INTERDISCIPLINARITÉ MATHÉMATIQUES ET PHILOSOPHIE. UN EXEMPLE : LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Claude CHRETIEN
Dominique GAUD
Irem de Poitiers

Nous rendons compte dans cet article d'une action interdisciplinaire conduite en lycée entre les sciences (physiques et mathématiques) et la philosophie. Dans un premier temps, il nous a paru utile de préciser en quoi la philosophie pouvait être, en terminale, un lieu privilégié d'interdisciplinarité, ensuite nous exposerons la démarche qui, en mathématiques et philosophie, nous a conduits à proposer des activités-élèves sur le thème du "raisonnement par récurrence".
Le lecteur intéressé trouvera l'ensemble et le détail de cette action interdisciplinaire dans la brochure Travaux interdisciplinaires en terminales scientifiques éditée en septembre 93 par l'IREM de Poitiers.

Le choix délibéré d'une action interdisciplinaire

Confronter les points de vue, les méthodes, les concepts et les outils, les questions et les réponses de différentes disciplines répond à des exigences devenues, nous semble-t-il, aujourd'hui incontournables. En effet :

1- L'état actuel du savoir nous met aux prises avec des objets globaux et des problèmes complexes et impose une vision d'ensemble dans laquelle les apports des différentes spécialités sont appelés à se conjuguer.

2- La création ininterrompue et accélérée de nouveaux savoirs indispensables à la culture de l'homme d'aujourd'hui et, d'autre part, l'impossibilité d'augmenter le temps que les élèves passent journellement à l'école ne permettent plus de construire les programmes scolaires par empilement de connaissances. C'est pourquoi il vaut mieux dégager les démarches de pensée impliquées dans les contenus de base plutôt que de multiplier des contenus nouveaux : c'est-à-dire recouper les approches, aborder des problèmes-types sous différents éclairages, dans différentes stratégies, avec un souci de convergence.

3- La prépondérance des images dans notre société médiatique et l'émiettement de l'information ont modifié les habitudes et structures mentales de nos élèves. Ils sont saturés de connaissances, souvent disparates, décousues, juxtaposées, incohérentes... On ne peut attendre que, *spontanément*, ils les relient, les confrontent, les fassent communiquer et en réalisent la synthèse. On ne peut pas non plus ajouter à cette confusion une masse d'informations nouvelles. L'Ecole doit leur enseigner la distanciation du réel, le recul réflexif, et leur fournir les grilles de lecture et schémas de pensée qui leur permettront de *comprendre* (= prendre ensemble) cette réalité foisonnante.

4- L'institution scolaire souffre du cloisonnement des disciplines, chacune crispée sur ses prérogatives, ses contenus et méthodes, son territoire et ses postes, ses horaires et coefficients etc. Une telle situation de concurrence développe individualisme et corporatisme et bloque par avance toute tentative de réformer ou de faire bouger le système.

Pour toutes ces raisons, l'interdisciplinarité nous apparaît aujourd'hui comme un axe essentiel de la réflexion et de l'expérimentation pédagogiques pourvu qu'elle se donne les moyens d'échapper aux pièges qui la menacent : simple concession à l'idéologie moderne du travail en équipe, dilution des exigences propres à chaque discipline d'enseignement, enlisement dans le spectaculaire et l'anecdotique si on ouvre seulement une parenthèse dans le cours des activités habituelles.

Elle fut, dès l'origine de celui-ci, une des missions confiées au Lycée Pilote Innovant du Futuroscope et elle figure parmi les objectifs inscrits dans les versions successives du projet de cet établissement sous la forme d'une *"recherche de points communs interdisciplinaires afin de contribuer efficacement au décloisonnement des disciplines"* (juin 1990). C'est dans ce cadre institutionnel que se poursuit et se développe depuis quatre ans une expérience associant professeurs de philosophie, de mathématiques et de sciences physiques enseignant dans les classes terminales scientifiques (C, D et E) sur le thème général de l'histoire, des méthodes et de la philosophie des sciences.

Une action centrée sur la philosophie

La nature même de la philosophie, son statut institutionnel dans les lycées et ses programmes font de cette discipline un lieu privilégié de l'interdisciplinarité

1- Par sa *nature* en effet, par la variété de ses questions et de son programme, la philosophie apparaît non pas comme une spécialité parmi d'autres, mais comme une discipline-carrefour. Née et nourrie à tous les vents qui soufflaient sur l'agora grecque, elle vit des rencontres et des confrontations et elle met en interconnexion les différents savoirs dans une perspective interrogative et critique. A l'exemple de Socrate qui interrogeait les politiciens, les artistes, les médecins, les prêtres ou les rhéteurs et se mêlait de tout sans être lui-même de la partie, le philosophe aujourd'hui maintient l'exigence, non pas d'un savoir total et encyclopédique (ambition évidemment impossible), mais d'un *questionnement global* propre à faire émerger, par delà l'éclatement et l'isolement des savoirs spécialisés, la visée d'un sens, c'est-à-dire de l'unité et de la vérité.

2- Par son *statut* d'enseignement terminal, la philosophie apparaît comme le lieu naturel pour reprendre sous forme réflexive et synthétique les connaissances acquises au cours des études antérieures, pour les articuler dans une perspective consciente d'elle-même et cohérente, et pour ainsi jeter des passerelles entre les différents champs du savoir. Son rôle est de faire *comprendre* aux lycéens qui terminent leur cycle secondaire le sens de démarches intellectuelles qu'ils ont souvent pratiquées à tâtons et de connaissances qu'ils ont accumulées en vrac.

Les objectifs pédagogiques

Appliquée aux sciences, la réflexion philosophique peut donner de celles-ci une autre vision que celle de vérités révélées, de recettes opératoires, de réalisations techniques fascinantes, de théories prestigieuses et mystérieuses... Elle permet de poser des questions fondamentales :

Quels sont les pouvoirs et les limites des sciences ? Quels sont leurs présupposés et leurs moyens ? Quelle prise ont-elles sur la réalité, quelle perspective sur la vérité ? Quel dialogue se noue à travers elles entre l'homme et le monde et quel dialogue entre elles ou avec les autres modes de connaissance ? etc.

En greffant ainsi le questionnement philosophique sur l'apprentissage que les élèves font des savoirs et des savoir-faire scientifiques, nous espérons tendre vers quatre objectifs prioritaires :

1- Clarifier les *méthodes* et démarches scientifiques, dans une optique *comparative* entre les mathématiques d'une part et les sciences expérimentales de l'autre. Il s'agit de différencier la méthode *inductive* exposée dans la fameuse marche à quatre temps de Claude Bernard (observation, hypothèse, vérification, formulation de la loi) de la méthode hypothético-*déductive* des mathématiques. Cela doit permettre de fixer le sens et l'usage des *concepts* et de lever les confusions entre "montrer" et "démontrer", "démontrer" et "vérifier", "loi" et "théorème", "hypothèse" et "théorie", "fait" et "axiome" etc.

2- Mieux apprendre les sciences, mieux comprendre ce qu'on fait. Le postulat sous-jacent à l'objectif précédent est en effet qu'en plus de l'acquis culturel (du "supplément de culture générale", qui est une nécessité avant d'être un luxe), et grâce à lui, une clarification des procédures de travail, une mise en perspective historique des problèmes et des connaissances, une explicitation de certaines notations – en particulier en mathématiques (*i*, *dx*..) – doivent faciliter l'acquisition et l'assimilation des contenus scientifiques. Par exemple nous conduisons les élèves à s'interroger, en termes épistémologiques sur ce qu'est un objet mathématique, sur la nature d'un raisonnement inductif, d'un raisonnement déductif, sur ce que recouvrent les notions d'infini ou de hasard etc. Notre pari est qu'un tel questionnement peut lever certains obstacles (épistémologiques et didactiques) et assurer une meilleure compréhension des notions scientifiques enseignées. Platon déjà savait cela : "*Peut-être la sagesse, telle que nous l'envisageons à présent, à savoir la science de la science et de l'ignorance, a-t-elle cela de bon, que celui qui la possède apprendrait plus facilement tout ce qu'il voudrait apprendre, et que tout lui paraîtrait plus clair par le fait qu'il situerait* *chaque connaissance acquise dans la perspective de la science en général."* (*Charmide*, 172b)

3- Introduire des éléments d'*histoire des sciences* pour modifier l'image courante (naïve et idéalisée) de la science. Il s'agit de *démythifier* la science comme autorité sacrée et la vérité scientifique comme vérité absolue, révélée, définitive. Si le scientisme en effet a, depuis le début du siècle, reflué chez ceux qui se battent sur le front de la recherche, les populations de l'arrière sont d'autant plus menacées par l'idolâtrie de la science qu'elles n'en voient que les retombées techniques et le spectacle médiatique de quelques savants auréolés du Nobel et momentanément sortis du "*Temple de la Science*" (Einstein) où, dans des langues ésotériques, se déroulent des rites mystérieux interdits au profane. Dans un monde où les religions traditionnelles sont en déclin, la science se voit sacralisée, investie d'une puissance oraculaire et d'une mission salvatrice où elle a tout à perdre : son identité, sa rationalité, la fécondité du doute et du sentiment de ses propres limites. Au contraire, la prise de conscience des débats, des remises en cause, voire des crises et conflits, qui jalonnent l'histoire des sciences impose une vision plus réaliste : la science est une démarche humaine, tâtonnante, progressive, relative, dont le but est d'essayer de construire une représentation à peu près satisfaisante du monde où nous vivons. Les erreurs d'hier nous montrent par exemple que les vérités d'aujourd'hui ne sont que des erreurs en sursis et les débats qui divisent la communauté scientifique nous rappellent que bien des pistes et des problèmes restent ouverts. Ainsi les élèves sont-ils mis en garde contre toute vision dogmatique et antiscientifique des sciences, en même temps que contre la tentation de l'irrationalisme et de l'occultisme, antidotes illusoires et dangereux.

4- Relativiser et réduire le clivage entre les sciences et les lettres, inscrit dans toutes les têtes avec ses *a priori* trompeurs et ses conséquences pratiques fâcheuses (dédain de certaines disciplines, spécialisation prématurée, méconnaissance et négligence des connaissances et compétences exigibles de futurs scientifiques ou techniciens etc.). Les sciences aujourd'hui ne peuvent plus assumer leur héritage et continuer de se développer sans s'interroger sur leurs fondements et leurs finalités et sans pratiquer leur propre épistémologie. Les amputer de leur dimension réflexive et philosophique, ce serait les réduire à un ensemble de recettes. Quant à la philosophie, elle n'est pas une forme de littérature abstraite ou absconse ; son histoire a toujours été liée à celle des sciences et, vu leur "poids" dans le monde contemporain, elle ne peut certes pas aujourd'hui se tenir à l'écart des sciences et des techniques. Comme le disait en 1979 le chimiste Ilya Prigogine, l'heure est plus que jamais à une "*nouvelle alliance*".

Ce travail interdisciplinaire vise donc à former des bacheliers scientifiques qui n'aient pas seulement la tête bien pleine de mathématiques et de physique, mais qui commencent à acquérir un esprit véritablement scientifique, c'est-à-dire aussi interrogatif et critique. Quant aux professeurs, mobilisés dans un vaste travail de recherche, de confrontation et d'échanges, ils trouvent dans cette action une occasion unique de formation individuelle et réciproque. Elle permet à chacun tout à la fois de mieux comprendre ce qui se fait dans les disciplines voisines et de mieux cerner les exigences propres à sa discipline, confirmant ainsi plus que la diluant la spécificité de chacune. Elle fait apparaître aussi sous de nouveaux éclairages certains des contenus de notre enseignement.

Vue d'ensemble sur le parcours proposé en mathématiques et philosophie

Bien que l'action interdisciplinaire ne tienne qu'une place mineure dans le travail pratiqué respectivement en mathématiques et en philosophie et qu'en conséquence les interventions conjointes restent ponctuelles, une cohérence a été recherchée. Elle est matérialisée par un *document de synthèse* (sur la méthodologie et l'épistémologie des sciences) qui vise à structurer l'ensemble des questionnements et propose aux élèves, dès le début de l'année, une documentation de base. L'imbrication des deux approches, mathématiques et philosophique, se traduit aussi, concrètement par l'élaboration de *feuilles de route* destinées à guider le travail des élèves et alternant activités ou exercices mathématiques et questions philosophiques.

La réflexion ainsi organisée porte d'abord sur la nature et *le statut ontologique des nombres et des objets mathématiques* en général. Ce problème est soulevé à propos des nombres complexes, avant d'être repris (pour vérification des acquis et de la capacité de transfert) à propos des grandeurs infinitésimales, lors d'une rétrospective sur les sources du calcul intégral. Il permet de jeter les bases d'une recherche plus vaste sur les rapports des mathématiques et de la réalité et partant sur la différence essentielle entre les mathématiques et les sciences expérimentales.

D'où une deuxième voie qui s'ouvre ici et qui conduit à distinguer raisonnements *inductif* et *déductif*. Plus précisément, l'étude du *raisonnement par récurrence* permet de réfléchir sur la nature et les procédés de l'induction en mathématiques et en physique, comme on le verra plus loin. Et une approche des *géométries non-euclidiennes*, proposée en fin d'année, offre l'occasion d'insister sur le caractère hypothético-déductif de la démonstration mathématique et sur sa mise en forme axiomatique. Confrontés à l'étrangeté de ces constructions géométriques et informés (au cours d'une séance de travail à laquelle participent les professeurs de physique) de leur utilisation à titre de modèles théoriques dans les sciences de la nature, les élèves sont invités à réfléchir sur l'indépendance des mathématiques par rapport à la réalité et sur leurs applications aux autres sciences. Pour les préparer à cette problématique, nous avons été amenés à leur faire découvrir les *géométries fractales* (dans le cadre de l'étude des suites) et à poser déjà à cette occasion la question de la modélisation du réel.

Enfin, pour montrer que la recherche mathématique (ou scientifique en général) ne saurait être isolée du contexte socio-culturel ni coupée des affluents philosophiques, idéologiques ou religieux qui irriguent ses terres, deux orientations de nature différente ont été proposées à la réflexion. D'une part sur la notion d'*infini*, en préalable à l'étude du calcul intégral : quelle hypothèque pesait sur cette notion depuis l'antiquité ? Qu'est-ce qui, depuis le moyen-âge jusqu'au XVIII^{e} siècle, a permis de lever cette hypothèque (chez Leibniz en particulier) ? Quelles valeurs et quels sens nouveaux a pris cette notion d'infini dans les mathématiques modernes ? D'autre part sur la notion de *hasard*, en liaison avec le cours sur les probabilités : en quoi cette notion heurte-t-elle le principe logique de causalité, quel usage équivoque et confus en fait-on d'ordinaire, comment les mathématiques "apprivoisent"-elles cette notion "rebelle" et lui imposent-elles leur ordre et leur mesure ?

La récurrence mathématique et l'induction physique : notre analyse.

Tout professeur qui a à enseigner la récurrence sait par expérience que les élèves ont du mal à s'approprier intellectuellement ce raisonnement, qu'ils seront pourtant appelés à mettre en œuvre très souvent. Ainsi, en méconnaissant le principe, ont-ils tendance à en sous-estimer l'intérêt ("ça ne sert à rien"), voire à le réduire à un tour de passe-passe. Aussi avons-nous choisi d'étudier les mécanismes propres à ce raisonnement en les confrontant, d'une part, à la forme canonique et déductive du raisonnement mathématique et, d'autre part, à la démarche d'induction telle qu'elle est pratiquée dans les sciences expérimentales.

Plus précisément, il s'agit de réfléchir sur les *procédés de la généralisation.* En effet "il n'y a de science que du général" (Aristote) ; ce qui est unique ou singulier peut être *nommé* (nom propre) mais ne peut être *connu*, car la connaissance implique des concepts, des idées générales, des repères fixes auxquels peut être référé tout élément nouveau. Le raisonnement par récurrence a une remarquable puissance de généralisation puisqu'il permet de construire un théorème général à partir d'une vérification particulière sur une quelconque valeur de n. Il permet de passer d'une valeur particulière de n (0, 1, 2) à tout n : autrement dit, du fini à l'infini. C'est là sa "*vertu créatrice*" sur laquelle insiste Poincaré pour le différencier de la stérilité tautologique du raisonnement purement déductif (*cf.* extrait de *La science et l'hypothèse* reproduit ci-dessous dans "l'activité 4" de la feuille de route distribuée aux élèves). Bien qu'historiquement le raisonnement par récurrence remonte à Pascal, et peut-être à Maurolico [(1)], nous avons avons choisi de nous appuyer sur un texte de Poincaré, qui en fut le promoteur dans les temps récents, parce cet auteur le "met en scène" dans une problèmatique générale propre à en faire ressortir le mécanisme et l'intérêt... Les ambiguités mêmes du commentaire de Poincaré permettent de faire les mises au point nécessaires à une bonne compréhension de ce raisonnement. Ainsi en va-t-il de l'emploi du mot "induction", qui peut prêter à confusion : la récurrence est-elle une induction ou une déduction ? Question décisive qui nous a conduits à reprendre dans ses grandes lignes, le débat entre Poincaré et Goblot (*cf.* feuille de route).

Quand, à partir d'un certain nombre d'observations et d'expériences, le physicien en tire une loi universellement valable, il procède bien par une généralisation qui présente quelque analogie avec la récurrence. La loi affirme en effet que toujours et partout les mêmes causes produisant les mêmes effets, la relation constatée se reproduira. La loi scientifique est donc l'énoncé d'une relation générale, nécessaire et constante entre deux ou plusieurs phénomènes interdépendants, et toutes les fois quand cela est possible elle s'exprime par une relation algébrique.

La condition d'un phénomène une fois connue et remplie, le phénomène doit se

(1) Mauricolo Francisco (1495-1575) : dans son traité d'arithmétique il énonce et applique le principe d'induction mathématique.

reproduire toujours et nécessairement, à la volonté de l'expérimentateur. [...] *Les lois sont immuables, et les phénomènes que ces lois régissent sont liés à leurs conditions d'existence par un déterminisme nécessaire et absolu. Partant de ce principe qu'il y a des lois immuables, l'expérimentateur sera convaincu que jamais les phénomènes ne peuvent se contredire s'ils sont observés dans les mêmes conditions.* [...] *Je dis que le mot exception est antiscientifique ; en effet, dès que les lois sont connues, il ne saurait y avoir d'exception.*
Claude BERNARD, *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale, 1865* (2)

Mais la différence entre la récurrence mathématique et l'induction physique est bien plus radicale et essentielle que l'analogie apparente :

1. La généralisation dans le raisonnement par récurrence a en elle-même sa propre raison d'être ; elle repose sur un *principe interne*, à savoir la propriété constitutive de la série des entiers. Le mathématicien ne prend aucun risque en embrassant d'un coup l'infinité des cas possibles à partir d'un seul cas dont il s'est assuré. Il n'annexe pas l'inconnu au connu, comme dans l'induction physique ; il procède par déduction. En effet tout son raisonnement repose sur une conséquence qu'il tire d'une *règle* qu'il a posée lui-même : dans la série des entiers, tout nombre est obtenu par addition de l'unité au nombre qui le précède immédiatement. Le mathématicien maîtrise donc l'ensemble de la procédure qui le mène du particulier au général, parce qu'elle relève entièrement des règles qu'il a lui-même fixées.

(2) Texte figurant dans le document de synthèse remis aux élèves.

2. Au contraire l'induction physique des lois n'a en elle-même aucune garantie ; elle trouve sa justification dans un ordre du monde et un *fondement externe* qui, en tant que tel, échappe au physicien : le déterminisme rigoureux et universel de la nature. Le physicien parie sur la parfaite régularité de la nature, toujours et partout fidèle à ses propres lois. Mais ce n'est là qu'un postulat ou une croyance, une simple conjecture. En affirmant la constance des relations qu'il établit entre les phénomènes naturels à partir d'un nombre limité de vérifications, le physicien entend donc se soumettre à une nécessité qui s'impose à lui du dehors mais qui reste invérifiable. On sait les dangers de l'induction dans la vie courante (généralisation hasardeuse de constatations ou d'habitudes). Qu'est-ce qui fonde alors son usage dans les sciences expérimentales ?

C'est la croyance ou la conviction que la nature n'est pas capricieuse ou fantaisiste, qu'elle ne s'amuse pas à nous jouer de vilains tours, mais qu'elle obéit toujours et partout à ses propres règles. Or il ne s'agit là que d'un pur acte de foi, un pari de la raison, communément désigné sous le nom de *"postulat du déterminisme"*. On admet par principe (= sans preuve ni démonstration : postulat) que la nature est rigoureusement déterminée ou réglée. Sans doute la croyance en un Dieu législateur universel a-t-elle joué historiquement un rôle important dans l'acquisition de cette conviction que le monde obéit à des lois inviolables. Mais celle-ci reste aujourd'hui, dans l'abstention de toute référence métaphysique, une pure exigence que les sciences posent sans pouvoir lui donner un fondement.

Malgré ce qu'on a appelé la "crise du déterminisme", provoquée par la découverte, en mécanique quantique, d'une indétermination foncière au niveau microscopique, les scientifiques ne peuvent renoncer à postuler un déterminisme de la nature, serait-ce sous une forme affaiblie ou statistique. C'est ce que reconnaît Max Planck dont la découverte des quanta a pourtant contribué fortement à ébranler le déterminisme classique.

> *Tout d'abord, il faut bien le reconnaître, il n'est pas évident que le monde obéisse à des lois physiques, il n'est même pas évident que, la permanence de leur empire jusqu'à l'heure actuelle étant admise, il en sera toujours de même à l'avenir. Il est, en effet, tout à fait concevable et il n'est au pouvoir de personne d'empêcher qu'un beau soir, à la suite d'un événement tout à fait imprévu, la nature nous joue le tour de s'abandonner à une sorte de jeu fantaisiste et nous donne le spectacle de l'incohérence la plus complète et la plus irréductible à l'idée d'une loi quelconque ; il ne resterait plus alors à la science que la ressource de se déclarer en faillite. C'est pourquoi aussi elle est contrainte à admettre l'existence des lois physiques, à titre de postulat primordial et préalablement à toute démarche, afin de pouvoir vivre et se développer.*
> Max PLANCK, *Initiation à la physique* (3)

En engageant les élèves dans cette comparaison entre les procédés de généralisation qui sont à l'œuvre dans la récurrence et ceux qui sous-tendent l'induction expérimentale, l'objectif visé est de les amener à saisir la différence entre le raisonnement mathématique et le raisonnement expérimental.

(3) Texte donné aux élèves dans le document de synthèse.

Le premier, de nature *hypothético-déductive*, vise à tirer des propriétés générales et des conséquences plus particulières de règles du jeu fixées au départ. Toute la procédure dépend de ces “données” initiales comme se déroule la partie d'un jeu de société : par enchaînement progressif de propositions (comparables aux “coups” du joueur) qui résultent les unes des autres. Si on peut comparer ce raisonnement à un jeu, c'est au sens où il est une pure activité de l'esprit, manoeuvrant des êtres qu'il a lui même enfantés (*cf.* le problème du statut des nombres et des objets matématiques étudié préalablement dans l'année), selon des stratégies qu'il a décidées, et exerçant ainsi sa propre puissance.

> *“Pour définir le jeu d'échecs, on définit d'abord les pièces : le roi, la reine, le cheval, la tour, etc. On ne cherche pas à justifier ces noms malgré la ressemblance de ces pions avec leurs images ; on aurait pu tout aussi bien appeler ces pions autrement. On indique les règles du jeu et en particulier la marche de ces différents pions. Il n'y a pas à la justifier, on aurait pu choisir d'autres règles. Il n'y a pas de pourquoi, les choses sont ce qu'elles sont, telles qu'on les définit. A partir de ces règles du jeu qui sont les axiomes de la théorie du jeu d'échecs, on peut faire des déductions, c'est-à-dire jouer des parties et démontrer des théorèmes sur les possibilités de gagner des blancs ou des noirs. La logique mathématique opère de même. Elle considère que le signe =, qu'on représente par deux barres, n'a pas spécialement de rapports avec l'égalité du sens commun et qu'on aurait pu le représenter par un autre symbole ou lui donner un autre nom. De même, quand nous écrivons : A cB, nous lisons : "A est contenu dans B". Et ce symbole de contenance, au point de vue*

de son fondement mathématique, n'a pas de rapport avec le symbole de contenance vulgaire. C'est comme un symbole mathématique vulgaire. C'est un symbole mathématique qu'on aurait pu écrire et nommer autrement. De même façon, le fameux "il existe" s'écrit maintenant simplement par une lettre majuscule renversée. La liste des symboles et des lettres utilisés est analogue à la liste des pièces du jeu d'échecs. Quant à la manière de les utiliser, elle constitue la règle du raisonnement logique. On peut la choisir de façon assez arbitraire, comme on choisit les règles du mouvement des pièces du jeu d'échecs. Une fois qu'elle est choisie, on a construit une logique et on peut faire des mathématiques comme on peut jouer une partie d'échecs."
Laurent SCHWARTZ, "Marxisme et pensée scientifique", conférence éditée par les C.E.S. (4)

Il en va tout autrement du raisonnement à l'œuvre dans les sciences expérimentales, qui vise à débrouiller la complexité, la diversité et la mutabilité apparentes du *monde naturel* pour y déceler ou y introduire des points de repère stables. L'esprit de l'homme a en effet besoin d'identifier des formes fixes et générales, des liens constants, des mécanismes qui se répètent... faute de quoi il partirait à la dérive et se noierait dans le tourbillon des phénomènes. Mais, ici, il ne jouit plus de la souveraine indépendance qu'il a en mathématiques. Il est aux prises avec le réel extérieur et il ne sait jamais dans quelle mesure celui-ci répond à ses propres attentes. Il lui faut apprivoiser ce monde extérieur, l'assimiler et s'accommoder à lui, au risque constant du démenti et sans garantie absolue quant au sens de l'entreprise (postulat du déterminisme). Les chemins qui conduisent ici des faits à la loi, du particulier au général (ou à l'universel) sont donc incertains, comme le montre E. Goblot et R. Carnap dans les textes reproduits ci-après et comme l'illustrent les aléas de la loi de Bode relatés par W.M. O'Neil.

En guise de conclusion provisoire

Il est toujours difficile de dresser un bilan et de porter une évaluation sur une action éducative, dans la mesure où les effets véritables n'en sont guère mesurables, surtout à court terme. On ne saurait donc s'en tenir à l'impact immédiat. Notons cependant une motivation et un intérêt certains des élèves, manifestes par exemple dans le sérieux avec lequel sont faites la plupart des préparations.

D'autre part, le travail en philosophie a bénéficié du réinvestissement des acquis dans les dissertations et d'un changement de comportement de certains élèves, a priori réfractaires à cette discipline et progressivement plus ouverts. La vision des mathématiques semble aussi modifiée dans un sens moins instrumental : percevant la complexité sémantique et les ramifications historiques et culturelles de certaines notions, redécouvrant le sens de la démonstration, les élèves ne peuvent plus simplement les appliquer mécaniquement comme des outils ou des recettes. Enfin, parce que le bienfait est ici évident et ne peut manquer de rejaillir sur notre enseignement, il faut redire l'enrichissement pour les professeurs d'un tel travail en commun. Il nous ouvre de nouveaux domaines de connaissances, en même temps qu'il nous oblige à approfondir certains aspects de notre propre discipline et, nous sortant de notre spécialité, il nous

(4) Texte donné aux élèves dans le document de synthèse.

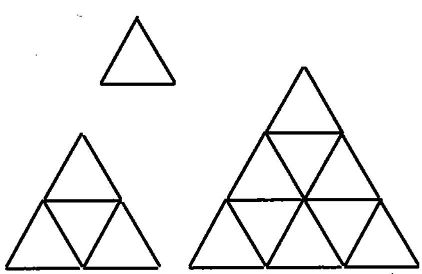
rapproche de la condition "polyvalente" des élèves : on mesure mieux alors quelle peut être leur difficulté à *intégrer* les messages multiples qu'ils reçoivent en alternance et en parallèle.Cela suffit, à nos yeux, à justifier de telles actions interdisciplinaires de clarification et de synthèse, malgré leur caractère modeste.

N.B. : Signalons le profit que nous avons retiré de notre participation au séminaire "maths-philo" organisé à l'I.R.E.M. de Poitiers. Nous avons pu y exposer les différentes phases de notre expérience, réfléchir avec d'autres collègues sur nos objectifs, bénéficier de leurs indications bibliographiques, soumettre nos documents de travail à leur critique amicale et attentive, approfondir avec eux des questions d'épistémologie difficiles .

Document élève : "feuille de route"
RÉCURRENCE

ACTIVITÉ 1 : Y A-T-IL UNE FORMULE GÉNÉRALE ?

1) Empilons les triangles !



A la première couche, il y a 1 triangle
A la deuxième couche, il y a 4 triangles
A la troisième couche, il y a 9 triangles
Combien y a-t-il de petits triangles à la 1994^e couche ?

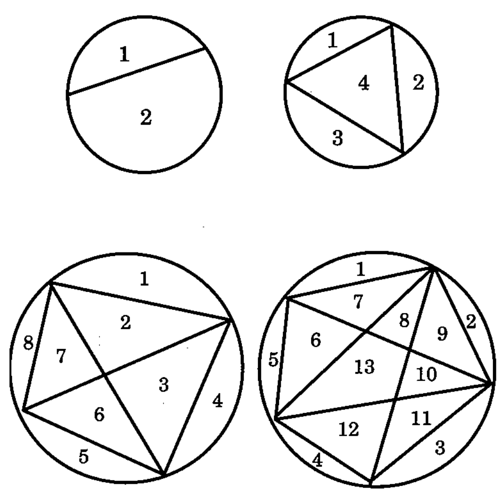
2) Bizarre, bizarre...

$1^3 = 1$
$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$

Et alors...

3) Comptons !

Sur un cercle, si on dispose de n points et si on trace toutes les cordes joignant ces points entre-eux, combien de régions obtient-on au plus dans le disque ?



INTERMÈDE : Le mathématicien, le physicien,l'ingénieur et le médecin...

Les mathématiciens aiment à raconter une anecdocte :

"Le physicien est persuadé, dit le mathématicien, que 60 est divisible par tous les nombres.Il remarque que 60 est divisible par 1,2,3,4,5 et 6. Il vérifie pour quelques autres nombres, par exemple, 10, 15, 20, 30 pris, comme il dit, au hasard. Comme 60 est divisible par eux aussi, il estime que les données expérimentales sont suffisantes."
"Mais voit l'ingénieur, repartit le physicien. Il soupçonne que tous les nombres impairs sont premiers. En tous cas 1 peut-être considéré comme premier, démontre-t-il. Puis viennent 3, 5 et 7 qui sont tous incontestablement des nombres premiers. Vient ensuite 9, cas regrettable, 9 n'est pas apparemment un nombre premier. Mais 11 et 13 le sont. Revenons à 9, dit-il. J'en conclus que 9 doit être une erreur d'expérience."
"Mais, dit l'ingénieur, regardez le médecin. Il permit à un urémique sans espoir de manger du pot-au-feu et le malade guérit. Le médecin écrit un ouvrage scientifique affirmant que le pot-au-feu guérit l'urémie. Puis il donne du pot-au-feu à un autre urémique et le malade meurt. Alors le médecin corrige ses épreuves : "le pot-au-feu est salutaire dans 50% des cas".
I. Khourguine : "Des mathématiques partout " Editions MIR

Question :

Sous la caricature , quelle divergence apparait entre la démarche du mathématicien et celle de ses collègues expérimentalistes ?

ACTIVITÉ 2 : ANALYSE D'UN EXEMPLE RÉDIGÉ

CONSIGNE

Après une recherche individuelle, donner par groupe des arguments qui justifient ou infirment l'exactitude de ce raisonnement.

Texte : Montrer par récurrence que $5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$ pour tout entier n.

n vérifie P si et seulement si
$5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$.
– 0 vérifie P car $25 \geq 16 + 9$.
– Supposons que n vérifie P, montrons que (n+1) vérifie P.
On a $5^{(n+1)+2} \geq 5 \times 5^{n+2}$ (1)
donc $5^{(n+1)+2} \geq 5 \times (4^{n+2} + 3^{n+2})$
(d'après l'hyp. de récurrence) (2)
donc $5^{(n+1)+2} \geq 5 \times 4^{n+2} + 5 \times 3^{n+2}$ (3)
donc $5^{(n+1)+2} \geq 4^{n+3} + 3^{n+3}$ (4)
donc $5^{(n+1)+2} \geq 4^{(n+1)+2} + 3^{(n+1)+2}$ (5)

La propriété P est donc vraie pour tout n de N.

SYNTHÈSE et COURS

ACTIVITÉ 3 : FAIRE DE LA RÉCURRENCE

Exercice 1 :

Démontrer que $2^n \geq n$ pour tout n de N*.

Démontrer que : $\sum_1^n p^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Démontrer que : $\sum_1^n \dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

Exercice 2 :
Montrer que : $1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! .. + n\times n! = (n+1)! -1$ pour tout n de N*.

Exercice 3 :
Montrer par récurrence que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $x \rightarrow \sin x$ est $x \rightarrow \sin (x + n \frac{\pi}{2})$.

Exercice 4 :
Soit (P) la propriété : 3 divise $4^n + 1$. Montrer que cette propriété est héréditaire. Cette propriété est-elle vraie pour tout n de N ?

ACTIVITÉ 4 : RÉFLEXION SUR LA RÉCURRENCE

Le mot vient du latin recurrere *qui signifie* revenir en courant. *Au sens général, la récurrence est la répétition ou le caractère de ce qui se répète.*

Henri POINCARE 1902 inventeur du théorème de récurrence

I- Problème de la nature du raisonnement mathématique.

La possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble. Si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ? Si, au contraire, toutes les propositions qu'elle énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie ? Le syllogisme ne peut rien nous apprendre d'essentiellement nouveau et, si tout devait sortir du principe d'identité, tout devrait aussi pouvoir s'y ramener. Admettra-t-on que les énoncés de tous ces théorèmes qui remplissent tant de volumes ne soient que des manières détournées de dire que A est A ? [...]

Si l'on se refuse à admettre ces conséquences, il faut bien concéder que le raisonnement mathématique a par lui-même une sorte de vertu créatrice et par conséquent qu'il se distingue du syllogisme. [...]

II- Principe du raisonnement par récurrence.

Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence, c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes.

Pour qu'on s'en puisse mieux rendre compte, je vais énoncer les uns après les autres ces syllogismes qui sont, si l'on veut me passer l'expression, disposés en cascade.

Ce sont bien entendu des syllogismes hypothétiques.

Le théorème est vrai du nombre 1.
Or, s'il est vrai de 1, il est vrai de 2.
Donc il est vrai de 2.
Or, s'il est vrai de 2, il est vrai de 3.
Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite.

On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineure au suivant.

De plus les majeures de tous nos syllogismes peuvent être ramenées à une formule unique. Si le théorème est vrai de *n -1*, il l'est de *n*.

On voit donc que, dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme, et la formule générale qui contient comme cas particuliers toutes les majeures. Cette suite de syllogismes qui ne finirait jamais se trouve ainsi réduite à une phrase de quelques lignes. [...]

III- Le raisonnement par récurrence est une induction.

[Le raisonnement par récurrence] est toujours utile, puisque, nous faisant franchir d'un bond autant d'étapes que nous le voulons, il nous dispense de vérifications longues, fastidieuses et monotones qui deviendraient rapidement impraticables. Mais il devient indispensable dès qu'on vise au théorème général, dont la vérification analytique nous rapprocherait sans cesse, sans nous permettre de l'atteindre. [...]

On ne saurait méconnaître qu'il y a là une analogie frappante avec les procédés habituels de l'induction. Mais une différence essentielle subsiste. L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même.

Henri POINCARE :
La science et l'hypothèse.

Questions :

Dans le 1^er^ § du texte, Poincaré pose une ***alternative :***

+ ou bien le raisonnement mathématique est purement déductif, donc pleinement rigoureux comme le syllogisme puisque toute proposition nouvelle découle nécessairement de la précédente ; mais alors il est stérile parce qu'il ne fait que répéter la même chose ("principe d'identité"*) et la conclusion est déjà implicite dans la proposition initiale ;*

+ ou bien le raisonnement mathématique est fécond et fait apparaître des vérités nouvelles ; mais alors il ne peut se prévaloir d'une pure rigueur déductive.

1- Recherchez ce qu'est un syllogisme. Expliquez sur un exemple ce que sont ses deux "prémisses" *:* "majeure" *et* "mineure". *Qu'est-ce qu'une* "tautologie" *?*

2- Expliquez à partir de votre expérience en quoi un raisonnement mathématique procède par déduction et s'apparente au syllogisme.

3- En quoi le raisonnement par récurrence a-t-il la "vertu créatrice" *recherchée par Poincaré ?*

4- En quel sens Poincaré entend-il le mot "induction" *mathématique ? S'agit-il en l'occurrence d'une véritable induction ?*

(N.B. : lire aussi le début du texte de Goblot et celui de Carnap).

Edmond GOBLOT 1918

I- Réflexion sur le raisonnement par récurrence.

H. Poincaré a cru trouver la solution de la difficulté [comment le raisonnement mathématique peut-il à la fois être rigoureux et fécond ?] dans le *raisonnement par récurrence* ou *induction mathématique*, appelé quelquefois *induction complète*. Puisqu'il s'agit de généraliser, il est naturel de penser à l'induction, qui, selon la détestable formule usuelle, *"va du particulier au général"* et conclut d'un nombre fini de cas observés à un nombre *infini* de cas possibles. Expliquer la généralisation en mathématiques, n'est-ce pas faire une place à l'induction dans le raisonnement mathématique ? Il ne saurait être question ici de l'induction empirique qui va des faits aux lois. Il s'agit d'une induction rigoureuse, qui, pour conclure à un nombre infini de cas, s'appuie sur la propriété fondamentale de la série infinie des nombres entiers, telle qu'elle est exposée dans la numération parlée, à savoir que tout nombre est formé par l'addition de l'unité au nombre précédent, et que cette opération n'a pas de limite.

Selon H. Poincaré, le raisonnement par récurrence est *"le raisonnement mathématique par excellence"*. [...] Deux raisons empêchent de voir dans le raisonnement par récurrence le type unique de la démonstration générale et généralisante : 1º il ne s'applique qu'à la série des nombres entiers ; 2º il contient au moins une démonstration. Et elle est bien plus importante que le passage progressif d'un nombre au nombre suivant ; car en démontrant que la propriété supposée vraie de m est vraie pour $m + 1$, on démontre précisément la légitimité de ce passage. *[L'auteur a en effet établi précédemment que toute démonstration est généralisante :* "Il faut distinguer entre une démonstration et une simple vérification. Une vérification porte sur un cas singulier ; ainsi on ne démontre pas, on vérifie que $2 + 2 = 4$. Toute démonstration comporte quelque vérification, mais l'essence de la démonstration consiste à étendre à une série infinie de cas ce qui se vérifie pour un cas singulier." *Pour exemple, l'auteur propose la démonstration en géométrie de telle propriété d'un triangle. Elle est établie ou* "constatée" *sur un cas singulier, mais reconnue vraie pour n'importe quel triangle].*

II- Différence entre la généralisation mathématique et l'induction physique

Il peut paraître surprenant qu'une *constatation* [la vérification signalée au 2º ci-dessus] ait un caractère de nécessité. Cela est impossible, en effet, quand il s'agit d'une constatation empirique ; c'est que le savant qui observe, le physicien par exemple, enregistre les manifestations de forces qui lui sont étrangères. La nature opère sous ses yeux, selon des règles ou des lois qu'il ignore et qui sont précisément l'objet de sa recherche. Le géomètre, au contraire, opère lui-même, selon des règles qu'il connaît puisqu'il les a choisies, dont il sent constamment la contrainte, qui le dirigent toujours et souvent lui résistent ; et, en fait, il n'a jamais d'autre garantie de la nécessité de ses résultats que la conscience d'avoir observé ces règles. [...]

III- L'induction physique.

L'induction [physique] a pour but de trouver et de prouver par l'examen des faits les lois qui les régissent. Une loi n'est rien d'autre qu'une relation constante entre des faits. L'affirmation de la loi dépasse infiniment les faits observés. Ceux-ci sont nécessairement en nombre fini ; la relation constante vaut pour un nombre infini de faits. Il s'agit de savoir : 1º *à quelles conditions* et *comment*, 2º *pourquoi* il est légitime d'étendre à un nombre infini de faits la relation qui est observée pour un nombre fini. La première question concerne les *procédés* de l'induction, la seconde le *principe du déterminisme* sur lequel elle se fonde.

Il importe de bien entendre cette division de la question. Il ne s'agit nullement de deux opérations successives : l'*interprétation* de l'expérience et la *généralisation* de l'expérience. Interpréter l'expérience, c'est en dégager la loi, c'est découvrir l'antécédent *constant* et le conséquent *constant*, ce qui conditionne le conséquent ou ce qui résulte de l'antécédent. L'interprétation de l'expérience est nécessairement générale ; après elle, la généralisation de l'expérience n'est plus à faire, elle est faite. [...]

Les méthodes expérimentales ont pour but de démêler l'ordre naturel à travers le désordre apparent des faits. L'ordre est assurément un besoin de la pensée, parce qu'il est condition de l'intelligibilité, que l'intelligence recherche pour elle-même, et de la prévision, que l'intelligence poursuit en vue de l'action. Mais il n'en résulte pas qu'il y ait de l'ordre dans les choses, qu'elles soient intelligibles et prévisibles. Cependant, cet ordre, personne ne le met en doute. L'expérience nous paraît désordonnée parce qu'elle ne nous montre que des faits de surface ; mais nous sommes convaincus que les liaisons apparaîtraient si nous connaissions aussi les faits profonds. [...]

Bref, l'induction suppose un double principe : 1º L'ordre de la nature est constant, et les lois ne souffrent pas d'exception. En effet, dès qu'une hypothèse rencontre une seule exception, nous jugeons aussitôt qu'elle n'est pas une loi. 2º L'ordre de la nature est universel, et il n'y a pas de faits ni de détails des faits qui ne soient réglés par des lois. S'il en était autrement, aucune induction ne serait possible, car nous risquerions toujours de nous trouver en présence d'un fait sans loi. Ce double principe, c'est le *déterminisme*. Toute induction repose sur la confiance que nous avons dans le déterminisme. Il n'y a donc dans la nature ni *contingence*, ni *caprice*, ni *miracle*, ni *libre-arbitre ;* chacune de ces hypothèses ruine en nous la faculté de raisonner sur les choses.

Edmond GOBLOT :
Traité de logique.

Questions :

5- Expliquez, à partir des indications fournies dans ce texte, ce qui crée le malentendu ironique entre le mathématicien et le physicien (intermède – fin Activité 1). En quoi l'exemple pris par le mathématicien pour se moquer du physicien est-il inadéquat ?

*6- Le mathématicien démontre et généralise à partir de "**règles**", le physicien cherche à établir des "**lois**" générales. Précisez la différence entre les deux notions. En prenant des exemples de lois que vous avez étudiées en physique, demandez-vous si ce sont bien des* "faits" *que les lois relient entre eux.*

7- Quel est le fondement de la généralisation : en mathématiques ? en physique ?

Rudolph CARNAP 1966
W.M. O'NEIL 1969

Dans la logique ***déductive***, l'inférence conduit d'un ensemble de prémisses à une conclusion dont la certitude est égale à celle des prémisses. Si vous avez des raisons de croire aux prémisses, vous avez d'égales raisons de croire à la conclusion qui en dérive logiquement. Si les prémisses sont vraies, la conclusion ne peut être fausse. Il en est tout autrement pour l'***induction***. On ne peut jamais tenir pour certaine la conclusion d'une induction. [...] Si une loi dit que tout objet P est aussi Q, et que nous rencontrions un objet P qui n'est pas Q, la loi est réfutée. Un million de cas favorables ne suffiront pas à vérifier la loi, alors qu'un seul incompatible avec elle suffit à la falsifier. La dissymétrie saute aux yeux : réfuter une loi, c'est l'enfance de l'art, mais achever de la confirmer, c'est une autre affaire.

Rudolph CARNAP :
Les fondements philosophiques de la physique.

Pour illustrer le propos de Carnap, voici deux exemples d'induction de lois (l'une qui est toujours considérée comme valable, l'autre qui a été reconnue fausse) :

[Képler] montra, en utilisant les données concernant Mars soigneusement amassées par Tycho Brahé, que l'on pouvait rendre compte des faits relatifs aux mouvements planétaires apparents en posant que : 1º les orbites planétaires sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers ; 2º les vitesses varient de telle sorte que les rayons vecteurs joignant une planète au Soleil balayent des aires égales en des temps égaux ; et 3º les carrés des temps des révolutions sont proportionnels aux cubes des distances moyennes des planètes au Soleil. Ces trois hypothèses sont maintenant connues sous le nom de "lois de Képler" [...].

A l'intention de ceux qui pensent que les lois de la nature sont découvertes en généralisant à partir de cas très nombreux, il est bon de souligner que les lois de Képler furent "découvertes" à la suite des vérifications répétées qu'il fit subir aux nombreuses hypothèses qu'il émit sur des données concernant une seule planète : Mars.

W.M. O'NEIL : *Faits et théories.*

En 1772, Bode remarqua que les distances moyennes des planètes au Soleil, exprimées en unités astronomiques, pouvaient être obtenues par les opérations numériques suivantes :

Soit la série [suite mathématique] : $4 + (0\times3)$; $4 + (1\times3)$; $4 + (2\times3)$; $4 + (4\times3)$; $4 + (8\times3)$, etc.

En effectuant et divisant chacun des résultats par 10, on obtient :

0,4 0,7 1,00 1,6 2,8 5,2 10,0

D'autre part, si on laisse un espace entre Mars et Jupiter, on constate que les distances moyennes des planètes au Soleil approchent ces valeurs de très près ; on a ainsi :

0,39 (Mercure) 0,72 (Vénus) 1,00 (Terre) 1,52 (Mars) - ··· - 5,20 (Jupiter) 9,54 (Saturne).

En 1781, Herschel découvrit la planète Uranus à une distance moyenne du Soleil de 19,2 UA. Par extrapolation, la loi de Bode assignait à une planète éventuelle située au-delà de Saturne une distance de $(4 + 192)/10 = 19{,}6$ UA, ce qui est très près de la réalité. Une corroboration si précise de la loi conduisit naturellement à des spéculations concernant l'existence éventuelle d'une planète qui occuperait le "blanc" laissé entre Mars et Jupiter. A la fin du XVII^{e} siècle, un plan de coopération fut mis sur pied pour rechercher la planète manquante. Mais avant qu'il ait pu prendre effet, le planétoïde Cérès fut observé (1801) ; et peu après, ce fut le tour de Pallas, Junon et Vesta. Ces quatre planétoïdes gravitent sur des orbites ayant sensiblement le même diamètre, c'est-à-dire approximativement la valeur 2,8 prévue par la loi de Bode. Ainsi, la loi semblait tendre vers une régularité autorisant la prévision, même si la raison profonde des distances planétaires n'était pas connue. [...]

Les découvertes de Neptune, à la fin du XIX[e] siècle, et de Pluton, au début du XX[e], montrèrent que la loi ainsi établie ne pouvait être maintenue : les distances moyennes pour les deux planètes situées au-delà d'Uranus devraient être, si l'on étend la loi de Bode :

$4 + (128 \times 3) / 10 = 38{,}8$ et
$4 + (256 \times 3) / 10 = 77{,}2$

Or la distance moyenne de Neptune au Soleil est de 30,07 UA et celle de Pluton 39,52 UA.

W.M. O'NEIL : *Faits et théories.*

Questions :

8- Cherchez ce qu'est l'"inférence"* et montrez en quoi elle englobe induction et déduction.*
9- Pourquoi, dans le texte sur Képler, l'auteur met-il "découvertes" entre guillemets ?
10- Montrez en quoi l'échec de la loi de Bode justifie la réflexion d'Edmond Goblot en III, §.2[e].

ACTIVITÉ 5 : RÉCURRENCE UTILE OU PAS

Consignes : Voici différents énoncés d'exercices . Préciser pour chaque exercice, si le raisonnement par récurrence est a priori un raisonnement adapté (A), peut être adapté mais il y a plus simple (S), totalement inadapté (I). Préciser pourquoi.

Enoncés	***Réponses***
Montrer que pour tout entier n > 2 $(n+1)^2 \geq 2n + 6$	
Montrer que pour tout réel x > 0 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$	
Soit p un entier donné. Montrer que pour tout entier $n > p \geq 1$ on a $C_{n-1}^{p-1} = \frac{p}{n} C_n^p$	
Montrer que pour tout entier x > 0, $f(x) \leq f(x+1)$ avec $f(x) = \frac{4x+3}{x+2}$	
Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, n +5 divise $2n^2 + 13n + 15$	
Montrer que pour tout entier n > 0, $\frac{1}{3n} \leq \frac{1}{2n}$	
Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $n^2 + n + 2$ est un nombre pair	
Montrer que pour tout réel x > 0, $(x+1)^2 \leq e^x + 2$	
Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, 3 divise $4^n - 1$	

ACTIVITÉ 6 : BILAN

Dégager les caractéristiques du raisonnement par récurrence ainsi que ses avantages et ses inconvénients.

Annexe : détails pratiques
Objectifs détaillés de chaque activité

Activité 1 :

Exercices 1 et 2 :

Induire une formule générale
– La question de la démonstration n' est pas posée explicitement. En fait, le déroulement montre que les élèves sont convaincus par des "preuves" selon le sens donné par N. Balacheff (voir "Preuves et démonstrations ", numéro 3.3 de R.D.M.) de la validité des formules qu'ils ont conjecturées : ils ont tous la même formule donc il n'y a pas de débats dans les groupes et les tests faits pour certaines "grandes" valeurs suffisent pour confirmer leur résultat.

Exercice 3 :

Mettre en défaut la démarche précédente (conjecture, test) ;
revenir sur la façon de valider un résultat en mathématique à savoir que les "preuves" doivent avoir une certaine forme : démonstration (voir R. Blanché : *L'axiomatique,* Que sais-je ?, P.U.F.).

Intermède :
Sensibiliser les élèves sur les différences de démarches entre mathématiciens et "expérimentalistes".

Activité 2 :
Analyser la structure d'un raisonnement par récurrence.
Repérer les connaissances manquantes pour qu'une telle démonstration soit valide (par exemple : reperer les propriétés admises sur les entiers...)
Repérer d'éventuels blocages chez certains élèves.
Le cours dispensé suite à ces activités est "classique", l'activité 3 est constituée d'exercices didactiques.

Activité 4 :
Travail proposé sur le texte de Poincaré : faire reconnaître les mathématiques comme une science formelle et démonstrative.
Travail proposé sur le texte de Goblot : tracer une ligne de démarcation nette (balisée par les couples conceptuels démonstration/vérification, règles/lois) entre démarche des mathématiques et celle des sciences de la nature.
Groupement des textes de Carnap et O'Neil : résumer les acquis antérieurs; approfondir sur deux exemples tirés de l'histoire des sciences la notion .d'induction physique en dépassant le positivisme qui réduirait la loi à la constance d'une constatation et méconnaîtrait sa nécessité proprement intelligible; nuancer ainsi le clivage entre les mathématiques et la physique commme science empiriste.

Activités 5 et 6 :
Synthétiser les connaissances acquises et replacer celles-ci parmi les connaissances antérieures.

Déroulement en classe

1 Les élèves ont découvert le raisonnement par récurrence dans le cours de maths consacré aux suites, selon la progression exposée dans la feuille de route.

2 Sans autre indication, ils ont eu à travailler sur les textes proposés p. 3 à 6 de la feuille de route et à répondre individuellement et par écrit aux 10 questions. Ce travail de préparation a été fait avec beaucoup de soin (comme en témoignent deux productions d'élèves mises en annexe dans la brochure).

3 Après correction des préparations, compte-rendu et synthèse en 1 heure, sous forme de cours dialogué entre professeurs de maths et de philo.

4 Poursuite du travail en mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

BERNARD Claude : *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*, Garnier - Flammarion 1966.

CARNAP Rudolph : *Les fondements philosophique de la physique*, Armand Colin, 1973.

GOBLOT Edmond : *Traité de logique*, Armand Colin, 1947.

KHOURGUINE et O'NEIL William, Matthew : *Faits et théories*, Armand Colin, Collection u^2, 1972.

PLANCK Max : *Initiation à la physique.*

POINCARÉ Henri : *La science et l'hypothèse*, Flammarion, 1968.

SCHWARTZ Laurent : "Marxisme et pensée scientifique", Conférence donnée au Centre d'Etudes Socialistes en 1960, éditée par les Cahiers du Centre d'Etudes Socialistes n°11 de novembre 1961 (17, rue de Chaligny, Paris 12e).