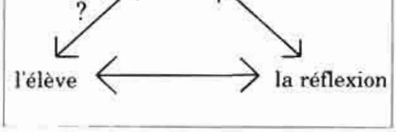
PROPOS SUR LE "PROBLEM SOLVING"

Péter MOHAY [1]

Dans les pages suivantes, je me propose d'indiquer quelques éléments de "méthode de résolution de problèmes" en mathématiques. Mon expérience m'a prouvé leur efficacité pour le développement de la réflexion des élèves et de leur capacité à résoudre des problèmes. Je voudrais souligner combien il est utile qu'ils prennent conscience de ce type de démarche de pensée qui constitue une aide efficace dans le cas de problèmes leur semblant inaccessibles.

Diriger la réflexion

Les élèves prennent en général plaisir à réfléchir. La pensée logique joue un rôle tout particulier en mathématique. Pourtant beaucoup de ces mêmes élèves disent y éprouver des difficultés. Ils sentent bien qu'il leur manque des connaissances particulières, nécessaires au bon exercice de leur sagacité.



Comment résoudre cette contradiction ?

Si pendant la leçon un élève n'écrit ou n'entend que des définitions et des théorèmes, et ne les

"Le désir fait naître l'idée des moyens dont nous savons que l'effet possible est semblable à celui que nous cherchons ; et de l'idée de ces moyens émerge celle des moyens de ces moyens ; et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous parvenions à quelque point de départ qui soit en notre pouvoir"

Thomas Hobbes [2]

(1) Professeur à l'école pilote "A. Trefort" de l'Université Eötvös Lóránd de Budapest (Hongrie).

(2) Les citations hors-texte sont extraites de : *La découverte des Mathématiques*, G. Pólya, Dunod, 1967.

"La méthode consiste dans l'ordre et la disposition des choses vers lesquelles il est nécessaire de tourner tous les efforts de son esprit pour découvrir quelque vérité"

Descartes
Règles pour la direction de l'esprit

"Quoiqu'il soit fort difficile de donner des préceptes généraux dans une semblable matière, où chacun doit compter principalement sur son adresse, je tâcherai pourtant d'indiquer la route aux commençants."

Newton
Arithmétique universelle

apprend pas ensuite, alors il peut manquer de connaissances! Ce n'est pas de ce type d'élèves dont je veux parler, mais plutôt de ceux qui pensent que les problèmes de mathématiques sont trop difficiles pour eux, et à qui il manque toujours les idées essentielles pour découvrir une solution.

Pour répondre à la question, je vais expliciter quelques idées choisies parmi des règles méthodologiques répertoriées ci-dessous *I-X* dans le tableau *"Résolution de problèmes"*.

(I.) Une difficulté caractéristique : certains élèves sont incapables de séparer les données et les inconnues, les conditions et les conséquences (assez souvent parce que l'énoncé du problème cache certaines conditions). Cette séparation aide pourtant la compréhension du problème. Il faut donc leur apprendre qu'ils ne doivent pas commencer la résolution d'un problème avant d'en avoir bien compris le sens.

(IV.) Si certains restent incapables de commencer la résolution d'un problème, il faut leur donner de nombreux exemples montrant comment faciliter cette résolution. Il faut d'abord leur permettre de discerner *pourquoi* le problème parait si difficile (par exemple trop de conditions doivent être satisfaites en même temps...). Le début d'un tel travail est difficile. Il faut compter 6 à 9 mois d'étude avec des élèves de 14-15 ans pour qu'ils puissent eux-mêmes améliorer la plupart des résolutions de problèmes (par exemple par abandon d'une condition...). Ils deviennent enthousiastes au fil des jours, se sentant aussi capables d'utiliser la méthode dans de nouveaux problèmes et de les résoudre.

(V.) Dans d'autres cas, il peut-être utile de voir si le problème posé est de quelque façon lié à un problème déjà connu. Il faut proposer aux élèves de chercher eux-mêmes des "problèmes similaires" même s'il est difficile de bien définir ce qu'il faut comprendre par problèmes similaires. De tels problèmes peuvent en effet ne présenter que des analogies partielles, dans les conditions ou dans les conséquences. Les élèves y pensent rarement.

(VI.) Que peut faire le professeur devant un élève qui s'arrête dans sa recherche ? Ce n'est pas la solution qu'il faut lui donner, mais plutôt une aide sous forme de questions supplémentaires. Il faut lui enseigner à se poser lui même de telles questions. Beaucoup d'exercices pratiques s'avèrent nécessaires pour que les élèves s'habituent à cela. Bien se poser une question c'est déjà détenir moitié de la réponse.

(X.) De bonnes figures sont une aide précieuse, en particulier dans des problèmes de géométrie. Il est nécessaire d'enseigner aux élèves qu'un processus mental de résolution sera largement favorisé par codification sur une ou plusieurs figures, des éléments de condi-

tions et de conséquences, et qu'il est souvent possible d'y trouver des corrélations. Il est plus difficile de les convaincre que pour renforcer leur intuition ou pour renoncer à une idée fausse, il faut qu'ils dessinent maintes et maintes figures.

Enseigner ces méthodes de résolution, mais quand et comment ?

Comment peut-on intégrer cela dans le processus d'enseignement ?

Je trouve important que ce qui est décrit en *I.-X.* soit répété de nombreuses fois aux élèves. Evidemment la façon d'assimiler les étapes qui permettent de diriger la réflexion, dépend beaucoup des capacités de la classe, de son intérêt, de son niveau. L'efficacité est optimale si ces méthodes reviennent souvent au long des années, pendant les cours de mathématiques.

A quel âge faut-il enseigner ces méthodes ?

En enseignant à des élèves de 11-18 ans j'ai constaté qu'avant l'âge de 13 ans c'est trop tôt : c'est la période d'apprentissage des notions mathématiques fondamentales; il serait préjudiciable de rajouter trop d'abstraction. A l'âge de 14-15 ans par contre, ils comprennent bien la nature de ces méthodes qu'ils peuvent alors appliquer.

Le plus souvent j'ai procédé de la manière suivante : pendant plusieurs mois, après avoir résolu de nombreux problèmes, partout où c'était possible j'ai essayé de faire prendre conscience des faits qui ont conduit au résultat. (Par exemple : nous avons pu transcrire l'affirmation à prouver sous une autre forme.) Quand cela a pu se produire plusieurs fois, il est possible d'en tirer une règle générale : voir *VI. / 3.* Ainsi les élèves deviennent progressivement capables d'utiliser les règles édictées.

Tout cela est très vite accepté, car même les plus faibles d'entre eux ont le sentiment que ce n'est plus seulement la chance qui leur offre une bonne idée. En même temps les plus avancés peuvent entreprendre la résolution de problèmes plus difficiles.

Une seule question reste en suspens, sans qu'il nous soit possible d'y apporter une réponse générale : par quel critère peut-on décider dans le cas d'un problème donné quelle est celle des règles répertoriées qu'on peut utiliser comme aide ? Souvent la nature du problème suggère de considérer un cas spécial *(II.)*, ou bien d'examiner la possibilité d'application d'un théorème connu *(VI. / 2.)*, ou de considérer la définition des notions inclues dans le problème *(IX.)*.

Mais le mieux consiste encore à résoudre de nombreux problèmes, les élèves apprenant à choisir parmi les points *I.-X.*

"Au reste, comme les arts s'apprennent bien plus facilement par des exemples que par des préceptes, je vais donner ici la solution de nombreux problèmes"

Newton
Arithmétique universelle

"Mes écrits ont pour but de rendre l'homme qui étudie capable de savoir l'essence de ce qu'il apprend, de lui faire apparaître la source même de l'invention, afin qu'il puisse tout comprendre comme s'il était lui-même l'inventeur."

G.H. Leibnitz
Mathematische schriften

Remarques

Il n'est pas dans notre intention de donner des méthodes pour résoudre tout type de problèmes mathématiques. Nous avons bien conscience du fait que même au niveau de l'école secondaire il y a des tâches pour lesquelles le tableau *I.-X.* n'offre pas d'aide. Les élèves doivent aussi en être conscient. Notre but est de mettre l'accent sur quelques unes des idées du grand mathématicien hongrois Georges PÓLYA, idées qui ont prouvé leur efficacité dans l'enseignement. C'est sa classification des problèmes mathématiques en deux colonnes principales qui a été adoptée : ce qui est à résoudre *(à rechercher)* et ce qui est *à démontrer*.

Résoudre un problème consiste à découvrir un certain objet, l'inconnue du problème. Démontrer consiste à montrer de manière concluante l'exactitude ou non d'une affirmation clairement énoncée.

Les questions que l'on peut rédiger sont similaires dans les deux cas. (voir *I., IV., VI., VII.*) Il faut seulement remplacer les données par les conditions et au lieu de l'inconnue écrire la conclusion.

J'annexe les problèmes *1.-15.* pour illustrer comment on peut utiliser les idées *I.-X.* même dans de simples problèmes scolaires. En même temps il y a là quelques questions plus intéressantes pour illustrer le fait que même dans le cas de problèmes insolites on peut diriger sa réflexion selon les mêmes principes. Je propose qu'il en soit discuté par exemple dans les cours universitaires des futurs professeurs de mathématiques. (J'ai eu l'occasion de le faire en décembre 1991, à l'Université Catholique de Louvain, dans les groupes du professeur Dirk JANSSENS. Pour les étudiants, tout cela a été d'une grande nouveauté. Il a été très intéressant de comparer mes expériences d'ici avec celles obtenues avec des élèves de Budapest.)

Les dix commandements du professeur

1. ***Soyez intéressé par votre sujet.***
2. ***Possédez votre sujet.***
3. ***Soyez instruits des voies de la connaissance : le meilleur moyen pour apprendre quelque chose, est de le découvrir soi-même.***
4. ***Essayez de deviner les difficultés et les espérances de vos étudiants, mettez-vous à leur place.***
5. ***Ne leur donnez pas seulement du savoir, mais des "savoir-faire", des attitudes intellectuelles, l'habitude d'un travail méthodique.***
6. ***Apprenez-leur à conjecturer.***
7. ***Apprenez-leur à donner des preuves.***
8. ***Essayez de révéler le modèle général qui gît au cœur de la situation concrète affrontée.***
9. ***Ne révélez pas tout de suite, la totalité de votre secret ; laissez vos étudiants découvrir eux-mêmes autant qu'il est possible.***
10. ***Suggérez, n'inculquez pas de force.***

G. PÓLYA

Le tableau en deux colonnes qui se trouve après les problèmes peut servir d'aide. Si l'on veut rechercher l'idée à appliquer dans un des problèmes *1.-15.*, il faut utiliser la première colonne. Si l'on cherche des tâches où l'on peut utiliser une des idées *I.-X.*, alors c'est la deuxième colonne qui doit servir.

Pour mieux faire comprendre tout ce que j'ai résumé dans ce tableau, je donne la solution de quatre problèmes : les *3.*, *5.*, *10.*, *14*. Avant de lire ces solutions je vous propose de les résoudre sans regarder les aides de la première colonne. En cas de réussite, analysez votre solution : est-ce que vous pouvez trouver une ou plusieurs des maximes *I.-X.* dans votre réflexion ? Ou autre chose qui n'est pas décrit ici ? Au cas ou vous n'auriez pas de solution, alors utilisez la première colonne du tableau pour y trouver de l'aide.

Bonne chance dans vos recherches !

Pour finir, je veux exprimer mes chaleureux remerciements à mon collègue Lajos POSA, qui m'a aidé dans mon travail pour les problèmes *3.*, *4.*, *9.*, *10.*

Résolution de problèmes (tableau I.-X.)

Problèmes

A rechercher	***A démontrer***
I. DÉPART	
Comprendre le problème	
- quelles sont les données ?	- quelles sont les hypothèses ?
- quelle est l'inconnue ?	- quelle est la thèse ?
II. PARTICULARISATION	
- prendre des exemples numériques afin de contrôler d'abord la vérité de l'affirmation	- essayer de démontrer dans le cas de nombres petits
choix des cas particuliers : par hasard ou par système	
II. GÉNÉRALISATION	
- comment peut-on remplacer les données numériques par des paramètres ?	
- quelles sont les relations connues entre ces paramètres ?	
- après l'étude de cas particuliers : comment peut-on faire la même chose en général ?	
IV. FACILITER LE PROBLÈME	
- ne pas tenir compte de :	
certaine(s) donnée(s)	certaine(s) condition(s)

- résoudre le problème d'abord comme cela, puis en respectant
la (les) donnée(s) négligée(s) la (les) condition(s) négligée(s)
- remplacer le(s) nombre(s) par de plus simple(s)

V. CHERCHER DES PROBLÈMES SIMILAIRES DÉJÀ RÉSOLUS

- essayer d'appliquer les méthodes, les "trucs" qui avaient été couronnés de succès, ou certaines parties de ces méthodes ou trucs
- se poser les questions :
comment a-t-on l'habitude de résoudre de tels problèmes ?
en quoi sont-ils semblables ?
les données ? les hypothèses ?
l'inconnue ? la thèse ?

VI. SE POSER LES QUESTIONS SUIVANTES

1.a) Que suffirait-il de rechercher ? Que suffirait-il de démontrer ?
Dans les problèmes de géométrie :
que suffirait-il de construire ?

b) Quelles données permettraient de calculer l'inconnue plus facilement ? De quelles hypothèses pourrait-on conclure plus facilement le résultat recherché?

Si le théorème est : $\left\{\begin{array}{l} A1 \\ A2 \Rightarrow B \\ A3 \end{array}\right.$

cherchons C1, C2, C3, tels que $\left\{\begin{array}{l} C1 \\ C2 \Rightarrow B \\ C3 \end{array}\right.$

2. Est-ce qu'on connaît un théorème qui ait le même départ ou la même issue que notre problème ? Est-ce qu'on connaît un théorème avec les hypothèses ou la thèse identique(s) à celle(s) de notre problème?
3. Peut-on écrire la quantité demandée d'une autre façon ? Comment ? Peut-on écrire la thèse d'une autre façon ?
4. A quoi peut-on utiliser les données prises isolément ? A quoi peut-on utiliser les conditions prises isolément ?
5. Avant de réaliser notre projet :
Exploite-t-on toutes les données ? Exploite-t-on toutes les conditions ?
Ou n'est-ce pas nécessaire ? Ou n'est-ce pas nécessaire ?
Y en a-t-il trop ? Y en a-t-il de superflues ?
6. Retourner au départ (I.) et relire le texte attentivement

VII. RÉFLÉCHIR COMME SI LE PROBLÈME ÉTAIT RÉSOLU

- il est préférable quelquefois de partir de l'issue du problème
- dans les problèmes géométriques : dessiner sur la même figure les données et les lieux (points, segments, etc.) cherchés

VIII. FAIRE DES SUPPOSITIONS, DES PRÉVISIONS SUR LE RÉSULTAT

- essayer de deviner le résultat
- faire des conjectures par hasard ou par système, et contrôler ensuite nos tentatives

IX. RETOURNER AUX DÉFINITIONS DES NOTIONS PRÉSENTES DANS LE PROBLÈME

- les définitions peuvent contenir des idées qui nous aident à partir

X. FIGURES

Elles sont utiles, et non seulement dans les problèmes de géométrie
Au cas où on est arrêté dans la réflexion : (surtout dans les problèmes de géométrie)
- dessiner de nouvelles figures
  - dans une autre position
  - avec d'autres proportions
  - peut-être un peu déformées

pour vérifier ou démentir nos conjectures
- dessiner de nouvelles figures, parce qu'une figure surchargée empêche de faire des découvertes
- dessiner des figures suffisamment grandes, on y voit mieux que sur des figures trop petites.

Des problèmes simples (1.-15.)

1. Est-il vrai, que dans tout groupe de personnes, on en trouve deux qui ont le même nombre de connaissances ? (On dit d'une personne A qu'elle est connaissance de la personne B, si A connaît B et réciproquement.)

2. Déterminez les nombres naturels n pour qu'un triangle quelconque puisse être découpé en n triangles semblables à l'original.

3. Sur un papier on peut lire 101 affirmations :

Une fois un fait un.
Sur ce papier il se trouve au maximum 1 affirmation vraie.
Sur ce papier il se trouve au maximum 2 affirmations vraies.

Sur ce papier il se trouve au maximum 3 affirmations vraies.

...

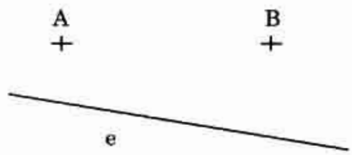
...

Sur ce papier il se trouve au maximum 100 affirmations vraies.

Combien d'affirmations vraies se trouvent sur ce papier ?

4. Sur du papier quadrillé (dont les côtés des carrés mesurent 1) dessinez à la règle un carré dont l'aire mesure 80.

5. Un avion doit partir de la ville A pour aller en B. Il a comme contrainte de voler sur une distance donnée au-dessus de l'autoroute e. Quel est son trajet le plus court?



6. x = ? y = ? sachant que

a) $\underline{76x123y}$ divisible par 45
b) $\underline{x679y}$ divisible par 72
c) $\underline{5x27x6}$ divisible par 12

(Le trait horizontal dans cette écriture indique qu'il s'agit de l'écriture d'un nombre en base 10.)

7. Soit une droite, un cercle et un point P. Construisez un triangle régulier dont les sommets sont pris respectivement en P, sur la droite et sur le cercle.

8. Lequel des deux quotients est le plus grand ?

$$\frac{10^{100}+1}{10^{101}+1} \quad \text{ou} \quad \frac{10^{101}+1}{10^{102}+1}$$

9. Les pouvoirs publics annoncent qu'au petit matin du 1er janvier 1996, l'on affichera sur un tableau énorme pêle-mêle tous les nombres naturels de 1 à 1996. Chaque citoyen peut afficher deux de ces nombres à condition d'indiquer la différence positive. Au bout d'un certain temps le tableau ne comporte plus qu'un seul nombre. Ce nombre peut-il être le 11 ?

10. Est-il possible que la somme des chiffres constituant un nombre naturel n soit égale à 16 et celle constituant 2n égale à 17 ?

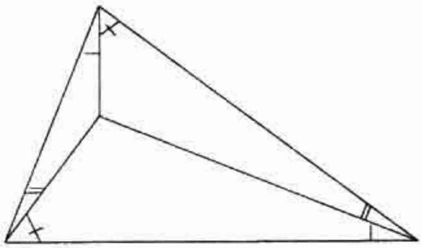
11. Repérons un point P sur un des côtés d'un triangle acutangle (c'est-à-dire dont les trois angles sont aigus). On considère la famille de tous les triangles dont un

sommet est P et les deux autres sont pris sur chacun des deux autres côtés. Quel est le triangle de cette famille dont le périmètre est le plus court ?

12. Jean et Armand quittent l'école au même moment pour se rendre au village. Ils suivent le même chemin et arrivent en même temps. Le temps de marche de Jean est deux fois plus long que le temps de repos d'Armand, tandis que le temps de marche d'Armand est trois fois plus long que celui de repos de Jean. Lequel des deux marche le plus vite ?

13. Soit deux cercles et un segment dans le plan. Translatez le segment de façon que ses extrémités soient sur les cercles donnés.

14. Sur cette figure les angles marqués de la même façon sont égaux. Démontrez que les segments dessinés dans le triangle sont portés par les hauteurs.



15. La suite 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... est appelée suite de Fibonacci. Démontrez que deux termes successif quelconques de cette suite sont premiers entre eux.

Correspondances : (maximes I.-X.) ↔ (problèmes 1.-15.)

1.	II., VII., X.	I.	partout
2.	II., III., VIII., IX.	II.	1., 2., 10., 15.
3.	II., IV., VIII.	III.	2., 3., 8., 12., 15.
4.	VI./3, VII., X.	IV.	3., 5., 7., 9.
5.	IV., VII., X.	V.	dans plusieurs problèmes
6.	VI.1., 2.	VI./1.	6., 8., 9., 10., 11., 13., 14.
7.	IV., VII., X.	VI./2.	6., 10.
8.	III., VI./1.	VI./3.	4., 11.
9.	IV., VI./1., 4.	VI./4.	9., 10., 12.
10.	II., VI./1., 2., 4.	VI./5.	dans plusieurs problèmes
11.	VI./1., 3., X.	VI./6.	dans plusieurs problèmes
12.	III., VI./4.	VII.	1., 4., 5., 7., 13., 14.
13.	VI./1., VII., X.	VIII.	2., 3.
14.	VI./1., VII., IX., X.	IX.	14., 15.
15.	II., III., IX.	X.	1., 2., 4., 5., 7., 11., 13., 14.

Solutions

Problème 3

A première vue ce problème semble être peu plaisant et on le lit et le relit pour bien comprendre. Au bout d'un certain temps, l'idée suivante nous vient : il est vrai que 1 x 1 = 1. La réponse attendue peut-elle être 1 ? Dans cette hypothèse la deuxième affirmation doit être vraie, mais dans ce cas deux affirmations seraient vraies, il y a contradiction. Essayons qu'en dehors de la première ce soit la troisième affirmation qui soit vraie. Dans cette hypothèse la quatrième affirmation devrait être vraie, mais de cette manière la troisième ne peut l'être. Contradiction !

La nature du problème nous suggère *d'essayer de deviner le résultat (VIII.).* Mais après un certain temps on peut se convaincre que c'est plus difficile qu'on ne l'avait pensé, bien qu'on puisse concevoir le résultat exact. (Evidemment il faut examiner tous les cas pour s'assurer que le problème n'a qu'une solution.)

Maintenant considérons le point IV.

Qu'est-ce qui rend ce problème difficile ?
a) L'expression "au maximum" dans toutes les phrases.
b) Le nombre des affirmations est trop important (pour pouvoir les bien comprendre).

Comment *le rendre plus facile* ?

a) Au lieu de "au maximum" écrire "exactement".

b) Remplacer le nombre 101 par des nombres plus petits.
- a) Le problème est vraiment plus facile, mais en même temps différent, et cela ne nous aide pas à résoudre le problème original.
- b) Soit n le nombre des affirmations lisibles sur le papier. Essayons n = 51, 11, 10, 2, ou plutôt avançons systématiquement : n = 2, 3, 4, ... , 101.

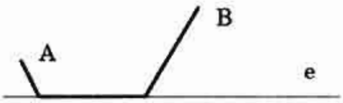
On peut découvrir des résultats intéressants si n est pair, mais examinons en priorité le cas ou n est impair (*Cf.* le tableau ci-dessous).

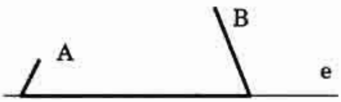
Les résultats sont : 2, 3, 4. D'ici par *généralisation (III.)* on peut conclure au résultat correct du problème original : 51, et ce raisonnement donne même les 51 affirmations qui sont vraies.

n = 3	n = 5	n = 7
Une fois un fait un (vraie)	Une fois un fait un (vraie)	Une fois un fait un (vraie)
Sur ...au maximum 1 ...	Sur ...au maximum 1 ...	Sur ...au maximum 1 ...
Sur ...au maximum 2 ... (vraie)	Sur ...au maximum 2 ...	Sur ...au maximum 2 ...
	Sur ...au maximum 3 ... (vraie)	Sur ...au maximum 3 ...
	Sur ...au maximum 4 ... (vraie)	Sur ...au maximum 4 ... (vraie)
		Sur ...au maximum 5 ... (vraie)
		Sur ...au maximum 6 ... (vraie)

Problème 5

Dessinez une figure (X.), comme *si le problème était résolu (VII.).*





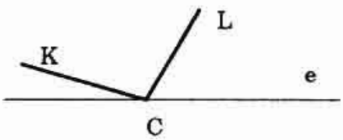
Départ (I.)

Quelles sont les données ? Deux points A et B, la droite e et une distance d.

Quelle est l'inconnue ? Un chemin en trois parties, dont la longueur est minimum.

Comment faciliter le problème ? (IV.)

Essayons de diminuer le nombre de parties du chemin : négligeons le fait que l'avion doit voler au-dessus de l'autoroute sur une certaine distance. Le problème nouveau consiste à chercher le point C sur la droite e réalisant la condition KC + CL est minimum.



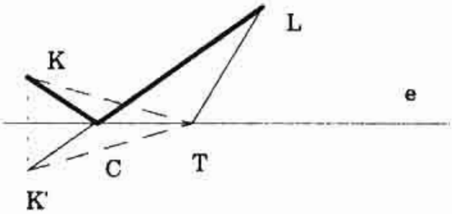
Pourquoi le problème reste-t-il toujours difficile ? Parce qu'on cherche le minimum de la somme des longueurs de deux segments. Est-ce qu'il n'est pas possible de le rendre à nouveau plus facile *(IV.)* ? Dans ce nouveau problème exploitons le fait que le plus court chemin entre deux points s'effectue en ligne droite. "Rectifions" la ligne brisée KCL.

Maintenant quels sont les deux points pour lesquels rechercher le plus court chemin ? K' et L.

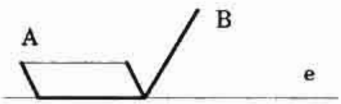
La *figure convenable (X.)* peut suggérer que K' est l'image de K par la symétrie d'axe e. Ainsi le point C est le point d'intersection des droites K'L et e. En désignant par K' le symétrique de K par rapport à e.

KC + CL est bien le plus court, puisque si l'on considère un autre point T de la droite e, on peut dire que

$$KT + TL = K'T + TL > K'L$$
$$= K'C + CL = KC + CL.$$



Retournez au problème original, Cher Lecteur, et essayez de le résoudre en considérant le problème dont nous venons de comprendre la solution et la figure ci-dessous.



Problème 10

Est-ce possible ?

On prend quelques exemples numériques (II.) afin de prévoir la réponse.

n	97	88	394	4444	4534	
somme des chiffres	16	16	16	16	16	
2n	194	176	788	8888	9068	
somme des chiffres	14	14	23	32	23	etc.

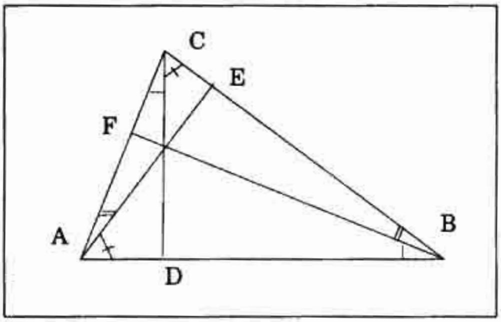
La réponse soupçonnée est : non.

Voyons *VI.2.* : *Est-ce qu'on connaît un théorème*, se rapportant à la question ? (un théorème dans lequel il s'agit de somme de chiffres ?) Oui, celui concernant la divisibilité par 3 ou par 9. Prenons *VI. / 4.* : *A quoi peut-on utiliser l'hypothèse*, que la somme des chiffres de n est égale à 16 ?

Selon l'énoncé, le reste de la division de n par 3 est 1, et celui de la division de n par 9 est 7. Prenons *VI. / 1.* : *Que suffirait-il de démontrer* pour vérifier la réponse soupçonnée? Le fait que le reste de la division de 2n par 3 n'est pas 2, ou que le reste de la division de 2n par 9 n'est pas égal à 5. Cette dernière assertion est vraie puisque selon la condition, le reste de la division de 2n par 9 doit être 8.

Problème 14

Dessiner une figure (X.) avec les hauteurs *comme si le problème était résolu. (VII.)*



Que suffirait-il de démontrer? (VI. / 1.) En vertu de la *définition de la hauteur (IX.)* il suffit de vérifier que sur la figure il y a angle droit en D, en E, et en F.

Affirmation : l'angle $\widehat{CDB}$ est droit.

Que suffirait-il de démontrer ? *(VI. / 1.)* Le fait que

$$\sphericalangle + \sphericalangle + \sphericalangle = 90^\circ$$

dans le triangle CDB. C'est évident, puisque dans le triangle ABC

$$2\sphericalangle + 2\sphericalangle + 2\sphericalangle = 180^\circ$$

On démontre de même que les angles $\widehat{AEB}$ et $\widehat{BFA}$ sont droits.

Bibliographie

Pólya György : *A problémamegoldás iskolája,* Budapest, 1978.

En français :

G. Pólya : *Comment poser et résoudre un problème ?,* Dunod, Paris, 1968.

En anglais :

G. Pólya : *How to solve it ?*, Princeton, N.Y., USA.