LA GEOMETRIE EUCLIDIENNE PLANE CHEZ AL-MU'TAMAN IBN HUD, ROI DE SARAGOSSE (1081-1085)

Youcef GUERGOUR
Laboratoire EDP non Linéaires
et Histoire des Mathématiques
Département de Mathématiques,
ENS de Kouba, Alger

Al-Mu'taman Ibn Hūd fut parmi les rares rois et princes, qui se sont intéressés aux sciences mathématiques et philosophiques, ce roi de Saragosse a été évoqué, par les historiens et les bibliographes, comme un jeune homme brillant en sciences en particulier en mathématiques, en physique et en philosophie (métaphysique et logique). Mais c'est son volumineux ouvrage de mathématiques, intitulé *Kitāb al-Istikmāl* [Livre du perfectionnement], qui l'a rendu célèbre. Cet ambitieux projet a été conçu comme une monumentale synthèse de ce qui était considéré comme le programme des futurs chercheurs dans les domaines théoriques des mathématiques ou dans les disciplines qui étaient leurs applications. C'est la raison pour laquelle le projet initial d'al-Mu'taman devait comprendre deux volumes, le premier englobant la théorie des nombres et les différents chapitres de la géométrie de son époque : la géométrie euclidienne plane et solide, «la géométrie infinitésimale» de la tradition archimédienne, la géométrie des coniques de la tradition d'Apollonius (242-197 av. J.C.), ainsi qu'une partie des contributions arabes antérieures au XIe siècle. Le second volume devait concerner essentiellement, l'astronomie, l'optique et la mécanique[1].

Malheureusement, seul le premier volume avait été achevé ou déjà publié, avant la mort d'al-Mu'taman. En tout cas c'est la seule partie qui semble avoir circulé. Nous savons qu'elle a été utilisée par Ibn Mun^{c}im (m. 1228) à Marrakech, et plus tard par Ibn al-Bannā (m. 1321). Une autre copie en Egypte chez Maï-

1 Djebbar, A. 2002. « La circulation des mathématiques entre l'Orient et l'Occident musulmans : interrogations anciennes et éléments nouveaux ». Actes du Colloque International «*From China to Paris : 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*» (eds.Y. Dold-Samplonius, J. W. Dauben, M. Folkerts et B. van Dalen). 228-229. Stuttgart, Steiner Verlag.

monide (m. 1204) qui avait, selon le bibliographe Ibn al-Qifṭī (m. 1248), révisé et enseigné le traité d'al-Mu'taman dans la ville du Caire. Nous trouvons également une autre copie chez Ibn ᶜAqnin (m. 1220), un élève de Maïmonide, qui a apprécié le contenu de l'*Istikmāl* et a été un relais pour sa diffusion, en particulier lors de son séjour à Bagdad [2].

Comme le centre scientifique de Maragha n'est pas loin de Bagdad, c'est peut-être dans cette ville qu'Ibn Sartāq a pris connaissance de cet ouvrage et de son importance avant de décider d'en réaliser une nouvelle rédaction intitulée *al-Ikmāl ar-Riyyāḍī* [Le complément en mathématiques] [3].

Quant au deuxième volume, il semble qu'il n'ait pas eu le temps de l'achever, mais sa table de matière, qui nous est parvenue, dans la rédaction d'Ibn Sartāq (XIIIᵉ s.), confirme le projet ambitieux d'al-Mu'taman.

Aperçu sur la géométrie euclidienne en Occident musulman entre le IXᵉ et le XIᵉ siècle

L'absence presque totale de sources se rapportant à l'histoire de la géométrie euclidienne en Andalus au début du 9ᵉ siècle rend difficile les réponses aux questions concernant l'apparition de la pratique de cette discipline, son enseignement ou la publication d'ouvrages de géométrie dans cette région. Nous mesurons cette difficulté lorsque nous savons que la majorité des ouvrages biobibliographiques et historiques de cette période est consacrée aux spécialistes des sciences religieuses.

Ceux d'entre eux qui évoquent les mathématiques mentionnent les outils de la science du calcul et de la géométrie élémentaire pour la résolution de certains problèmes dans le domaine du droit appliqué, comme la répartition des héritages ou le partage des terres et des bénéfices entre les ayants droit [4].

Aucun témoignage connu concernant le IXᵉ siècle ne fait allusion à l'enseignement de la géométrie et à des écrits traitant de cette matière. Il faut attendre le siècle suivant pour trouver des indices concordants en faveur du développement des sciences mathématiques et, en particulier de la géométrie.

En fait, dès la fin du neuvième siècle et le début du dixième, et malgré la dégradation de la situation politique en Andalus à l'époque des rois des Taïfa, le XIᵉ siècle témoigne d'une grande activité mathématique. Les recherches récentes sur la production scientifique de ce siècle ont révélé l'existence d'écrits géométriques andalous de grande valeur.

En plus de l'oeuvre d'al-Mu'taman dont le contenu géométrique plane sera le sujet de cet exposé, les résultats de recherches récentes, confirment, et explicitent parfois, les informations données par Ṣāᶜid al-Andalusī et d'autres bio-bibliographes au sujet d'autres mathématiciens tels que :

Ibn as-Samḥ (m. 1034-1035) :

Il s'est intéressé à la science du calcul, à la géométrie et à l'astronomie. Selon Ṣāᶜid al-Andalūsī, Ibn as-Samḥ a écrit une *« Introduction à la géométrie sur l'explication du livre*

2 Djebbar, A. 1995. « *La contribution mathématique d'al-Mu'taman et son influence hors d'al-Andalus* » actes du colloque international sur Huit siècles de mathématiques en Occitanie, de Gerbert et des Arabes à Fermat. 35-46, C.I.H.S.O. Toulouse.

3 Djebbar, A. 1997. « La rédaction de l'*Istikmāl* d'al-Mu'taman (XIe s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIIIe-XIVe siècles». *Historia Mathematica* 24:185-192.

4 Ibn al-Faraḍī. 1966. *Tarīkh ᶜulamā' al-Andalus* [Histoire des savants d'al-Andalus]. 126. Le Caire.

d'Euclide » et un «*grand ouvrage en géométrie où sont empruntées toutes ses parties <relatives> à la ligne rectiligne, arquée et courbe*[5] ». Bien que cet ouvrage ne nous soit pas parvenu, nous pensons qu'il devait être volumineux et qu'il contenait probablement des chapitres sur les figures rectilignes, les cercles, les arcs, les sections coniques et les solides, et peut-être même des chapitres sur les mathématiques appliquées. La découverte récente d'une traduction hébraïque d'un *fragment sur le cylindre et sur ses sections planes* attribué à Ibn as-Samḥ, renforce cette hypothèse. Ce texte traite du cylindre et de ses sections elliptiques, sujet qui avait été étudié auparavant par Sérénus, puis par al-Ḥasan, l'un des trois frères Banū Mūsā, et par Thābit Ibn Qurra[6].

Ibn Mu^cādh al-Jayyānī (m. 1079) :

Ses travaux portent sur la théorie des rapports, la trigonométrie et l'astronomie[7] :

Le seul écrit mathématique d'Ibn Mu^cādh al-Jayyānī, qui nous est parvenu, est son livre *Maqāla fī sharḥ an-nisba* [Epître sur l'explication des rapports]. L'objectif de ce texte est d'expliquer le contenu du Livre V des *Eléments*. Cette épître a été traduite en anglais par E. B. Plooij[8].

Quant à la trigonométrie, son important traité *Kitāb Majhūlāt qisiyy al-kura* [le livre des arcs inconnus de la sphère] nous est parvenu. Il fait partie des premiers livres qui exposent la trigonométrie plane et sphérique comme une matière indépendante de l'astronomie[9]. Ibn Mu^cādh dans ce traité se base sur les *Sphériques* de Ménélaüs. C'est d'ailleurs le seul ouvrage qu'il cite.

Ibn Sayyid (m. après 1096)[10] :

Les travaux qui lui sont attribués portent, sur la théorie des nombres et la géométrie. Les informations qui nous sont parvenues sur ses contributions en géométrie, se trouvent dans une lettre adressée par Ibn Bājja à l'un de ses amis de Grenade[11]. Ce résumé très concis ne permet pas de faire une analyse complète et une étude comparative des résultats et des méthodes utilisées, ce qui aurait pu aider à situer ces travaux par rapport à ceux de la tradition grecque dans ce domaine et des contributions connues des géomètres de l'Orient et de l'Occident musulman.

La première partie des recherches d'Ibn Sayyid concerne le contenu des sept Livres des *Coniques* d'Apollonius. Il aurait réarrangé

5 Ṣācid al-Andalusī. 1985. *Kitāb Ṭabaqāt al-umam* [Livres des catégories des nations]. (eds. H. Bucalwāne). 169-170. Beyrouth.
6 Lévy, T. 1995. « *fragment d'Ibn al-Samḥ sur le cylindre et sur ses sections planes* ». (eds. R. Rashed. 1993-2002. *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe* Vol. I). 885-893. London.
7 Dold-Samplonius, Y. & Hermelink, H. 1990. *Al-Jayyānī*. (eds. Ch. C. 1970. Gillispie Dictionary of Scientific Biography). 83. New York.
8 Plooij, E.B. 1997. *Euclid's Conception of Ratio and his Definition of Proportional Magnitudes as Criticised by Arabian Commentators*, Rotterdam 1950. Reproduit dans Publications of the Institute for the History of Arabic-Islamic Science. (eds. F. Sezgin avec la collaboration de M. Amawi, C. Ehrig-Eggert & E. Neubauer. *Islamic Mathematics and Astronomy*, Vol. 19 : 167-243.
- Vahabzadeh, B. 1994. "Two commentaries on Euclid's definition of proportional magnitudes" *Arabic Sciences and Philosophy*4: 181-198.
9 Villuendas, M.V. 1979. *La trigonometria europea en el siglo XI; Estudio de la obra de Ibn Mucādh, al-Kitāb mayhūlāt*. Barcelona.
10 Djebbar, A. 1993. « *Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XIe siècle : al-Mu'taman et Ibn Sayyid* » *(eds.* M. Folkerts & J.P. Hogendijk. *Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard*). 79-91. Amsterdam-Atlanta.
11 Djebbar, A.1998. « *Abū Bakr Ibn Bājja et la mathématiques de son temps* ». (eds. *Festchrift Jamal ed-Dine Alaoui, Eudes philosophiques et sociologiques dédiées à Jamal ed-Eddine Aloui*. 5-26. Fès.

certaines propositions en réduisant leurs nombres ce qui l'aurait amené à changer les méthodes de démonstration. La démarche d'Ibn Sayyid aurait ouvert de nouvelles voies pour l'établissement de propositions nouvelles dont nous ignorons le contenu [12]. Il semble donc que ses travaux aient abouti à une nouvelle rédaction des *Coniques*, comme cela a été le cas en Orient pour les *Eléments* d'Euclide. La deuxième partie de ces travaux concerne les courbes gauches et les courbes planes de degré supérieur à 2 (selon la terminologie moderne). Ibn Sayyid a étudié les courbes issues des intersections de surfaces, à bases coniques et non coniques, donnant des courbes gauches. Il s'agit de la trisection de l'angle et de la détermination de deux moyennes proportionnelle entre deux grandeurs données. Ibn Sayyid aurait ainsi résolu le problème de la multisection d'un angle et celui de la détermination d'un nombre quelconque de moyennes entre deux grandeurs données.

Ibn Bājja (m. 1138) :

Ses travaux ont concerné, en premier lieu, la philosophie. Mais il s'est également occupé de mathématiques, d'astronomie, de botanique et de musique [13].

Les documents permettant de connaître la contribution d'Ibn Bājja en mathématiques, et plus particulièrement en géométrie des coniques, sont rares et très lacunaires. Les informations que nous possédons sur ces travaux proviennent de deux lettres adressées par le philosophe à son ami Ibn al-Imām [14].

Dans sa première lettre, il dit avoir établi des résultats nouveaux en géométrie. Mais il ne précise pas le contenu et la nature de ce ceux ci. Cela dit, les informations fournies dans cette lettre et celles qui se trouvent dans ses autres écrits nous permettent d'esquisser le projet de sa recherche qu'il inscrit lui-même dans le prolongement de celle de son professeur Ibn Sayyid.

Dans sa deuxième lettre, Ibn Bājja aborde la question de la démonstration en mathématiques et plus particulièrement en géométrie. Il se réfère aux *Eléments* d'Euclide et aux *Coniques* d'Apollonius auxquels il emprunte des exemples pour illustrer son propos. Au vu de ce qu'il a écrit sur ce sujet, on peut supposer qu'il avait connaissance, directement ou indirectement, du contenu de certains écrits arabes d'Orient qui avaient été consacrés aux outils de la démonstration, en particulier le *Kitāb at-taḥlīl wa t-tarkīb* [Livre de l'analyse et de la synthèse] d'Ibn al-Haytham (m. 1041). Nous savons en effet que la présence de ce dernier ouvrage est attestée par certains passages du *Kitāb al-Istikmāl* [Livre du perfectionnement] d'al-Mu'taman (m. 1085). Cela dit, la manière avec laquelle Ibn Bājja aborde la question de la démonstration n'est pas celle des mathématiciens arabes qui l'ont précédé. C'est plutôt en philosophe qu'il se comporte, en distinguant trois types de démonstrations : celle de l'existence, celle de la cause et celle de la démonstration absolue qui englobe les deux premières.

Il fait remarquer aussi que les géomètres ne traitent pas des problèmes simples, c'est-à-dire ceux qui se ramènent à un problème d'existence, mais plutôt des problèmes simples en puissance et des problèmes composés. Il précise également que les problèmes simples en puissance sont ceux pour lesquels le géomètre cherche à démontrer deux choses : l'existence d'un objet et la manière de l'obtenir.

12 Ms. Escurial, n° 972/6, f. 33b, Ms. Oxford, Pocock n° 206, f. 119b.
13 Alaoui, J. 1983. *Mu'allafāt Ibn Bājja* [Les écrits d'Ibn Bājja]. Beyrouth- Casablanca.
14 Alaoui, J. 1983. *Rasā'il falsafiyya li Aīī Bakr Ibn Bājja* [Lettres philosophiques d'Abū Bakr Ibn Bājja]. 94. Beyrouth– Casablanca.

Quant aux problèmes géométriques composés, notre philosophe n'en donne pas une définition précise. Il se contente d'en fournir des exemples qui sont tirés de *l'Optique* d'Ibn al-Haytham, du *Livre X* des *Eléments* d'Euclide et du Livre I des *Coniques* d'Apollonius [15].

Les éléments que nous venons de présenter ne suffisent pas pour cerner avec précision les contributions d'Ibn Bājja en mathématique, mais elles permettent de voir qu'il maîtrisait les techniques mathématiques les plus élaborées de son époque, en particulier celles des *Coniques* d'Apollonius, et qu'il avait même la capacité de les utiliser dans des réflexions philosophiques. Ce qui est d'ailleurs confirmé par le contenu de son *Commentaire à la Physique* d'Aristote [16].

La place de la géométrie euclidienne dans la structure générale de *l'Istikmāl*

Le bibliographe Ibn al-Akfānī confirme, dans son *Irshād al-qāṣid ilā asnā al-maqāṣid* [Guide de celui qui vise les plus nobles buts] [17], l'importance du projet qui sous-entend l'*Istikmāl* dont il avait également une version inachevée, mais il ne précise pas son contenu. Le premier, à notre connaissance, qui a donné une table des matières de l'ouvrage est Ibn ᶜAqnīn dans son *Ṭibb an-Nufūs* [La médecine des âmes]. Il a également évoqué une partie des sources auxquelles al-Mu'taman a pu se référer, en particulier les *Eléments* et les *Données* d'Euclide. Ibn ᶜAqnīn dit : «*Il a divisé son livre en cinq parties (anwāᶜ). Dans la première sur l'arithmétique, il a étudié les sujets qui ont été traités par Euclide dans les septièmes, huitièmes et neuvièmes livres des* Eléments, *et par Thābit Ibn Qurra dans son traité sur les nombres amiables. La seconde partie traite les propriétés des lignes, angles et aires, mais pas en relations mutuelles. Ici il a étudié les sujets des livres I, II, III et IV des* Eléments *d'Euclide, en y ajoutant des problèmes. Dans la troisième partie, il s'est occupé des propriétés des lignes, des angles et des aires, et a ajouté beaucoup de théorèmes. En outre, il a résumé le contenu du livre d'Euclide qui est connu sous le titre des* Données *ou bien des Suppositions. Dans la quatrième partie, il a présenté le contenu du livre XI des* Eléments *d'Euclide. Dans la cinquième partie il a exposé les relations mutuelles entre les polyèdres*».

Mais pour avoir une idée claire de la place de ces deux sources fondamentales, il faudrait disposer d'une copie complète de *l'Istikmāl*, c'est à dire à la fois de sa partie théorique correspondant au premier volume et de sa partie appliquée qui n'a toujours pas été retrouvée. Cela dit, les découvertes que nous avons signalées en détail permettent déjà, comme nous allons le voir maintenant, de se faire une idée sur l'importance du corpus euclidien dans l'ouvrage d'al-Mu'taman et sur l'articulation de son contenu avec les autres thèmes traités.

La première section du livre est consacrée à l'arithmétique. Elle est intitulée : « *La première espèce du premier genre parmi les deux genres des sciences mathématiques, sur la connaissance des propriétés des nombres séparément et en relation <les uns avec les autres>* » [18]. Elle englobe 107 propositions, réparties en quatre chapitres qui touchent la théorie des

16 Djebbar, A.1998. « *Abū Bakr Ibn Bājja et la mathématiques de son temps* ». op.cit., 5-26.

1 Ziyāda, M. 1978. *Shurūḥāt as-samca' aṭ-ṭabīcī* [Commentaires sur la Physique]. 128. Beyrouth.

17 Ibn al-'Akfānī .1990. *Irshād al-qāṣid ilā asnā l-maqāṣid* [Guide de celui qui vise les plus nobles buts] (eds. M. al-Ḥurr & A.H. cAbdarraḥmān).Le Caire.

18 Djebbar, A. 1998. « *La tradition arithmétique euclidienne dans le Kitāb al-Istikmāl d'al-Mu'taman et ses prolongements en Andalus et au Maghreb* ». (eds. Association Tunisienne des Sciences Mathématiques). 85-87. Tunis.

nombres, en particulier les nombres pairs, impairs, premiers et amiables [19].

Les autres parties de l'*Istikmāl* concernent la géométrie euclidienne, archimédienne et apollonienne. Dans ce travail nous nous intéressons à la géométrie euclidienne plane qui se trouve essentiellement dans la deuxième section de l'ouvrage. Cette section correspond, globalement, aux Livres I, II, III et IV des *Eléments*. Dans la rédaction du contenu de ces Livres, al-Mu'taman ne s'est pas contenté de résumer. En effet, tout en respectant la structure générale du traité d'Euclide, il a touché à son agencement interne en modifiant l'ordre des propositions, en introduisant de nouvelles démonstrations et en regroupant plusieurs propositions en une seule.

La géométrie euclidienne plane dans l'*Istikmāl*

La géométrie euclidienne plane se trouve essentiellement dans la deuxième section de l'ouvrage. Elle est intitulée : «*Sur les lignes, les surfaces et les angles sans relations entre eux*». Cette espèce correspond, globalement, aux Livres I, II, III et IV des *Eléments d'Euclide* [20]. La grande partie de cette espèce est parvenue à travers la rédaction d'Ibn Sartāq. Elle se repartit en deux chapitres.

Le premier est intitulé : «*Sur les figures à côtés rectilignes*». Il se compose de :

— 28 définitions : 19 d'entre elles se trouvent dans le Livre I des *Eléments*, 5 dans le Livre III, 1 dans le Livre XI et il regroupe 3 définitions en une seule et 2 en une autre. Il en a ajouté 6 qui ne sont pas dans les *Eléments* et 18 définitions, des Livres I-IV des *Eléments*, sont absentes chez Ibn Sartāq.

— 9 postulats : 4 sont identiques à ceux d'Euclide, 1 existe aussi chez Euclide mais comme axiome. Les quatre restants sont ajoutés par al-Mu'taman ou par Ibn Satāq.

— 32 propositions : 19 d'entre elles se trouvent dans le Livre I des *Eléments*, 9 dans le Livre II, 2 dans le Livre XII, 1 c'est le postulat des parallèles et 1 d'origine inconnue.

Le deuxième chapitre est intitulé : «*Sur les surfaces des cercles*». Il se compose de :

— 29 propositions : 13 d'entre elles se trouvent dans Livre III des *Eléments*, 7 dans le Livre IV, 1 dans le Livre XII, 1 dans l'*Almageste* de Ptolémée, 1 dans Les *connus* d'Ibn al-Haytham, 1 dans le Livre *La sphère qui est la plus grande des figures solides* d'Ibn al-Haytham, 1 dans les *Coniques* d'Apollonius, 1 dans le Livre de *la sphère et du cylindre* d'Archimède , 1 dans le Livre de *la mesure du cercle* d'Archimède et 2 d'origine inconnue.

Une autre intervention d'al-Mu'taman consiste à ajouter des propositions qui n'existaient pas dans les *Eléments* mais que nous trouvons chez d'autres auteurs grecs ou arabes. C'est le cas de la proposition sur la mesure du cercle qui est tirée du traité *De la mesure du cercle* d'Archimède et que nous le trouvons aussi dans le *Kitāb misāḥat al-ashkāl al-basīṭa wa l-kuriya* des frères Banū Mūsā. C'est également le cas du problème des polygones inscrits et circonscrits à un cercle ainsi que de la construction des polygones et la comparaison de leurs aires à celle du cercle. Quant au second problème, il a peut-être été inspiré à al-Mu'taman par le contenu du traité d'Ibn al-Haytham sur *La sphère qui est la plus grande des figures solides*.

19 Nous savons que ce chapitre est un résumé des Livres VII, VIII et IX des *Eléments* et de l'Epître de Thābit Ibn Qurra sur les nombres amiables.

20 Vitrac, B. 1990-2001. *Les Eléments d'Euclide*, volumes I-IV. Paris.

Contenu de la deuxième section de l'*Istikmāl*

La deuxième section, qui est intitulée «*Sur les propriétés des lignes, des angles et des surfaces sans relations mutuelles*», commence par une présentation d'un ensemble de définitions, suivi de notions communes, d'axiomes et de propositions. Comme nous le savons maintenant, une partie importante de cette section est absente de l'*Istikmāl*, en particulier le titre, les définitions, les postulats, les notions communes et 26 propositions sur 32. Comme les analyses et les commentaires que nous allons faire reposent essentiellement sur la rédaction d'Ibn Sartāq, elles ne seront valables que si l'on admet que l'essentiel des démarches d'al-Mu'taman se retrouve dans la rédaction de *l'Ikmāl*. C'est ce que nous pensons après avoir comparé les contenus des propositions de l'*Istikmāl* qui nous sont parvenues dans les deux rédactions, celle d'al-Mu'taman et celle d'Ibn Sartāq.

Les définitions, les axiomes et les postulats

Dans la rédaction de *l'Istikmāl* d'al-Mu'taman par Ibn Sartāq, les propositions concernant la géométrie euclidienne plane, sont précédées par un ensemble de définitions, d'axiomes et de postulats qui ne sont pas une stricte reproduction de ce qui existe dans les versions arabes connues des *Eléments* d'Euclide. De plus, l'ordre de présentation de ces trois groupes d'énoncés ne suit pas exactement celui d'Euclide. En effet, contrairement à ce dernier, al-Mu'taman, suivi par Ibn Sartāq, commence par les axiomes. Le premier les met à l'intérieur de la première section, après avoir défini les nombres. C'est du moins la présentation que l'on trouve dans les deux copies de la **première section** dont nous disposons [21] ; alors que le second les énonce avant le début de cette même section, probablement pour marquer leur caractère général. Pour le reste, c'est-à-dire les définitions et les postulats géométriques, Ibn Sartāq suit la présentation globale d'Euclide, c'est-à-dire en premier les définitions [22] puis les postulats [23].

Les définitions

Nous distinguons, dans le groupe des définitions d'al-Mu'taman, telles qu'elles nous sont parvenues à travers la rédaction de *l'Ikmāl* d'Ibn Sartāq, deux catégories : Des définitions reprises des *Eléments* d'Euclide et celles qui ont été ajoutées sans que l'on sache si c'est al-Mu'taman ou Ibn Sartāq qui est l'auteur de ces ajouts. A ces deux groupes dont nous allons évoquer l'ordre de présentation et que nous allons comparer avec leurs formulations respectives chez Euclide, il faudrait ajouter un troisième groupe constitué des définitions des *Eléments* qui n'ont pas été exposées avec les autres ou qui ont été tout simplement abandonnées par Ibn Sartāq.

Avant d'entrer dans l'étude et la comparaison détaillée de tous ces énoncés, nous devons, dès maintenant, relativiser notre commentaire à venir dans la mesure où il ne portera que sur les formulations des énoncés par Ibn Sartāq. En effet, si certains de ces énoncés semblent être formulés selon le style habituel d'al-Mu'taman, d'autres en sont éloignés et pourraient être une rédaction personnelle de l'auteur de l'*Ikmāl*[24].

21 Les axiomes se trouvent dans la première section (Ms. Zāhiriya, cāmm, n°, 5648, f. 25a) ; (Ms. Le Caire, dār al-Kutub Muṣṭafa Fāḍil Riyāḍa m 41, f. 1b) ; (le Ms. de Copenhague est acéphale, il ne commence qu'à la proposition 26 du chapitre de la deuxième section).

22 Les définitions se trouvent dans la deuxième section du premier chapitre de la rédaction d'Ibn Sartāq (Ms. Le Caire, op.cit.).

23 Les postulats se trouvent dans le premier chapitre de la deuxième section d'Ibn Sartāq, à la suite des définitions.

24 Ibn Sartāq a pris soin de signaler les endroits, dans sa rédaction, où il a fait des ajouts plus ou moins longs. Mais, il n'a rien dit des éventuelles modifications qu'il a introduites dans la formulation des énoncés des définitions ou des propositions.

Les définitions d'origines grecques

Les définitions des *Eléments* que nous retrouvons dans l'*Ikmāl* sont au nombre de 25.

En ce qui concerne l'ordre dans lequel elles ont été exposées, il contient également des modifications substantielles : Ibn Sartāq définit d'abord les notions de limite et de figure avant de revenir à l'ordre euclidien pour les définitions suivantes : point, ligne, surface et solide. Il faut signaler au sujet de ces quatre dernières définitions, que tous les textes arabes que nous avons pu consulter, à l'exception d'un écrit de Qusṭā Ibn Lūqā [25], adoptent la voie dite «génétique-ontologique» suivie par Euclide qui part de l'objet le plus simple, le point, pour aboutir à l'objet le plus complexe, le solide. Cette démarche respecte l'exigence de la succession logique, même si la seconde, qui correspond au processus d'abstraction à partir du sensible, semble mieux adaptée à un exposé pédagogique.

Pour les définitions restantes, l'ordre est modifié selon la logique suivante : Ibn Sartāq définit d'abord les objets faisant intervenir les lignes droites puis ceux qui utilisent les lignes courbes ouvertes, puis les figures circulaires fermées et, en dernier, les figures rectilignes fermées.

Sur le plan de la formulation et de la terminologie, nous constatons des différences parfois importantes entre la rédaction d'Ibn Sartāq et celles des textes arabes antérieurs, et plus particulièrement, celle de la version Isḥāq-Thābit des *Eléments*. D'une manière plus précise, nous relevons les éléments suivants :

Dans la définition du point, Ibn Sartāq utilise les notions de mesure et de position, alors que la version Isḥāq-Thābit repose sur la notion de partie. Il faut remarquer que la notion de mesure associée à la définition du point ne se trouve dans aucun texte arabe connu postérieur aux traductions. Quant à la notion de position, il est possible qu'Ibn Sartāq, dans le cas où il s'agit là de sa propre rédaction, ait repris la formulation d'aṭ-Ṭūsī qui dit : *«le point c'est ce qui n'a pas de partie, c'est à dire ce qui a une position»* [26]. Mais il est également possible que ce soit al-Mu'taman qui l'ait empruntée à al-Fārābī. Nous trouvons en effet dans son «*Commentaire de l'introduction au premier Livre du traité d'Euclide*», le passage suivant : «*Le point est quelque chose qui est indivisible, ayant une position. [Effectivement] cet addendum est adéquat pour le distinguer de l'unité*» [27].

Pour les définitions de la ligne, de la surface et du solide, Ibn Sartāq remplace les notions de largeur, de longueur et de profondeur par la notion d'étendue dans une, deux ou trois directions. C'est dans *l'Introduction arithmétique* de Nicomaque que cette notion intervient, à propos d'ailleurs des mêmes objets (ligne, surface, solide). En effet, on y lit que « *le premier intervalle s'appelle ligne, car la ligne est ce qui s'étend en un ; deux intervalles s'appellent surface, car la surface est ce qui s'étend en deux ; trois intervalles s'appellent solide, car le solide est ce qui s'étend en trois* » [28].

Quant aux écrits connus de la tradition arabe des *Eléments*, seul celui d'al-Fārābī, que nous avons déjà évoqué, contient une explici-

25 Guergour, Y. 2006. "*al-Mudkhal ilā sinācat al-handasa li Qusṭā Ibn Lūqā* [Introduction à l'art géométrique de Qusṭā Ibn Lūqā]." *Suhayl* 6 : 7-79.

26 Aṭ-Ṭūsī : *Taḥrīr Uqlīdis*, op.cit., f. 1b.

27 Freudenthal, G. 1988. « La philosophie de la géométrie d'al-Fārābī, son commentaire sur le début du 1e livre et le début du Ve livre des Eléments d'Euclide ». *Jerusalem Studie in Arabic and Islam* 11 : 180.

28 Nicomaque de Gérase. 1978. *L'introduction arithmétique.* (Traduction. J. Bertier, Livre II). Paris. 102.

tation du mot *longueur* utilisé par Euclide, à l'aide de la notion d'étendue. On y lit ceci « *Ainsi, lorsque le géomètre applique <le terme> longueur au corps, à la surface et à la ligne, il entend par-là l'étendue. L'étendue est tantôt vers les trois côtés, tantôt vers deux côtés à l'exclusion du troisième, tantôt vers un côté, sans les deux <autres>*».

La troisième différence se trouve dans la définition de l'angle pour lequel Ibn Sartāq fait intervenir, implicitement, la notion d'espace intermédiaire entre les deux côtés de l'angle alors que dans la version Isḥāq-Thābit on utilise, explicitement, la notion *d'inclinaison*[29]. Il est à noter que, dans son explicitation de cette définition qui se trouve dans son commentaire de l'introduction au premier Livre des *Eléments*, al-Fārābī ne reprend pas à son compte le terme d'inclinaison préférant parler de «*concavité résultant de la rencontre des deux lignes*». Quant à Ibn al-Haytham, il utilise les deux formulations dans les *Muṣādarāt* et il semble les considérer comme équivalentes[30]. La formulation d'Ibn Sartāq pourrait s'expliquer par son refus (ou celui d'al-Mu'taman) de la présence implicite de deux notions : celle du mouvement que pourrait signifier le terme *inclinaison* utilisé par Euclide et rendu par Isḥāq-Thābit par le terme *inḥirāf*, et celle de mesure qui est également sous-jacente à l'idée *d'inclinaison*.

La quatrième et dernière définition, qui est formulée autrement mais sans qu'il y ait introduction de notions nouvelles, est celle de *figure*. Comme il s'agit ici plus d'une description et d'une classification que d'une définition proprement dite, Ibn Sartāq a, semble-t-il, pris le parti de donner un exposé beaucoup plus concis et donc moins précis du groupe de définitions d'Euclide concernant les polygones. En effet, en dehors de la définition du triangle, l'exposé d'Ibn Sartāq se réduit à une énumération des différents types triangles et de quadrilatères, complétée par l'évocation rapide des polygones.

Une dernière remarque concerne des différences de terminologie au sujet d'une même notion. Le terme *saṭḥ mustawī* [surface plane] est utilisé par Ibn Sartāq à la place de *basīṭ mustawī* [surface plane] qui est le terme consacré dans les écrits euclidiens arabes connus, à l'exception de la rédaction d'aṭ-Ṭūsī. Le terme *khaṭṭ mustaqīm* [ligne droite] de la version Isḥāq-Thābit est remplacé systématiquement par *mustaqīm* [droite] dans les définitions et les postulats de la rédaction d'Ibn Sartāq. Le terme *mustaṭīl* [oblong] remplace celui de *mukhtalif aṭ-ṭūlayn* [de longueurs différentes].

Les définitions ajoutées[31]

La première définition ajoutée concerne la notion de *ligne courbe* qui servira, en particulier, à définir le cercle. Elle pourrait provenir de la définition de la *Sphère et du Cylindre* d'Archimède où ce dernier évoque les « *lignes courbes de même concavité* »[32].

---

29 Uqlīdis. *Kitāb al-uṣūl*, Ms. Téhéran. Majlis 200, f. 1a.
30 Ibn al-Haytham. *Maqāla fī sharh muṣādarāt Uqlidis*. Ms. Istanbul. Feyzullah 1359/2. 7.
31 Nous pensons que les définitions ajoutées par Ibn Sartāq (ou al-Mu'taman), répondent au besoin de définir de nouveaux termes scientifiques et qui ont été utilisés auparavant sans les nommer explicitement, comme par exemple la définition de l'angle au centre, celle de la corde, du rayon d'un cercle et de la ligne courbe. Ces termes ont été utilises implicitement sans les définir comme étant des objets mathématiques. On peut aussi penser qu'al-Mu'taman a décidé de définir ces termes dans la mesure ou ils sont utilisés par Euclide et par d'autres mathématiciens avant lui, pour rendre son livre différent des autres et plus riche en termes nouveaux.
32 Archimède. 1970. *De la Sphère et du Cylindre*. (eds. et trad. Ch. Mugler), Paris. Vol. I. 9.

La seconde concerne la *surface circulaire*, notion plus générale que celle de *Cylindre*. A ce sujet Archimède écrit : « *Il y a dans le plan des lignes courbes limitées, qui ou bien sont entièrement situées d'un même côté des droites joignant leurs extrémités ou bien n'ont aucune partie de l'autre côté* ».

La troisième est une généralisation à des lignes courbes des deux définitions concernant des segments de droites : celle de la notion d'angle (entre deux segments de droites ou entre un segment et un arc de cercle, c'est à dire *l'angle de contingence*) et celle de droites parallèles. La première concerne l'angle de deux lignes courbes et la seconde le « parallélisme » de deux lignes circulaires. Ces notions pourraient être tirées de commentaires grecs parvenus partiellement aux mathématiciens arabes à travers des scholies.

La quatrième définition concerne la notion de rayon, défini comme demi-diamètre.

La cinquième concerne la notion de *corde* qui est définie à partir de la notion de segment du cercle qu'engendre la corde en coupant le cercle. Mais il faut préciser que la notion de «*segment de cercle*» qui correspond à la définition 6 du Livre III d'Euclide n'est pas définie par Ibn Sartāq.

La sixième et dernière définition ajoutée est la notion d'angle au centre.

Les définitions d'Euclide absentes chez Ibn Sartāq

Parmi les définitions exposées dans les Livres I, II, III et IV des *Eléments*, certaines sont absentes chez al-Mu'taman (toujours sur la base de la rédaction d'Ibn Sartāq). Il s'agit de 3 définitions du Livre I des *Eléments*, 2 du Livre II, 6 du livre III et 7 du Livre IV.

Ces définitions peuvent être classées en trois catégories : la première comprend celles dont l'absence pourrait être justifiée par le souci d'al-Mu'taman d'éviter la répétition dans la mesure où elles concernent des cas particuliers de définitions générales. C'est le cas de la définition 18 du Livre I. La seconde catégorie regroupe toutes celles qui ne sont en fait, chez Euclide, que des conventions linguistiques. C'est le cas des définitions 1 et 2 du Livre II et de la définition 7 du Livre IV [33]. La troisième catégorie contient trois définitions dont l'abandon s'expliquerait par le fait qu'elles pouvaient être, aux yeux d'al-Mu'taman, que des propriétés. Il s'agit des définitions 3 et 6 du Livre I et de la définition 2 du Livre XI qui précisent les extrémités, respectivement, de la ligne, de la surface et du solide. C'est en fait la quatrième et dernière catégorie qui pose problème dans la mesure où ces définitions sont utilisées dans les propositions exposées par al-Mu'taman. Il s'agit de cinq définitions du Livre III, qui concernent en particulier l'égalité de cercles, et la notion de tangence pour un cercle et pour une droite, ainsi que six du Livre IV qui concernent toutes les notions de «figure inscrite» ou «circonscrites» à une autre figure (dans le cas présent, il s'agit de cercles et de polygones).

Les axiomes

Dans le manuscrit **de Damas** et dans celui du Caire, les axiomes se trouvent dans la première section [34], alors que dans l'*Ikmāl* ils le pré-

33 L'abandon de la définition 1 du Livre II peut également se justifier dans la mesure où elle risquait de faire double emploi avec la définition 22 du Livre I. En effet la définition d'al-Mu'taman analogue à définition 22 du Livre I, dit « *La <figure> oblongue, est celle à angles droits et à côtés inégaux* », alors que la 1 du Livre II, dit « *Tout parallélogramme rectangle est dit être contenu par deux droites contenant un des angles droits* ».

34 Al-Mu'taman. *al-Istikmāl*. Ms. az-Zāhiriya. f. 25a.

cèdent [35]. Nous n'avons pas d'élément pour pouvoir affirmer que c'est l'un ou l'autre des documents en notre possession qui correspond à la rédaction originelle d'al-Mu'taman, même s'il paraît plus logique, compte tenu du profil à la fois philosophique et mathématique de ce mathématicien que ce soit la présentation de l'*Ikmāl* qui est la plus fidèle à la rédaction d'al-Mu'taman.

Le nombre d'axiomes attribués à Euclide dans la version Isḥāq-Thābit est de dix [36] : Huit que l'on retrouve chez al-Mu'taman, un qui a été transformé en postulat [37] chez al-Mu'taman et le dernier qui est tout simplement absent. Il s'agit d'un axiome de type géométrique qui dit «*Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles*». Ibn Sartāq reprend les neuf axiomes de l'*Istikmāl* mais il les regroupe pour n'en faire que quatre et il les présente selon un ordre sensiblement différent qui semble aller du général au particulier. Ceci est évident pour le huitième qui affirme que «*le tout est plus grand que la partie*» et qui se retrouve en premier dans la présentation d'Ibn Sartāq.

Le neuvième axiome concerne la notion d'égalité de deux objets. Son ajout par al-Mu'taman peut s'expliquer par le fait qu'à aucun endroit des *Eléments*, nous ne précisons ce qu'est l'égalité, alors qu'elle intervient dans tous les autres axiomes. Mais, nous ne comprenons pas pourquoi, dans ce cas, cet axiome a été placé en dernier. C'est peut-être ce fait qui a amené Ibn Sartāq à le déplacer et à le mettre en deuxième position. Il a également regroupé avec cet énoncé tous les axiomes qui concernent l'égalité [38].

Les postulats

Ils sont au nombre de neuf dans *l'Ikmāl* d'Ibn Sartāq, donc plus nombreux que ceux des Livres géométriques des *Eléments* : Quatre sont identiques à ceux d'Euclide avec parfois quelques variantes dans la formulation et une modification de l'ordre de leur présentation. Un cinquième correspond à l'axiome d'Euclide que nous avons évoqué dans le paragraphe précédent. Il semble qu'al-Mu'taman ait suivi un certain nombre de mathématiciens arabes antérieurs, comme Ibn al-Haytham, Ibn Sīnā, et d'autres, qui ont estimé que cet axiome devait être considéré comme un postulat. Malheureusement, au vu des écrits qui nous sont parvenus, ni ces auteurs ni Ibn Sartāq n'explicitent les raisons qui ont justifié à leurs yeux cette modification.

Les quatre postulats restants ont été ajoutés par al-Mu'taman ou par Ibn Sartāq. Le premier est formulé ainsi : «Si *une partie d'une droite se superpose à une partie d'une autre droite, elle ne s'en sépare pas par l'autre partie*». Il ne se trouve dans aucun texte arabe connu traitant de la géométrie d'Euclide. Mais il faut signaler que dans ses *Shukūk* [39], Ibn al-Haytham discute d'un problème qui s'en approche et qui est traité par Euclide dans la proposition 1 du Livre XI. Il s'agit de montrer que «*d'une ligne droite il n'y a pas une certaine partie dans le plan*

35 Ibn Sartāq. *al-Ikmāl*. Ms. Le Caire. f. 7a.

36 Contrairement à l'édition de Heiberg qui ne retient pas l'axiome 5 de la version Isḥāq-Thābit, axiome qui est énoncé ainsi «*Et si à des <choses> inégales on retranche <quelque chose> d'égal, les restes seront inégaux*».

37 Il s'agit du postulat 4 qui dit : « *deux lignes droites n'entourent pas une surface* », voir, Ibn Sartāq. al-Ikmāl, Ms. Le Caire. f. 26a.

38 Il s'agit de l'axiome 9 dans l'*Istikmāl*, qui dit : « *Si deux choses sont telles que chacune d'elles est supérieure à tout ce à quoi l'autre est supérieure et inférieure à tout ce à quoi l'autre est inférieure, alors elles sont égales* », voir, al-Mu'taman. *al-Istikmāl*. Ms. az-Zāhiriya. f. 25a.

39 Ibn al-Haytham 1985 : *Fī ḥall shukūk kitāb Uqlīdis fī'l-uṣūl* [Livre sur la résolution des doutes des *Eléments* et l'explication de ses notions]. Ms. Istambul, Bibliothèque de l'Université, n°800, in, Fac-simile, (édit. F. Sezgin). 28. Frankfut.

subjacent et une certaine autre partie dans un [plan] situé en hauteur». Il est possible que la lecture de ce passage des *Shukūk* ait convaincu al-Mu'taman de la nécessité d'ajouter un postulat. Il est également possible que ce postulat ait son origine dans une scholie provenant du commentaire de Proclus au Livre I où cette idée est discutée [40]. Mais nous n'avons aucun élément permettant de supposer que tout ou partie de ce commentaire ait été connu par al-Mu'taman.

Quant au second postulat, il y est affirmé que : «*ce qu'il y a en commun entre deux lignes, c'est un point, entre deux surfaces, une ligne, et entre deux solides, une surface*». Là aussi, rien n'est dit par Ibn Sartāq sur les raisons de cet ajout. Mais comme nous trouvons un énoncé semblable dans le *Taḥrīr Uqlīdīs* d'aṭ-Ṭusī (qui, tout en le distinguant des postulats d'Euclide, affirme qu'il faudrait l'ajouter), nous pouvons supposer qu'il s'agit là d'un complément d'Ibn Sartāq à partir de sa connaissance de l'écrit d'aṭ-Ṭusī [41]. A moins que ce dernier ait emprunté cela à un de ses prédécesseurs dont l'écrit aurait circulé à la fois en Asie Centrale et en Andalus.

Quant au troisième postulat il y est dit : «*Une droite ne peut joindre deux droites concourantes en étant dans les deux directions <à la fois>*». Cet énoncé se trouve à la fois dans le résumé des *Eléments* du *Kitāb ash-Shifā'* d'Ibn Sīnā [42] et dans le *Taḥrīr* d'aṭ-Ṭūsī [43]. Il est possible qu'il ait été ajouté par al-Mu'taman. En effet, compte tenu de la formation philosophique que lui attribue Ṣāᶜid al-Andalusī, il devait probablement disposer du *Kitāb ash-Shifā'* et d'autres écrits publiés dans la première moitié du XIe siècle.

Le quatrième postulat est une version de l'axiome d'Archimède [44] qui est énoncé ainsi : «*Et il n'est pas vrai que le plus petit de deux <objets> homogènes ne peut excéder le plus grand même si on lui ajoute un nombre infini de fois une quantité de même genre que la leur*».

Quant au cinquième postulat, qui n'est autre que celui des parallèles, il est absent des postulats de l'*Ikmāl* puisque, il a été considéré par al-Mu'taman comme une proposition qui avait besoin d'une démonstration.

On trouvera dans les pages
qui suivent un tableau récapitulatif.

Contenu des propositions

La deuxième section de l'*Istikmāl* d'al-Mu'taman est divisée en deux chapitres. Elle contient soixante et une propositions selon la numérotation d'Ibn Sartāq. Comme nous l'avons déjà dit, la copie de Copenhague est acéphale et elle ne commence qu'à la proposition 26 du premier chapitre [46]. L'étude de cette partie repose donc en grande partie sur la rédaction d'Ibn Sartāq [47].

Le premier chapitre regroupe 32 propositions, et le second 29. Ces propositions ne sont pas toutes des reproductions du contenu des versions arabes connues des *Eléments* et l'ordre de leur présentation n'est pas conforme à celui

40 Proclus. 1948. *Les commentaires sur le premier Livre des Eléments d'Euclide.* (trad. P. Ver Eecke). 190. Bruges.

41 aṭ-Ṭūsī. *Taḥrīr Uqlīdis.* f.1b.

42 Ibn Sīnā. *Kitāb ash-Shifā', al-Handasā*,(eds. A. I. Sabra & A. Lotfi). 19. Le Caire.

43 aṭ-Tūsī. *Taḥrīr Uqlīdis.* f. 2b.

44 Archimède. *De la Sphère et du Cylindre.* op.cit., p. 11.

45 Vitrac, B. 1990-2001. *Les Eléments d'Euclide*, op.cit..

46 Ms. de Copenhague Or 82. ff. 21a-32a.

47 Djebbar, A. 1997. « *La rédaction de l'Istikmāl d'al-Mu'taman (XIe s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIIIe-XIVe siècles* ». *Historia Mathematica* 24 : 185-192.

Le tableau récapitulatif
L'ordre des axiomes, des postulats et des définitions
est celui de l'édition de Heiberg, des *Eléments*[45].

Tableau des Postulats

Al-Mu'taman-Ibn Sartāq	Euclide
2. De joindre deux points quelconques par une droite	**1.** Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point.
3. De prolonger la droite jusqu'où nous voulons	**2.** Et de prolonger continûment en ligne droite une droite limitée
1. Supposer un point là où nous voulons et de tracer autour de lui un cercle, à n'importe quelle distance	**3.** Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle
7. Tous les <angles> droits sont égaux par superposition. Et il en est ainsi pour tout ce qui se superpose, l'un sur l'autre sans excédent	**4.** Et que tous les angles droits soient égaux entre eux
8. Et il n'est pas vrai que le plus petit de deux <objets> homogènes ne peut excéder le plus grand même si on lui ajoute un nombre infini de fois une quantité de même genre que le leur	
	5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.
5. Si une partie d'une droite se superpose à une partie d'une autre droite, elle ne s'en sépare pas par l'autre partie	
6. Une droite ne peut joindre deux droites concourantes en étant dans leurs deux directions <à la fois>	
4. Deux droites n'entourent pas <une surface> d'une manière complète	
9. Ce qu'il y a en commun entre deux lignes, c'est un point, entre deux surfaces, une ligne et entre deux solides une surface	

Tableau des Axiomes

Al-Mu'taman	Euclide
1. Les choses égales à une même chose sont égales.	**1**. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.
2. Si on ajoute à des <choses> égales ou si on leur retranche des <choses> égales, elles deviennent ou restent toutes égales.	**2**. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.
3. Si on retranche de <choses> égales des <choses> égales, les restantes deviennent égales.	**3**. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux

3. Si on retranche de <choses> égales des <choses> égales, les restantes deviennent égales.	**3**. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux
4. Si on ajoute à des <choses> inégales des <choses> égales, les restantes deviennent inégales.	**4**. {Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux.
5. Si on retranche de <choses> inégales des <choses> égales, les restantes deviennent inégales.	
6. Celles qui sont le double d'une même chose sont égales.	**5**. Et les doubles du même sont égaux entre eux.
7. Celles qui sont la moitié d'une même chose sont elles aussi égales.	**6**. Et les moitiés du même sont égales entre elles}.
	7. Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.
8. Le tout est plus grand que la partie.	**8**. Et le tout {est} plus grand que la partie
	9. {Et deux droites ne contiennent pas une aire}.
9. Si deux choses sont elles que chacune d'elles est supérieure à tout ce à quoi l'autre est supérieure et inférieure à tout ce à quoi l'autre est inférieure, alors elles sont égales	

Tableau des définitions

Al-Mu'taman-Ibn Sartāq	**Euclide**
3. Le point : est un accident avec une position, sans grandeur	**1**. Un point est ce dont il n'y a aucune partie
4. La ligne : ce qui a une seule étendue.	**2**. Une ligne est une longueur sans largeur
	3. Les limites d'une ligne sont des points
7. La <ligne> droite : est celle dont tous les points supposés être sur elle sont contigus.	**4**. Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elles
8. La <ligne> circulaire : celle dont la courbure est semblable.	
- et d'autres <lignes>.	
5. La surface : ce qui a deux étendues seulement.	**5**. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur
	6. Les limites d'une surface sont les lignes
9. La <surface> plane : est celle pour laquelle il existe, par hypothèse, dans chacune de ses deux directions une <ligne>.	**7**. Une surface plane est celle qui est placée de manière égale par rapport aux droites qui sont sur elles
10. <la surface> circulaire : est celle pour laquelle il existe également dans chacune de ses deux <directions> une <ligne> circulaire.	
12. Si elles sont concourantes, ce qui résulte entre elles à l'intersection ce sont les angles, au singulier : angle.	**8**. Un angle plan est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en lignes droites **9**. Et quand les lignes contenant l'angle sont droites, l'angle est appelé rectiligne
13. S'ils sont tous égaux, chacun deux est droit. Et chacune de leur extrémité est une perpendiculaire sur son homologue.	**10**.Quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est droit, et la droite qui a été élevée est appelée perpendiculaire à celle sur laquelle elle a été élevée.
14. Si non, le plus grand <que le droit> est obtus.	**11**. un angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit

15. et le plus petit est aigu. Et chacune des deux <lignes> est inclinée sur l'autre du coté <de l'angle> aigu.	**12**. un angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit
16. Et on trouve l'équivalent de ce qui a été indiqué, comme parallélisme et intersection entre deux <lignes> circulaires.	
1. La limite : l'extrémité	**13**. Une frontière est ce qui est limite de quelque chose
2. La figure : ce qu'entourent une ou des limites	**14**. Une figure est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontière(s)
17. Il y a le cercle. C'est ce qui est limité par une ligne circulaire, et c'est sa circonférence.	**15**. Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique {celle appelée circonférence} par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontres à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure sont {jusqu'à la circonférence du cercle} égales entre elle
18. Et dans lequel, il y a un point <tel que> toutes les droites sortant de lui, jusqu'à elle, sont égales ; et c'est son centre.	**16**. Et le point est appelé centre du cercle
19. Les droites sont les moitiés de ses diamètres.	
20. Celle qui est alignée dans les deux directions est son diamètre	**17**. Et un diamètre du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales
	18. Un demi-cercle est la figure contenue par le diamètre et la circonférence découpée par lui ; le centre du demi-cercle est le même que celui du cercle
24. Le segment de cercle : c'est ce qui entouré par un arc et deux demi-diamètres concourants.	**III.10** Un secteur de cercle est la figure qui lorsqu'un angle a été construit au centre du cercle, est contenue par les droites contenant l'angle et la circonférence découpée par celles-ci. **III.9.** Quand les droites contenant l'angle découpent une certaine circonférence, l'angle est dit s'appuyer sur celle-ci.
25. Les segments et les arcs semblables sont ceux qui admettent des angles égaux	**III.11**. Des segments de cercles semblables sont ceux qui admettent des angles égaux ou ceux dans lesquels les angles sont égaux entre eux.
21. La corde est une droite qui coupe le <cercle> en deux secteurs, et la circonférence en deux arcs	
22. L'angle qui est entre deux droites commençant aux deux extrémités de la corde et se rencontrant sur un	**III.6**. Un segment de cercle est la figure contenue par une droite et une circonférence de cercle.
point de l'arc est un angle dans le secteur	**III.7**. Et un angle du segment est celui contenu par la droite et la circonférence du cercle. **III.8**. Et un angle dans un segment est l'angle qui, lorsque sur la circonférence du segment, un certain point est pris et qu'à partir de lui, des droites sont jointes jusqu'aux extrémités de la droite qui est la base du segment, est contenu par les droites jointes.
23. Et si ces deux <droites> se rencontrent sur le centre, c'est un <angle> au centre.	
26. Il y a le triangle, et c'est celui qui a trois limites rectilignes. **26a.** Le <triangle> équilatéral,	**19**. Les figures rectilignes sont les figures contenues par des droites ; trilatères : celles qui sont contenues par trois droites, quadrilatères par quatre ; multilatères par plus de

26b. Le <triangle> isocèle **26c.** Et le <triangle> à côtés quelconques.	quatre **20**. Parmi les figures trilatères est un triangle équilatéral celle qui a les trois côtés égaux ; Isocèle celle qui à deux côtés égaux seulement ; Scalène celle qui a les trois côtés inégaux.
27. Il y a aussi : en considérant les angles, **27a.** <Le triangle> rectangle, **27b.** Ou <le triangle> à angle obtus, **27c.** Ou <le triangle> à angle aigu	**21**. De plus parmi les figures trilatères est un triangle rectangle celle qui a un angle droit ; Obtusangle celle qui a un angle obtus ; Acutangle, celle qui a les trois angles aigus
28. Et parmi eux : le quadrilatère. Et parmi ceux-ci, **28a.** Le quadrilatère à côtés égaux et angles droits, **28c.** Le quadrilatère oblong à angle droit, et à côtés inégaux, **28c.** Et le losange équilatère à angles non droits, **28d.** Et celui qui lui est semblable à côtés et angles opposés égaux, **28e.** Et le <quadrilatère> quelconque et les autres. **28f.** Et parmi eux les polygones, autres que ce qui a été indiqué, comme le pentagone.	**22**. Parmi les figures quadrilatères Est un carré, celle qui est à la fois équilatérale et rectangle ; Est oblongue celle qui est rectangle mais non équilatérale ; Un losange, celle qui est équilatérale mais non rectangle ; Un rhomboïde, celle qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle ; Et que l'on appelle trapèzes les quadrilatères autres que ceux –là.
11. Sont parallèles, si elles ne se rencontrent pas même si elles sont prolongées indéfiniment dans leurs deux directions.	**23**. Des droites parallèles sont celle qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autres, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.
Ou se rencontrent même par prolongement, <en étant> confondues ou concourantes	
6. Le volume : ce qui a trois étendues.	**XI.1**. Un solide est ce qui a longueur, largeur et profondeur **XI.2**. Un solide est terminé par une surface.
	II.1. Tout parallélogramme rectangle est dit être contenu par deux droites contenant un des angles droits.
	II.2. Dans toute aire parallélogramme, que l'un quelconque des parallélogrammes qui entourent la diagonale pris avec les deux compléments soit appelé gnomon.
	III.1. Des cercles égaux sont ceux dont les diamètres sont égaux ou ceux dont les rayons sont égaux.
	III.2. Une droite qui, rencontrant un cercle et prolongée, ne le coupe pas, est dite tangente au cercle.
	III.3. Des cercles qui se rencontrent l'un l'autre sans se couper, sont dits être tangents l'un à l'autre.
	III.4. Dans un cercle, des droites sont dites être à égale distance du centre quand les perpendiculaires menées sur elles à partir du centre sont égales.
	III.5. Est dite être à une plus grande distance, celle sur laquelle tombe la perpendiculaire la plus grande.
	IV.1. Une figure rectiligne est dite être inscrite dans une figure rectiligne quand les angles de la figure inscrite touchent chacun à chacun les côtés de celle dans laquelle elle est inscrite.

	IV.2. Et semblablement une figure est dite être circonscrite autour d'une figure quand les côtés de la figure circonscrite touchent chacun à chacun les angles de celle autour de laquelle elle est circonscrite.
	IV.3. Une figure rectiligne est dite être inscrite dans un cercle quand chaque angle de la figure inscrite touche la circonférence du cercle.
	IV.4. Et une figure rectiligne est dite être circonscrite autour d'un un cercle quand chaque côté de la figure circonscrite est tangente à la circonférence du cercle
	IV.5. Et semblablement un cercle est dit être inscrit dans une figure quand la circonférence du cercle touche chaque côté de celle dans laquelle il est inscrit.
	IV.6. Et un cercle est dit être circonscrit autour d'une figure quand la circonférence du cercle touche chaque angle de celle autour de laquelle il circonscrit.
	IV.7. Une droite est dite être ajustée dans un cercle quand ses limites sont sur la circonférence du cercle.

d'Euclide. Nous signalons aussi qu'il arrive à al-Mu'taman de regrouper plusieurs propositions en une seule.

Le contenu de cette deuxième section est globalement emprunté aux quatre premiers Livres des *Eléments*[48].

Le premier chapitre

Le premier Livre des *Eléments* est presque entièrement contenu dans les 20 premières propositions de ce chapitre. Le contenu du deuxième Livre des *Eléments*, se retrouve dans les 9 propositions suivantes de ce même chapitre. Concernant les 3 propositions restantes, la 30e est absente chez Euclide. Un corollaire de la 31e et la 32e proposition sont tirées du treizième Livre des *Eléments*.

Nous allons, à présent, voir plus en détail la répartition des propositions qui nous intéressent ici et leurs liens avec celles des *Eléments*. Nous les avons classées en deux catégories : Celles qui ont été ajoutées par al-Mu'taman et celles qui sont communes aux *Eléments* et à l'*Istikmāl*. La première catégorie comprend trois propositions 14, 30 et 31. La proposition 14 est, comme nous l'avons déjà évoqué, la tentative de démonstration du postulat des parallèles.

La proposition 30 concerne la construction d'un triangle isocèle dont l'angle au sommet est égal à trois fois chacun des angles à la base. Elle sert à la construction d'un pentagone régulier. Elle dispense donc de la proposition 10 du Livre IV qu'Euclide utilise pour la construction d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle ou circonscrit. Elle n'a pas d'équivalent dans les textes grecs et arabes que nous avons pu consulter, et son origine reste inconnue. Pour le moment, les éléments d'informations dont nous disposons ne nous permettent pas d'affirmer qu'il s'agit d'une contribution d'al-Mu'taman.

La proposition 31 est absente des *Eléments*. Mais on constate que la proposition du Livre XIII d'Euclide en est un corollaire (qu'al-Mu'taman donne d'ailleurs à la fin de sa démonstration). Il est bon de signaler ici que

48 Hogendijk, J. P. 1991. « The geometrical part of the *Istikmāl* of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century)". *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 4 : 207-281.

cette proposition a fait l'objet d'une construction par Abū al-Wafā'(m. 997) dans son traité, *Kitāb fī mā yaḥtāju ilayhi aṣ-ṣāni^c min al-a^cmāl al-handasiya* [Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques][49]. Cette construction, qui n'utilise que le compas, est basée sur la construction euclidienne d'un triangle isocèle dont chacun des angles à la base est le double de l'angle au sommet. Nous ignorons si al-Mu'taman a eu entre les mains le traité d'Abū al-Wafā'.

Quant aux propositions communes à al-Mu'taman et à Euclide, elles sont au nombre de 30. Elles correspondent à 60 propositions des *Eléments* : 58 appartenant aux Livres I et II et 2 au Livre XIII.

Il faut enfin signaler qu'al-Mu'taman a abandonné quatre propositions du premier Livre des *Eléments*. Il s'agit des propositions 3, 7, 44 et 45. L'absence de la proposition 3 pose problème dans la mesure où al-Mu'taman l'utilise à plusieurs reprises et que, de son côté, Ibn Sartāq en fait un commentaire dans la proposition 12 de sa rédaction.

La proposition 7 exprime l'impossibilité de construire deux triangles différents qui auraient la même base, qui seraient situés du même côté par rapport à cette même base, et qui auraient leurs côtés latéraux respectivement égaux mais dont le troisième sommet serait différent. Dans les *Eléments*, cette proposition constitue un lemme préparant la démonstration de la proposition 8 du Livre I. De son côté Proclus nous informe que l'école de Philon avait élaboré une démonstration de la 8 qui n'utilise pas la 7. Nous signalons ici, qu'Ibn Sartāq (al-Mu'taman) a, aussi, traité la proposition 8 du Livre I des *Eléments* dans un cas général, qui est l'égalité de deux triangles. Il a utilisé la technique de la superposition des figures et l'imagination, en faisant un raisonnement direct, pour éviter probablement la preuve par l'absurde et l'utilisation de la proposition 7. En plus, Ibn Sartāq a introduit dans son raisonnement les trois cas de figures qui existent déjà chez Proclus dans son commentaire aux *Eléments*, et que ce dernier attribue à Philon de Byzance. Par ailleurs, nous retrouvons ces mêmes cas de figures dans le commentaire aux *Eléments* d'an-Nayrīzī (Xe s.)[50].

Les propositions 44 et 45 sont relatives, respectivement, à la construction, dans un angle rectiligne, d'un parallélogramme dont l'aire est égale à celle d'un triangle donné et à la construction, toujours dans un angle rectiligne, d'un parallélogramme dont l'aire est égale à celle d'une figure rectiligne donnée. Si al-Mu'taman ne les a pas mentionnées dans la deuxième section de l'*Istikmāl* c'est peut-être parce qu'il a jugé qu'elles étaient inutiles pour son étude qui s'intéresse aux figures rectilignes rigides sans s'occuper de leur «transformation».

Le deuxième chapitre

Le deuxième chapitre de la deuxième section de l'*Istikmāl* regroupe vingt neuf propositions correspondant, partiellement, au contenu des Livres III et IV des *Eléments*. Nous pouvons les classer en deux catégories, celles qui sont absentes des *Eléments* et celles qui sont communes aux deux traités.

Huit propositions appartiennent à la première catégorie. Il s'agit des propositions 5, 6, 8, 17,

---

49 Woepcke, F. 1855. « Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboul Wafa ». *Journal Asiatique* 5 : 218-256 et 309-359.
- Abū al-Wafā'. 1979. *Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques*, (eds. Ṣalaḥ Aḥmad al-cAlī). 56-57. Bagdad.

50 Saïdan, A.S. 1991. *Handasat Uqlīdis fī aydin carabīyya* [La géométrie d'Euclide entre des mains arabes]. 108-109. Amman.

Tableau de comparaison entre les propositions d'al-Mu'taman (premier chapitre) et celles d'Euclide

al-Mu'taman+Ibn Sartāq	Euclide	al-Mu'taman+Ibn Sartāq	Euclide
IS(II ; 1, 1)	E(I ; 4, 15)	IS(II ; 1, 17)	E(I ; 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40)
IS(II ; 1, 2)	E(I ; 5, 6)	IS(II ; 1, 19)	E(I ; 41, 42, 43)
IS(II ; 1, 3)	E(I ; 8)	IS(II ; 1, 19)	E(I ; 33, 46)
IS(II ; 1, 4)	E(I ; 1, 9, 10, 11, 12)	IS(II ; 1, 20)	E(II ; 1, 2, 3)
IS(II ; 1, 5)	E(I ; 16)	IS(II ; 1, 21)	E(II ; 4, 7)
IS(II ; 1, 6)	E(I ; 26)	IS(II ; 1, 22)	E(I ; 47, 48)
IS(II ; 1, 7)	E(I ; 18, 19)	IS(II ; 1, 23)	E(II ; 12)
IS(II ; 1, 8)	E(I ; 20, 21)	IS(II ; 1, 24)	E(II ; 13)
IS(II ; 1, 9)	E(I ; 24, 25)	IS(II ; 1, 25)	E(II ; 5, 6)
IS(II ; 1, 10)	E(I ; 13, 14)	M(II ; 1, 26)	E(II ; 14)
IS(II ; 1, 11)	E(I ; 2)	M(II ; 1, 27)	E(II ; 9, 10)
IS(II ; 1, 12)	E(I ; 22, 23)	M(II ; 1, 28)	E(II ; 8)
IS(II ; 1, 13)	E(I ; 27, 28, 31)	M(II ; 1, 29)	E(II ; 11)
IS(II ; 1, 14)	5eme Postulat	M(II ; 1, 30)	On ne connaît pas l'origine
IS(II ; 1, 15)	E(I ; 29, 30)	M(II ; 1, 31)	E(XIII ; 7)
IS(II ; 1, 16)	E(I ; 32, 17)	M(II ; 1, 32)	E(XIII ; 8)

18, 27, 28 et 29. Trois d'entre elles sont d'origines grecques et une existe dans une source arabe. Pour les quatre restantes leur origine nous est encore inconnue.

Sur les trois propositions dont les sources sont grecques, deux ont été empruntées à Archimède. Il s'agit des propositions 27 et 28. La première concerne la comparaison entre les périmètres des polygones réguliers inscrits et circonscrits à un même cercle et la circonférence de ce cercle. Elle correspond à celle *De la sphère et du cylindre*[51] avec les différences suivantes : al-Mu'taman traite à la fois les polygones inscrits et circonscrits à un cercle, alors qu'Archimède n'étudie dans sa proposition que les polygones circonscrits. D'autre part, la preuve d'al-Mu'taman concernant les polygones circonscrits est différente de celle d'Archimède. Ce dernier compare les côtés du polygone aux arcs du cercle; tandis qu'al-Mu'taman admet, implicitement, que l'arc de cercle est plus petit que la somme des côtés qui lui sont circonscrits. Par contre, il démontre la relation $P_m < P_n$ pour $m > n$ (m et n étant les nombres de côtés des polygones P_m et P_n circonscrits au cercle). Enfin, nous remarquons que pour les polygones inscrits au cercle, al-Mu'taman admet que $P_n < P_c$ pour tout n, P_c étant la circonférence du cercle. Il démontre aussi que $P_n < P_m$ pour $m > n$.

La proposition 28 traite de la mesure du cercle et elle est équivalente à la première proposition de *La mesure du cercle* d'Archimède. Al-Mu'taman énonce et démontre cette proposition de la même manière que son illustre prédécesseur, mais en donnant plus de détails[52].

La proposition 17 est la première partie de la proposition 27 du Livre III des *Coniques* d'Apollonius[53]. L'énoncé d'al-Mu'taman cor-

51 Archimède. *Les Œuvres complètes d'Archimède*, op.cit, p. 7.

52 Au sujet de cette proposition, Ibn Sartāq dit : « *Cette proposition peut être considérée comme un postulat* ». Cette note d'Ibn Sartāq révèle qu'il a pressenti la difficulté de résoudre le problème de la mesure du cercle par l'utilisation des outils géométriques existants.

53 Apollonius. 1959. *Les coniques*. (eds. P. V. Eeck). 230-231. Paris.

respond à la partie qui est relative au cercle. Quant à la partie concernant l'ellipse, elle se trouve dans la quatrième section de *l'Istikmāl* qui concerne les coniques [54]. La preuve d'al-Mu'taman est différente de celle d'Apollonius. Ce dernier utilise la notion de rapport entre grandeurs et surfaces et il applique la méthode de la superposition des figures qui fait intervenir les propositions 5 et 9 du Livre II des *Eléments*. Ibn Sartāq expose la preuve d'al-Mu'taman, mais il ajoute une seconde démonstration, différente de la première et qui utilise les arcs et les angles.

La proposition 29 est équivalente à la première proposition du traité d'Ibn al-Haytham sur *La sphère qui est la plus grande des figures solides*[55]. Là aussi nous constatons que l'énoncé et la preuve d'al-Mu'taman sont identiques à ceux d'Ibn al-Haytham, sauf que la démonstration de ce dernier est beaucoup plus détaillée puisqu'il construit les polygones et compare leurs surfaces à celle du cercle (comme a fait al-Mu'taman dans la proposition 28 de ce même chapitre).

Quant aux propositions 5, 6, 8 et 18 dont nous n'avons pas réussi à déterminer les sources éventuelles, nous nous contenterons de faire quelques commentaires sur leur contenu.

Dans la proposition 5, al-Mu'taman compare les angles au sommet de triangles ayant une même base sur le diamètre et les sommets respectifs sur la circonférence du cercle. Cette démarche se trouve déjà dans l'*Almageste* de Ptolémée [56].

La proposition 6 compare aussi les angles sur la circonférence d'un cercle. Cela consiste à mener, d'un point donné à l'extérieur du cercle, une droite passant par le centre du cercle. Si nous joignons des points quelconques sur un seul côté de la circonférence du cercle, au centre et au point extérieur alors, parmi les angles qui sont engendrés, ceux qui sont proches de la ligne joignant le point extérieur au centre sont plus grands que ceux qui en sont éloignés. Comme la proposition 4 de ce chapitre compare des segments de droites dont l'une des deux extrémités est sur le diamètre d'un cercle et l'autre sur sa circonférence, al-Mu'taman a peut- être pensé qu'il fallait établir une proposition semblable pour les angles. Cette hypothèse est suggérée par une note marginale dans laquelle on lit ceci : *«Ce qui est juste, c'est que cette proposition vient après la proposition dans laquelle on a montré, comment mener d'un point donné à l'extérieur d'un cercle une ligne qui lui est tangente, parce qu'il l'a utilisée dans cette proposition, en disant : «Nous menons une ligne tangente BE». Et parce que nous n'avons pas besoin de cette proposition, entre elle et la proposition citée, <celle- ci> doit donc être tout de suite après elle».*

Quant à la proposition 8 elle traite de l'intersection de deux cercles, l'un d'eux passant par le centre de l'autre. Les deux droites menées des deux points d'intersection des deux cercles se rencontrent sur la circonférence de l'arc passant par le centre et aboutissent sur la circonférence de l'autre. Les deux lignes sont égales et chacune de leurs parties est égale à son homologue de l'autre ligne qui est de son côté. Nous n'avons trouvé aucune trace de l'utilisation de cette proposition, ni dans l'*Istikmāl* d'al-Mu'taman ni dans d'autres ouvrages que nous avons pu consulter.

La proposition 18 semble être une généralisation d'une proposition établie par Ibn al-

---

54 Bouzari, A. 2009. *Les Coniques dans la tradition mathématique d'al-Andalus et du Maghreb à travers l'ouvrage d'al-Mu'taman (XIe siècle)*. Thèse de Doctorat. Lille1.

55 Rashed, R. 1993/2002. *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siecle*, Vol. I. 386-388. London.

56 Ptolémée. 1813. *Composition mathématique*, (trad. M. Halma) tome 1. 175-176. Paris.

Haytham dans son traité *fī al-M'lūmāt* [Les connues]. Il s'agit de la proposition 22 du Livre I de ce traité [57] où seul le cas de l'angle aigu est traité. Il faut enfin signaler qu'al-Mu'taman devait probablement savoir que l'utilisation du théorème de Thalès rendait la démonstration plus rapide. Mais, compte tenu du plan de son exposé, il ne pouvait pas faire intervenir à ce niveau la théorie des rapports qu'il avait prévu d'exposer plus loin.

Il nous reste à dire quelques mots sur les propositions des Livres III et IV des *Eléments* abandonnées par al-Mu'taman. Il s'agit des propositions 6, 25, 37 du Livre III et 1 et 10 du Livre IV des *Eléments*. L'abandon de la proposition 6 pourrait s'expliquer soit par son caractère évident, aux yeux d'al-Mu'taman, soit parce qu'elle se retrouve dans les propositions 2 et 13 du deuxième chapitre de la deuxième section de l'*Istikmāl*.

L'objet de la proposition 25 est de compléter la construction d'un cercle connaissant l'un de ses segments. Nous ignorons, pour le moment, pour quelle raison al-Mu'taman a abandonné cette proposition.

Quant à la proposition 37 elle est la réciproque de la proposition 36 de ce même chapitre. Elle utilise la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle pour caractériser, parmi les sécantes à ce cercle, celle qui lui est tangente. Cette caractérisation est implicitement contenue dans la proposition 16 d'al-Mu'taman. Cela explique peut être son abandon par al-Mu'taman.

La proposition 1 du Livre IV montre la possibilité de construire dans un cercle une corde égale à un segment donné. Elle a été utilisée par al-Mu'taman dans plusieurs propositions, en particulier dans la proposition 3 de ce chapitre [58].

La proposition10 servant à la construction du pentagone régulier a été remplacée, chez al-Mu'taman, par la proposition 30 qui lui a permis de réaliser la même construction. Mais il faut signaler que, dans la marge du manuscrit de Copenhague [59], nous trouvons l'énoncé d'une proposition équivalente à la proposition 10 du Livre des *Eléments*. Il est intéressant de noter qu'Ibn Sartāq a inséré cet énoncé marginal dans le corps du texte de son *Ikmāl*, sous la forme d'un corollaire à la proposition 30 de l'*Istikmāl* qui dit ceci : «*Et à partir de cette proposition, on voit comment nous construisons un triangle isocèle de telle sorte que les deux angles à la base sont comme le double de l'angle restant*».

Enfin, en ce qui concerne les propositions communes à al-Mu'taman et à Euclide, elles appartiennent aux Livres III, IV, XI et XII des *Eléments* et elles sont au nombre de 50 : trente-quatre du Livre III, quatorze du Livre IV, une du Livre XI et une du Livre XII. Elles correspondent à vingt et une propositions du *Kitāb al-Istikmāl.*

En conclusion, nous pouvons dire que si la géométrie euclidienne est fortement présente dans les cinq sections de l'*Istikmāl*, c'est pour répondre à une conception nouvelle de la formation, basée sur une tradition grecque utilisant les *mutawāssiṭāt* [Livres intermédiaires] qui

57 Sédillot, E.A. 1834. « Notice du traité des connues géométriques de Hassan Ibn Haitham ». *Journal asiatique* 13 : 449-450.
58 L'abandon de cette proposition par al-Mu'taman peut s'expliquer par la simplicité de cette proposition qui est réduite à construire un segment avec une ouverture du compas. Al-Mu'taman a probablement considéré que cette opération était tellement élémentaire qu'elle ne nécessitait pas une proposition. En effet, il suffit, à chaque fois, de construire, au compas, une corde d'un cercle sans invoquer une proposition.
59 Ms. Copenhague. f. 22a.

Tableau de comparaison entre les propositions du second chapitre de l'*Istikmāl* et celles des *Eléments*
al-Mu'taman Euclide al-Mu'taman Euclide

al-Mu'taman	Euclide	al-Mu'taman	Euclide
M(II ; 2, 1)	E(III ; 1, 2, 3, 4, 9)	M(II ; 2, 16)	E(III ; 35, 36)
M(II ; 2, 2)	E(III ; 5, 10)	M(II ; 2, 17)	Apollonius les *Coniques*
M(II ; 2, 3)	E(III ; 14, 15)	M(II ; 2, 18)	Les connus d'Ibn al-Haytham[60]
M(II ; 2, 4)	E(III ; 7, 8)	M(II ; 2, 19)	E(IV ; 2, 3)
M(II ; 2, 5)	Almageste de Ptolémée[61]	M(II ; 2, 20)	E(IV ; 4, 5)
M(II ; 2, 6)		M(II ; 2, 21)	E(XI ; 22)
M(II ; 2, 7)	E(III ; 20, 21, 22, 31)	M(II ; 2, 22)	E(IV ; 6, 7, 8, 9)
M(II ; 2, 8)		M(II ; 2, 23)	E(IV ; 11, 12, 13, 14)
M(II ; 2, 9)	E(III ; 23, 24)	M(II ; 2, 24)	E(IV ; 15)
M(II ; 2, 10)	E(III ; 26, 27, 28, 29, 30)	M(II ; 2, 25)	E(IV ; 16)
M(II ; 2, 11)	E(III ; 16)	M(II ; 2, 26)	E(XII ; 16)
M(II ; 2, 12)	E(III ; 17	M(II ; 2, 27)	Archimède S.C ; I ;1[62]
M(II ; 2, 13)	E(III ; 11, 12, 13)	M(II ; 2, 28)	Archimède M.C ;Pr ;1[63]
M(II ; 2, 14)	E(III ; 18, 19)	M(II ; 2, 29)	Ibn al-Haytham S.P.G.F.S ; Pr ;1[64]
M(II ; 2, 15)	E(III ; 32, 33, 34)		

aide à former les futurs chercheurs. Elle consiste d'abord à mettre à la disposition des futurs hommes de sciences (et pas seulement des mathématiciens) l'essentiel des éléments mathématiques de haut niveau intervenant dans la recherche. Elle consiste aussi à présenter ces éléments dans le cadre d'une conception philosophique classant les différents outils non pas selon leur nature ou leur utilité dans la résolution des problèmes, mais selon leurs liens ou leur absence de liens mathématiques.

Quant à l'histoire de la géométrie euclidienne en Occident musulman, nous devons dire en premier lieu que la recherche dans ce domaine reste sérieusement handicapée par le manque de documents géométriques produits en Andalus et au Maghreb. Quant aux écrits disponibles, ils sont peu nombreux et souvent incomplets. Mais, cela suffit pour affirmer qu'il y a bien eu une tradition de recherche en géométrie en Andalus et qu'elle a pu atteindre parfois le niveau de celle de la tradition de l'Orient musulman. Cette tradition s'est largement inspirée de la production arabe d'Orient, en particulier celles des frères Banū Mūsā, de Thābit Ibn Qurra, et d'Ibn Haytham, en la prolongeant parfois d'une manière significative.

60 L'énoncé d'al-Mu'taman est une généralisation du cas particulier d'Ibn al-Haytham qui ne traite que l'angle aigu.
61 Ptolémée : *Composition mathématique*, op.cit., pp. 175-176.
62 Proposition 1 du livre I du *Livre de la sphère et du cylindre* d'Archimède.
63 Proposition 1 du Livre *de la mesure du cercle* d'Archimède.
64 Proposition 1 du traité *La sphère qui est la plus grande des figures solides* d'Ibn al-Haytham.

Note de l'éditeur : Cet article est issu d'une version remaniée d'une présentation réalisée lors du colloque « Mathématiques et interculturalité » organisé à l'Irem de Lille en 2009.

Bibliographie

Abū al-Wafā'. 1979. *Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques*, (eds. Ṣalaḥ Aḥmad al-ᶜAlī). Bagdad.

Alaoui, J. 1983. *Mu'allafāt Ibn Bājja* [Les écrits d'Ibn Bājja]. Beyrouth- Casablanca.

Alaoui, J. 1983. *Rasā'il falsafiyya li Abî Bakr Ibn Bājja* [Lettres philosophiques d'Abū Bakr Ibn Bājja]. Beyrouth– Casablanca.

Archimède. 1970. *De la Sphère et du Cylindre*. (eds. et trad. Ch. Mugler), Paris.

Bouzari, A. 2009. *Les Coniques dans la tradition mathématique d'al-Andalus et du Maghreb à travers l'ouvrage d'al-Mu'taman (XIe siècle)*. Thèse de Doctorat. Lille1.

Djebbar, A. 1993. « *Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XIe siècle : al-Mu'taman et Ibn Sayyid* » *(eds.* M. Folkerts & J.P. Hogendijk. *Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard*). 79-91. Amsterdam-Atlanta.

Djebbar, A. 1995. « *La contribution mathématique d'al-Mu'taman et son influence hors d'al-Andalus* » actes du colloque international sur Huit siècles de mathématiques en Occitanie, de Gerbert et des Arabes à Fermat. 35-46, C.I.H.S.O. Toulouse.

Djebbar, A. 1997. « La rédaction de l'*Istikmāl* d'al-Mu'taman (XIe s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIIIe-XIVe siècles». *Historia Mathematica* 24:185-192.

Djebbar, A. 1998. « *La tradition arithmétique euclidienne dans le Kitāb al-Istikmāl d'al-Mu'taman et ses prolongements en Andalus et au Maghreb* ». (eds. Association Tunisienne des Sciences Mathématiques). 85-87. Tunis.

Djebbar, A. 2002. « La circulation des mathématiques entre l'Orient et l'Occident musulmans: interrogations anciennes et éléments nouveaux ». Actes du Colloque International «*From China to Paris : 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*» (eds.Y. Dold-Samplonius, J. W. Dauben, M. Folkerts et B. van Dalen). 228-229. Stuttgart, Steiner Verlag.

Djebbar, A. 1997. « *La rédaction de l'Istikmāl d'al-Mu'taman (XIe s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIIIe-XIVe siècles* ». *Historia Mathematica*24 : 185-192.

Djebbar, A.1998. « *Abū Bakr Ibn Bājja et la mathématiques de son temps* ». (eds *Festchrift Jamal ed-Dine Alaoui, Eudes philosophiques et sociologiques dédiées à Jamal ed-Eddine Aloui*. 5-26. Fès.

Dold-Samplonius, Y. & Hermelink, H. 1990. *Al-Jayyānī*. (eds. Ch. C. 1970. Gillispie Dictionary of Scientific Biography). 83. New York.

Freudenthal, G. 1988. « La philosophie de la géométrie d'al-Fārābī, son commentaire sur le début du 1e livre et le début du Ve livre des *Eléments* d'Euclide ». *Jerusalem Studie in Arabic and Islam*11 : 180.

Guergour, Y. 2006. "*al-Mudkhal ilā sināᶜat al-handasa li Qusṭā Ibn Lūqā*." *Suhayl*6 : 7-79.

Guergour, Y. 2006. *La géométrie euclidienne chez al-Mu'taman Ibn Hūd (m. 478/1085) : Contribution à l'étude de la tradition géométrique arabe en Andalus et au Maghreb*. Thèse de Doctorat, Annaba.

Hogendijk, J. P. 1991. « The geometrical part of the *Istikmāl* of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century)". *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*41 : 207-281.

Ibn al-'Akfānī .1990. *Irshād al-qāṣid ilā asnā l-maqāṣid* [Guide de celui qui vise les plus nobles buts] (eds. M. al-Ḥurr & A.H. ᶜAbdarraḥmān). Le Caire.

Ibn al-Faraḍī. 1966. *Tarīkh ᶜulamā' al-Andalus* [Histoire des savants d'al-Andalus]. Le Caire.

Ibn Sīnā. *Kitāb ash-Shifā', al-Handas.*,(eds. A. I. Sabra & A. Lotfi). Le Caire.

Lévy, T. 1995. « *fragment d'Ibn al-Samḥ sur le cylindre et sur ses sections planes ».* (eds. R. Rashed. *Les mathématiques infinitésimales du IXᵉ au XIᵉ* Vol. I). 885-893. London.

Nicomaque de Gérase. 1978. *L'introduction arithmétique.* (trad. J. Bertier , Livre II). Paris.

Proclus. 1948. *Les commentaires sur le premier Livre des Eléments d'Euclide.* (trad. P. Ver Eecke). Bruges.

Plooij, E.B. 1997. *Euclid's Conception of Ratio and his Definition of Proportional Magnitudes as Criticised by Arabian Commentators,* Rotterdam 1950. Reproduit dans Publications of the Institute for the History of Arabic-Islamic Science. (eds. F. Sezgin avec la collaboration de M. Amawi, C. Ehrig-Eggert & E. Neubauer. *Islamic Mathematics and Astronomy.*

Ptolémée. 1813. *Composition mathématique*, (trad. M. Halma). Paris.

Rashed, R. 1993/2002. *Les mathématiques infinitésimales du IXᵉ au XIᵉ siecle.* London.

Ṣāᶜid al-Andalusī. 1985. *Kitāb Ṭabaqāt al-umam* [Livres des catégories des nations]. (eds. H. Buᶜalwāne). Beyrouth.

Saïdan, A.S. 1991. *Handasat Uqlīdis fī aydin ᶜarabīyya* [La géométrie d'Euclide entre des mains arabes]. Amman.

Sédillot, E.A. 1834. « Notice du traité des connues géométriques de Hassan Ibn Haitham ». *Journal asiatique* 13 : 449-450.

Vahabzadeh, B. 1994. "Two commentaries on Euclid's definition of proportional magnitudes" *Arabic Sciences and Philosophy*4: 181-198.

Villuendas, M.V. 1979. *La trigonometria europea en el siglo XI; Estudio de la obra de Ibn Muᶜādh, al-Kitāb mayhūlāt.* Barcelona.

Vitrac, B. 1990-2001. *Les Eléments d'Euclide*, volume I-IV. Paris.

Woepcke, F. 1855. « Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboul Wafa ». *Journal Asiatique* 5 : 218-256 et 309-359.

Ziyāda, M. 1978. *Shurūḥāt as-samᶜa' aṭ-ṭabīᶜī* [Commentaires sur la Physique]. Beyrouth.