REPERES - IREM. N° 120 - juillet 2020

EXPLOITER INSTRUMENTS ET HISTOIRE DANS LE LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES

Exemples de séquences didactiques avec les machines mathématiques

Michela MASCHIETTO
Dipartimento di Educazione e Scienze Umane
Università di Modena e Reggio Emilia (IT)

Ce texte est également consultable en ligne sur le portail des Irem, onglet : Repères IREM http://www.univ-irem.fr/

Introduction

Ce texte présente des activités relevant d'une expérience italienne du laboratoire de mathématiques (« laboratorio di matematica »), dans laquelle les élèves travaillent avec des artefacts matériels appelés « machines mathématiques ». Celles-ci sont ainsi définies par le constructeur M. Pergola (NRSDM, 1992) :

> Une machine mathématique (liée au domaine de la géométrie) a pour but précis (qui ne dépend pas de son usage effectif) de résoudre le problème suivant : obliger un point, un segment ou n'importe quelle figure (soutenus par un support matériel approprié qui les rend visibles) à se déplacer dans l'espace ou à être transformé en accord avec une loi mathématiquement définie [par le constructeur] [1].

Une machine mathématique (Bartolini Bussi et Maschietto, 2006) peut donc être un système articulé comme le pantographe (Bénard, 2014) pour les transformations géométriques, un traceur de courbe (avec un système articulé ou non), ou un perspectographe pour dessiner en perspective. Le compas correspond également à la définition citée ci-dessus et peut être considéré comme un des premiers ancêtres des traceurs de courbes. Les machines du laboratoire de mathématiques ont été construites à partir de recherches historiques principalement dans un but didactique, mais aussi pour la diffusion de la culture mathématique. La définition ci-dessus contient une caractéristique fon-

1. Traduction par l'auteur.

damentale des machines du laboratoire de mathématiques : chacune met en jeu un concept mathématique bien précis, décidé lors de sa construction.

Les instruments auxquels nous nous référerons ici sont conservés au « Laboratorio delle macchine matematiche » (www.mmlab.unimore.it) de l'Université de Modena e Reggio Emilia, en Italie. Ils sont depuis plusieurs années proposés dans des « sessions de laboratoire de mathématiques » pour des classes de l'enseignement secondaire dans les locaux du Laboratorio (Maschietto, 2010), mais aussi utilisés dans la formation des enseignants (Maschietto, 2012) et dans des scénarios didactiques en classe. On s'intéresse ici principalement au cas des activités avec les élèves.

Dans cet article, nous expliciterons d'abord l'idée du laboratoire telle qu'elle apparaît dans les documents institutionnels italiens. Nous donnerons ensuite quelques références théoriques issues de la recherche en didactique des mathématiques pour la mise en œuvre du laboratoire de mathématiques. Nous présenterons enfin des exemples d'utilisation des machines mathématiques en classe, avec leurs analyses didactiques.

1. — Le « laboratoire de mathématiques » dans les documents ministériels italiens

L'idée de « laboratoire de mathématiques » est présente depuis le début du XX^{e} siècle dans les réflexions sur l'enseignement des mathématiques (Bkouche, 2008 ; Giacardi, 2012 ; Maschietto et Trouche, 2010). En particulier, en Italie, l'idée de laboratoire apparaît grâce à G. Vailati (1863–1909), et le concept d'école-laboratoire (Giacardi, 2012), conçue comme un espace où les élèves pouvaient faire des expériences, se poser et résoudre des problèmes sous la conduite de l'enseignant. Cependant, son projet de renouvellement de l'enseignement n'a jamais été mis en œuvre. Vers la moitié du XX^{e} siècle, l'idée de « laboratoire de mathématiques » fut toutefois de nouveau soutenue et développée par E. Castelnuovo (1913–2014), puis reprise dans les années 2000 dans les documents de la Commission de l'Union Mathématique Italienne (UMI–CIIM) chargée de la rédaction des recommandations pour les programmes de mathématiques (« Mathématiques pour le citoyen »). Dans le document pour l'enseignement secondaire « Matematica 2003 » [2] (Anichini et al., 2004), cette Commission déclare que le laboratoire de mathématiques « n'est pas un lieu physique autre que la classe, c'est plutôt un ensemble structuré d'activités visant à construire des significations des objets mathématiques » (([3]), p. 26). Il est caractérisé par le recours aux instruments (par exemple, logiciels, calculatrices, objets manipulables, ...) dans le travail mathématique. Dans la liste proposée, on y trouve les machines mathématiques.

Au début des années 2010, les recommandations ministérielles (« Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione », MIUR, 2012) [4] pour l'école élémentaire et le collège (sixième – quatrième) se réfèrent au laboratoire de mathématiques comme un élément essentiel dans l'enseignement des sciences :

> Un élément fondamental est le laboratoire, conçu à la fois comme lieu physique et moment dans lequel l'élève est actif, formule ses hypothèses et en contrôle les conséquences, conçoit et expérimente, discute et

2 https://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/Mat2003.zip

3 http://www.matematica.it/tomasi/lab-did/pdf/matem-2003-curricolo.pdf (citation traduite par l'auteur)

4 http://www.indicazioninazionali.it/2018/08/26/indicazioni-2012/

argumente ses choix, apprend à recueillir des données, négocie et construit des significations, arrive à des conclusions provisoires et à de nouvelles ouvertures par la construction de connaissances personnelles et collectives (MIUR, 2012, p. 60)[5].

Pour l'enseignement secondaire (élèves à partir de 14 ans), les recommandations ministérielles (« Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento », MIUR, 2010)[6] défendent l'importance du « recours constant au laboratoire pour l'enseignement des disciplines scientifiques » (MIUR, 2010, p.7)[7].

2. — Éléments théoriques pour la mise en œuvre des laboratoires de mathématiques avec des instruments

Les activités autour de machines mathématiques sont conçues et menées dans le cadre de recherches en didactique des mathématiques. Nous expliquons brièvement dans cette partie les grands principes guidant la manière dont nous envisageons ces activités, les choix des consignes pour les élèves et la conduite en classe par l'enseignant.

Nous ancrant dans le cadre de la genèse instrumentale de Rabardel (1995), nous distinguons l'artefact – l'objet en soi – et l'instrument, construction cognitive personnelle du sujet utilisant l'artefact pour résoudre une tâche dans un certain contexte. Le processus permettant de faire d'un artefact un instrument est appelé genèse instrumentale. Il s'agit pour le sujet de développer des schèmes d'utilisation de l'artefact.

Dans les activités qui nous intéressent, un artefact est utilisé par l'enseignant comme instrument de médiation sémiotique pour un certain savoir mathématique (nous nous rattachons ici à la théorie de la médiation sémiotique, Bartolini Bussi et Mariotti, 2008 ; Maschietto et Bartolini Bussi, 2013). Nous visons à travers ces activités une utilisation didactique d'une machine mathématique, c'est-à-dire qui permette de mettre en évidence les significations mathématiques que l'artefact embarque, par le biais de questions posées aux élèves, selon leur niveau et les connaissances et savoirs visés.

Quelques principes sous-tendent cette approche :

— Des artefacts culturels sont présents en classe, comme productions humaines et historiques mettant en jeu un certain savoir mathématique.

— L'introduction et l'usage d'un artefact sollicite une activité sémiotique avec le développement de signes (appelés « textes situés » comme, par exemple, des gestes, des mots, des dessins) qui peuvent être exploités par l'enseignant pour soutenir la construction de significations mathématiques emportés, vers des textes mathématiques.

— Le travail conduit avec les artefacts est structuré par des consignes précises ; la seule manipulation d'un artefact n'est pas suffisante (et ne l'assure pas) à l'acquisition des mathématiques.

— Le rôle de l'enseignant est crucial dans le choix de l'artefact et la conception des consignes (fondés sur l'analyse du potentiel sémiotique de l'artefact, conçu comme le double lien entre l'artefact et les sens personnels des élèves d'un côté, l'artefact et le savoir mathématique de l'autre côté) et pour la conduite des discussions collectives en classe.

5 Traduction par l'auteur.
6 http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf
7 Traduction par l'auteur.

Les activités sont organisées à travers des alternances (appelées « cycle didactique ») de phases de travail en petits groupes avec l'artefact, de discussions mathématiques collectives guidées par l'enseignant et de travail individuel (en classe ou à la maison). Chaque scénario didactique, qui débute par le travail avec la machine choisie, est structuré autour de ces quatre questions :

1) *Comment est faite la machine ?*
2) *Que fait-elle et comment le fait-elle ?*
3) *Pourquoi trace-t-elle une certaine courbe ou réalise-t-elle une certaine transformation géométrique ?*
4) *Que se passe-t-il si on change… ?*

Les deux premières questions ont pour objectif de soutenir le processus d'appropriation de la machine (Maschietto et Trouche, 2010) par l'analyse de sa structure et la constitution des schèmes d'utilisation avec production de textes et dessins (genèse instrumentale). Elles poussent aussi à formuler des conjectures sur ce que produit la machine ou, a minima, à interpréter ses produits. La troisième question ouvre l'accès à la pensée théorique et au savoir embarqué par la machine. Cette question peut être posée dès le travail de groupe si les élèves ont les connaissances qui permettent d'y répondre ; autrement des consignes intermédiaires doivent être prévues. La quatrième question requiert de faire varier les paramètres de la machine tout en obtenant le même résultat (par exemple la même courbe ou la même transformation géométrique) ; elle sera mieux précisée dans la présentation des exemples.

La discussion collective (appelée mathématique) implique fortement l'enseignant, qui a le rôle de faire partager les réponses aux questions et soutenir l'émergence et la formulation du savoir mathématique de la machine (évolution des signes situés vers des signes mathématiques).

L'enseignant a aussi un rôle essentiel non seulement dans le choix de l'artefact, mais aussi dans la formulation des consignes spécifiques. Celle-ci repose sur l'analyse du potentiel sémiotique de l'artefact, que nous allons maintenant préciser à travers deux exemples. Le premier concerne les sections coniques, le second est centré sur les transformations géométriques.

3. — Les sections coniques

Les sections coniques sont un contenu classique pour les élèves italiens du lycée (14–19 ans). Dans les Indications ministérielles de 2010, on trouve une référence claire aux approches analytique et synthétique :

> Les sections coniques seront étudiées du point de vue et de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique. En outre, l'élève approfondira la compréhension des spécificités de chaque approche (synthétique et analytique) pour l'étude de la géométrie. Il étudiera [...] la notion de lieu géométrique, avec des exemples significatifs (MIUR, 2010)[8].

Les sections coniques représentent un contenu riche (Testa, 2000) et emblématique, permettant de mettre en place différentes significations et représentations, comme le souligne Bartolini Bussi dans sa réponse à la question « What is the meaning of conics ? » :

> One can consider conics analytically as curves of second degree, synthetically in three-dimensional space as conics sections, in the plane as loci satisfying some metric conditions, as perceived images of a circle from a

8 Traduction par l'auteur.

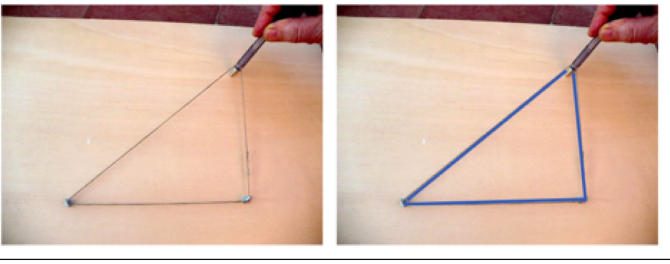
variable point of view, and so on. All the interpretations are related to each other, yet they are concerned with different conceptualisation of conics that can be related now by means of the existing body of knowledge (Bartolini Bussi 2005, p. 40).

Cependant, les sections coniques ne sont pas toujours enseignées dans d'autres pays. Elles ont fait l'objet de recherche en didactique des mathématiques (Trgalova, 1995 ; Bongiovanni, 2001) et d'étude comme levier pour changer le rapport des élèves aux mathématiques et faire évoluer les pratiques des enseignants (par exemple, Rajaonarimanana, Totohasina et Tournès, 2018).

Le scénario didactique que nous avons expérimenté au lycée utilise deux types de machines mathématiques : les traceurs à fil tendu et les traceurs à parallélogramme croisé. Dans ce qui suit, nous analysons d'abord le potentiel sémiotique de ces machines, en particulier l'ellipsographe à fil tendu et l'ellipsographe à parallélogramme croisé, et ensuite leur utilisation didactique.

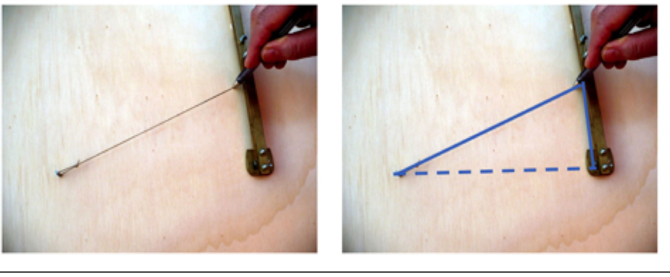
3.1 *Traceurs à fil tendu*

Les traceurs à fil tendu pour l'ellipse (Figure 1) et l'hyperbole (Figure 2) étaient probablement connus depuis l'antiquité. Ils mettent en scène des propriétés métriques énoncées dans le traité d'Apollonius de Perge (262–190 a. C). Ces deux instruments sont aussi décrits dans la « Dioptrique » de Descartes (1596–1650).



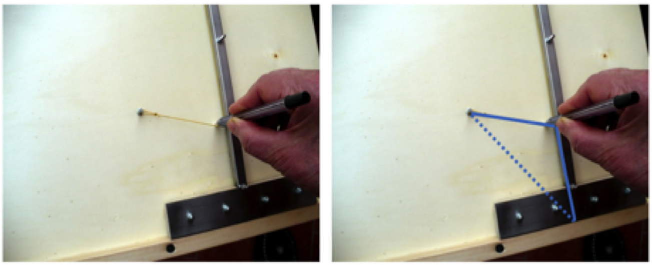
Composantes :
- deux pivots fixés à un support en bois ;
-un fil (non élastique) a ses extrémités jointes de façon à former un anneau.

Figure 1. Traceur d'ellipse



Composantes :
- deux pivots fixés à un support en bois ;
- une tige pivotant autour d'un pivot ;
- un fil (non élastique) : une extrémité est attachée à la tige et l'autre passe par le pivot libre ; la longueur du fil doit être différente de la longueur de la tige.

Figure 2. Traceur d'hyperbole



Composantes :
- un pivot fixé à un support en bois ;
- deux tiges assemblées à angle droit (équerre) ;
- un rail fixé à la base en bois ;
-un fil (non élastique) est fixé à une extrémité de l'équerre et au pivot (la longueur du fil doit êtreé-gale à celle de la tige de l'équerre à laquelle le fil est attaché).

Figure 3. Traceur de parabole

L'idée du traceur pour la parabole (Figure 3) apparaît dans le traité de Kepler (1571–1630) « Ad Vitellionem paralipomena » en 1604 et est reprise par Cavalieri (1598–1647) dans son « Specchio Ustorio » en 1632.

Les trois traceurs furent ensuite repris par l'Hôpital (1661–1704) pour introduire les courbes dans son « Traité analytique des sections coniques » (1707/1776, Figure 4).

Toutes ces machines incluent la définition métrique des courbes. Les pivots fixés au support représentent les foyers des courbes. Pour le parabolographe, la directrice est matérialisée par un rail en bois collé sur un

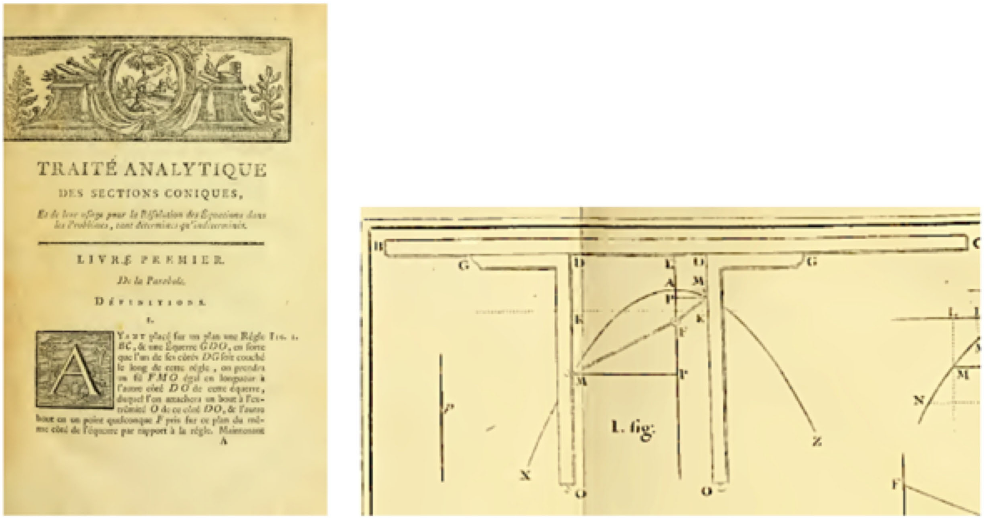


Figure 4. « Traité analytique des sections coniques » (L'Hôpital, 1707/1776, p.1)

coté de la base même et l'équerre en bois garantit la perpendicularité nécessaire pour la distance *d* (point de la courbe, directrice, Figure 3 à droite). Le schème d'utilisation est le même pour les trois machines : le crayon qui trace la courbe sur une feuille de papier placée sur le support de la machine doit aussi maintenir le fil tendu pendant le traçage (et adhérer à la tige pour l'hyperbole ou à l'équerre pour la parabole, Figures 2 et 3, à droite).

Enfin, les paramètres des machines, dépendants des choix du constructeur (longueur du fil, distance entre les foyers, etc.), matérialisent des caractéristiques de la courbe. Par exemple, dans l'ellipsographe (Figure 1), la longueur du fil moins la distance entre les foyers correspond à la longueur du grand axe. Cela peut être vérifié en comparant ce morceau de fil avec la distance entre les deux extrémités du grand axe quand la courbe est tracée.

3.2 *Traceurs à parallélogramme croisé*

Ces machines, pour l'ellipse et l'hyperbole, ont pour composante fondamentale un parallélogramme croisé, construit avec des tiges (Figure 5). Deux sommets sont fixés au support en bois en tant que foyers.

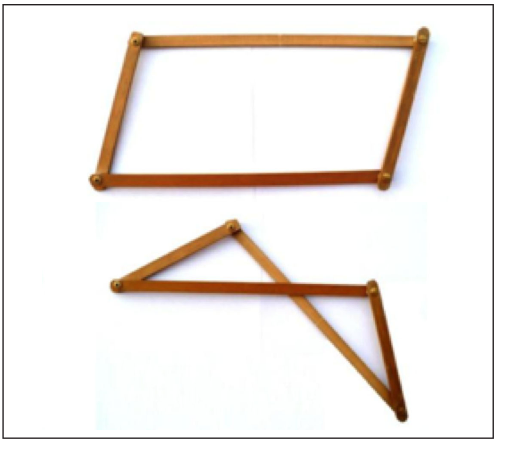
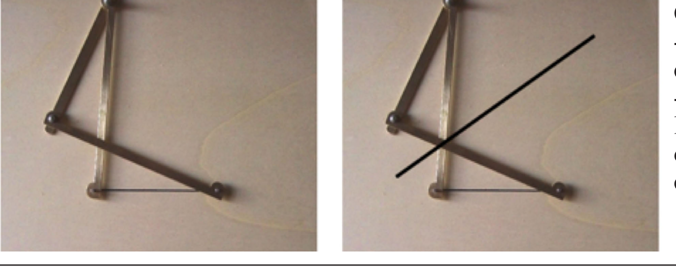


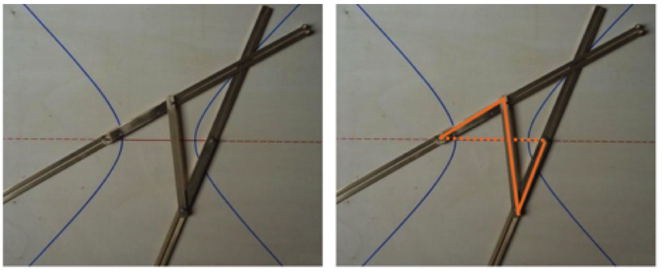
Figure 5. Parallélogramme
et parallélogramme croisé

Étant donné un tel quadrilatère, si l'on attache les extrémités d'un côté mineur (Figure 6, ce côté est dessiné sur le support en bois), on obtient un traceur d'ellipse : le point de la courbe correspond au point d'intersection des deux côtés majeurs. Si l'on attache les extrémités d'un côté majeur et on prolonge les côtés mineurs, on obtient un traceur d'hyperbole (Figure 7) : le point de la courbe correspond au point d'intersection des deux prolongements.



Composantes :
- deux pivots fixés au support en bois ;
- trois tiges, deux de la même longueur et la troisième ayant comme longueur la distance entre les deux pivots.

Figure 6. Traceur d'ellipse



Composantes
- deux pivots fixés au support en bois ;
- trois tiges, deux de la même longueur et la troisième ayant comme longueur la distance entre les deux pivots ;
- deux tiges prolongeant les côtés du quadrilatère.

Figure 7. Traceur d'hyperbole

Ces traceurs sont décrits dans plusieurs traités, comme par exemple par Van Schooten (Bartolini Bussi et Maschietto, 2006).

Après avoir présenté les traceurs, nous allons procéder à leur analyse didactique.

3.3 *Analyse du potentiel sémiotique des machines pour les sections coniques*

La description de la manière dont sont construites les machines est le premier pas pour conduire l'analyse du potentiel sémiotique des artefacts (§2). Ceci est à la base de la construction des consignes pour les élèves et du scénario didactique.

Le schème d'usage des machines « tendre le fil par le crayon » fait apparaître des segments de droite ; les distances entre points (ou la longueur des segments) présents dans les définitions des courbes correspondent à des parties des fils tendus. Ainsi, pendant les manipulations, on peut identifier des triangles. L'ellipsographe évoque des triangles isopérimétriques ayant la même base (Figure 1, image de droite). Le choix d'utiliser un fil fermé autour des foyers ou un fil noué aux foyers fait la différence au niveau de la représentation du triangle et de son identification par les élèves (du point de vue du traitement de la représentation, il faut ajouter un trait, ce qui ne va pas de soi). En outre, l'anneau de fil permet de tracer toute la courbe avec continuité de mouvement autour des foyers, tandis qu'avec le fil noué il faut soulever le crayon une fois que la demi-courbe est tracée pour compléter le traçage.

Dans l'hyperbolographe, il y a une famille de triangles ayant un coté en commun, lequel ne peut pas être représenté par le fil mais seulement en traçant le segment sur la machine (en pointillés dans la Figure 2, image de droite), et ayant différence constante entre les deux autres côtés (un côté est représenté par un morceau de fil et l'autre par une partie de la tige, en bleu dans l'image de droite de la Figure 2).

Le parabolographe montre des triangles isocèles, dont un des deux côtés égaux correspond à un morceau de fil (du pivot-foyer au crayon) et l'autre à un morceau de tige (du crayon au pied de l'équerre). Le troisième coté (en pointillés dans la Figure 3, image de droite) n'est pas matérialisé. La tige coulissant sur le rail (Figure 3) évoque la perpendicularité entre droites.

Au niveau du dessin, la machine de la parabole trace la moitié de la courbe. Pour avoir l'autre partie, symétrique (par rapport au pivot-foyer ; la symétrie est aussi à la fois dans les gestes et dans la suggestion « de faire la même chose de l'autre côté »), il faut changer la position de l'équerre et éviter la superposition du fil. Pour l'hyperbole, la machine trace un morceau d'une branche ; il faut déplacer trois fois la tige pour dessiner des parties des deux branches.

Sur la base des éléments de cette analyse (gestes d'usage, traçage de la courbe, reconnaissance des triangles et de leur propriétés), nous avons choisi l'ellipsographe (avec le fil en anneau) comme première machine à proposer aux élèves.

La longueur du fil peut être changée par l'utilisateur, en faisant simplement des nœuds. Cela permet d'utiliser la machine pour tracer une autre courbe et de mettre en relation les deux tracés avec le changement d'un paramètre de la courbe (la longueur du grand axe). Ce type de manipulation peut être suggéré par des questions comme « *Que se passe-t-il si on change… ?* » (quatrième question énoncés dans la Section 2).

L'exploration de la machine et de ces résultats constitue quant à lui un passage important pour établir la relation entre le choix d'un paramètre et la courbe obtenue.

Approfondissons à présent l'analyse de ce traceur d'ellipse pour souligner le potentiel de cette machine, permettant de l'exploiter à divers niveaux scolaires.

Le triangle évoqué auparavant permet de proposer la machine comme exemple de triangles isopérimétriques n'ayant pas d'aire constante. Cela permet de rattacher la machine à la relation aire/périmètre des polygones, ce qui est problématique à l'école primaire et au collège. Par conséquent, ce traceur peut être utilisé pour problématiser cette relation et ainsi pour concevoir des consignes pour des élèves n'ayant pas à étudier spécifiquement les coniques. Dans ce sens, le même artefact peut être utilisé comme médiateur de significations différentes selon le niveau des élèves et les objectifs d'apprentissage. En outre, la structure simple de ce traceur permet de le construire avec du matériel comme du carton et de la ficelle (Figure 8). Si on propose la construction en classe, en laissant aux élèves le choix de la longueur de la ficelle et de la distance entre les foyers, on obtient une variété de triangle avec la même propriété. Pour les élèves de collège, le traçage de l'ellipse propose un exemple d'une courbe fermée qui peut être comparée au cercle et caractérisée par rapport à celui-ci en faisant varier la longueur de la ficelle et la distance entre les foyers. C'est ainsi que des expérimentations didactiques ont été conduites à l'école primaire et, surtout, au collège.

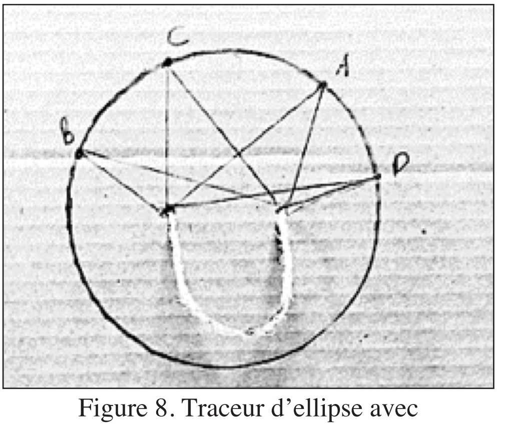


Figure 8. Traceur d'ellipse avec
des triangles isopérimétriques tracés
(construit par un élève du collège)

Comme pour toutes les machines du laboratoire de mathématiques, les éléments décrits ci-dessus et leurs relations réciproques émergent lorsqu'on les fait varier, c'est-à-dire quand on introduit « du mouvement ». C'est ici que réside le point fort de l'utilisation des machines, mais aussi son point délicat parce que l'idée d'invariant découle de l'identification des relations entre les grandeurs qui varient et les propriétés qui se conservent. C'est un point fondamental de la notion de lieu et de la définition métrique de la courbe. De ce point de vue, les machines peuvent donc être utilisées pour la médiation de la relation variables/invariants. Cependant, cette relation ne pourrait pas être proche des significations personnelles des élèves. Ces traceurs montrent les courbes comme trajectoires d'un point sous contraintes (le point de la courbe correspond au troisième sommet des triangles et à la position du crayon) et, en même temps, comme objets globaux dont on peut revenir à la construction. Les points apparaissent ensuite comme des positions sur la courbe, ce qui va contribuer à la définition de lieu géométrique.

Une fois la courbe tracée sur le papier, la question de déterminer son équation peut être posée. Le point crucial est le choix du système de référence. Mais on ne rentre pas dans les détails ici.

Par rapport à ces machines, les traceurs à parallélogramme croisé présentent deux autres éléments très intéressants. Le premier est que la tangente à la courbe au point traceur (voir Figure 6, à droite) est l'axe de symétrie du parallélogramme croisé (on peut aussi le voir comme un trapèze isocèle dont les deux bases ne sont pas représentées par des tiges). Le second élément est l'émergence possible d'une autre définition des courbes, comme lieu des points du plan ayant la même distance d'un foyer et du cercle dont le centre est l'autre foyer. Si l'on construit la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on peut passer d'une machine à l'autre par la variation des longueurs des segments représentant les tiges.

La structure des traceurs à parallélogramme croisé est géométriquement plus complexe que celle des autres machines. Le parallélogramme croisé présente plus qu'un seul triangle par rapport au traceur d'ellipse à fil tendu : dans la Figure 6, on voit un triangle défini par des tiges, un autre triangle ayant deux côtés par les tiges et le troisième comme le segment entre les pivots ; mais on a aussi un trapèze avec les diagonales données. En outre, la justification que la somme des distances point-foyer est constante se fonde sur la preuve de la congruence des deux triangles (au-delà de la vérification des égalités des longueurs de leurs côtés).

Sur la base de cette analyse, nous avons fait l'hypothèse que les traceurs à fil tendu peuvent être un support riche pour une approche des définitions des sections coniques.

3.4 *Exemple de scénario didactique au lycée en Italie*

Le scénario didactique expérimenté avec des élèves de 16 ans (troisième année de lycée scientifique) est fondé sur l'analyse ci-dessus et prévoit l'utilisation des traceurs à fil tendu d'abord et des traceurs à parallélogramme croisé ensuite quand les définitions des courbes sont établies avec les élèves. Il est constitué de trois phases.

Première phase. Il s'agit d'introduire les termes que les élèves rencontreront dans les fiches et qui les aideront à décrire les machines. Dans la première partie de la séance, l'enseignant présente l'exploration d'un compas de Van Schooten (Figure 9, à gauche) et introduit les notions de contrainte, paramètre, variable, degré de liberté et invariant. Il utilise aussi un logiciel de géométrie dynamique pour montrer le déplacement des points sur le plan et leurs traces (Figure 9, à droite). Dès cette phase, il est important de souligner la pertinence de déplacer les points et de « faire bouger la

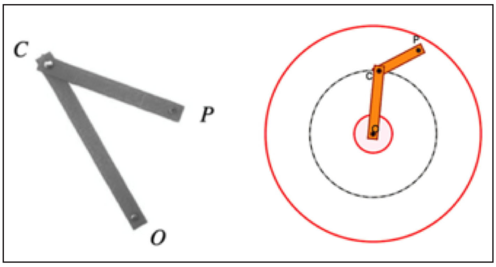


Figure 9. Compas de Van Schooten (1615-1660), composé par deux tiges attachées par une extrémité (point C).

machine ». Dans la deuxième partie, les élèves travaillent sur le parallélogramme et sur le parallélogramme croisé avec un logiciel de géométrie dynamique.

Deuxième phase. Elle prend la plupart du temps de l'expérimentation, c'est-à-dire environ 13 heures, réparties en quatre sessions de laboratoire : trois sessions pour les traceurs à fil tendu et une session pour les traceurs à quadrilatère croisé. Dans chaque session, les élèves travaillent en petits groupes (3 ou 4 par groupe) en accord avec le cycle didactique (§2). Pour les trois premières sessions, les groupes ont tous le même type de traceurs, tandis que dans la quatrième session, la moitié des groupes travaille sur l'ellipse et l'autre moitié sur l'hyperbole.

La fiche distribuée (ci-dessous, la fiche pour l'ellipse) contient un certain nombre de questions guidant l'exploration de la machine, conçues en accord avec le cadre théorique (§2).

Instrument à fil tendu (1)

1. L'instrument est constitué par deux pivots, fixés au support en bois en deux points, F_1 e F_2, et par un fil de longueur $2l$, fermé en anneau.

   Comparez l avec la $d(F_1, F_2)$: ....

   Quels sont les paramètres de l'instrument ? ....

2. Le fil est mis autour des pivots. Pour utiliser l'instrument, il faut maintenir toujours le fil tendu par un crayon (comme dans l'image) (voir Figure 1) et le déplacer autour des deux pivots. Nommez P le point (traceur) où se trouve le crayon.

   Quelles sont les variables de l'instrument, pendant le mouvement du crayon ?.......

   Quel est le degré de liberté de l'instrument ? ...... Il s'agit ......

   Qu'est-ce que le crayon trace pendant le mouvement ? .....

3. Sur cette fiche, dessinez le fil avec le point P dans trois positions différentes. Expliquez comment vous avez fait.

4. Quels sont les invariants de l'instrument ? ....

   Quelles caractéristiques justifient ces invariants ? ....

Parmi les invariants, il y en a un qui caractérise la courbe tracée et qui permet de la définir. Essayez une définition : la courbe tracée est le lieu des points P du plan tels que ...

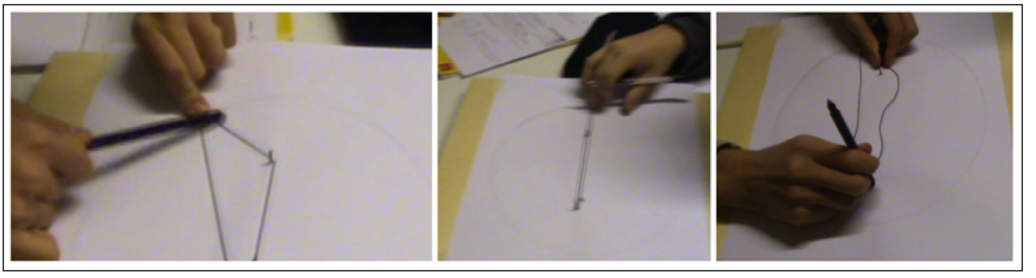


Figure 10. Moments de travail sur la machine (session 1)

En général, les élèves reconnaissent l'ellipse du point de vue global, parce qu'ils l'ont déjà rencontrée au collège (dans l'études des planètes). De l'analyse des fiches et des vidéos des sessions, il ressort que les élèves identifient les paramètres des machines. La détermination des variables et, en conséquence, celle des invariants impliqués dans la définition de la courbe prend plus de temps dans le travail en groupe. Par exemple, pour l'ellipse, un moment clé du travail est celui où les élèves identifient le triangle isopérimétrique (Figure 10, à gauche) avec un côté (« la base ») constant. Ils arrivent à discuter les « positions limites » pour le triangle (Figure 10, au centre), où le point traceur est aligné avec les deux foyers, et faire des changements (la Figure 10 à droite montre le choix de deux autres foyers). Ces derniers sont souvent visés en proposant la quatrième question : *Que se passe-t-il si on change… ?* (§2). En général, même si les échanges entre les élèves sont nombreux, les réponses écrites restent minimales.

Les réponses aux questions de la fiche sont ensuite partagées dans des moments collectifs (§2) gérés par l'enseignant. Comme pour les réponses écrites, les élèves doivent être constamment encouragés à intervenir.

Comme nous l'avons écrit auparavant, les traceurs à fil tendu sont utilisés pour la définition des coniques, tandis que les traceurs à parallélogramme croisé sont exploités pour solliciter surtout des processus de formulation de conjecture et preuve (page ci-contre, la fiche pour l'ellipse). Cela est fait en proposant la troisième question *Pourquoi trace-t-elle une certaine courbe ?* (§2).

Avec le choix des deux types des traceurs, nous avons ainsi expérimenté deux fonctionnalités didactiques des machines mathématiques.

En général, le travail sur la première machine proposée prend plus de temps que le temps passé à l'exploration des autres machines. Les élèves ont en effet besoin de temps pour explorer cette première machine et amorcer le processus de genèse instrumentale. La discussion collective sert à clarifier les questions et à souligner certaines réponses, utiles pour les autres machines. Par exemple, les questions sur les symétries de l'ellipse sont l'occasion pour réviser cette transformation géométrique.

Troisième phase. Elle est constituée par deux moments, chacun d'une durée de deux heures. Pendant le premier temps, l'enseignant présente des étapes du développement historique des sections coniques, dès Ménechme et Apollonius jusqu'au théorème de Dandelin. Le deuxième temps est consacré à un test d'évaluation.

Système articulé (1)

Comment est faite la machine ?

Décrivez schématiquement la machine, en précisant les mouvements que l'on peut faire.

Y a-t-il une autre façon de fixer le système articulé ? Lequel ? Essayez de la faire.

Que fait-elle ?

Si un crayon est placé au point P (interne au triangle PQR), qu'est que P tracerait ?

Mettez un crayon en P. Pendant le mouvement, qu'est que P trace ?

Cela correspond-t-il à ce que vous avez prévu ? Expliquez.

Qu'est-ce que les points R et S permettent de tracer ?

Pourquoi la machine trace-t-elle cette courbe ?

Quelles caractéristiques de la machine justifient le traçage de ces courbes ?
(Prouvez votre réponse).

3.5 *Une session de laboratoire de mathématiques*

Depuis quinze ans, nous mettons en place des sessions de laboratoire de mathématiques pour les élèves en visite au Laboratorio delle macchine matematiche (Maschietto, 2010). Pour eux, la durée du travail avec les machines est réduite à deux heures au maximum. La structure est différente par rapport au travail en classe décrit auparavant. Elle s'articule autour des temps suivants :

1) Esquisse du développement historique des sections coniques à partir de Ménechme et d'Apollonius, à l'aide de maquette de cônes coupés par un plan, jusqu'à Descartes avec la machine pour tailler les lentilles hyperboliques[9] ;
2) Activité des élèves en petits groupes, chaque groupe ayant une des machines pour les coniques à explorer à l'aide d'une fiche ;
3) Présentation de la machine étudiée par chaque groupe à toute la classe (cela permet à tous les élèves de voir toutes les machines). Lors de cette visite, sont proposées toutes les machines décrites auparavant (sauf le traceur d'hyperbole à parallélogramme croisé) avec le traceur de Cavalieri pour la parabole décrit dans (Maschietto, 2018). Les fiches destinées aux élèves contiennent tous les types de questions (§2) ainsi qu'une question finale sur la détermination de l'équation de la courbe.

Dès la mise en œuvre des recommandations ministérielles (§1), le nombre de visites sur ce thème a augmenté. Pour les enseignants, ces visites constituent une occasion et un moyen de répondre à la demande institutionnelle.

4. — Les transformations géométriques du plan

Un autre sous-ensemble de la collection des machines mathématiques concerne les trans-

9 http://www.macchinematematiche.org/index.php?option=com_content&view=article&id=246&Itemid=326&lang=it

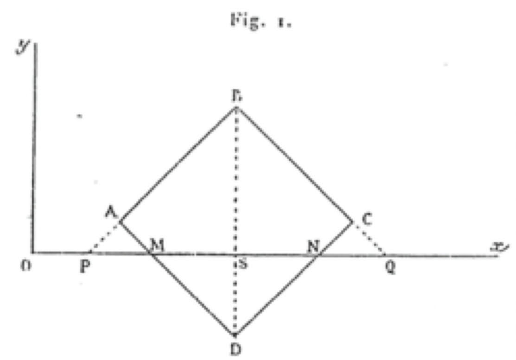
formations géométriques. Pour les élèves de l'école secondaire, nous proposons des sessions de laboratoire sur les thèmes de l'isométrie, l'homothétie et la dilatation. Au collège, le scénario concerne principalement la symétrie orthogonale et s'adresse à des élèves de cinquième (Maschietto, 2018). A certaines classes du collège, nous proposons aussi une machine qui produit une dilatation (projecteur de Delaunay, Figure 11) pour que les élèves aient l'occasion de rencontrer une transformation non isométrique. Pour ces élèves, le scénario didactique prévoit plusieurs séances, à partir de l'exploration du pantographe pour la symétrie orthogonale, puis d'autres tâches à réaliser avec la machine pour guider les élèves d'un point de vue global à un point de vue ponctuel. Les machines sont prêtées aux enseignants qui gèrent les sessions.

Pour les élèves de l'enseignement secondaire (surtout lycée), nous n'avons pas vraiment expérimenté de scénarios sur plusieurs sessions, mais plutôt une seule session de laboratoire. Comme pour les sections coniques (§3.5), elle est composée de trois phases :

1) Introduction aux transformations géométriques par le moyen de machines sur leurs genèses tridimensionnelles (translation, homothétie, dilatation) ; on propose aussi l'exploration collective du pantographe pour la translation comme exemple de travail à faire (avec la spécification des termes comme point traceur, point pointeur, degré de liberté, paramètre, variable).
2) Activité des élèves en petits groupes, chaque groupe ayant une des machines (symétrie centrale, symétrie orthogonale, rotation, homothétie, dilatation) à explorer à l'aide d'une fiche.
3) Présentation de la machine étudiée par chaque groupe à toute la classe.

Les fiches contiennent des questions semblables à celles écrites dans la Section 2, avec une question concernant la détermination des équations de la transformation étudiée.

La machine pour la dilatation est particulièrement intéressante parce qu'elle peut être transformée en un traceur de courbe : quand le point pointeur est contraint à décrire un cercle, le traceur trace une ellipse ayant la longueur du petit axe égale au diamètre du cercle (Figure 11, à droite).



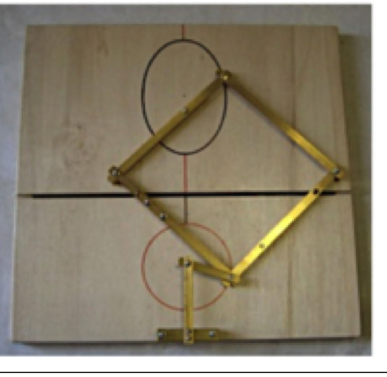


Figure 11. Projecteur de Delaunay (Delaunay, 1895, p. 240)

En se référant à l'analyse du potentiel sémiotique, ce pantographe se présente presque comme celui pour la symétrie orthogonale, avec les mêmes composantes (une base avec une fente, un losange articulé) ; la seule différence réside dans les points qui coulissent dans la fente : M et N pour la dilatation, A et C pour la symétrie dans la Figure 11 (à gauche). Cela amène souvent les élèves à dire qu'il s'agit de la même machine ou qu'elle produit la même transformation que l'autre pantographe. La surprise est assurée quand ils dessinent des figures, qui ne sont plus évidemment isométriques.

Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté des scénarios pour le laboratoire de mathématiques fondés sur l'utilisation d'artefacts matériels issus de l'histoire des mathématiques. Ainsi, quand une machine du laboratoire de mathématiques entre en classe, elle embarque avec elle l'histoire du mathématicien qui l'a conçu et réalisé. Deux types d'exploitation didactique de ces machines ont été discutés : des sessions de laboratoire organisées en un scénario didactique et des sessions de laboratoire comme « visite » au Laboratorio delle macchine matematiche à l'Université. Dans tous les cas, les sessions contribuent à donner une vision différente des mathématiques aux élèves par rapport aux mathématiques scolaires. Une session de laboratoire marque souvent une forme de rupture de contrat didactique : les élèves « manipulent les mathématiques » par les machines, ils travaillent en groupe, échangent leurs propres idées et sont très engagés dans les activités proposées. Deux aspects émergent dans toutes les sessions observées. Le premier aspect concerne une réticence initiale à manipuler les machines mathématiques proposées au début de l'activité : les élèves doivent être encouragés à le faire. Comme nous l'avons écrit, mettre en mouvement les machines est essentiel pour faire émerger variables et invariants, mais aussi pour avoir un produit de l'artefact (une courbe ou une image). Les élèves, surtout du lycée, ne s'autorisent pas toujours à manipuler. Le deuxième aspect concerne le langage des élèves lors de l'exposition du travail du groupe ainsi que les réponses écrites sur les fiches. Dans les deux cas, on observe une certaine difficulté à construire un discours et à justifier les conclusions.

Cet article insiste sur l'analyse du potentiel sémiotique des machines. Elle est importante pour mettre en évidence les significations mathématiques pour lesquelles un artefact peut être exploité didactiquement, à divers niveaux scolaires, et concevoir des consignes pour les élèves. Pour terminer, bien que l'article n'en parle pas explicitement, soulignons qu'à toute machine correspondent des simulations réalisées avec des logiciels de géométrie dynamique. La question de la manière dont on pourrait tirer parti d'un travail croisant exploration de machines et utilisation de logiciels est une question ouverte très actuel pour la didactique des mathématiques.

Remerciements
Je tiens à remercier les deux relecteurs pour leurs précieuses suggestions.

Références bibliographiques

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L. et Robutti, O. (Eds.) (2004). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino (Ciclo secondario).* Lucca : Matteoni stampatore.

Bartolini Bussi, M.G. (2005). The meaning of conics : historical and didactical dimensions. In Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, O. et Valero, P. (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 39–60). Springer.

Bartolini Bussi, M.G. et Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola.* Collana UMI Convergenze. Milano : Springer.

Bartolini Bussi M.G. et Mariotti M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of International research in mathematics education* (2nd ed., pp. 746–783). New York : Routledge.

Bénard, D. (2014). Agrandir, réduire, cartographier, mesurer l'inaccessible. In E. Barbin (Ed.), *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes* (pp. 27–56). Paris : Ellipses.

Bkouche, R. (2008). Du caractère expérimental des mathématiques. *Repères-IREM*, 10, 33–76.

Bongiovanni, V. (2001). *Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue des enseignants : étude d'une séquence d'activités et conception d'un hyper-document interactif.* Thèse de doctorat. Grenoble : Université Joseph-Fourier.

De l'Hôpital, G.F.A. (1707-1776). *Théorie analytique des sections coniques.* Paris : Moutard.

Giacardi, L. (2012). L'emergere dell'idea di laboratorio di matematica agli inizi del Novecento. In O. Robutti et M. Mosca (Eds.), *Atti del Convegno Di.Fi.Ma. 2011* (pp. 55–66). Torino : Kim Williams Books.

Maschietto, M. (2010). Enseignants et élèves dans le laboratoire de mathématiques. In G. Gueudet, G. Aldon, J. Douaire et J. Trgalova (Eds.), *Actes des Journées mathématiques de l'INRP « Apprendre, enseigner, se former en mathématiques : quels effets des ressources ? »* (pp. 9–17). Lyon : INRP Editions.

Maschietto M. (2012). Les machines mathématiques comme ressources : de la formation à la classe. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (Actes EMF2012 – GT6, pp.939–942). Université de Genève.

Maschietto, M. (2018). Instruments de l'histoire pour enseigner et apprendre : le cas des machines mathématiques. In E. Barbin, D. Bénard, et G. Moussard (Eds.), *Les mathématiques et le réel. Expériences, instruments, investigations*(p. 95–107). Rennes: Presses Universitaires de Rennes.

Maschietto, M. et Bartolini Bussi, M.G. (2013). Des scénarios portant sur l'utilisation d'artefacts dans l'enseignement et apprentissage des mathématiques à l'école primaire. In COPIRELEM (Ed.), *Actes de XXXIX Colloque International de la COPIRELEM – Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève* (pp. 34–51). Brest : IREM de Brest.

Maschietto, M. et Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view : the productive notion of mathematics laboratories, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 42, 33–47.

MIUR (2010*). Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento. Nuovi licei.*

MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione.*

NRSDM (1992). *Macchine Matematiche e altri oggetti.* Modena : Comune di Modena.

Rabardel, P. (1995). Qu'est-ce qu'un instrument ? *CNDP – Dossier de l'Ingénierie Éducative*, 19, 61–65.

Rajaonarimanana, H. E., Totohasina, A. et Tournès, D. (2018). Les coniques : Une source de situations d'enseignement-apprentissage au collège et au lycée. *Repères-IREM*, 110, 37–58.

Testa, G. (2000). L'enseignement des coniques à travers une approche historique : comment saisir un texte ? *Repères-IREM*, 41, 105–119.

Trgalová, J. (1995). *Étude historique et épistémologique des coniques et leur implémentation informatique dans le logiciel Cabri-Géomètre.* Thèse de doctorat. Grenoble 1.

ANNEXE 1

Fiche pour le traceur d'ellipse à fil tendu remplie par un élève (cf. §3.4)

Strumenti a filo teso (1)

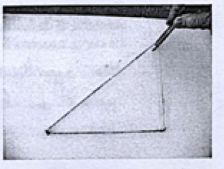
1. Lo strumento è costituito da due perni, fissati al piano di legno in due punti F_1 e F_2, e da un filo, di lunghezza $2l$, i cui estremi sono uniti in modo da formare un anello.

Confrontate l con la $d(F_1,F_2)$: l > d

Quali sono i *parametri* dello strumento?

2l (lunghezza filo) ; d(F1, F2)

2. Il filo va collocato sul piano in modo che i perni siano interni all'anello. Lo strumento funziona mantenendo il filo sempre teso con una biro (come mostrato nella foto) e muovendola attorno ai due perni.
Indicate con P il punto (tracciatore) in cui si trova la biro.
Quali sono delle *variabili* dello strumento, durante il movimento della biro?

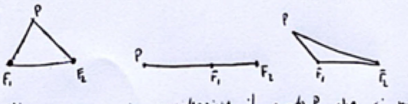


Varia la distanza di P da F1 ed F2. Varia la lunghezza dei segmenti PF1 e PF2 e gli angoli alla base del triangolo $P\hat{F_1}$ e $P\hat{F_2}$

Che *grado di libertà* ha lo strumento? 1 Quindi si tratta di un curvigrafo

Cosa traccia lo strumento quando la biro si muove? Un'ellisse

3. Su questa scheda, disegna il filo, quando il punto P tracciatore si trova in tre posizioni diverse. Spiega quale metodo hai usato.



Abbiamo preso in considerazione il punto P che si muove lungo l'ellisse prima costruita e scelti 3 posizioni di P su questa, abbiamo disegnato la figura che si veniva a formare.

4. Quali sono degli *invarianti* dello strumento?

LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI É UGUALE [illegible]
LA SOMMA DEI LATI È UGUALE

Quale caratteristiche dello strumento giustificano questi invarianti?

LA LUNGHEZZA DEL FILO E LA DISTANZA DEI 2 FUOCHI

Tra gli invarianti c'è almeno una proprietà che caratterizza la curva tracciata e quindi permette di definirla. Provate a darne una definizione.
La curva tracciata è il luogo dei punti P del piano (ESCLUSI F1, F2)

DEI VERTICI DEI TRIANGOLI DI BASE F1F2 LA CUI SOMMA DEI LATI È COSTANTE.

ANNEXE 2

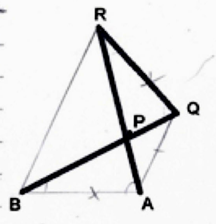
Fiche pour le traceur d'ellipse à parallélogramme croisé remplie par un élève (cf. §3.4)

Studente ______ **gruppo n.** ______

Sistema articolato (1)

Come è fatta la macchina?
Descrivete schematicamente la macchina, precisando i movimenti che possono essere effettuati.

è composto da 3 aste fissate tra di loro ~~tra~~ attraverso due perni R e Q e fissate al piano in A e B e formanti un triangolo di vertici R, Q e P che varia forma durante il movimento.



C'è un altro modo di fissare il sistema articolato ai due perni? Quale? Provatelo.

Sì, mettendo la macchina dalla parte opposta rispetto ad AB

Cosa fa la macchina?
Se si mettesse una matita in *P* (internamente al triangolo *PQR*), che cosa traccerebbe *P*?

L'insieme dei punti P traccerebbe una parabola; insieme ai simmetrici sembrerebbe formare un'ellisse.

Ponete ora una matita in *P*. Durante il movimento, cosa descrive il punto *P*?

Descrive un'ellisse

Corrisponde a quanto avevate previsto? Spiegate bene.

No, non avevo pensato che potesse formare un ellisse, ma mi aspettavo 2 parabole

Cosa descrivono i punti *Q* ed *R*?

Tutti i punti delle circ. di centri A e B e raggi AR e BQ

Perché lo fa?
Quali caratteristiche della macchina giustificano la realizzazione di tali curve?
(Dimostrate le risposte date. Potete utilizzare il retro del foglio)

AB parametri — $RA = BQ$

$\overline{RQ}$ parametro — $AP + PR = RA$

Th $\overline{PA} + \overline{PB} = K$ — $BP + PQ = BQ$

$AP = PQ$ (perché APB e PRQ congruenti per il 3° criterio dei triangoli

$\Longrightarrow AP + PB = AR$