé par les enfants et relancé dans la classe a été de proposer des tableaux de résultats, par exemple dans le cas d'une découpe en 4, sous la forme du tableau de la page suivante...

Un des aspects les plus importants de la relance en classe a été de faire prendre conscience aux enfants des relations existantes entre ces différentes variables, même si bien sûr le terme n'a pas été employé.

Savoir calculer à une étape donnée le nombre de découpes, et le nombre de morceaux a été l'institutionnalisation d'un travail que les élèves avaient déjà conduits en classe

Etape	Nombre de découpes	Nombre de morceaux
1	0	1
2	3	4
3	6	7
4	9	10
…		…

avec leur professeur. S'intéresser au problème de déterminer l'étape lorsqu'on a le nombre de morceaux de papier à été en revanche une des questions posées (et parfois résolues) lors de la visite en classe. Cette question a été proposée par le chercheur dans les classes où les recherches avaient permis de proposer des réponses telles par exemple que celles figurant sur la figure 2.

Cette question amène en effet à repérer dans le calcul direct l'écriture de la division euclidienne, et dans ces conditions, par exemple s'il y a 2016 morceaux de papier, revient à déterminer le reste dans la division euclidienne par 3 de 2016 ; comme $2016 = 3 \times 672$, le reste dans la division vaut 0 et donc ce nombre ne sera pas atteint. En revanche, 2017 sera atteint puisque le reste dans la division par 3 vaut 1 et le quotient donne le numéro de l'étape, 672.

L'objectif de cette phase de relance est bien sûr dans un premier temps de faire prendre conscience aux élèves de l'intérêt de leur propre travail dans une situation mathématique un peu inhabituelle en classe dans laquelle n'est pas attendue une réponse unique atteinte par une méthode qu'il s'agit de reproduire. Mais aussi, il s'agit "d'accompagner l'accompagnement" des enseignants qui peuvent aussi, à certains moments douter de l'adéquation de l'activité des enfants avec les injonctions institutionnelles. Il est en effet aussi un des objectifs de ce dispositif de montrer aux enseignants qu'il est possible de laisser chercher les élèves et de rattacher leurs recherches aux contenus des programmes de mathématiques ; ici le travail sur les multiples et sur la division euclidienne est directement lié aux connaissances des élèves. Il est intéressant de pointer à l'issue de ces rencontres le nombres de calculs, mentaux ou posés, réalisés, les références aux connaissances des programmes, les raisonnements construits et explicités pour justifier le projet lui-même aux yeux des enseignants.

On peut mettre en évidence une modification de la relation des élèves à l'activité scolaire : la liberté de choisir ses propres modalités de travail, de décider de la forme donnée à la restitution des résultats a ouvert le champ à une prise d'initiative trop souvent absente dans le cadre de travaux ordinaires. Il s'agit bien alors pour certains élèves d'offrir une occasion de réconciliation avec l'école, plus particulièrement dans des zones où nombre d'élèves peinent à vivre positivement leur scolarité du fait de résultats scolaires parfois peu valorisants.

Cette action a été aussi l'occasion pour les élèves de percevoir que les connaissances ne sont pas nécessairement transmises par l'enseignant mais que c'est bien l'activité qui pourvoit à leur émergence.

Une expérience forte d'échange et de confrontation avec les pairs sur des objets où habituellement la communication n'est que rarement spontanée ; la conduite de cette action propose une modification des modalités de communication dans la classe. Elle invite les élèves à communiquer sur leurs résultats et sur leurs démarches sans que la validation de leurs propositions incombe à l'enseignant. Elle fournit donc aux élèves l'objet d'une communication articulée sur l'activité réelle de la classe, communication dégagée de tout paramètre extérieur qui souvent perturbe ou met à mal le travail d'échange collaboratif au entre les élèves.

Enfin, cette expérience a développé une véritable « communauté d'apprentissage » : les élèves peinent souvent à se percevoir dans l'espace social. Il s'identifient assez bien dans l'espace de leur établissement (élève de tel niveau de classe) mais éprouvent des difficultés à se situer dans leur parcours scolaire, à se projeter, pour les élèves d'école primaire, comme futur collégien. L'action « chercher en mathématiques », en fédérant des élèves d'établissements scolaires différents nourrit le sentiment d'appartenance à une communauté d'apprentissage. La connaissance et les compétences scolaires sont alors perçues comme des objets sociaux et participent activement à construire une citoyenneté scolaire.

Des analyses

Vu du côté des enseignants

A l'origine cette action avait pour objectif la mise en cohérence des pratiques pédagogiques de l'école primaire et du collège. Après de nombreuses tentatives de travaux d'harmonisation portant essentiellement sur des questions d'évaluation, d'outils communs (classeurs de leçons par exemple) conduites au cours des années précédentes, il nous a semblé nécessaire de nous éloigner d'actions portant sur les aspects formels pour envisager des actions de liaison engageant les élèves dans leurs activités d'apprentissage.

Pour engager les enseignants des différents niveaux de classes (CM2 et 6ième) il est vite apparu nécessaire que cette action pédagogique devait servir les objectifs d'apprentissage des classes concernées et ne pas être uniquement une action de liaison décontextualisée des apprentissages des élèves. Le travail proposé ne devait alors pas apparaître comme une activité supplémentaire à conduire avec les élèves, mais bien comme une proposition pédagogique à intégrer dans le fonctionnement de la classe ; proposition pédagogique utile à la conduite des apprentissages et référencée aux programmes des classes concernées.

« Chercher en mathématiques » est apparu alors pour ces enseignants comme une expérience particulière. Entre le désir de s'engager dans des modalités dynamiques et inhabituelles de travail et la crainte d'une perte de maîtrise de l'activité, les enseignants témoignent avoir vécu une expérience les invitant à penser différemment l'engagement de leurs élèves dans les apprentissages. Au terme de la première année les craintes exprimées se sont trouvées majoritairement dissipées. Entre la seconde et la troisième année de mise en œuvre le nombre de classe engagées a fortement augmenté (de 8 à 14).

Les enseignants expriment avoir découvert de nouvelles relations avec leurs élèves. Les modalités de conduite des séances de travail leur ont permis de ne pas occuper systématiquement la place centrale dans la classe, mais les a autorisés à une prise de distance grâce à laquelle ils ont pu prendre le temps de l'observation de leurs élèves en action. Ils ont ainsi pu prendre en compte les modes de fonctionnement des élèves. Les remarques des enseignants sur ce point portent principalement sur la découverte de qualités chez les élèves, qualités habituellement masquées par des pratiques pédagogiques plus traditionnelles.

Les enseignants, plus particulièrement les enseignants de l'école élémentaire, nous disent avoir eu une perception nouvelle de la discipline enseignée. Le travail sur les problèmes en mathématiques semble être passé d'une activité d'application, souvent fondée sur l'entraînement à l'usage de procédures canoniques de résolution, à une activité plus complexe et plus motivante sollicitant l'imagination et la créativité des élèves. L'action a permis aux enseignants de considérer la résolution de problèmes comme une activité dynamique dans laquelle le doute autorisé est générateur, chez leurs élèves, d'activité intellectuelle. Pour certains enseignants de l'école primaire cette action a permis une réconciliation avec un enseignement qu'ils n'avaient, pour certains, pas particulièrement apprécié au cours de leur scolarité. Certains nous ont indiqué avoir découvert le plaisir de « faire des maths ».

Les effets ne se sont pas limités aux mathématiques mais ont également touché les autres enseignements : au cours de la conduite de cette action les enseignants ont expérimenté dans leurs classes des modalités de travail auxquelles ils n'étaient pas rompus mais qu'ils ont pu rapidement s'approprier. Certains ont pu transférer, à l'école primaire, une part des modalités de travail mises en œuvre pour aborder d'autres enseignements. Les effets pédagogiques de l'action « Chercher en mathéma-
~~tiques » dépassent~~ le cadre des séances de travail sur les problèmes mais se diffusent aussi sur l'ensemble du travail de certaines classes. Des modalités de collaboration pédagogique sont aussi apparues dans certaines écoles.

Les points forts qui ressortent des entretiens avec les enseignants des classes portent essentiellement sur une évolution des pratiques dans la classe “ordinaire” ; le fait de voir les élèves chercher, s’organiser, se tromper, comprendre leurs erreurs, revenir sur la démarche a donné aux enseignants la possibilité de transférer à d’autres enseignements des façons différentes de travailler, notamment en privilégiant la communication entre les élèves et en mettant en exergue les réflexions sur les démarches que les élèves engagent. Des observations plus construites sont cependant encore nécessaires pour tirer des conclusions étayées par des analyses fondées sur une méthodologie de recherche. Cependant, les hypothèses, que l’on peut faire ressortir de ces premières années d’expérience, portent sur l’usage des problèmes dans l’enseignement des mathématiques qui favorise un véritable travail de mathématisation pour proposer aux élèves une réflexion sur les « dimensions politiques et sociologiques des relations entre mathématiques, technologie et société [qui] sont fondamentales » (Gellert 2011, p. 19)

Vu du côté
de la diffusion des mathématiques

Dans ce projet, comme bien sûr dans d’autres actions de la MMI, l’objectif principal est de montrer aux enfants une vision créative et joyeuse de la discipline mathématique. Ce problème, comme celui de l’année précédente[3], permet à tous de s’investir, à trouver des premiers

3 L’année précédente, le problème posé avait comme énoncé : “ ? + ? = 2 est une addition de deux nombres entiers dont la somme vaut 2. Il y a exactement 3 opérations différentes : 0 + 2, 2 + 0 et 1 + 1 qui donnent ce résultat. Com-

résultats, et en se prenant au jeu, à progresser dans son rapport aux mathématiques. L'engouement des élèves dans les séances de relance, le plaisir de présenter son travail et l'écoute attentive du travail des autres sont bien sûr des indicateurs de la réussite de l'action.

De la même façon, les commentaires des professeurs qui souhaitent de plus en plus nombreux participer à cette action, montrent à n'en pas douter l'intérêt du projet. Cependant, une analyse plus approfondie semble encore nécessaire pour répondre à la question de la transférabilité des objectifs annoncés dans le cours ordinaire de la classe tout autant que la diffusion plus large des idées sous-jacentes à cette action.

Le bilan qui peut être dressé de ces premières années d'expérience montre que la diffusion des mathématiques peut dans certaines conditions impacter le cours de mathématiques, ici de classes de cycle 3. De ce fait, le projet participe à créer un lien entre des actions souvent ponctuelles de diffusion et des constructions didactiques à l'intérieur d'une ou de plusieurs classes. Ce lien entre la diffusion et l'enseignement nous paraît tout à fait fondamental pour revitaliser l'enseignement des mathématiques tout en donnant à la diffusion une justification autre que anecdotique. Autrement dit, la diffusion des mathématiques à travers ce type d'actions gagne en proposant des interventions moins ponctuelles et plus en prise avec le quotidien de l'enseignement. Les répercussions dans le cours ordinaire de mathématiques montrent le gain partagé entre diffusion et enseignement.

Conclusion

Comme nous l'écrivions en introduction, ce projet est encore "jeune" puisque nous commençons seulement une troisième année d'expérimentation. Des perspectives plus larges peuvent être envisagées en lien avec la Maison des Mathématiques et de l'Informatique mais peut-être aussi avec des laboratoires de recherche, pour généraliser à plusieurs communes ce travail autour des problèmes de mathématiques. Dans le cadre de la formation des enseignants, des modules permettant aux collègues de comprendre les enjeux et de modifier l'enseignement ordinaire des mathématiques en y incluant des problèmes de recherche pourraient bien sûr accompagner ces actions. De la même façon, les dispositifs de travail en commun et de collaboration à distance comme ce peut être fait, par exemple à l'Irem de Montpellier (Aziz & *al*., 2014) est encore à travailler de façon à permettre cette communication entre pairs à l'extérieur de la classe. L'organisation autour d'une plateforme pourrait être l'occasion d'un tel travail mais demande encore à être développée.

---

bien existe-t-il d'additions de deux termes dont le résultat est 3, 4, 5, 10, ..., 1000 ?
Lorsque l'addition à 3 termes : ? + ? + ? = 2, il y a exactement six additions différentes : 2 + 0 + 0, 0 + 2 + 0, 0 + 0 + 2, 1 + 1 + 0, 1 + 0 + 1, 0 + 1 + 1. Combien existe-t-il d'additions de trois termes dont le résultat est 3, 4, 5, 10, ..., 1000 ?
Et si l'addition a 4 termes ?...

Références

Azziz S., Brouzet A., Couderc G., Durand-Guerrier V., Mann E., Saumade H., Sauter M., Virduci S., Yvain S. (2014). La résolution collaborative de problèmes comme modalité de la démarche d'investigation. Repères-IREM. Num. 96. p. 73-96.

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques, Repères IREM, 60, pp. 61-78

Dias, T. (2008). La dimension expérimentale des mathématiques. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

Essonnier, N., & Trgalová, J. (2015). La créativité sociale dans le projet européen MC Squared. Journées mathématiques de l'IFÉ, Consulté le 28/10/16

https://www.researchgate.net/profile/Nataly_Essonnier/publication/285499183_La_creativite_sociale_dans_le_projet_europeen_MC_Squared/links/565ea31e08aeafc2aac90c20.pdf

Front, M. (2015). Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan. Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

Gardes M-L. (2013) Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

Gellert, U. (2011). Now it concerns us! A reaction to sustainable mathematics education. For the Learning of Mathematics, 31(2), 19–20.