UNE EXPERIENCE DE FORMATION D'ENSEIGNANTS EN GEOMETRIE NON EUCLIDIENNE

El Hadji Malick DIA,
UCAD/FASTEF/MATHS
Sénégal

Résumé : Cet article est le compte rendu d'une expérience de formation d'enseignants en géométrie non euclidienne. Cette expérience s'est déroulée en 2016 à la Faculté des Sciences et Technologies de l'Éducation et de la Formation (FASTEF) de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar où les futurs professeurs des collèges et lycées du Sénégal sont formés. Nous y présentons le dispositif de formation, le compte rendu de chaque séance et les enseignements tirés. Un questionnaire pour recueillir les avis des élèves professeurs sur cette formation leur a été distribué et les réponses sont analysées. L'objet de cette formation était de confronter les élèves professeurs à des mathématiques non scolaires pour élargir leur culture mathématique et changer leur perception des mathématiques et de son enseignement. La manipulation d'objets réels comme un ballon de tennis et l'utilisation de l'ordinateur ont été d'un grand apport dans cette formation. Elles ont permis de découvrir des résultats inespérés avec le papier-crayon. Si l'obstacle majeur était la notion de droite qui pouvait avoir des formes variées, une difficulté récurrente était aussi la non maitrise par les élèves professeurs de la géométrie du cercle.

Introduction

En tant qu'enseignant-chercheur sur la formation des enseignants, il m'a toujours semblé important de trouver des liens entre mes activités de recherche et mes activités d'enseignement. Or, géomètre de formation et intervenant dans la formation des enseignants, j'ai longtemps eu le sentiment que ma formation en géométrie différentielle n'apportait pas de plus-value à mes activités de formation.

Il peut par ailleurs arriver à tout mathématicien de sentir la nécessité de connaitre l'histoire de certaines notions, la genèse de certains problèmes qu'ils abordent dans ses activités de recherche. Ceci a nourri mon intérêt pour l'histoire des mathématiques et, par la suite, nous avons intégré l'histoire des mathématiques dans la formation des professeurs de mathématiques au Sénégal.

Abordant l'histoire de la géométrie dans ce cours, l'incursion faite dans les géométries non euclidiennes m'a amené à me poser les questions suivantes :

Quel peut être l'apport des géométries non euclidiennes dans la formation des professeurs de mathématiques dans les collèges et lycées ?

La connaissance de ces géométries peut-elle changer la perception qu'ont les enseignants des mathématiques et de son enseignement ?

En parcourant quelques pages de *Les Mathématiques* d'Ian Stewart, je rencontre une première réponse de Matthew Ryan qui pense :

> *« L'étude de la géométrie non euclidienne n'apporte pas grand-chose aux étudiants sinon fatigue, vanité, arrogance et imbécilité. L'espace « non euclidien » n'est qu'une pseudo invention de démons qui alimentent les phantasmes et les fausses connaissances des « non euclidiens ». Comme les anciens sophistes, ces « non euclidiens » ne semblent pas se rendre compte que leurs facultés mentales ont été obscurcies par l'opération des esprits du mal. »* (Steward, p. 50).

La réponse ne pouvait être plus embarrassante dans la mesure où nous avons malgré tout le sentiment qu'une certaine connaissance des géométries non euclidiennes pourrait être d'un apport certain dans la formation des enseignants. En effet :

— d'une part, si nous considérons des régions terrestres trop vastes, on ne plus les considérer comme des surfaces planes, mais plutôt comme des surfaces sphériques. La géométrie euclidienne n'est donc plus applicable là où nous vivons : la surface de la terre.

— d'autre part, la connaissance de ces géométries permettrait de voir certaines limites de la géométrie euclidienne et de la nécessité de justifier certains résultats (à priori évidents) de géométrie euclidienne et apporter ainsi plus de rigueur dans l'enseignement de la géométrie dans les collèges et lycées.

Par ailleurs, l'enseignement de la géométrie est un domaine privilégié dans lequel l'expérience peut occuper une place centrale. C'est ainsi que, comme le disent Dias et Durand-Guerrier (2005) :

> *« …la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques est tout à fait essentielle, à l'école élémentaire, et au-delà, ainsi que dans la formation initiale et continue des enseignants. »* (p. 63)

Or, dans l'expérience de formation d'enseignants en géométrie non euclidienne que nous proposons, beaucoup de manipulations d'objets géométriques se feront sur le disque de Poincaré (modèle de géométrie hyperbolique) et sur la sphère (modèle de géométrie elliptique). Nous pensons donc qu'une telle expérience pourrait modifier de manière considérable leur perception des mathématiques et de son enseignement. En effet, une telle expérience permettrait à l'élève professeur de mieux voir les mathématiques comme outil de modélisation de la réalité et de donner une place importante à la conjecture.

Par ailleurs, il me semble nécessaire de situer une telle expérience de formation d'enseignants dans le débat sur le type de mathématiques à offrir dans la formation des enseignants.

En effet, comme l'ont relaté Proulx et Bernardz (2009, p. 129),

> *« Dans la communauté des formateurs, un débat est présent entre ceux qui voudraient offrir une formation mathématique universitaire « solide et approfondie », la même que celle qu'on offre aux futurs mathématiciens, ceux qui privilégient une formation intégrée dans laquelle les connaissances mathématiques sont revisitées à travers notamment la formation didactique et la réflexion sur la pratique, ou*

encore ceux qui affirment le besoin d'un « juste équilibre », les enseignants devant en savoir un peu plus en mathématiques que ce qu'ils enseignent aux élèves (pour en avoir une vue d'ensemble et pouvoir notamment faire des liens entre les différents concepts et voir les extensions possibles du travail abordé…). »

Pour ces mêmes auteurs, il y a deux dimensions à prendre en considération dans la formation des enseignants : l'exploration des mathématiques scolaires et l'engagement des futurs enseignants dans une certaine culture mathématique.

En accord certain avec ces auteurs sur l'engagement des futurs enseignants dans une certaine culture mathématique, nous souhaitons engager nos élèves professeurs dans une culture mathématique qui leur permettrait de changer leur perception des mathématiques et de son enseignement.

Enfin, notons qu'à propos du cinquième postulat d'Euclide, même s'il a toujours semblé moins évident que les autres, n'a jamais était rejeté. On pensait qu'il était inutile, c'est-à-dire qu'on devrait pouvoir le démontrer à partir des autres axiomes. Comme on le verra plus loin, il y eut plusieurs tentatives sans succès et ce postulat est resté pendant longtemps le noyau de la géométrie. Nous pensons donc qu'aborder la question du cinquième postulat dans une expérience de formation d'enseignants devrait amener les élèves professeurs à réfléchir sur les fondements des mathématiques en général et de la géométrie en particulier.

Tous ces éléments nous ont conforté dans l'idée d'élaborer et d'expérimenter un dispositif de formation avec la cohorte des quarante-deux (42) élèves professeurs de l'année académique 2015-2016 de la section F1B2 du département de mathématiques de la Faculté des Sciences et Technologies de l'Éducation et de la Formation (FASTEF) de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar (UCAD)[1].

L'expérimentation s'est faite dans le cadre du module d'Épistémologie et d'histoire des mathématiques qui est un élément constitutif de l'unité d'enseignement intitulé *Pédagogie de la spécialité*[2].

La suite de l'article s'articule comme suit. Après une présentation du dispositif de formation, nous ferons un compte rendu des différentes séances suivi d'une analyse de ces séances. Il s'en suivra une exploitation et une analyse des résultats du questionnaire adressé aux élèves professeurs. Une conclusion générale ouvrant d'autres pistes de réflexion clôturera cet article.

1. — Présentation et analyse a priori du dispositif de formation

La formation s'est déroulée en quatre séances :

— Pour amener les élèves professeurs à prendre du recul par rapport à la géométrie euclidienne, nous avons proposé une séance introductive d'une heure autour de la notion de plus court chemin.

1 La FASTEF est la principale structure chargée de la formation initiale des professeurs au Sénégal. Il y a trois sections de formation de professeurs :
La section F1C qui recrute avec le BAC pour deux années de formation (F1C1 et F1C2) ;
La section F1A qui recrute avec la licence pour deux années de formation ;
La section F1B qui recrute avec le master 1 pour deux années de formation (F1B1 et F1B2).
2 La pédagogie de la spécialité est une unité d'enseignement qui comprend tout ce qui est en rapport avec les contenus mathématiques à enseigner ainsi que des éléments de didactiques et d'histoire des mathématiques.

— Une fois que les élèves professeurs ont pris du recul par rapport à la géométrie euclidienne, il nous a semblé nécessaire de retracer brièvement l'histoire de la géométrie jusqu'à l'émergence des géométries non euclidiennes. Ce sera l'objet de la deuxième séance qui a duré 2h.

Les élèves professeurs étant informés de l'existence de géométries non euclidiennes et des conditions dans lesquelles elles sont nées, nous sommes passés à des activités qui permettaient de mieux comprendre ces géométries. Ce sera l'objet des troisième et quatrième séances. En effet :

— La troisième séance qui a duré 3h est une présentation de la géométrie hyperbolique à travers le modèle de Poincaré ;

— La quatrième séance, d'une durée de 2h, est une présentation de la géométrie elliptique (ou plutôt la géométrie sphérique).

L'expérience est sanctionnée par un questionnaire qui nous a permis de recueillir leurs avis avant, pendant et après la formation.

1. 1 *Séance 1 : Atelier d'introduction*

Dans cette séance, l'activité proposée en atelier est le problème classique du nageur en difficulté. Son énoncé est le suivant :

> *Me promenant au bord de la rivière, le long d'un rivage rectiligne, j'aperçois un nageur en difficulté. Par où dois-je plonger pour le sauver le plus rapidement possible ?*
> *Faut-il courir tout droit vers le rivage pour rejoindre l'eau au plus vite ?*
> *Faut-il au contraire réduire au minimum la longueur du trajet dans l'eau ?*
> *Ou vaut-il mieux aller droit de A vers B sur terre comme sur mer ?*

L'objet de cet atelier est d'amener les élèves professeurs à relativiser la notion de plus court chemin, ce qui permettra d'avoir une vision plus large de la notion de droite. L'atelier est ainsi une porte d'entrée dans les géométries non euclidiennes.

La première difficulté attendue est la bonne compréhension de l'énoncé. S'agit-il du trajet le plus court en longueur ou en durée ? La deuxième difficulté réside dans la formulation du problème en termes mathématiques. En effet si nos étudiants sont relativement à l'aise dans la résolution de problèmes purement mathématiques, ils le sont moins dans des problèmes nécessitant une modélisation.

La solution attendue est placée en Annexe 1.

1. 2 *Séance 2 : Histoire des Géométries non euclidiennes*

Cette partie de la formation, dont le texte intégral est placé en Annexe 2, est un exposé retraçant brièvement l'histoire des géométries non euclidiennes. Les points suivants ont été abordés :

• les travaux autour du cinquième postulat ;

— les tentatives d'élimination du cinquième postulat qui mènent vers une géométrie pauvre ;

— les fausses démonstrations utilisant des résultats équivalents ;

— la contribution des savants arabo-musulmans ;

— les travaux de Saccheri et de Lambert ;

• l'avènement des géométries non euclidiennes avec Lobatchevsky, Bolyai et Gauss ;

• la refondation d'Hilbert avec la mise en avant des axiomes d'incidence et de parallélisme suivants :

— **Axiome d'incidence (I)** : *Par deux points du plan, passe une droite et une seule.*

— **Axiome des parallèles (P)** : *Par tout point du plan, on peut mener une parallèle et une seule à une droite donnée.*

L'objet de cette séance est de faire comprendre aux élèves professeurs, partant de la géométrie euclidienne, comment d'autres géométries ont pu voir le jour. Cette séance, au-delà de l'élargissement de la culture des élèves professeurs, permettrait à ces derniers de mieux comprendre les fondements de la géométrie euclidienne. De manière évidente, l'hypothèse de l'angle aigu et celle de l'angle obtus vont paraitre absurdes pour ces élèves professeurs qui, pour la plupart d'entre eux, n'ont rencontré que la géométrie euclidienne.

1. 3 *Séance 3 : La géométrie hyperbolique*

La géométrie hyperbolique est présentée à travers le modèle de Poincaré. Il s'est agi de voir ce que deviennent les axiomes d'incidence et de parallélisme, mais aussi la propriété relative au concours des médiatrices d'un triangle en géométrie euclidienne. Cette séance comporte deux parties :

Première partie : Après une présentation des éléments de base tels que les notions de points, de droite, d'angle et de distance (voir Annexe 3), nous proposons un atelier don les consignes sont les suivantes :

Atelier 1

— Donnez un programme de construction d'une droite hyperbolique puis réalisez ce programme avec « Geogebra »

— Que pensez-vous de l'axiome d'incidence (I) ?

— Que pensez-vous du postulat des parallèles (P) ?

L'objet de cet atelier est d'amener les élèves professeurs à construire des droites hyperboliques puis de voir ce que deviennent les axiomes d'incidence et de parallélisme en géométrie hyperbolique. Cet atelier nécessite une assez bonne connaissance de la géométrie du cercle (puissance d'un point par rapport à un cercle, cercles orthogonaux, faisceau de cercles, etc.).

Solution attendue

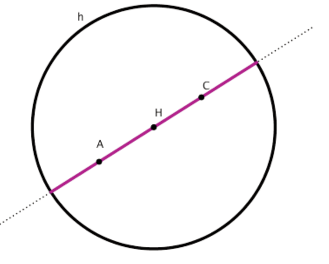

Figure 1-1

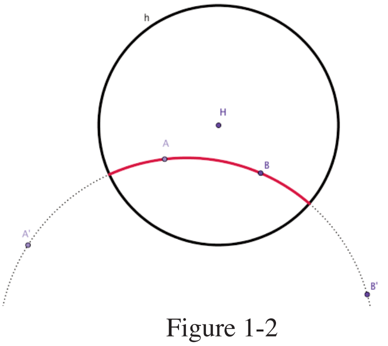

Figure 1-2

h est le cercle horizon de centre H, A, B et C trois points du disque tels que d'une part, A, H et B sont non alignés et d'autre part, A, H et C alignés. La droite hyperbolique $d_h(A,C)$ est le diamètre de h passant par A et C (Fig. 1-1).

Pour construire la droite hyperbolique $d_h(A,B)$, on construit les points A' et B', inverses respectifs des points A et B par rapport au cercle

h. Sachant que ces quatre points sont cocycliques, on construit le cercle passant par trois de ces quatre points ; il est orthogonal au cercle horizon. La droite hyperbolique d_h(A,B) est l'arc de ce cercle contenu dans le disque de Poincaré (*cf.* figure 1-2).

L'axiome d'incidence reste vrai : *Par deux points du plan hyperbolique, passe une droite et une seule.*

Ceci est dû à l'unicité du cercle passant par deux points et orthogonal au cercle horizon.

Le postulat des parallèles devient : *Par un point extérieur à une droite, il passe une infinité de parallèles.*

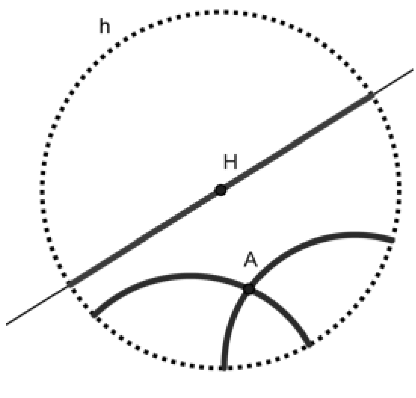

Figure 2

Deuxième partie : La deuxième partie de cette séance porte sur le triangle hyperbolique.

Après avoir défini la notion de triangle hyperbolique et constaté expérimentalement que la somme des angles est inférieure à 180°, nous définissons le cercle hyperbolique comme l'ensemble des points équidistant du centre et énonçons la propriété suivante :

Le cercle hyperbolique de centre O passant par A est le cercle euclidien de centre I passant par A où I est à l'intersection :

— *De la droite des centres (HO)*

— *De la tangente en A au cercle support de la droite hyperbolique (AO).*

En exercice, on s'est appuyé sur cette propriété pour construire un cercle hyperbolique (*cf.* figure 3).

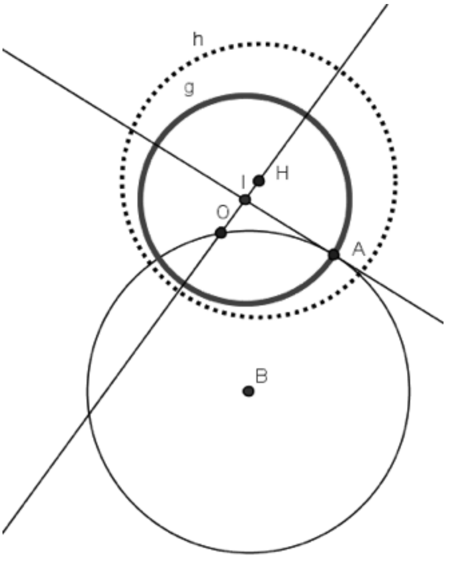

Figure 3

Par la suite, nous définissons la médiatrice d'un segment comme *l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment* puis proposons un atelier autour des trois médiatrices d'un triangle dont les consignes sont les suivantes :

Consignes de l'atelier 2 :

1. Donnez un programme de construction de la médiatrice d'un segment

2. Réalisez ce programme avec « Geogebra ».
3. Le théorème euclidien sur les trois médiatrices d'un triangle reste t-il vrai ?

Pour cet atelier, nous cherchons à voir ce que devient le théorème sur les médiatrices d'un triangle en géométrie hyperbolique. La découverte de ce théorème, qui nécessite l'exploration des différents cas de figures, amènerait certainement les élèves professeurs à sentir le besoin de justifier certains résultats de géométrie euclidienne.

A priori, si des difficultés ne sont pas attendues au niveau des constructions, elles pourraient se présenter dans la découverte du théorème. En effet, les étudiants seraient tentés de se contenter des premiers cas de figure où les trois médiatrices sont concourantes.

Solution attendue

1. On trace les cercles hyperboliques de centre A passant par B et de centre B passant par A ; ils se rencontrent toujours en deux points. La droite hyperbolique passant par les deux points est la médiatrice du segment hyperbolique . Elle est bien perpendiculaire au support du segment et passe naturellement par son milieu (dans le sens hyperbolique).
2. Construction de la médiatrice d'un segment (*cf.* figure 4)
3. Les trois médiatrices ne sont pas toujours concourantes. Elles sont soit concourantes, soit parallèles (*cf.* figures 5 & 6 ci-contre).

1. 4 *Séance 4 : La géométrie elliptique (ou plutôt sphérique)*

Cette séance comporte deux parties : un atelier de découverte et une présentation de quelques propriétés de la géométrie sphérique.

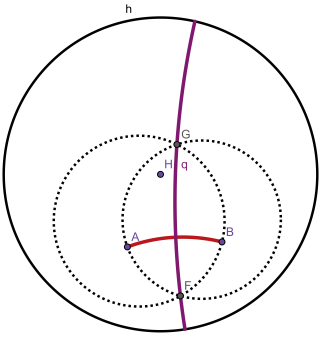

Figure 4: construction médiatrice

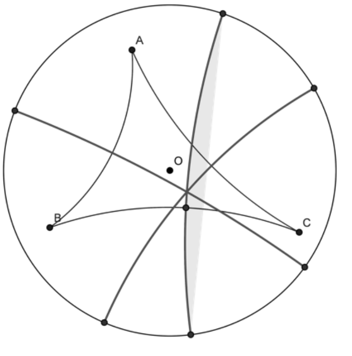

Figure 5: Médiatrices concourantes

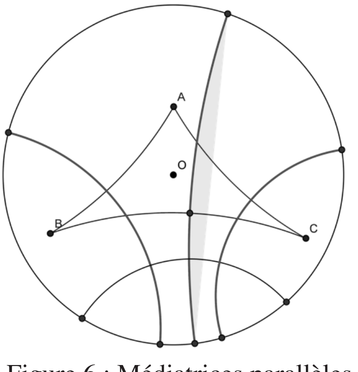

Figure 6 : Médiatrices parallèles

Partie 1 : *Atelier de découverte*

Cette quatrième et dernière séance s'est déroulée en deux parties : une première partie sous forme d'atelier autour de la géométrie sphérique et une deuxième partie mettant en place les éléments de base de la géométrie sphérique et quelques propriétés du triangle sphérique.

Première partie

Cette partie correspond à un atelier dont les consignes sont les suivantes :

En individuel puis en groupes de deux, répondez avec justification à l'appui aux questions suivantes :

Prenez une balle de tennis ; elle a la forme d'une sphère.

1. Choisissez deux points sur cette balle puis reliez-les par une ficelle bien tendue : *c'est un chemin.*
2. Parmi tous les chemins possibles, quel est le plus court d'entre eux ?

De tels chemins sont les géodésiques de la sphère. Elles correspondent aux droites.

3. Quelle est alors la nature de ces « droites » ?
4. Combien de droites passent par deux points donnés
5. Que pensez-vous alors du postulat des parallèles ?
6. Pouvez-vous définir une distance sur la sphère ? Un angle ?
7. Peut-on y parler de triangle ? Quel serait alors la somme des angles ?

L'objet de cet atelier est de découvrir, avec des ballons de tennis, des ficelles et du scotch, les géodésiques de la sphère. Les manipulations de ces objets permettraient d'émettre des conjectures sur les axiomes d'incidence et de parallélisme ainsi que sur la somme des angles d'un triangle sphérique.

Le cas des points antipodaux pourrait être un obstacle à une bonne énonciation de l'axiome d'incidence.

Partie 2 : *Présentation*

Dans cette partie dont le texte intégral est placé en Annexe 4, nous présentons la géométrie sphérique en nous appuyant sur l'atelier de la première partie. Nous y définirons les notions de base (point, droite, angle et distance). L'axiome d'incidence (I) n'étant pas vérifié, on a identifié deux points antipodaux sur la sphère, ce qui revient à travailler sur une demi-sphère et une moitié d'équateur. Dans ce cas l'axiome d'incidence sera vérifié et seul le postulat des parallèle reste non vérifié ; c'est cela qui correspond à la géométrie elliptique. Par la suite nous nous sommes intéressés au triangle sphérique. Le constat expérimental sur la somme des angles a été éclairé par la formule de Girard, formule qui permet aussi de démontrer le théorème d'Euler par lequel on a terminé cette partie.

L'objet de cette deuxième partie est, comme en géométrie hyperbolique, de voir ce que deviennent certaines propriétés de géométrie euclidienne en géométrie elliptique ; ce qui permettrait d'enseigner aussi la géométrie euclidienne avec plus de rigueur. En outre, ils seront emmenés à voir l'apport que peut avoir la géométrie sphérique pour la géométrie euclidienne.

2. — Compte rendu et analyse a posteriori des séances

2.1 Séance 1 : *Atelier d'introduction*

L'objet principal de cette séance est d'amener les élèves professeurs à voir que le plus court chemin reliant deux points n'est pas toujours la droite usuelle. Elle peut varier d'un milieu à un autre.

Il faut d'emblée noter que ce qui importe ici n'est pas le chemin de plus courte longueur, mais celui dont le temps de parcours sera le plus bref. On s'attendait évidemment à la réponse qui semblait être la plus naturelle : *aller droit de A vers B sur terre comme sur mer.*

Déroulement

La consigne était de réfléchir d'abord individuellement puis de se mettre en groupe de deux. Il y a eu beaucoup de discussion autour de la notion de « plus court chemin » : Est-ce en termes de durée ou en termes de longueur ?

Finalement, la majorité a compris que, dans ce contexte, c'est en termes de durée et non en longueur même si une faible minorité résiste encore.

Après discussions et échanges à l'intérieur des groupes puis entre les groupes, le problème a été reformulé de la manière suivante :

On se donne deux points A et B de part et d'autre d'une droite, et M un point de la droite (D). Exprimez le temps de parcours du sauveteur en fonction de v, w , MA et MB. Ce temps étant noté f(M), déterminez alors la condition pour que f admette un minimum en M.

Dès que le problème est posé en termes d'optimisation, l'outil analytique a été mis en avant. Nous leur avons suggéré l'outil géométrique. (Voir annexe 1)

Analyse a posteriori

L'analyse de cette séance nous permet de retenir deux points essentiels :

— Les élèves professeurs, même s'ils sont titulaires d'un Master 1, rencontrent toujours des difficultés dans la modélisation. En effet, dans certaines filières de l'enseignement supérieur, la manière dont on enseigne les mathématiques ne favorise pas la connexion entre mathématiques et réalités. Dès lors, même s'ils disposent d'un arsenal d'outils pour résoudre des problèmes mathématiques bien libellés, ils sont complètement démunis devant un problème concret.

— L'idée consistant à dire que le plus court chemin pour aller d'un point à un autre est la ligne droite a été un facteur bloquant pendant cette séance. En effet la notion de droite a été toujours vue comme cette droite dans le plan ou dans l'espace. Il n'a jamais été question de droite comme géodésique d'une surface et donc de forme variable.

Notons qu'à la fin de la séance, malgré les difficultés rencontrées, les élèves professeurs commencent à relativiser la notion de droite.

2.2 Séance 2 : *Histoire des géométries non euclidiennes*

Cette deuxième séance, dont le contenu est placé en Annexe 2, est un exposé succinct sur l'histoire des géométries non euclidiennes. Beaucoup de questions ont surgi pendant cet exposé. Parmi celles-ci, on peut citer :

« Comment des savants de renom ont-ils pu se tromper de la sorte ? »

« Les hypothèses de l'angle aigu et d'angle obtus posées par Saccheri sont absurdes. »

« Ces nouvelles géométries ont elles un rapport avec la réalité ? »

L'analyse de ces réactions montre que :

— L'enseignement des mathématiques, tel que c'est reçu par ces étudiants, présente les notions sous leur forme achevée et nie l'histoire. Or, l'histoire montre que le savoir mathématique est construit progressivement. Et la rectification d'erreurs commises dans la construction des savoirs a permis la consolidation des théories mathématiques. Ainsi, une certaine connaissance de l'histoire permet au professeur de changer son rapport avec l'erreur.

— Les hypothèses de Saccheri ont semblé inadmissibles pour ces élèves professeurs. Ceci s'explique par le fait qu'ils ont été formatés avec la géométrie euclidienne, ce qui exclut à priori toute autre hypothèse différente de celle de l'angle droit. Néanmoins, l'atelier d'introduction, dont l'objectif principal était de relativiser la notion de droite, a beaucoup aidé à l'acceptation des hypothèses de Saccheri.

— Pour la troisième interrogation, nous leur avons donné l'exemple de la navigation et de la relativité qui utilisent fortement les géométries non euclidiennes.

— Notons aussi que l'idée consistant à croire que les mathématiques sont faites par les européens reste prédominante au niveau des élèves professeurs. En effet, l'apport de la civilisation arabo musulmane n'est pas bien connu même s'ils savent que le mot « algèbre » est d'origine arabe. Cette méconnaissance est certainement due aux choix faits dans certains manuels.

En conclusion, au-delà de l'importance que peut apporter l'histoire dans la formation des enseignants, cette séance a été une occasion d'élargir la culture mathématique des élèves professeurs.

2.3 Séance 3 : La géométrie hyperbolique

Après une présentation des éléments de base de la géométrie hyperbolique (voir annexe 3), nous avons proposé un premier atelier dont l'objet est de voir ce que deviennent les axiomes d'incidence et de parallélisme.

Ne disposant pas tous d'ordinateurs, nous avons disposé les élèves professeurs en petits groupes de trois avec un ordinateur dans chaque groupe.

Si la droite $d_h(A,C)$ passant par A et C (alignés avec le centre) a été tracée sans problème car elle correspond à un diamètre du cercle horizon, ils se sont heurtés à la droite $d_h(A,B)$. En effet, tous ont essayé de tracer au hasard des cercles pour ensuite vérifier si ces cercles sont orthogonaux. Nous avons alors fait un rappel sur les cercles orthogonaux.

Définition : *Deux cercles sécants sont orthogonaux si, en chacun des deux points d'intersection, les tangentes à l'un et à l'autre cercle sont orthogonales.*

Propriété : *Soient (C) un cercle de centre O, A et B deux points n'appartenant pas à (C) et distincts de O, A' et B' leurs inverses respectifs par rapport à (C).*

Les quatre points A, B, A' et B' sont cocycliques et le cercle qui les contient est tangent à (C).

La plupart d'entre eux ont avoué n'avoir jamais rencontré les cercles orthogonaux. Néanmoins, le rappel sur les cercles orthogonaux a permis de sortir un programme de construction puis de le réaliser.

Ce même rappel a permis d'obtenir des réponses satisfaisantes aux questions suivantes.

Déroulement

Les étudiants se sont mis encore en petits groupes. Dans certains groupes, on essaie de chercher le milieu du segment en essayant de prendre la moitié de la longueur de l'arc. Il a fallu que je rappelle qu'il s'agit de distance hyperbolique.

Nous leur avons alors demandé de s'inspirer de la méthode de construction d'une médiatrice en géométrie euclidienne. C'est alors qu'ils ont pensé aux cercles hyperboliques.

Finalement, ils ont pu donner le programme de construction et l'ont réalisé. La perpendicularité a été vérifiée expérimentalement mais pour certains groupes le fait qu'elle passe par le milieu n'était pas évident. Il a fallu rappeler la distance hyperbolique pour les ramener à l'ordre.

Pour la question relative aux trois médiatrices, dans tous les groupes, les trois médiatrices étaient concourantes. Il a fallu qu'on fasse une petite animation en examinant plusieurs cas de figures pour qu'ils se rendent compte ce n'est pas toujours le cas. À la suite des discussions, le théorème suivant a pu être énoncé.

Théorème : *Les trois médiatrices d'un triangle sont soit concourantes, soit parallèles. Dans le cas où elles sont parallèles, elles ont une perpendiculaire commune, ou elles sont « concourantes » sur la ligne d'horizon.*

Même si la preuve n'était pas demandée, nous avons senti la nécessité d'en donner quelques éléments. Elle repose sur les propriétés suivantes :

— *Deux droites parallèles qui ne sont « concourantes » sur la ligne d'horizon ont une seule perpendiculaire commune.*

— *Un point M est sur la médiatrice de [AB] si et seulement si A et B sont équidistants de M : MA = MB.*

— *Une droite D est perpendiculaire à la médiatrice de [AB] si et seulement si A et B sont équidistants de D (et du même coté).*

Une fois que ces propriétés sont en place, la preuve devient simple.

Preuve du théorème :

Soient D1, D2 et D3 les médiatrices du triangle.

— Si deux sont sécantes, on reproduit la démonstration euclidienne.

— Si elles ne se coupent pas, et si elles ne sont pas «concourantes sur l'horizon, deux d'entre elles (disons celles de [AB] et [AC]) ont une perpenduculaire commune Δ avec A et B équidistants de Δ (et du même coté) et A et C équidistants de Δ (et du même coté). On en déduit que B et C sont équidistants de Δ (et du même coté). D'où Δ est perpendiculaire à [BC]

Analyse a posteriori

Cette troisième séance a révélé deux choses : l'apport considérable des TICE dans la formation des enseignants et la non-maîtrise des éléments de base de la géométrie, en particulier de la géométrie du cercle.

Pour ce qui concerne les TICE, beaucoup de conjectures ont pu être faites grâce à la manipulation. Ce qui serait sans doute impossible avec le papier-crayon.

Par contre, la non maitrise de la géométrie a été un obstacle majeur dans cette formation. En effet, les élèves professeurs ont très souvent buté sur des propriétés relatives aux cercles. Ceci est dû au fait que la plupart d'entre eux proviennent de la série S2[3] où la géométrie n'est pas très présente. Pire, ce type de géométrie n'est pas enseigné au supérieur.

2.4 Séance 4 : La géométrie elliptique

Cette quatrième et dernière séance s'est déroulée en deux parties : une première partie sous forme d'atelier autour de la géométrie sphérique et une deuxième partie mettant en place les éléments de base de la géométrie sphérique et quelques propriétés du triangle sphérique.

Déroulement

Pour l'atelier dont l'objet est de découvrir les plus courts chemins reliant deux points d'une sphère et d'examiner les axiomes d'incidence et de parallélisme, tous les étudiants sont venus avec le matériel (ballon de tennis, ficelles, élastique, etc.)

Les étudiants, très enthousiastes, se sont attelés à tracer des chemins et à reporter les mesures sur du papier. Dès lors, il est apparu que le plus court chemin est celui qui est obtenu quand la ficelle est bien tendue (voir photo 1, Annexe 5). Nous leur avons suggéré de prolonger les géodésiques. Du coup, l'idée de cercle passant par l'origine est apparue.

Pour la question 4, tous les groupes sauf un ont proposé une seule droite, un seul groupe a évoqué le cas de points diamétralement opposés (voir photo 2, annexe 5)

Par la suite, la réponse à la question 5 était immédiate. Pour la question 6, la notion de distance a été reliée à la longueur de l'arc et s'inspirant de ce qui a été dit en hyperbolique, la notion d'angle a été bien perçue. Pour la question 7 (Voir photos 3 et 4, annexe 5).

A la suite de cet atelier, nous avons fait une présentation sous forme d'exposé avec une interaction entre enseignant et élèves-professeurs. Cette présentation, dont le contenu est placé en Annexe 4 est une introduction à la géométrie elliptique (ou sphérique). Elle a permis de découvrir certaines propriétés du triangle sphérique.

Analyse a posteriori

Cette séance d'introduction à la géométrie elliptique a révélé trois points qui me semblent importants :

— Dès le début de la formation, l'idée prédominante est la relativisation de la notion de droite. Cette séance a permis de rencontrer une autre géométrie dans laquelle les droites ont des formes différentes de celles qu'elles ont à géométrie euclidienne.

— La dimension expérimentale doit occuper une place importante dans l'enseignement des mathématiques, mais aussi dans la formation des enseignants. En effet, elle permet de faire des conjectures, ce qui est une étape importante dans la résolution de problèmes.

— Enfin, un résultat de géométrie sphérique (le théorème de Girard) qui permet de justifier une propriété de géométrie dans l'espace (le théorème d'Euler) révèle encore les interactions entre différents domaines mathématiques. En effet, le réinvestissement des outils d'un domaine dans la résolution d'un problème apparu dans un autre domaine doit occuper une place importante dans la formation des enseignants.

3 La série S2 est une des séries scientifiques où les sciences expérimentales sont dominantes à la différence de la série S1 où les mathématiques et les sciences physiques sont dominantes.

3. — Le questionnaire

A la fin dette formation, un questionnaire, dont le texte figure en Annexe 6, a été administré aux 42 élèves professeurs de la section.

3. 1 Présentation et analyse a priori

Le questionnaire s'articule autour de trois axes : Avant, pendant et après la formation.

Avant la formation

On a essayé de voir le degré de connaissance des géométries non euclidiennes. A priori, ces élèves professeurs n'ont certainement pas rencontré ces géométries dans leur cursus. Du coup, ces géométries ne devraient pas servir à grand-chose d'autant plus qu'elles ne sont pas enseignées dans les collèges et lycées.

Pendant la formation

Nous avons essayé de voir si les activités introductives ont permis de relativiser les notions connues en géométries euclidienne.

En outre, nous voulons recueillir leur avis par rapport au matériel et à l'outil informatique. Bien entendu, nous nous attendons à ce que la notion de géodésique ne puisse remplacer automatiquement la notion de droite. Même s'ils seront curieux de voir l'utilisation attendue des ballons de tennis, ficelle et autres, certaines difficultés sont attendues dans la manipulation. Enfin, nous nous attendons à certaines difficultés dans l'utilisation de « Geogebra ». Sur le plan mathématique, beaucoup de propriétés en rapport avec le cercle devraient faire l'objet de rappels.

Après la formation

Sur cette partie, on a essayé de voir l'apport de cette formation. Nous nous attendons à ce qu'ils évoquent une nouvelle vision de l'enseignement des maths en général et de l'enseignement de la géométrie en particulier.

3.2 Analyse a posteriori

Dans cette partie, nous proposons une analyse qualitative des résultats du questionnaire. L'exploitation quantitative est placée en annexe 6.

Avant la formation

La plupart des élèves professeurs disent que même s'ils ont entendu parler des géométries non euclidiennes, ils ne les ont jamais rencontrées dans leurs cursus.

Néanmoins deux étudiants prétendent les avoir déjà rencontré dans le cours de Master 2, option géométrie différentielle. Cependant, ils n'ont pas vu leur rapport avec la réalité ; ces cours ne leur ont pas permis de mieux comprendre l'univers. Ceci est dû aux méthodes d'enseignement dans ces filières : pour l'essentiel, le cours de maths se fait sans rapport avec la réalité.

Pendant la formation

La plupart des élèves professeurs commencent à relativiser la notion de droite. Cependant une minorité se pose toujours la question de savoir si un cercle peut être une droite.

Par rapport au matériel, même si quelques problèmes de manipulation ont été rencontrés, la plupart des élèves professeurs reconnaissent que cette expérience leur a permis de mieux comprendre la géométrie sphérique.

La non maitrise de « Geogebra » par certains élèves professeurs a été un frein au bon déroulement des activités. Néanmoins, les expériences ont été concluantes.

Enfin, beaucoup de problèmes ont été rencontrés sur le plan mathématique. En effet, les élèves professeurs reconnaissent ne pas connaitre ou avoir oublié les propriétés relatives à la géométrie du cercle, propriétés qui seront à la base de la plupart des constructions à faire. Ceci s'explique par le fait que la plupart d'entre eux on un bac S2 et qu'ils n'ont pas cette géométrie dans le cursus universitaire.

L'organisation mixte (groupe / individuel) a été saluée par les élèves professeurs.

Après la formation

Par rapport à l'apport des géométries non euclidiennes dans la formation des enseignants, les réponses peuvent être classées sur quatre plans :

— **Sur le plan mathématique :** Le théorème de Girard au secours de la géométrie dans l'espace.

— **Sur le plan logique** : La belle fausse démonstration par l'absurde de Saccheri peut faire l'objet d'étude dans la formation des enseignants.

— **Sur le statut de l'erreur** : Les fausses démonstrations de Saccheri ont permis l'émergence des géométries non euclidiennes.

— **Sur la rigueur mathématique :** Ce qui s'est passé avec les médiatrices hyperboliques devrait pousser davantage les enseignants à être plus rigoureux dans la démonstration de la propriété relative aux médiatrices d'un triangle euclidien.

— **Sur la démarche expérimentale :** Elle peut occuper une place centrale dans notre enseignement. Cependant, il ne pas se fier aux premières apparences comme ce qui s'est passé avec les médiatrices hyperboliques.

Bibliographie

Bonola R. (1954) *Non euclidean geometry*, New York ,Dover publications.

Euclide (1990*, Les Elémen*ts (Vol 1), trad. B. Vitrac, Paris, PUF.

Dias T. et Durand-Guerrier V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères–IREM*, 60, juillet 2005, pp. 61-78.

Greenberg M.J. (1994) *Euclidean and non Euclidean geometries: Development and History*, New York, Freemann.

Gonseth F. (1974) *Les fondements des mathématiques. De la géométrie d'Euclide à la Relativité générale et à l'Intuitionnisme,* Paris, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Perrin D. (2009) *Les géométries non euclidiennes*, http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/Romilly.pdf

Pont J.-C. (1986) *L'Aventure des parallèles. Histoire de la géométrie non euclidienne : précurseurs et attardés.* Berne ; New York : P. Lang.

Proulx J. et Bernardz N. (2009) *Quelle formation mathématique pour les futurs enseignants ? un éclairage fondé sur une analyse des recherches*, *Actes du colloque EMF-Dakar 2009*, pp. 91-103.

Stewart I. (1989) *Les mathématiques*, Pour la science, Paris : Belin.

ANNEXE 1

Solution de l'atelier d'introduction

Reformulation

En généralisant légèrement la question, on se donne deux points A et B de part et d'autre d'une droite, et M un point de la droite (D).

1. Exprimez le temps de parcours du sauveteur noté f(M) en fonction de v, w, MA et MB.
2. Notons α (resp. ß) l'angle formé par (MA) (resp (MB)) avec (D), A' et B' les projetés orthogonaux de A et B sur (D), M' et M'' deux points du segment [A'B'] tels que A', M', M, M'' et B' soient disposés dans cet ordre. Montrez que :

$$f(\text{M}') - f(\text{M}) > \text{MM}'\left(\frac{\cos\beta}{w} - \frac{\cos\alpha}{v}\right) \quad \text{et} \quad f(\text{M}'') - f(\text{M}) > \text{MM}''\left(\frac{\cos\alpha}{v} - \frac{\cos\beta}{w}\right)$$

Déterminez alors la condition pour que f admette un minimum en M.

Indications : Si P et Q sont les projetés orthogonaux respectifs de M' sur (MA) et (MB), montrez que : AM' > AP = AM – MM'$\cos\alpha$ puis que : M'B > QB = MB + MM4 $\cos\beta$.

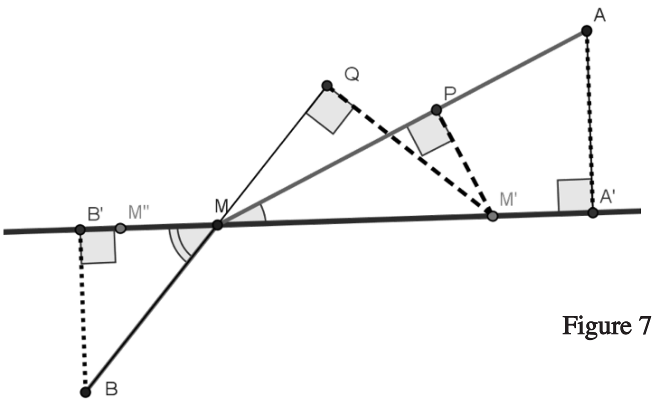

Figure 7

Solution

1. $f(\text{M}) = \dfrac{\text{MA}}{v} + \dfrac{\text{MB}}{w}$

2. $f(\text{M}') - f(\text{M}) = \dfrac{\text{M'A} - \text{MA}}{v} + \dfrac{\text{M'B} - \text{MB}}{w}$

Avec les indications, on montre que : AM' > AP = AM – MM'$\cos\alpha$ et de même que :
M'B > QB = MB + MM4 $\cos\beta$.

Ainsi, pour que f admette un minimum en M, il faut : f(M') – f(M) > 0 et f(M'') – f(M) > 0 .

3. Les relations obtenues dans la deuxième question conduisent à la relation suivante :

$$\frac{1}{v}\cos\alpha = \frac{1}{w}\cos\beta$$

Introduction

ANNEXE 2

Présentation du cours sur l'histoire des géométries non euclidiennes

Dans le cours de F1B1 qui correspond à la première année de formation des élèves professeurs de lycée, nous avions retracé l'histoire de la géométrie de la préhistoire à l'antiquité grecque. Nous nous sommes intéressés particulièrement à Euclide (-335 ; -265) et les *Éléments* qui ont conduit à un changement de paradigme dans les mathématiques.

En effet, si ses prédécesseurs ont basé leurs travaux sur l'intuition, Euclide s'est démarqué de cette approche en mettant en place, dans « Les Eléments », un système hypothético-déductif.

Cette œuvre entreprend de déduire l'ensemble des résultats mathématiques à partir d'un petit nombre d'entre eux, explicitement admis : ce sont les définitions, les demandes (Postulats) et les notions communes (Axiomes). Tous les autres résultats (Propositions) n'apparaissent alors que comme des conséquences des résultats premiers, à l'issue de raisonnements qui se veulent absolument précis et rigoureux, sans recours à l'intuition ou à l'évidence sensible, mais par le seul moyen de la démonstration mathématique.

Dans ce cours, après avoir les premiers pas qui ont mené vers les géométries non euclidiennes, nous parlerons brièvement de l'avènement de ces géométries pour terminer par la refondation de la géométrie de Hilbert.

1. Vers les géométries non euclidiennes

Dans le livre 1 de son ouvrage monumental « Les Éléments » qui est composé de 13 livres, Euclide présente cinq demandes :

D1 : *Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.*

D2 *: Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.*

D3 : *Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.*

D4 : *Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.*

D5 : *Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.*

Ce cinquième et dernier postulat est le plus célèbre de tous les *Éléments* d'Euclide, si bien qu'il est souvent appelé **« le postulat d'Euclide »**. Cependant, son énoncé exact est la plupart du temps inconnu par ceux qui citent ce postulat, aussi dit **« postulat des parallèles »**.

Historiquement, les géomètres de toutes les époques ont considéré cet postulat comme un point faible de la géométrie euclidienne. Ils n'ont cessé de s'interroger sur la possibilité de démontrer ce cinquième postulat à partir des quatre autres postulats et des définitions, de manière à pouvoir établir la géométrie euclidienne sans qu'il soit nécessaire de poser ce postulat. Il y eut d'innombrables tentatives qui ont toutes échoué.

Certains qui ont cru démontrer le **« postulat des parallèles »** n'ont fait que le remplacer par un autre, logiquement équivalent, mais toujours indémontrable. Parmi ces hypothèses de remplacement ; on peut citer :

— Trois points quelconques sont soit alignés, soit sur un cercle.

— La somme des angles d'un triangle est égale à 180 degrés.

— Il est possible de construire des figures semblables.

D'autres, qui pensaient l'éliminer, se sont retrouvés avec une géométrie très pauvre : **la géométrie absolue**. En effet, même si on obtient une géométrie exempte de contradiction, tous les résultats dépendant du cinquième postulat disparaissent :

— On n'a plus la somme des angles d'un triangle qui est égale à 180°

— On ne plus démontrer l'existence d'un carré

— On n'a plus de théorème de Pythagore.

1.1 La contribution des savants arabo-musulmans.

Après une période de traduction des héritages des Anciens (Grecs, Indiens, ...) qui débuta au VII^{ème} siècle jusqu'au VIII^{ème} siècle, les savants arabo-musulmans ont commencé à développer leurs connaissances dans de nombreuses disciplines mathématiques, en particulier en géométrie. C'est ainsi qu'au même titre que les trois grands problèmes de l'antiquité (duplication du cube, quadrature du cercle et trisection de l'angle), ils se sont aussi intéressés au problème posé par le postulat des parallèles. Leur contribution sur la théorie des parallèles constitue la seule tentative faite au moyen âge pour résoudre le problème posé par le cinquième postulat. Parmi ces savants, on retiendra essentiellement le savant persan Omar Khayyâm avec son traité *Sharḥ mā ashkala min muṣādarāt kitāb Uqlīdis* [Commentaires sur les difficultés de certains postulats du livre d'Euclide] écrit en 1077. Dans ce traité, Khayyām (1048-1131) tente de démontrer par l'absurde le postulat des parallèles. Son raisonnement s'appuie sur un quadrilatère dont les deux angles de base sont droits, et les côtés latéraux de même longueur. Le but est de démontrer que les deux autres angles ne sont ni aigus ni obtus.

1.2 L'œuvre de SACCHERI

En 1733, l'italien Giovanni Girolamo Saccheri publie un livre en deux volumes intitulé : « *Euclide corrigé de tous ses défauts* ». Dans cet ouvrage Saccheri reprend les travaux de Omar Khayyam. Il essaie une démonstration par l'absurde basée sur la construction suivante :

Sur une droite on élève deux segments perpendiculaires de même longueur. Cette dernière fait avec les deux perpendiculaires des angles égaux.

Il démontre par la suite le résultat suivant :

Les angles en C et D sont aigus (respectivement droits ou obtus) si et seulement si CD est plus grand (égal ou plus petit) que AB.

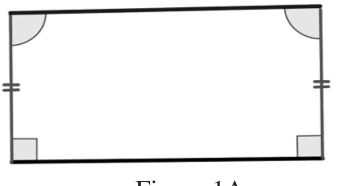

Figure 1A

Ce résultat conduit alors aux trois hypothèses suivantes :

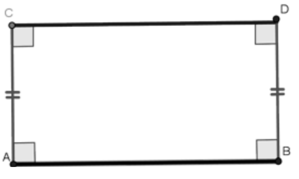

Figure 2A : Hypothèse de l'angle droit C = D = 90°

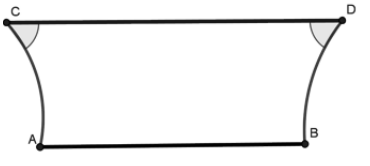

Figure 3A : Hypothèse de l'angle aigu C = D < 90°

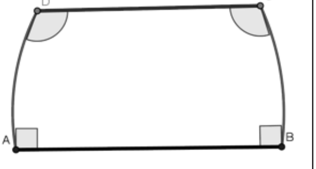

Figure 4A : Hypothèse de l'angle obtus C = D > 90°

Il peut paraître évident que ABCD est un *rectangle* et que le seul cas envisageable est celui de D = C = 90°. Cependant, pour le prouver, le postulat d'Euclide est nécessaire. En fait, Saccheri démontre que l'hypothèse de l'angle droit est équivalente au postulat des parallèles. Il ne reste alors qu'à démontrer que les deux autres hypothèses sont impossibles. C'est là où Saccheri buta sur des obstacles insurmontables.

En effet, dans le tome 1 il tente de démolir l'hypothèse de l'angle obtus et termine par l'affirmation suivante : « *l'hypothèse de l'angle aigu est totalement fausse car intolérable pour la nature de la ligne droite* ». Cependant, son manque de conviction est confirmé par l'existence du tome 2 qui tente d'étayer le raisonnement. Dans la proposition 37, trois fausses démonstrations sont proposées et dans la proposition 38, il affirme : « *l'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse car elle se détruit elle-même* ».

Il résume tout en déclarant que sa réfutation de l'angle obtus est « *claire come le jour* », mais note que l'impossibilité de l'angle aigu repose sur la proposition 37.

En fait ces deux hypothèses vont conduire respectivement à des géométries sur des surfaces concaves et convexes.

1.3 L'œuvre de Lambert

Un demi-siècle plus tard, Jean-Henri Lambert (1728-1777) fit une tentative similaire en démontrant un grand nombre de théorèmes qui paraissent très étranges du point de vue euclidien, mais qui pourtant, ne contiennent aucune contradiction logique.

Pour le cas de l'angle aigu, il établit une formule qui relie l'aire d'un triangle à la somme de ses angles A, B, C :

$$\textit{Aire}\,(\mathrm{ABC}) = k^2\,(\pi - (\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C})),\ \ (k \text{ étant une certaine constante}).$$

Cette formule s'apparente à un théorème de géométrie sphérique qui établit que sur une surface de rayon r, l'aire d'un triangle ABC est donnée par :

$$\textit{Aire}\,(\mathrm{ABC}) = r^2\,((\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}) - \pi),\ \ (r \text{ étant le rayon de la sphère}).$$

Dès lors, l'idée que l'axiome des parallèles peut se trouver à défaut pour la géométrie propre de certaines surfaces commence à germer.

2. L'avènement des géométries non euclidiennes

Si les travaux cités précédemment avaient pour but de consolider l'œuvre d'Euclide, un point de vue plus audacieux apparut au début du XIXe siècle : construire un univers où les quatre premiers postulats sont vérifiés mais le cinquième ne l'est pas.

La géométrie dans cet univers sera dite non euclidienne. Ces mêmes idées naquirent simultanément chez trois personnes : Bolyai, Lobatchevski et Gauss.

Il y a essentiellement deux types de géométrie non euclidienne : la géométrie hyperbolique et la géométrie elliptique. Pour chacune de ces géométries, différents modèles seront proposés par les mathématiciens parmi lesquels on peut citer Beltrami, Klein, Poincaré, etc.

Finalement, on se retrouve avec trois géométries : la géométrie euclidienne, la géométrie hyperbolique et la géométrie sphérique.

3. L'œuvre de Hilbert

Avec l'avènement des géométries non euclidiennes, les géomètres du XIX^e siècle ne sont plus satisfaits de la rigueur présente dans « Les Eléments » d'Euclide. En effet, la démonstration rigoureuse de certains théorèmes de géométrie euclidienne nécessite des hypothèses implicites supplémentaires. On peut donner l'exemple des déplacements qui sont sous jacents dans les égalités d'angles et de triangles, etc.

Ainsi, dans un mémoire paru en 1899, Les fondements de la géométrie, David Hilbert propose une nouvelle axiomatisation de la géométrie euclidienne.

Dans son texte, après avoir introduit trois types d'objets primitifs : point, droite et plan, il énumère les axiomes qu'il classe en cinq groupes (Axiomes d'incidence, d'ordre, des parallèles, de congruence et de continuité). Pour la suite, on s'intéressera aux axiomes d'incidence et de parallélisme. En particulier, on examinera dans les différentes géométries :

— L'axiome d'incidence **(I)** : *Par deux points du plan, passe une droite et une seule*

— Le postulat des parallèles **(P) :** *Par tout point du plan, on peut mener une seule parallèle à une droite donnée.*

ANNEXE 3

La géométrie hyperbolique

Parmi les nombreux modèles de géométrie hyperbolique, le plus connu est le modèle de Poincaré. Il permet de représenter l'univers entier, infini, à l'intérieur d'un cercle de centre O et de rayon 1 : c'est le disque de Poincaré.

Points et droites

— Les points sont les points intérieurs du disque.

— Le cercle, bord de ce disque, correspond aux points à l'infini ; on dit aussi que c'est le cercle horizon. Les points du cercle horizon sont aussi appelés des points idéaux.

— Les droites sont des diamètres lorsqu'elles passent par le centre O du disque, sinon ce sont des arcs de cercle orthogonaux au bord.

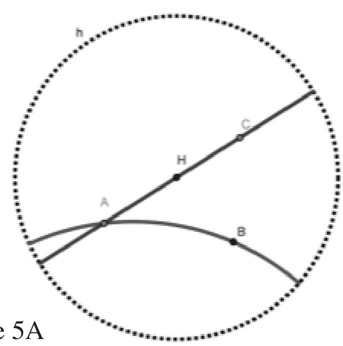

Figure 5A

Angle

— L'angle formé par deux *demi-droites* (deux arcs de cercles) de même origine est l'angle formé par les tangentes à ces arcs de cercle en ce point.

— Cette représentation conserve les angles du plan euclidien : deux droites hyperboliques qui se croisent et dont les tangentes en leur point d'intersection font des angles de α degrés correspondent sur le plan hyperbolique à deux droites faisant des angles de α degrés.

On dit que la représentation est conforme.

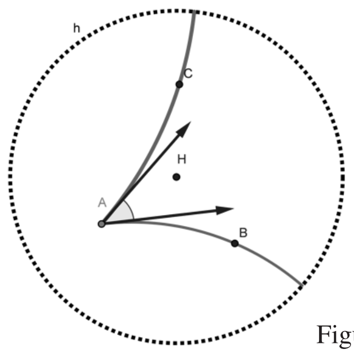

Figure 6A

Distance :

La distance entre deux points A et B, notée $\overline{\mathrm{AB}}$, est donnée par la formule suivante où A' et B' sont les extrémités de la droite hyperbolique $d_h(\mathrm{A,B})$ et **ρ** est une constante arbitraire strictement positive :

$$\overline{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{\rho}\left| ln\left(\frac{\mathrm{AB'} \times \mathrm{BA'}}{\mathrm{AA'} \times \mathrm{BB'}}\right)\right|$$

et

$$\overline{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{\rho}\left| ln\left(\frac{1 + \mathrm{OA}}{1 - \mathrm{OA}}\right)\right|.$$

Remarque :

Contrairement aux angles, les distances n'y sont pas conservées : Plus on s'approche du bord, plus les points, proches en apparence, sont, en réalité éloignés.

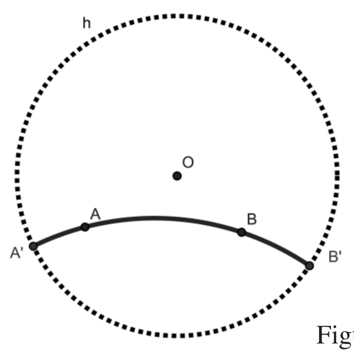

Figure 7A

ANNEXE 4

La géométrie elliptique

Introduction

Avant de parler de géométrie elliptique, présentons d'abord la géométrie sphérique, qui, rappelons-le, a existé bien avant l'émergence des géométries non euclidiennes.

Soit S la surface d'une sphère de centre O et de rayon 1 dans un espace euclidien E de dimension 3. On dit que deux points de S sont antipodaux si la droite qui les joint dans E passe par le centre O de la sphère.

Toute intersection non vide d'un plan de E avec S est un cercle (éventuellement réduit à un point si le plan est tangent à la sphère). Parmi ces cercles, ceux de rayon maximal appelés *grands cercles* sont ceux dont le plan est diamétral, c'est-à-dire passe par le centre O de S.

Les éléments de base

Points et droites. Les points sont les points de la sphère et les droites sont les grands cercles de la sphère : ce sont les géodésiques de la sphère. En effet, on peut s'en convaincre expérimentalement avec une ficelle et un ballon de tennis ; c'est ce qu'on a fait dans l'atelier d'introduction à la géométrie sphérique. Après ce constat, on peut prouver ce résultat de la manière suivante :

Preuve : Soit (C) une courbe sur la sphère unité. Avec les coordonnées cylindriques, on a :

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (1), $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ (2), r et θ étant des fonctions de t.

En remplaçant x et y par leurs expressions en fonction de r et θ dans (1) on obtient :

$$r^2 + z^2 = 1 \quad (3),$$

La longueur de la courbe (C) est donnée par : $L = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$.

En utilisant les relations (2) et (3), on obtient : $L = \int_a^b \sqrt{\dfrac{z'^2}{1 - z^2} + (1 - z^2)(\theta')^2}\,dt$.

On a alors : $L \geq \int_a^b \dfrac{|z'|}{\sqrt{1 - z^2}}\,dt$.

On a l'égalité lorsque $\theta' = 0$, soit θ constant, ce qui correspond à un grand cercle.

Angle. L'angle formé par deux *demi-droites* (deux arcs de cercles) de même origine est l'angle formé par les tangentes à ces arcs de cercle en ce point.

Distance. Étant donné deux points A et B non antipodaux sur la sphère, il existe un seul grand cercle (ce sont les droites) qui les contient. Ces deux points divisent le grand cercle en deux arcs de cercle dont l'un est plus court que l'autre. Soit α la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$ et posons : $d(A,B) = R\alpha$. On définit ainsi une distance dans cette géométrie. En effet, on a les propriétés suivantes :

(i) $d(A,A) = 0$;

(ii) $d(A,B) = d(B,A)$;

(iii) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$.

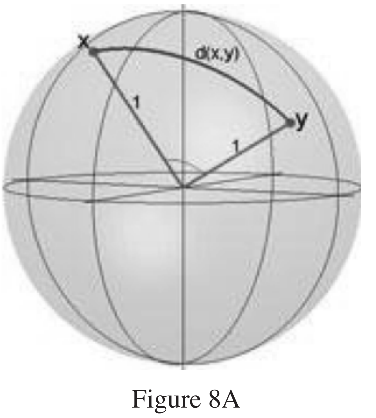

Figure 8A

Les axiomes d'incidence et de parallélisme [4]

Dans cette géométrie, deux droites seront dites parallèles si elles ne se rencontrent pas.

— L'axiome d'incidence (I) devient (I'') : *Par deux points de la sphère, il passe :*

- — *une seule droite s'ils ne sont pas antipodaux ;*
- — *une infinité de droites s'ils sont antipodaux.*

En effet : Si A et B sont deux points non antipodaux, il existe un seul grand cercle qui les contient : c'est l'intersection de la sphère avec le plan (AOB).

— L'axiome des parallèles (P) devient (P'') : *Par un point extérieur à une droite donnée, il ne passe aucune droite parallèle.*

En effet, deux grands cercles se coupent toujours en deux points et ceux-ci sont antipodaux.

Remarque : Ce qui gène dans la géométrie sphérique, c'est que (I) n'est même pas vérifiée. Pour y remédier, on peut identifier deux points antipodaux ; ce qui revient à travailler sur l'hémisphère nord (ou sud) et une moitié d'équateur. On obtient alors une géométrie qui vérifie tous les axiomes d'Euclide sauf le postulat des parallèles : c'est cela **la géométrie elliptique.**

Le triangle sphérique :

Trois points de la sphère définissent un triangle sphérique (*cf.* figure 9A). On peut constater expérimentalement que la somme des angles d'un triangle sphérique est toujours supérieure à 180°. En fait, on a le théorème suivant :

Théorème – La Formule de Girard (1595-1632)

Soient ABC un triangle sphérique, T son aire, α, β, μ ses angles mesurés en radian.

On a la formule suivante : $\alpha + \beta + \mu = \pi + T$

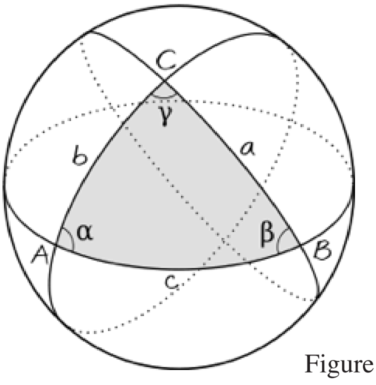

Figure 9A

Démonstration : voir [http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/95055062.pdf]

La formule de Girard permet de démontrer le théorème suivant :

Le théorème d'Euler

Pour tout polyèdre régulier convexe, si F désigne le nombre de faces, S le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes, alors, on a la formule suivante : $F + S - A = 2$.

4 Deux droites sont parallèles si elles ne se rencontrent pas.

ANNEXE 5

Photos

Photo 1

Photo 2

Photo 3 : triangle sphérique

Photo 4

ANNEXE 6

Le questionnaire - résultats

1. Avant le cours atelier

1. Etiez-vous au courant de l'existence de géométries autres que la géométrie euclidienne ?

Oui	Non
35	7

2. Etes-vous confrontés une fois à une situation inexplicable en géométrie euclidienne ?

Oui	Non
2	40

3. Avez-vous étudié les géométries non euclidiennes dans votre formation académique ?

Oui	Non
2	40

Si oui, cela vous a t il été utile ?

Oui	Non
0	2

2. Pendant le cours atelier

1. L'activité de découverte sur les plus courts chemins vous a-t-elle permis de relativiser la notion de droite ?

Oui	Non
39	3

2. Le matériel utilisé pour découvrir la géométrie sphérique est il adéquat ?

Oui	Non
42	0

3. L'outil informatique utilisé pour découvrir des propriétés en géométrie hyperbolique était-il convenable ?

Oui	Non
31	11

4. Avez-vous rencontré des problèmes lors de ces ateliers ?

Matériel	Mathématiques	Organisationnel	Autres
5	40	0	0

Précisez si c'est Autres

3. Après le cours

1. Quel peut être l'apport de ces géométries dans votre formation d'enseignant ?

Mathématique	Logique	Statut de l'erreur	Rigueur	Démarche expérimentale
37	3	27	13	29

2. Pensez vous que certains éléments de géométrie non euclidienne peuvent être enseignés au lycée ?

Oui	Non
1	41

Si votre réponse est Oui, *précisez :*

3. La géométrie euclidienne suffit elle pour comprendre l'univers ?

Oui	Non
40	2

Réponses de deux élèves professeurs

Le questionnaire

Chers étudiants, ce questionnaire entre dans le cadre d'une recherche sur l'apport des géométries non euclidiennes dans la formation des enseignants.
Nous vous garantissons du caractère anonyme dans le traitement des réponses et vous remercions d'avance de votre collaboration.

I. Avant le cours atelier

1. Étiez-vous au courant de l'existence de géométries autres que la géométrie euclidienne ? Oui | Non X
2. Êtes-vous confrontés une fois à une situation inexplicable en géométrie euclidienne ?
   Oui X | Non
   Si oui, laquelle ?
   ...Refraction de la lumière...........................
   Avez-vous étudié les géométries non euclidiennes dans votre formation académique ?
   Oui | Non X
   Si oui, cela vous a t il été utile ? Oui | Non

II. Pendant le cours atelier

1. L'activité de découverte sur les plus courts chemins vous a-t-elle permis de relativiser la notion de droite ? Oui X | Non
2. Le matériel utilisé pour découvrir la géométrie sphérique est il adéquat ?
   Oui X | Non
3. L'outil informatique utilisé pour découvrir des propriétés en géométrie hyperbolique était il convenable ? Oui X | Non
4. Avez-vous rencontré des problèmes lors de ces ateliers
   Matériel X | Mathématique X | Organisationnel | Autres
   Précisez si c'est Autres Maîtrise de géogebra

III. Après le cours

1. Quel peut être l'apport de ces géométries dans votre formation d'enseignant ?
   Faire attention aux premiers résultats des expériences
2. Pensez vous que certains éléments de géométrie non euclidienne peuvent être enseignés au lycée ? Oui | Non X

   Si votre réponse est oui, précisez.
3. La géométrie euclidienne suffit elle pour comprendre l'univers ? Oui | Non X
   Expliquez votre réponse.
   La géometrie euclidienne ne me permet pas d'expliquer la loi de la refraction.

Le questionnaire

Chers étudiants, ce questionnaire entre dans le cadre d'une recherche sur l'apport des géométries non euclidiennes dans la formation des enseignants.

Nous vous garantissons du caractère anonyme dans le traitement des réponses et vous remercions d'avance de votre collaboration.

I. Avant le cours atelier

1. Étiez-vous au courant de l'existence de géométries autres que la géométrie euclidienne ? Oui X à la fac Non
2. Êtes-vous confrontés une fois à une situation inexplicable en géométrie euclidienne ?
   Oui X Non
   Si oui, laquelle ? Trajectoire des avions
   Avez-vous étudié les géométries non euclidiennes dans votre formation académique ?
   Oui X Non
   Si oui, cela vous a t il été utile ? Oui Non X

II. Pendant le cours atelier

1. L'activité de découverte sur les plus courts chemins vous a-t-elle permis de relativiser la notion de droite ? Oui X Non
2. Le matériel utilisé pour découvrir la géométrie sphérique est il adéquat ?
   Oui X Non
3. L'outil informatique utilisé pour découvrir des propriétés en géométrie hyperbolique était il convenable ? Oui Non
4. Avez-vous rencontré des problèmes lors de ces ateliers
   Matériel Mathématique X Organisationnel Autres
   Précisez si c'est Autres

III. Après le cours

1. Quel peut être l'apport de ces géométries dans votre formation d'enseignant ?
   Ces géométries m'ont permis de faire plus attention
2. Pensez vous que certains éléments de géométrie non euclidienne peuvent être enseignés au lycée ? Oui X Non
   Si votre réponse est oui, précisez. les coordonnées sphériques
3. La géométrie euclidienne suffit elle pour comprendre l'univers ? Oui Non X
   Expliquez votre réponse.
   Je n'ai jamais compris avec la géometrie euclidienne que les trajectoires des avions sont les plus courts chemins.