DE "VÉRITABLES PROBLÈMES" AU COLLÈGE ET AU LYCÉE PROFESSIONNEL

Eliane EMEYRY
Irem de Lille

Au collège la place des activités est devenue de plus en plus grande. Le plus souvent, ces "activités" ont un aspect qui se veut "concret". Mais nous pouvons constater un manque d'intérêt des élèves face à celles-ci ; ce qui ne peut que nous interroger. Ces activités sont-elles réellement concrètes ou ne sont-elles qu'un reflet **aseptisé** de la réalité ? N'ont-elles pas été vidées de leur véritable contenu pour être rendues plus accessibles ?

Peut-être serait-il préférable de poser le véritable problème aux élèves et essayer **avec eux** de dégager l'essentiel et de résoudre ou contourner les difficultés ?

C'est ce que je me propose d'illustrer, dans cet article, par l'intermédiaire de trois situations présentant :

1 – la problématique d'un professionnel : un ébéniste désire plaquer sur une table ou un plateau rectangulaire un motif appelé "parquet de Versailles" (voir dessin suivant).

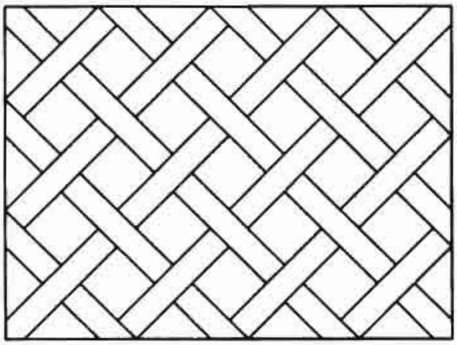

Fig. 1

2 – l'étude d'une situation réelle : un berger du Jura a été filmé en train de déplacer le parc dans lequel se trouvent ses moutons (c'est une pratique qu'il utilise couramment).

3 – une problématique interne aux mathématiques : il s'agit là d'une situation purement théorique, dont le titre pourrait être : "activité autour de Pythagore".

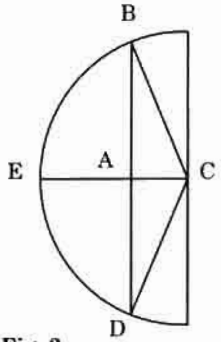

Fig. 2

Le rayon du demi-cercle est donné (dans l'étude ci-dessous il est de 10 cm). Le point A décrit le segment [CE].

Quelle est la position de A sur le segment [CE] pour que l'aire du triangle BDC soit maximum ?"

Première situation : Problématique d'un professionnel

Le parquet de Versailles

Origine de l'activité

J'ai expérimenté cette activité tout d'abord en tant que stagiaire lors de la journée académique "Lycée Professionnel (L.P.)" organisée par l'I.R.E.M. de Lille le 18 avril 1993 (le thème était "transférabilité des méthodes pédagogiques du Lycée Professionnel au Collège et au Lycée"), puis en tant qu'animatrice de stages de géométrie mis en place en 1993/94 par l'IREM de Lille dans le cadre du Plan Académique de Formation (P.A.F.) et enfin dans une classe de troisième de très, très faible niveau mais dont l'effectif est de 13 élèves.

Je vais donc décrire la méthode L.P., et ce que j'en ai "transféré" dans ma classe de troisième après expérience auprès de stagiaires professeurs de mathématiques. Dans cette narration, j'alternerai la vision L.P. et la vision collège.

J'ai eu tellement de plaisir à dessiner sur bois et non sur papier que j'ai voulu faire partager ce plaisir aux stagiaires comme aux élèves. L'I.R.E.M. pour les premiers et mon collège pour les seconds ont financé l'achat de planchettes en contreplaqué de 5mm d'épaisseur (entre 5 et 10F la planchette de 450 mm sur 350 mm). Le changement de support de travail peut être aussi un facteur de motivation.

Méthode L.P.

En L.P. le problème est ainsi posé : il faut recouvrir une table ou un plateau rectangulaire de dimensions données d'un motif "parquet de Versailles", ce qui donne du **sens** à l'activité proposée (l'étude de ce motif **sert** à la réalisation d'un objet).

Pour résoudre ce problème, plusieurs étapes se déroulent alternativement à l'atelier de fabrication et en cours de mathématiques, à raison de deux séquences de 8 heures d'atelier animées par un ébéniste professionnel et de 2 heures de cours de mathématiques par semaine. Pour que les élèves retirent le maximum de profit de ce travail, il vaut mieux que l'ébéniste et le professeur de mathématiques aient préparé ensemble ce travail.

Etapes à l'atelier :

Sur un support de contre-plaqué de 5mm d'épaisseur, à peu près rectangulaire d'environ 450mm x 350mm, les élèves doivent plaquer un "parquet de Versailles" dont le côté du carré mesure 50mm. Ils devraient obtenir un placage rectangulaire de 424mm x 318mm. Ceci est une première réalisation. Par la suite, les élèves confectionneront d'autres objets plaqués du même motif mais de diverses dimensions.

Pour réaliser ce placage, il faut dessiner le motif sur le support de contre-plaqué, découper dans des feuilles de placage les différents motifs, les assembler sur le dessin à l'aide de papier gommé, les coller, mettre sous presse.

Les élèves doivent tout d'abord trouver une stratégie pour le dessin. Après les avoir laissé tâtonner, le professeur d'atelier indique sa méthode de professionnel pour le démarrage du dessin :

1.– tracé d'un des angles droits du rectangle final à 1 cm environ des bords du support (*cf.* Fig. 3).

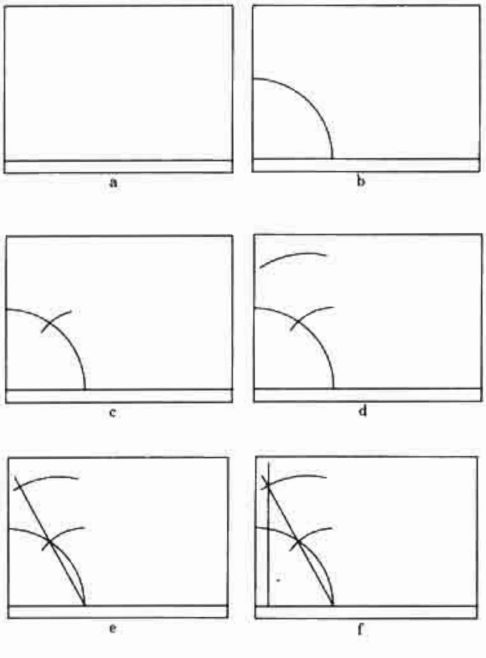

Fig. 3

Le professeur d'atelier ne justifie pas cette construction. Ce sera au professeur de mathématiques de le faire pendant son cours. (On peut se demander, d'ailleurs, si le professionnel qui emploie cette méthode sait pourquoi elle est correcte.)

2.– tracé de la bissectrice de cet angle, qui indique une des directions des bandes ; elle est même l'axe d'une de ces bandes.

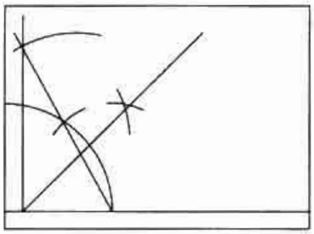

Fig. 4

A partir de là, tout le dessin va se mettre en place. Et l'on pourra vérifier l'exactitude de son tracé en constatant que les points d'intersection des réseaux des droites tracées sont alignés (en particulier sur les deux côtés de l'angle droit tracé en tout premier lieu). On ressent un véritable plaisir lorsque ceci se réalise ! (le plaisir du travail bien fait...). Ainsi les élèves peuvent se rendre compte de l'importance de la précision des tracés, de l'importance du bon état de leur matériel. (Une toute petite erreur d'à peine 1/10 mm en cours de tracé peut conduire à une erreur de plus d'1 mm, voire 2 mm, à la fin !)

Après le dessin, on passe à la découpe du placage, à son assemblage. Là aussi, l'application, la précision sont des qualités nécessaires à la bonne réalisation. Là aussi, quel plaisir ressenti lorsque le travail est bien fait !

Recherche au collège

Les *modèles* proposés aux élèves sont un plateau de petite table plaqué d'un "parquet de Versailles" et l'image du dessin de la page 1 qu'un rétroprojecteur affiche sur le mur.

Le *but à atteindre* est de recouvrir une planchette d'un "parquet de Versailles", dont les carrés sont de 5 cm de côté, sachant que cette planchette est un petit peu plus grande que le rectangle que l'on obtient le dessin une fois terminé (n'ayant pas d'atelier adéquat ni de personnel qualifié en ébénisterie au collège, le travail se borne au dessin sur la planchette).

Le *matériel* dont disposent les élèves est constitué d'une planchette de contre-plaqué pour chacun, de grandes règles de 60 cm, des compas, équerres, crayons...

Il faut tout d'abord définir les *contraintes* du motif à dessiner. Ce n'est pas sans mal que les élèves ont exprimé que, le motif étant constitué de carrés et de bandes, les bandes ont pour largeur la moitié du côté des carrés et que dans chaque angle du rectangle final "arrive" une bande. Mais peut-être certains d'entre eux l'avaient-ils vu sans pouvoir l'exprimer ?

Intentionnellement, je n'ai pas donné les dimensions (424mm x 318mm) du rectangle final car d'une part ces dimensions sont des valeurs approchées et d'autre part certains stagiaires à qui je les avais données ont commencé par dessiner ce rectangle final (ce que je veux éviter, le rectangle final pouvant être considéré comme l'aboutissement du dessin).

J'ai reprécisé que les dimensions de la planchette sont un peu plus grandes que celles du rectangle final ("– de combien ? – d'au moins un cm.") et que je ne suis pas sûre que les coins de la planchette sont des angles droits. Puis j'ai laissé les élèves se mettre à *leur réalisation*. Au contraire des stagiaires qui ont réfléchi, calculé, pris une feuille de brouillon... avant de dessiner, mes élèves se sont lancés dans leur dessin. La plupart d'entre eux ont dessiné un "rectangle" en traçant les droites distantes d'1 cm des bords de la planchette sans s'assurer qu'ils obtenaient des angles droits. Puis certains ont essayé de tracer une bande arrivant dans un angle, par tatonnements successifs, mais sans en tracer l'axe ; sur cette bande ils ont reporté alternativement 50mm et 25mm. D'autres ont voulu marquer les points de contact des bandes et des bords : pour cela deux seulement ont compris qu'il ne fallait pas reporter 25mm et 50mm, l'un a utilisé sa calculatrice sur laquelle était affichée la valeur "7,071067812" et a essayé de reporter, en centimètres cette valeur et sa moitié, l'autre a dessiné sur du papier quadrillé 5mm x 5mm un carré de 5 cm de côté et sa diagonale puis a reporté la longueur de cette diagonale et sa moitié. Tous sont très actifs.

Au bout de 10 minutes, j'interromps leur travail pour faire le point et leur fais prendre conscience de leurs réussites, erreurs et maladresses, de l'impossibilité de dessiner le rectangle final immédiatement, et de la nécessité d'une réflexion préalable. Les élèves comprennent (ou admettent ?) qu'on peut tracer un des angles droits du rectangle, puis le motif, et qu'on obtiendra le rectangle. Ils comprennent aussi que la précision du tracé est primordiale. J'indique alors la construction de l'angle droit donnée par l'ébéniste; un élève en donne la justification par des considérations d'angles et non par la médiane relative à l'hypoténuse. A partir de cette construction, j'en suscite une autre plus générale :

Fig. 5

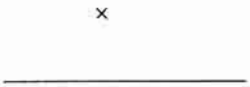

Fig. 6

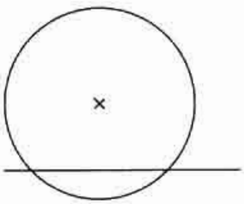

Fig. 7

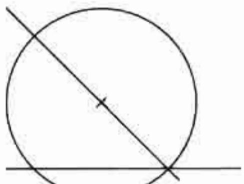

Fig. 8

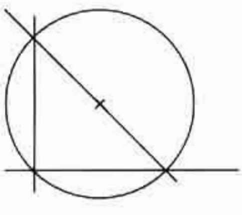

Fig. 9

Chaque élève recommence son dessin sur l'autre côté de sa planchette, en construisant l'angle droit avec une des deux méthodes indiquées ci-dessus. Puis il essaie de tracer la bande "arrivant" dans cet angle : nouvelle difficulté, car il ne pense pas à tracer la bissectrice de l'angle et tâtonne. Certains tracent rectangles et carrés les uns après les autres, sans s'être rendus compte que ces rectangles et ces carrés sont obtenus par des tracés de droites : ils ont de la peine à globaliser, interpréter une figure, à "voir" ce qui n'est pas obligatoirement dessiné. Une nouvelle mise au point s'impose.

Une fois l'axe de la première bande et cette bande tracés, il faut encore expliquer à quelques uns comment s'y prendre pour poursuivre le dessin sans trop de difficultés. Le tracé est terminé plus ou moins rapidement selon les élèves, leur habileté, leur soin, leur application mais aussi leur compréhension de la figure. Le tracé est jugé correct lorsque l'élève trace les deux derniers côtés du rectangle en joignant les points d'intersection des bandes situés vers les bords de la planchette.

Ce tracé a été l'occasion pour beaucoup d'entre eux de comprendre qu'il n'existe pas de "petite erreur sans importance", que la moindre imprécision peut se répercuter et entraîner un écart important avec le but fixé.

Méthode L.P. (suite)

Etapes en cours de mathématiques

Toutes les étapes à l'atelier ne se réalisent pas en une seule séance. Le professeur de mathématiques intervient donc au fur et à mesure de l'avancement de celles-ci. Il va expliquer la construction de l'angle droit indiquée par le professeur d'atelier. Il va inventorier les difficultés rencontrées lors du tracé et tenter de les résoudre avec les élèves. Il va reformuler la situation donnée :

Il reprécise les données et contraintes du motif "parquet de Versailles" :

– le côté *c* du carré est égal à deux fois la largeur de la bande.

– dans chaque angle du rectangle "arrive" une bande.

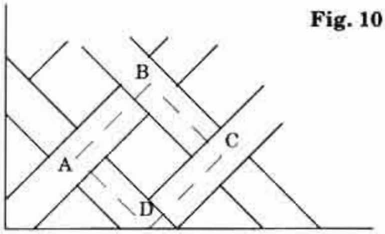

Fig. 10

Il fait prendre conscience aux élèves que ABCD est un carré de côté $\frac{3}{2}c$ et de diagonale $\frac{3c\sqrt{2}}{2}$.

Soit $u = \frac{3c\sqrt{2}}{2}$. La longueur et la largeur d'un rectangle recouvert d'un parquet de Versailles sont multiples de cette dimension u.

La question de départ est à nouveau posée : Comment recouvrir d'un parquet de Versailles n'importe quelle table ou n'importe quel plateau, c'est-à-dire n'importe quel rectangle de dimensions données ?

Pour tenter de répondre à cette question, le professeur de mathématiques est amené à en formuler deux autres :

1.– Peut-on déterminer le nombre de modules u nécessaires le long de la longueur et de la largeur ?

2.– Esthétiquement a-t-on le choix de la mesure du côté du carré ?

Puis il propose aux élèves de simplifier la question 1 en ne s'occupant que de la longueur (et de déterminer la largeur ensuite comme multiple du module u trouvé pour la longueur. Il modifie et simplifie ainsi le problème, mais ce **avec** les élèves.)

Quand on a la longueur L du rectangle on peut déterminer un côté c du carré tel que $L = n \times u$ étant un nombre entier,

$$L = n \times \frac{3c\sqrt{2}}{2}.$$

$$L = \frac{3nc\sqrt{2}}{2}$$

soit

$$c = \frac{L\sqrt{2}}{3n}$$

On peut simplifier encore davantage la tâche en prenant le problème à l'envers : fixons le côté du carré (en répondant à la question 2...) et déterminons les longueurs possibles du rectangle (ainsi que ses largeurs).

Par exemple, choisissons $c = 100$mm (c'est une dimension très employée par les professionnels). Un module $u = \frac{3c\sqrt{2}}{2}$ mesure alors environ 212,13 mm ; 2 modules 424,26 mm ; 3 modules 636,40 mm ; ...9 modules 1909,19 mm.

On peut ainsi tracer une représentation graphique de la longueur en fonction du nombre de modules choisis, mais c'est sans grand intérêt. Beaucoup plus intéressant est de choisir en abscisse la longueur du rectangle et en ordonnée le côté du carré. D'après les calculs précédents, on obtient une série de points d'ordonnée constante. En traçant les droites reliant l'origine à ces points on a un abaque permettant de déterminer soit les longueurs (et largeurs) possibles du rectangle, le côté du carré étant donné, soit le côté du carré le plus approprié, la longueur et/ou la largeur étant données (voir Fig. 11).

En effet, chaque droite tracée a pour

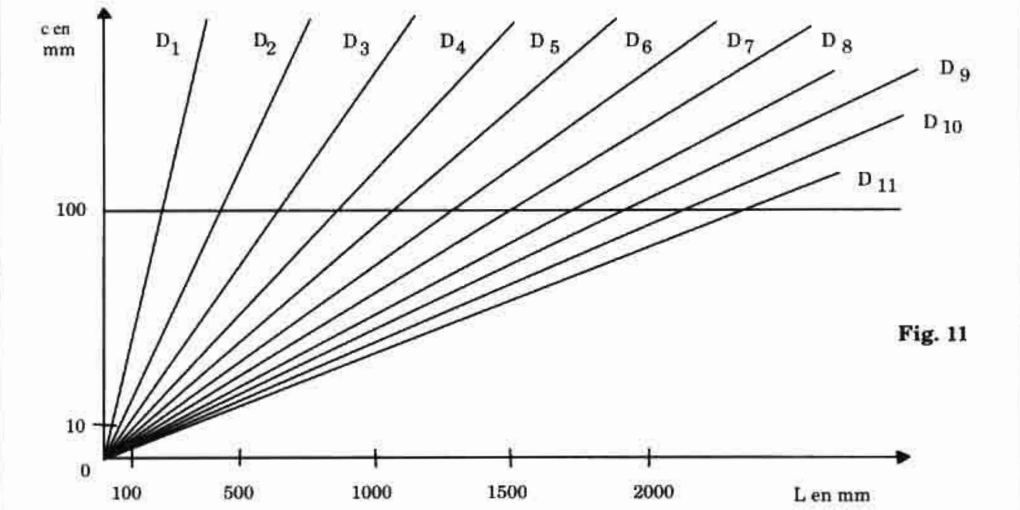

Fig. 11

équation :

$$D_i : c_i = \frac{L\sqrt{2}}{3i}$$

C'est ainsi que procède l'ébéniste : il détermine d'après l'abaque le côté du carré approprié et les dimensions du rectangle se rapprochant le plus possible de la demande du client.

Il est vrai qu'on n'a pas entièrement répondu au problème posé, mais on a écarté **avec** les élèves les difficultés qui semblent insurmontables.

Recherche au collège (suite)

Après avoir réussi à recouvrir **un** rectangle d'un "parquet de Versailles", un nouveau problème se pose : peut-on recouvrir **n'importe quel** rectangle d'un tel motif ? Autrement dit : l'ébéniste peut-il honorer n'importe quelle commande d'un client, c'est-à-dire l'ébéniste peut-il recouvrir d'un motif "parquet de Versailles" une table de n'importe quelle dimension ? Ou encore : pouvons-nous dessiner un "parquet de Versailles" sur n'importe quel rectangle, en choisissant nous-mêmes la dimension du côté des carrés de ce "parquet" ?

Un élève reformule la question en prenant un exemple précis : quel côté de carré va choisir l'ébéniste pour recouvrir une table de 100 cm sur 50 cm ?

Pour répondre à cette question très complexe étant donné le niveau, très faible, de cette classe, les élèves calculent tout d'abord les dimensions du rectangle qu'ils ont obtenu sur leur planchette. Pour cela ils comptent le nombre de carrés et de bandes traversés par la longueur ou la largeur du rectangle, s'aperçoivent que c'est le même nombre, calculent la mesure de la diagonale d'un carré et celle du "croisement de deux bandes". Je suggère de tracer, sur une reproduction photocopiée de la figure de la page 1, les axes des bandes pour les inciter à *voir* le carré ABCD de la page 34 et à se rendre compte que la longueur et la largeur du rectangle sont des multiples de la diagonale de ce carré. Ils recalculent par ce nouveau procédé les dimensions du rectangle. Ils obtiennent $30\sqrt{2}$, soit environ 42,4 cm pour la longueur et $25{,}5\sqrt{2}$ soit environ 31,8 cm pour la largeur. Ils vérifient sur leurs planchettes ces dimensions (nouvelle preuve d'un "bon tracé").

A partir de là, les élèves comprennent que la dimension u de la diagonale du carré ABCD doit être un diviseur commun de la longueur et de la largeur du rectangle que l'on veut recouvrir d'un "parquet de Versailles".

Nous reprenons l'exemple du rectangle de 100 cm sur 50 cm, que l'on dessine au tableau. Un élève propose de "choisir $u = 25$ cm : car u sera contenu 4 fois dans la longueur et 2 fois dans la largeur". Les élèves calculent alors le côté du carré ABCD correspondant, soit $\frac{25}{\sqrt{2}}$ cm ou $\frac{25\sqrt{2}}{2}$ cm. Il faut ensuite calculer le côté c d'un carré du "parquet" : en sachant que le côté du carré ABCD est égal à $\frac{3c}{2}$, les élèves obtiennent $c = \frac{25\sqrt{2}}{3}$ cm . Un ébéniste ne travaille pas avec de telles mesures, mais avec des mesures décimales exprimées en centimètres ou en millimètres. Les élèves arrondissent la valeur de c : $c \approx 11{,}8$cm.

Ils recalculent alors avec cette valeur les mesures du rectangle obtenu : $35{,}4\sqrt{2}$, soit environ 50,1 cm pour la largeur ; $70{,}8\sqrt{2}$, soit environ 100,1 cm pour la longueur. Le client refusera-t-il la table parce que les dimensions de celle-ci ont une erreur de 1 mm (sur 50 cm ou 100 cm) par rapport à sa commande ?

Lors du choix de $u = 25$ cm, un autre élève avait dit que 50 cm serait possible aussi. Je relance l'idée en demandant aux élèves d'imaginer le résultat : le point de vue esthétique est abordé, et le choix $u = 10$ cm ou 12,5 cm semble esthétiquement meilleur.

C'est là que j'ai décidé d'arrêter l'activité, car une certaine lassitude s'était installée, tout ayant été réalisé en classe (l'activité s'est déroulée sur 4 heures).

J'ai l'intention de recommencer l'expérience, l'année prochaine, avec une classe de troisième d'effectif normal, en répartissant le travail de dessin sur le temps de classe et à la maison ; ce qui entraînera moins de lassitude chez les élèves.

Intérêts de cette présentation

1.– Dans cette activité, la *précision du tracé* a une grande importance. N'existe-t-il pas des activités en collège, des exercices réclamant aussi une grande précision dans le tracé pour permettre de conjecturer alors que bien souvent on demande aux élèves un dessin "à main levée" pour aider à démontrer ? En outre, l'artisan ressent un réel plaisir lorsqu'il a réussi à réaliser, à créer de ses doigts un certain ouvrage (c'est-à-dire sans défaut décelable de sa part). Pourquoi ne pas faire partager ce plaisir du travail bien fait aux élèves ?

2.– Il est intéressant d'apprendre aux

élèves à *vérifier* eux-mêmes leur travail, à observer, regarder si leurs résultats sont cohérents, à vérifier par une autre méthode, c'est-à-dire à contrôler à tout moment la cohérence de ce qu'ils font, à user de leur bon sens.

3.– Les *activités pratiques*, manipulatoires sont nécessaires à certains de nos élèves pour qu'ils puissent se créer des images mentales de référence. D'autres ont besoin d'autres types d'activités, plus théoriques, déjà formalisées.

4.– Le professionnel a souvent des *pratiques empiriques*, qui sont tout à fait performantes, pratiques qu'il est capable de transmettre mais dont il est incapable d'expliquer le pourquoi. On peut se demander s'il est capable de s'adapter à une situation voisine, légèrement différente de celle qu'il sait traiter de façon empirique. Aujourd'hui l'artisanat, comme l'industrie, étant en perpétuelle mutation, l'ingénieur et le chef d'atelier ne sont plus les seuls à devoir s'adapter rapidement à l'évolution des techniques et des exigences des clients. L'artisan et l'ouvrier doivent aussi avoir cette faculté. Ils doivent être capables de participer activement au bon fonctionnement de leur entreprise : non seulement exécuter des ordres mais aussi être capables d'initiatives et même parfois proposer des innovations. Le temps n'est plus au "taylorisme" mais à "l'assurance-qualité". Pour être capable de s'adapter, l'artisan, l'ouvrier comme l'ingénieur doit **comprendre** le bien-fondé de telle ou telle pratique pour ensuite pouvoir la **transférer** dans une autre situation.

5.– Dans cette activité, le *but à atteindre* est indiqué dès le début : n'est-ce pas un **facteur mobilisateur** et sécurisant pour les élèves ? N'est-il pas possible, dans la majorité de nos activités et exercices, de poser clairement le problème à résoudre, d'exposer le but à atteindre ? L'élève ne s'investira-t-il pas davantage s'il sait où il doit aller, à quoi mènent les recherches en cours, etc. ?

6.– Une grande *liberté d'action* permet à l'élève l'appropriation personnelle des méthodes. Si "tous les chemins mènent à Rome", en mathématiques plusieurs chemins peuvent mener, bien souvent, au résultat ; certains semblent meilleurs que d'autres. A moi, prof, de comprendre (ou d'essayer de comprendre) le cheminement des élèves, d'expliquer pourquoi certains chemins proposés aboutissent, pourquoi d'autres sont des cul-de-sac et aussi de proposer "mon" chemin s'il me semble "meilleur" que ceux des élèves ou s'il me semble plus accessible pour certains élèves. Quel chemin sera le "meilleur" ? le plus rapide ? le plus éclairant ?

Il est très important pour moi d'analyser les cul-de-sac, les "échecs", car ils me permettent de connaître les connaissances des élèves, leurs façons de réagir face à une difficulté; il est primordial que l'élève comprenne pourquoi sa méthode ne convient pas pour pouvoir l'améliorer ou ne pas la reproduire dans un cas similaire. Il est encore plus important que je fasse comprendre à cet élève qu'il n'est pas "idiot, stupide, etc." d'avoir proposé une telle méthode.

Il faut donner aux élèves l'occasion de chercher, d'"inventer", d'innover et leur permettre de se fourvoyer. Peut-être qu'ainsi ils trouveront du sens aux mathématiques.

On aurait pu présenter cette activité de façon traditionnelle, au Collège en classe de troisième :

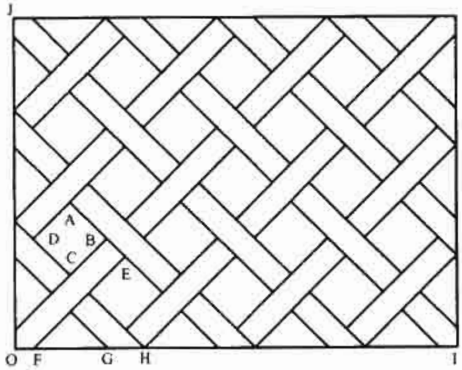

Fig. 12

ABCD est un carré de côté c.

$BE = \frac{c}{2}$.

1- Calculer FG, GH et OF.

2- Calculer OI et OJ.

3- Peut-on recouvrir d'un tel motif un rectangle de longueur $L = 12c\sqrt{2}$ et de largeur $l = 9c\sqrt{2}$.

Même question avec $L = 10c\sqrt{2}$ et $l = 4c\sqrt{2}$.

Certes, cet exercice permet aux élèves de réinvestir leurs connaissances techniques (longueur de la diagonale d'un carré ou théorème de Pythagore, dénombrement, quotient...) ; mais il ne permet pas de les confronter aux problèmes qui se posent dans la réalité et qui font la richesse de cette "activité" :

– déterminer les contraintes
– "choisir" la dimension du côté des carrés du motif
– définir la précision du tracé
– trouver une stratégie de dessin
– analyser et palier les erreurs
– avoir le plaisir d'une réalisation bien faite.

Deuxième situation :
Etude d'une situation réelle

Le parc à moutons

Un film, *Le parc à moutons*, produit par l'I.R.E.M. de Lille, est projeté aux élèves. Il est d'une durée très brève, environ une minute. Un berger du Jura est en train de déplacer le parc dans lequel se trouvent ses moutons.

Suite à la projection du film, aucun commentaire n'est donné par le professeur. Après un instant d'étonnement, voire de déroute pour certains, la curiosité des élèves s'éveille. Pourquoi le professeur a passé ce film ? il ne le dit pas !

C'est aux élèves de décrire ce dont il s'agit, de chercher et de formuler ce qui est en jeu : que voit-on ? que fait le berger ? pourquoi déplace-t-il le parc ? comment le déplace-t-il ? quand a-t-il fini de le déplacer ? quelle forme de parc obtient-il à la fin du déplacement ? que faut-il faire pour répondre à cette dernière question ? quelle(s) règle(s) va-t-il falloir s'imposer pour résoudre cette question ?...

Ce film incite les élèves à un travail de recherche individuelle et collective. A partir d'une situation apparemment hors du champ des mathématiques et même de l'école, ils vont découvrir quelles mathématiques on peut lire dans une telle situation.

Description de la recherche

Première réflexion des élèves : Pour changer le parc de place, le berger le déplace piquet par piquet, en s'évertuant à tendre le grillage entre les piquets (sinon les moutons s'échapperaient) :

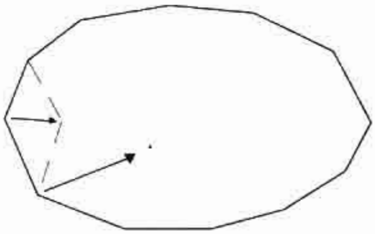

Fig. 13

Les élèves tentent de dessiner un parc et son déplacement. Une première mise au point révèle la nécessité de préciser la forme du parc et de formuler "clairement" comment on déplace chaque piquet.

Le parc est, tout d'abord, associé à un polygone et même, ce qui semble logique, à un polygone équilatère : ce qui constitue la ***première règle du jeu***.

Pour s'exercer au maniement des piquets, les élèves proposent un parc ayant un "petit" nombre de côtés, par exemple 5 ou 6, et de préférence régulier : pour un très grand nombre d'entre eux, leur première tentative a été de dessiner un parc polygonal inscrit dans un cercle et ayant un grand nombre de côtés, souvent un polygone régulier. Il n'est pas nécessaire de commencer l'étude par un polygone régulier, mais pour ma part, j'essaie, dans la mesure du possible, de respecter les idées des élèves, c'est beaucoup plus motivant pour eux.

– cas du pentagone régulier

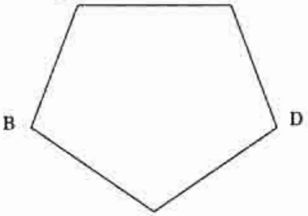

Fig. 14

Pas de problème pour déplacer le piquet A : il vient en A'.

Mais, pour déplacer ensuite le piquet B, il faut, dans ce cas de figure, passer par dessus la barrière qui relie les piquets C et D.

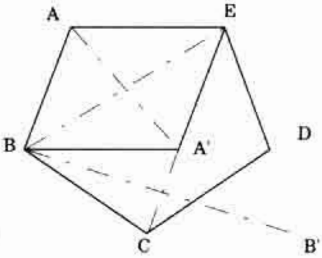

Fig. 15

Voici donc, après avoir écouté les réflexions et les propositions des élèves, le moment d'imposer la ***deuxième règle du jeu*** *:* les barrières ne sont pas infranchissables et on peut poursuivre le déplacement de piquet en construisant le point B' comme on a construit le point A'.

(Lorsque le berger, lui, a des problèmes de déplacement de piquets et barrières, il décroche plusieurs piquets à la fois ! Mais nous ne procèderons pas ainsi.)

Voici donc le parc déplacé (fig. 16 et 17) :

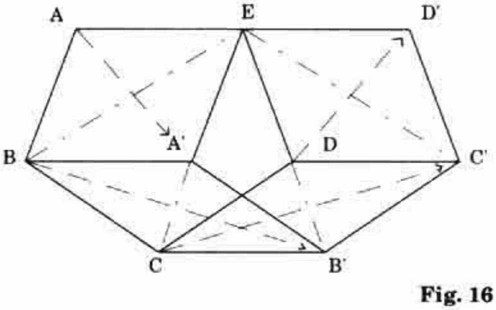

Fig. 16

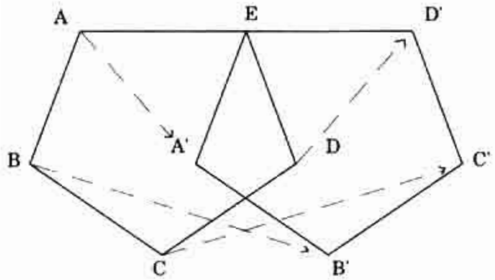

Fig. 17

Il n'est pas difficile pour un élève de 4^e de prouver que la figure ABCDE est *globalement* translatée en A'B'C'D'E dans une translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$;. L'élève de 4^e peut constater, aussi, qu'il existe une rotation de centre E et d'angle 72° qui transforme *point par point* ABCDE en A'B'C'D'E. L'élève de 3^e peut le démontrer.

– cas de l'hexagone régulier

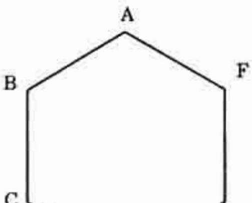

Fig. 18

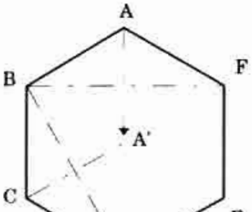

Fig. 19

Nouveau problème : lorsque le piquet B est en B', c'est-à-dire ici en D, on ne peut pas déplacer le piquet C dans une symétrie d'axe (B'D). Les élèves sont perplexes, mais comprennent que C' est nécessairement un point du cercle de centre D et de rayon DC. Ce qui semble le plus cohérent avec le déplacement du pentagone régulier (ou même non régulier mais équilatère), c'est de placer C' symétrique de C par rapport au point D : ce qui constitue la ***troisième règle du jeu.***

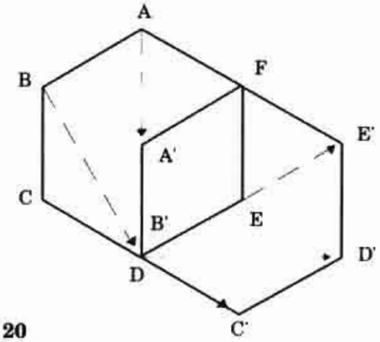

Fig. 20

Là encore, les élèves détectent une translation qui transforme globalement ABCDEF en A'B'C'D'E'F (celle de vecteur $\overrightarrow{AF}$), et là encore, les élèves, selon leur niveau, peuvent démontrer que la translation de vecteur $\overrightarrow{AF}$ transforme *globalement* ABCDEF en A'B'C'D'E'F et que la rotation de centre F et d'angle 60° transforme *point par point* ABCDEF en A'B'C'D'E'F.

– cas d'un polygone régulier à n côtés

Appelons A_1, A_2, A_3, ... , A_n les piquets, A_1 étant le premier piquet déplacé. On montre que la rotation de centre A_n et d'angle 360°/n permet de passer de $A_1A_2A_3...A_n$ à $A'_1A'_2A'_3...A_n$. Pour cela, on peut démontrer que A'_i, A_n et A_{i+2} sont alignés.

Remarque :

Si n est pair, n = 2k et A'_{k-1} est confondu avec A_{k+1}.

Si n est impair, n = 2k+1, l'axe de symétrie du polygone passant par A_n ne passe ni par A_k ni par A_{k+1} mais est la médiatrice de $[A_k\,A_{k+1}]$.

Il n'est pas intéressant de pratiquer cela avec les élèves, sous forme de cas général, mais de leur donner d'autres cas de polygones réguliers à "déplacer", entre autres leur faire déplacer un parc carré ou encore un parc en forme de triangle équilatéral (constructions à faire à la maison).

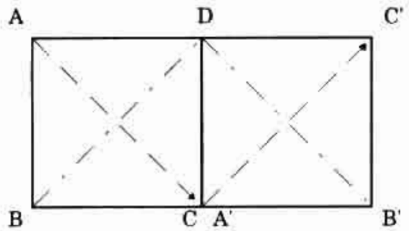

Fig. 21

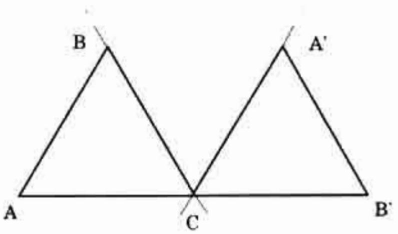

Fig. 22

...pauvres moutons !

Il faut aussi leur demander de déplacer un polygone équilatère non régulier, selon les règles de déplacement établies plus haut. Ils démontreront, comme précédemment, qu'il existe une translation qui permet de transformer globalement le polygone initial en le polygone final.

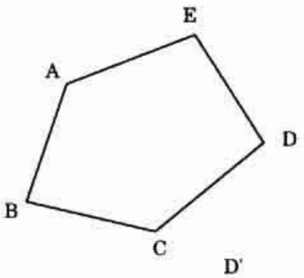

Fig. 23

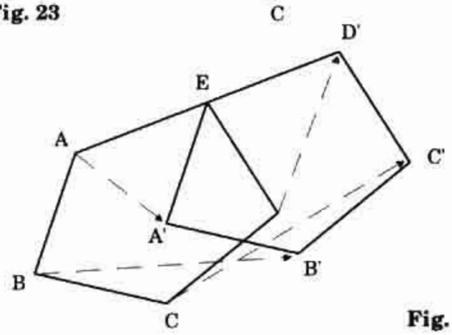

Fig. 24

L'ordre des cas à étudier dépend des propositions des élèves : on peut très bien commencer par l'étude du déplacement d'un polygone équilatère non régulier (c'est d'ailleurs une étude plus simple que celle d'un polygone régulier) ; il faut éviter de commencer par un polygone régulier pair car ce polygone conduit à deux difficultés, qui nécessitent d'introduire les deux dernières règles du jeu simultanément.

Dans cette activité, on part d'une situation réelle ; pour l'étudier on définit, **avec** les élèves, les "règles du jeu" au fur et à mesure que les difficultés se présentent ; ces règles du jeu doivent être cohérentes les unes avec les autres ; on arrive ainsi à une situation purement théorique.

Voici deux prolongements possibles de cette activité :

– Les barrières sont infranchissables, dans la réalité. Mais existe-t-il un parc dont il n'est pas besoin de traverser les barrières pour le déplacer ?

– Supposons que le parc (idéal) englobe au départ un point P d'un terrain. Comment le déplacer, pour qu'il englobe ensuite un point S, qu'il n'englobait pas ?

Troisième situation : Problématique interne aux mathématiques

Autour de Pythagore (1)

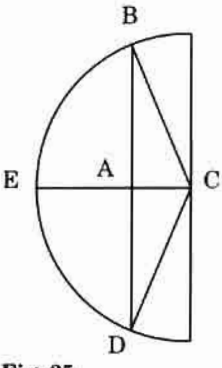

Fig. 25

Le rayon du demi-cercle est donné (dans l'étude ci-dessous il est de 10 cm). Le point A décrit le segment [CE].

Quelle est la position de A sur le segment [CE] pour que l'aire du triangle BDC soit maximum ?

Le problème est posé aux élèves sans aucune piste de recherche et sans questions intermédiaires. Aucune suite de questions pour arriver à ce résultat.

Cette activité se situe en début de 4^e et quel que soit le niveau de classe, juste après avoir démontré le théorème (direct) de Pythagore (mais pas sa réciproque) et avoir donné deux exemples d'application de ce théorème (calculer la longueur du troisième côté d'un triangle rectangle dont les longueurs des deux autres sont données, et dont le résultat est dans un cas rationnel et dans l'autre irrationnel).

Après réactions des élèves, je leur propose la démarche suivante, en deux parties :

I – A partir de plusieurs essais, dégager une conjecture,
II – Etablir la véracité de cette conjecture.

I. Elaboration d'une conjecture

1) *Calcul de l'aire du triangle BDC*

Dessiner la figure en vraie grandeur, en choisissant A tel que CA = 3 cm.

a) L'aire du triangle BDC est $\frac{BD \times AC}{2} = \frac{BD}{2} \times AC$
donc aire du triangle BDC = BA × AC.

b) Il faut donc calculer BA :
Le triangle est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore,

$BA^2 + AC^2 = BC^2$
$BA^2 + 3^2 = 10^2$ en cm^2
$BA^2 + 9 = 100$ en cm^2
$BA^2 = 91$ cm^2
$BA = \sqrt{91}$ cm
$BA \approx 9{,}5$ cm

c) D'où l'aire du triangle BDC est :
aire (BDC) = BA × AC
aire (BDC) = $\sqrt{91} \times 3$ cm^2
aire (BDC) ≈ 28,6 cm^2

(1) *Cf.* l'activité de la pade 122 du manuel de mathématiques de 4^e de l'Irem de Strasbourg.

2) *Tableau des résultats :*

A la maison, les élèves calculent les mesures de la longueur de [AB] et de l'aire de BDC, suivant le modèle précédent, la longueur de [AC] variant de cm en cm, de 0 à 10 cm. Ils remplissent le tableau ci-dessous, en arrondissant les longueurs au dixième de cm et les aires au dixième de cm^2.

Remarque :

il semble que pour AC = 7 cm, l'aire de BDC soit maximale.

(si AC = 7, alors BA = $\sqrt{51}$ et
aire (BDC) = $\sqrt{51} \times 7$
aire (BDC) = 49,9899...)

3) *Représentation graphique de l'aire de BDC en fonction de AC :*

Remarque :

la courbe n'est pas une droite. Elle n'a pas de centre ni d'axe de symétrie, et s'annule deux fois (les élèves de collège ne rencontrent pas souvent de telles courbes !).

Voir la représentation graphique fig. 26.

Il semble que, d'après le tableau (donc la représentation graphique), l'aire de BDC soit maximale pour AC = 7 cm.

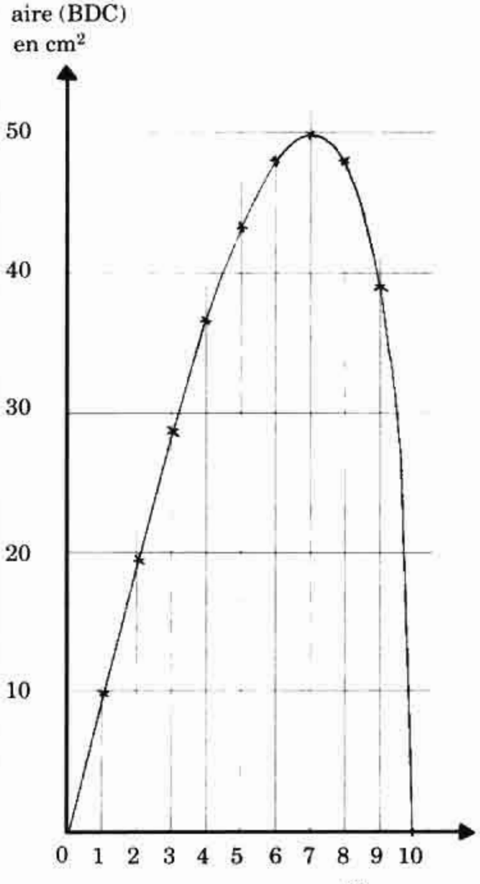

Fig. 26

AC en cm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AB en cm	10	9,9	9,8	9,5	9,2	8,7	8	7,1	6	4,4	0
aire(BDC) en cm^2	0	9,9	19,6	28,6	36,7	43,3	48	50.0	48	39,2	0

II. Véracité de la conjecture

Construire très soigneusement la figure pour AC = 7 cm.

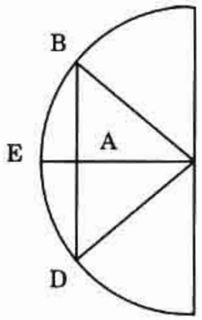

Fig. 27

1) **Il semble que** ce triangle BDC soit rectangle en C.

Les élèves le vérifient avec leur équerre. Certains le vérifient même avec leur compas : ils tracent le cercle de diamètre DB et ce cercle passe par C !

Vérifions :
Si BDC est rectangle en C, alors
$CB^2 + CD^2 = BD^2$
Or $CB^2 + CD^2 = 100 + 100 = 200$
et $BD = 2 \times BA = 2\sqrt{51}$
soit $BD^2 = 204$
Donc BCD **n'est pas** un triangle rectangle en C.

Lors de cette vérification, les élèves proposent 7,1 comme valeur de BA. Les élèves "faibles" admettent sans difficulté apparente (!) qu'il vaut mieux utiliser $\sqrt{51}$. Mais les "bons" élèves, eux protestent, insistent pour utiliser 7,1, n'admettent pas sans comprendre le pourquoi de mon insistance. Une véritable discussion s'engage, au bout de laquelle j'obtiens gain de cause, non sans mal !

2) Ce triangle est-il celui d'aire maximale ?

Comment construire le triangle d'aire maximale ? C'est-à-dire comment construire le triangle ABC d'aire maximale (puisque aire (BDC) = 2 × aire (ABC)) ?

Soit : comment construire un triangle ABC rectangle en A, d'hypoténuse BC = 10 cm et d'aire maximale ?

Pour les aider dans cette réflexion, je propose aux élèves de construire des figures identiques à la première, mais dont le point A occupe différentes positions sur [CE], d'observer les triangles ABC, de rechercher ce qu'ils ont de commun et de différent, de les découper et les manipuler, de les superposer selon les critères de leur choix, d'en tirer les conclusions qui s'imposent. Ce travail est à faire à la maison.

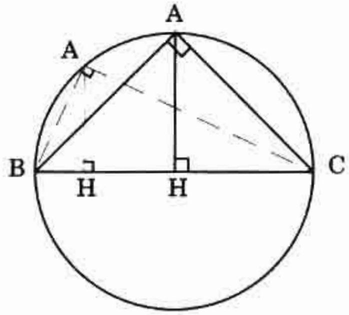

Fig. 28

L'aire de ABC est $\dfrac{AB \times AC}{2}$, mais aussi $\dfrac{BC \times AH}{2}$; donc l'aire de ABC est maximale pour la valeur maximale de AH.

Puisque BC = 10 cm, on peut considérer le cercle de diamètre BC = 10 cm ; A est un point de ce cercle (car le triangle ABC rectangle en A est inscrit dans le cercle de diamètre son hypoténuse BC).

Les élèves sont aidés dans cette partie de la démonstration par leurs découpages des triangles ABC, qu'ils superposent en faisant coïncider les hypoténuses [BC]. Ils apprennent ainsi qu'il est parfois utile de détacher une partie d'une figure, de la dessiner dans une position semblable ou même différente de celle qu'elle occupait dans la figure initiale, pour élaborer une démonstration.

AH est maximum lorsque H est le centre du cercle, donc le milieu de [BC].
Alors angle BCA = angle CBA = 45°
Or angle BCD = 2 × angle BCA
Conclusion : dans le triangle BDC d'aire maximum, l'angle BCD est droit.

Calcul de la mesure de AC dans un tel triangle :

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ en cm^2
$2AC^2 = BC^2$ car AB = AC
$2AC^2 = 100\ cm^2$
$AC^2 = 50\ cm^2$
$AC = \sqrt{50}$ cm
$AC \approx 7{,}02$ cm.

La valeur 7, c'est-à-dire $\sqrt{49}$, choisie pour AC était effectivement très voisine de la valeur donnant l'aire de BDC maximum !

Intérêts de l'activité

* Les élèves sont actifs, même si souvent ils ne savent pas trop comment ni dans quelle direction il faut chercher.

* Elle montre qu'une démonstration est nécessaire pour valider une conjecture.

Intérêts de la démarche

D'autres démarches, conscientes ou inconscientes, conduisent à la solution. Lors d'une expérimentation de cette activité, un élève a immédiatement donné la réponse au sujet de la position du point A, dès que le problème a été présenté ; mais il n'a jamais pu expliquer pouquoi il a pensé à cette solution. Il a simplement dit qu'il fallait que B et D soient sur les bissectrices des angles formés par le diamètre du demi-cercle et le rayon [CE]. Avait-il, inconsciemment, dans la tête, le cercle tout entier et le rectangle inscrit de plus grande aire possible, c'est-à-dire le carré (nous n'avions pas travaillé cette question-là auparavant, mais peut-être l'avait-il vu les années précédentes, en 6^e ou 5^e) ?

La démarche que j'ai fait suivre à mes élèves m'a semblé intéressante car elle soulève des difficultés constuctives :

* Premier problème d'arrondi : les élèves se demandent pourquoi le nombre 49,9899... s'écrit au dixième près 50,0 et non 50 (ou 49,9).

* Pourquoi n'admet-on pas, en faisant référence au tableau et à la courbe, que la position de A est à 7 cm de C pour que l'aire de BDC soit maximale.

Et même si on n'a pas suffisamment exploré en faisant varier CA de cm en cm, en explorant de mm en mm, puis de..., on n'est jamais sûr d'obtenir le résultat. Il faut donc employer une autre méthode.

* Une fois le triangle BCD construit pour CA = 7 cm, la question se pose de savoir si ce triangle est rectangle ou non. Et le problème pour les élèves est de comprendre que seul le calcul utilisant des valeurs

exactes (comme $\sqrt{51}$) peut faire preuve et non des valeurs approchées (comme 7,1).

* Encore un passage difficile : passer de la figure 27 à la figure 28, même si les élèves ont découpé les différents triangles BAC et les ont superposés en faisant coïncider leurs hypoténuses.

L'élève qui réussit à affronter ces difficultés (pas forcément à les résoudre) n'a-t-il pas avancé d'un grand pas ?

Cette activité dure 2 heures et demie (une demi-heure le premier jour pour présenter le problème et traiter la partie I-1) ; une heure pour traiter I-2) et 3) puis II-1) ; une heure pour II-2) et conclure). Elle a été filmée lors d'une de ses expérimentations ; une cassette vidéo a été produite par l'I.R.EM. de Lille où vous pouvez la visionner ou vous la procurer.

Grâce à cette expérience, on se rend compte de la difficulté qu'éprouvent les élèves de quatrième à aborder la nécessité de la démonstration (cela ressort très nettement dans le film vidéo cité ci-dessus).

Conclusion

Dans ces trois types d'activités, de la plus pratique à la plus théorique, l'élève est mis en situation de recherche, il est confronté à des difficultés réelles, il se pose lui-même les questions qui vont lui permettre d'avancer dans sa construction du savoir. Lors de telles séances en classe, les élèves discutent, essaient de défendre leurs théories, leurs façons de voir les différents aspects du problème posé. Un véritable débat s'établit entre eux, et aussi entre eux et le professeur. Ce débat est parfois très animé. Il est révélateur du niveau de connaissance et des différents degrés de compréhension et de représentation de la notion mise en jeu atteints par les élèves. C'est là que de nouvelles images mentales vont se créer pour chaque élève. Celui-ci est alors amené à passer du domaine du concret (son concret !) à celui de la théorie.