REPERES - IREM . N° 18 - janvier 1995

DE D'ALEMBERT À CABRI-GÉOMÈTRE : LE CONSTRUCTEUR UNIVERSEL D'ÉQUATIONS

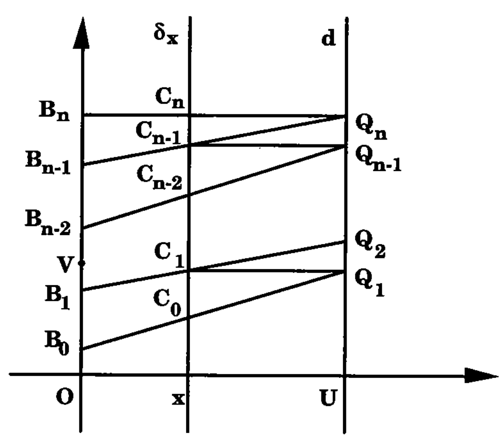
Michel CARRAL
Roger CUPPENS*

1. Introduction

Dans un précédent article [1], R. Cuppens étudie les fondements informatiques et géométriques du logiciel *Cabri-Géomètre.* En particulier, il affirme que les "constructions avec glissement", utilisant les possibilités offertes par le logiciel pour modifier une figure tout en conservant les relations imposées au départ aux objets de la figure, permettent de simuler n'importe quel système articulé.

Pour illustrer ceci, nous présentons ici l'exemple du "constructeur universel d'équations", système présenté par d'Alembert dans *l'Encyclopédie* de Diderot et permettant *a priori* de trouver graphiquement les racines d'un polynôme situées dans l'intervalle [0,1]. Nous rappelons brièvement le principe de ce constructeur (1) :

Étant donné un polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$, on considère un repère orthogonal (O,U,V) et les points $B_0, B_1, ..., B_n$ de l'axe OV d'ordonnées respectives a_0, $a_0 + a_1, ..., a_0 + a_1 + ... + a_n$. Notons d (resp. δ_x) la verticale d'abscisse 1 (resp. x, où x est un nombre réel compris entre 0 et 1).



La parallèle à l'axe OU passant par B_n

(*) IREM, IUFM et Université Paul Sabatier, Toulouse.

(1) On trouvera dans l'Annexe 1 une reproduction de l'article de d'Alembert.

coupe δ_x et d aux points C_n et Q_n respectivement ; la droite $B_{n-1}Q_n$ coupe δ_x en C_{n-1} et la parallèle à l'axe OU passant par C_{n-1} coupe d en Q_{n-1} ; la droite $B_{n-2}Q_{n-1}$ coupe δ_x en C_{n-2}, et ainsi de suite... La mesure algébrique $\overline{xC_0}$ est égale [(2)] à P(x).

A l'époque, l'intérêt de ce système n'était que théorique. Il fut néanmoins réalisé (*cf.* la planche reproduite en Annexe), mais, en raison des frottements, le système ne fonctionnait correctement que pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

La simulation dans *Cabri-Géomètre* de ce constructeur lève cet obstacle et permet en outre de considérer des valeurs de x extérieures à l'intervalle [0,1]. On pourra utiliser le constructeur de deux manières différentes :

– en déplaçant l'un des points de base, on pourra "voir fonctionner" le constructeur ;
– en utilisant la possibilité de tracer des lieux géométriques, on obtiendra un traceur de polynômes et même (en ajoutant un dispositif supplémentaire) de fractions rationnelles assez précis.

2. Théorie algébrique du constructeur

Dans ce paragraphe, nous montrons que les idées de d'Alembert se ramènent à une variante intéressante du schéma de Hörner. Rappelons que le schéma de Hörner qui permet de calculer les valeurs d'un polynôme

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

repose sur le résultat suivant :

La suite $(c_k(x))$ définie par les relations

$$c_n(x) = a_n \qquad (1)$$

$$c_k(x) = x\, c_{k+1}(x) + a_k \qquad (2)$$

vérifie

$$c_k(x)=\sum_{j=k}^{n} a_j x^{j-k} \qquad (3)$$

pour k = 0, ... , n.

Démonstration. Si

$$c_{k+1}(x)=\sum_{j=k+1}^{n} a_j x^{j-k-1} \quad ,$$

de (2), on obtient

$$c_k(x)=x\sum_{j=k+1}^{n} a_j x^{j-k-1}+a_k=\sum_{j=k}^{n} a_j x^{j-k} \quad .$$

Puisque (1) nous donne (3) pour k = n, on obtient par récurrence le résultat.

Remarques.
1. Pour n = 0, on obtient $c_0(x) = P(x)$. On peut donc calculer les valeurs d'un polynôme en effectuant seulement n multiplications et n additions : l'algorithme fourni par le schéma de Hörner est de complexité minimale.
2. Ce résultat reste vrai si on remplace les constantes a_k par des fonctions de x.

Ce schéma qui est le plus simple pour le calcul algébrique, ne donne pas une construction géométrique simple. Pour en obtenir une, nous le modifierons de la manière suivante :

En posant $b_k=\sum_{j=0}^{k} a_j$, on obtient

$a_0 = b_0$ et $a_k = b_k - b_{k-1}$ (k = 1, ... , n),

(2) Nous donnons une démonstration de ce résultat dans les deux paragraphes qui suivent.

ce qui donne

$$\begin{aligned}P(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k-1}) x^k \\ &= b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k - \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k+1} \\ &= b_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k (1-x) x^k\end{aligned}$$

Le schéma de Hörner appliqué à cette représentation donne :
La suite $(c_k(x))$ définie par les relations
$c_n(x) = b_n$, (4)
et
$c_k(x) = x\, c_{k+1}(x) + (1\text{-}x)\, b_k$ (5)
pour $k = 0, \dots, n-1$ est telle que $c_0(x) = P(x)$.

3. Théorie géométrique du constructeur

Nous supposons le plan rapporté à un repère orthogonal (O,U,V) et notons d la verticale d'abscisse 1, c'est-à-dire la parallèle à OV passant par U.

Soients
- n un entier naturel,
- x un nombre réel,
- $a_0, \dots, a_n$ des nombres réels,
- $b_k = \sum_{j=0}^{k} a_j (k = 0, \dots, n)$
- $c_k(x)$ la suite définie à partir des b_k par les relations (4) et (5),
- B_k le point de l'axe OV d'ordonnée b_k pour $k = 0, \dots, n$,
- C_k le point d'abscisse x et d'ordonnée $c_k(x)$ pour $k = 0, \dots, n$,
- P_k (resp. Q_k) la projection de C_k sur OV (resp. d) pour $k = 0, \dots, n$.

Du paragraphe précédent, on déduit que C_0 est le point d'abscisse x et d'ordonnée $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$, c'est-à-dire le "point courant" de la représentation graphique du polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$.

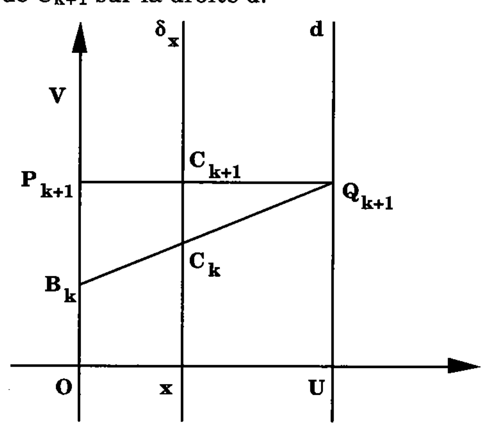
La relation (4) nous dit que C_n est la projection de B_n sur la droite verticale d'abscisse x et (5) peut se réécrire sous la forme

$$c_k(x) - c_{k+1}(x) = (1 - x)\,(b_k - c_{k+1}(x)),$$

c'est à dire

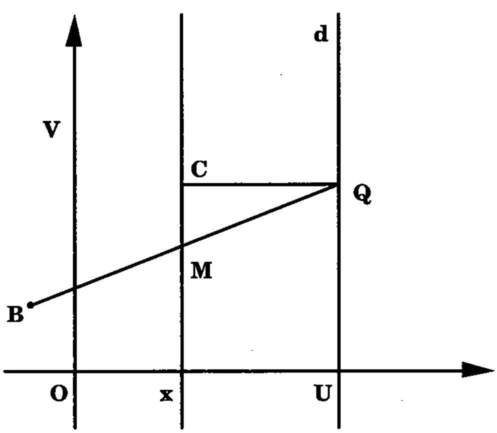
$$\overline{C_{k+1}C_k} = (1-x)\overline{P_{k+1}B_k}$$

Du théorème de Thalès, on déduit que les points Q_{k+1}, C_k et B_k sont alignés : pour $k = 0, \dots, n-1$, C_k est le point d'abscisse x de la droite joignant B_k à la projection Q_{k+1} de C_{k+1} sur la droite d.



En notant P la projection sur la verticale d'abscisse x et A la fonction qui, à deux points B et C du plan, associe le point d'intersection (3) M de la parallèle en C à OV avec la droite joignant le point B à la projection Q de C sur d, on obtient que les points C_k sont définis par

$$\begin{cases} C_n = P(B_n), \\ C_k = A(B_k, C_{k+1}) \quad (k = 0, \ldots, n-1) \end{cases}$$



Remarques.
1. La construction reste valable dans le cas où X se trouve en dehors du segment OU.
2. On peut donner la définition récursive suivante du constructeur : si on note C la fonction qui au (n+1)-uplet $(B_0, \ldots B_n)$ associe le point C_0, C est définie par :

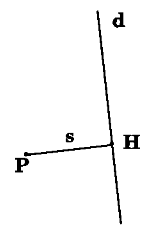
$$C((B_0, \ldots, B_n)) = \text{si } n = 0 \text{ alors } P(B_0) \text{ sinon } A(B_0, C(B_1, \ldots, B_n)).$$

(3) Ce point est parfaitement défini dès que B n'appartient pas à la droite d.

4. Réalisation de ce constructeur

Pour obtenir avec *Cabri-Géomètre* ce constructeur de polynômes, on utilisera deux macro-constructions de base : proj et alemb.

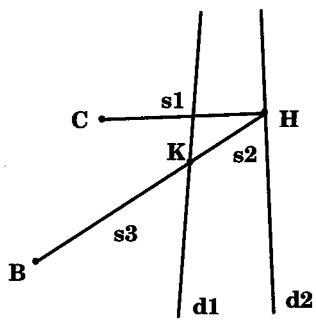
La première correspond à la fonction P du paragraphe précédent. Elle a pour objets initiaux un point P et une droite d et pour objet final le segment (4) PH, H étant la projection de P sur d, c'est à dire le point d'intersection de d avec la perpendiculaire à d passant par P.



La deuxième devrait correspondre à la fonction A. Néanmoins, puisqu'il est commode qu'une macro-construction ait des objets initiaux indépendants et qu'un même objet ne soit pas construit plusieurs fois, nous la généraliserons un peu. La macro-construction alemb aura pour objets initiaux deux points C et B et deux droites d1 et d2 et pour objets finaux trois segments s1, s2 et s3 : s1 est le segment CH obtenu en appliquant la macro-construction précédente à C et à d2 tandis que s2 et s3 sont les segments HK et KB, K étant le point d'intersection de d1 avec la droite BH (5).

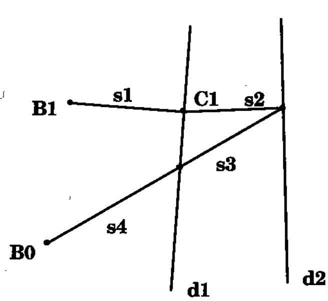
(4) Dans tout ce paragraphe, on prend comme objectif de visualiser à l'écran le fonctionnement du constructeur. Si on veut seulement tracer des représentations graphiques, il suffit de remplacer comme objets finaux dans les macro-constructions les segments par un point unique.

(5) Le fait d'utiliser les deux segments HK et KB au lieu du seul segment HB permet de traiter le cas où X est en dehors du segment OU.

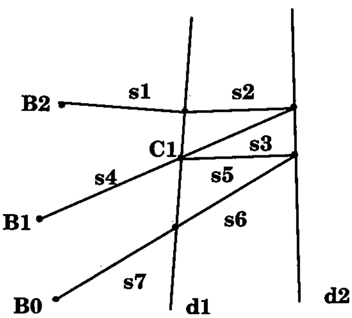


Comme une macro-construction de *Cabri-Géomètre* ne peut dépendre ni d'un nombre entier, ni d'un nombre variable d'objets initiaux, on construit ensuite une suite de macro-constructions, construc-1, construc-2, ... , de la manière suivante :

– construc-1 est une macro-construction ayant pour objets initiaux deux points B0, B1 et deux droites d1 et d2 et pour objets finaux quatre segments s1, s2, s3 et s4 : s1 est le segment B1C1 obtenu en appliquant proj à B1 et d1 tandis que les trois autres s'obtiennent en appliquant alemb à C1, B0, d1 et d2 ;



– construc-2 est une macro-construction ayant pour objets initiaux trois points B0, B1 et B2 et deux droites d1 et d2 et pour objets finaux sept segments s1, ... , s7 : les quatre premiers s'obtiennent en appliquant construc-1 à B1, B2, d1 et d2 tandis que les trois autres s'obtiennent en appliquant alemb à C1, B0, d1 et d2 où C1 est l'une des extrémités du segment s4, l'autre étant B1...



Remarque. Les limites du logiciel ne permettent pas d'aller au delà de construc –6.

Pour obtenir la représentation graphique d'un polynôme $a_0 + ... + a_n X^n$ dans un système orthogonal, mais pas nécessairement orthonormé, les unités pouvant être modifiées à tout moment, on trace

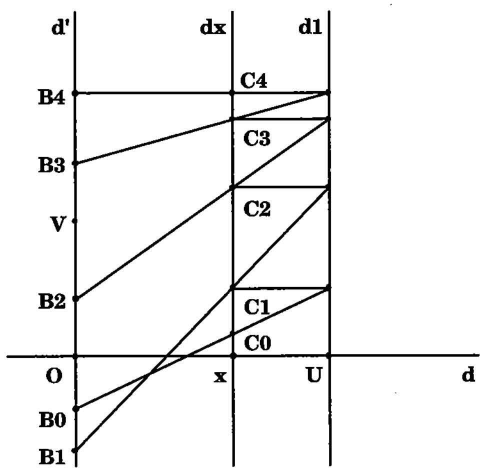
– une droite d,
– des points O et U sur d,
– la perpendiculaire d' en O à d et V un point de d' :
d et d' seront les axes, OU étant l'unité des abscisses et OV l'unité des ordonnées (6).

On trace alors

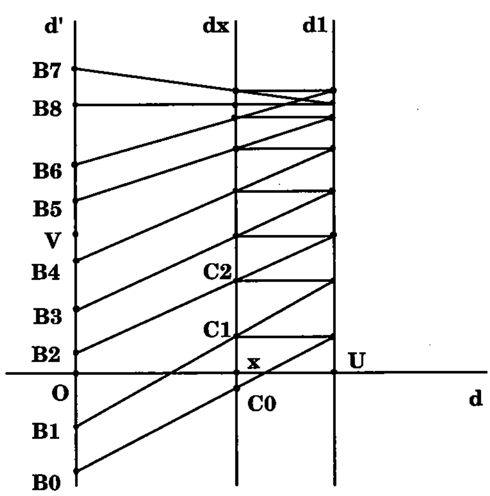
– un point x sur la droite d,
– les perpendiculaires dx et d1 à d en x et U
– sur d' les points $B_0, ... , B_n$ dont les ordonnées sont $b_0 = a_0, ... , b_n = a_0 + ... + a_n$.

(6) On constate que les unités sur les deux axes peuvent être différentes. Il peut être intéressant de graduer les droites d et d'.

Enfin, si n ≤ 6, on applique construc-n à $B_0, \ldots, B_n$, dx et d1.



Si n > 6, puisqu'on ne peut pas définir construc–n, on reviendra à la définition : on applique construc-6 à $B_{n-6}, \ldots, B_n$, dx et d1, ce qui donne le point C_{n-6}, puis on applique alemb à C_{n-6}, B_{n-7}, dx et d1, ce qui donne le point C_{n-7}, etc.

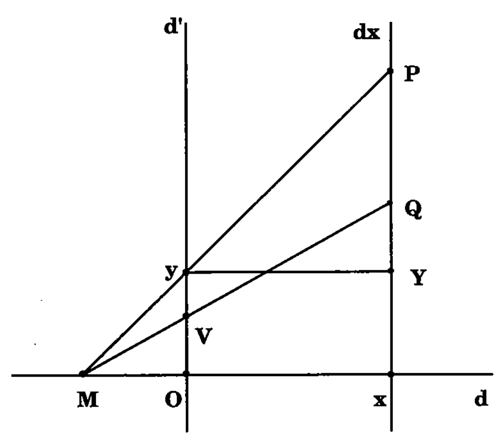


En déplaçant le point X, on voit le fonctionnement du constructeur tandis qu'en traçant le lieu de C0 quand X varie, on obtient la représentation graphique du polynôme : des exemples de telles représentations sont fournis dans l'annexe 2.

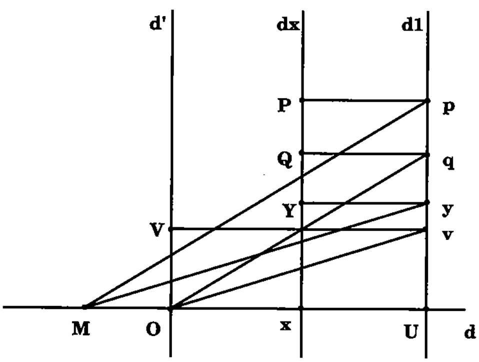
5. Un constructeur de fractions rationnelles

Pour obtenir la représentation graphique d'une fraction rationnelle, on applique le constructeur au numérateur et au dénominateur. Si P et Q sont les deux points de la droite dx tels que $\overline{XP}$ et $\overline{XQ}$ soient les valeurs du numérateur et du dénominateur, on cherche le point Y de dx tel que $\frac{\overline{XY}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{XP}}{\overline{XQ}}$.

La construction la plus simple serait la suivante : on trace la droite VQ qui coupe OX en M, puis la droite PM qui coupe OV en y ; le point Y est alors le point d'intersection de la droite XP avec la parallèle à OX passant par y.



Néanmoins, on constate que cette construction ne donne rien lorsque $\overline{XQ} = \overline{OV} = 1$. Pour obtenir une construction valable également dans ce cas, nous utiliserons la méthode suivante : déterminer la projection p (resp. q, v) de P (resp. Q, V) sur d1, trouver l'intersection M de la parallèle en p au segment Oq avec d, puis l'intersection y de d1 avec la parallèle en M à Ov. Le point Y est alors la projection de y sur dx.



On trouvera dans l'annexe 3 des exemples de courbes représentatives obtenues avec ce constructeur.

6. Représentation des fonctions rationnelles sur un seul axe

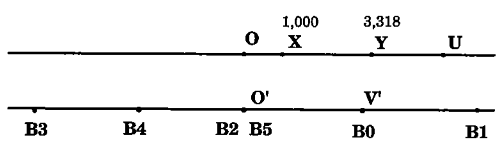
Dans [2], G.V. suggère de représenter avec *Cabri-Géomètre* des fonctions en utilisant un seul axe de coordonnées, ce qui est possible en déplaçant le point représentant l'abscisse avec la souris. Un des reproches que l'on peut faire à ce qui est présenté dans cet article est d'imposer automatiquement la même unité pour les points X et Y, ce qui peut nuire à la précision des études.

L'utilisation de notre système permet de lever cette critique : pour obtenir une telle représentation, il suffit de prendre le symétrique du point Y par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{UOV}$. Pour la clarté de la figure, il peut être intéressant d'utiliser un deuxième axe parallèle au premier et gradué où on déterminera l'unité des ordonnées et où l'on placera les coefficients des polynômes ou des fractions rationnelles.

En utilisant l'outil *Mesurer*, on peut déterminer ici avec une grande précision la valeur d'une fonction rationnelle en un point, les racines ou les extréma de cette fonction. Par exemple, pour le polynôme

$$P(X) = X^5 + X^4 - 2X^3 - 2X^2 + X + 1$$

dont on trouvera une représentation graphique dans l'annexe 2, on voit qu'il y a un maximum entre 0 et 1/2. La représentation linéaire fournit pour le maximum :



Avec l'outil *Mesurer*, on peut préciser et on obtient pour cette position :

Abscisse(O) = 0,000 000 000 000 000 000
Abscisse(U) = 5,000 000 000 000 000 000
Abscisse(O') = 0,000 000 000 000 000 000
Abscisse(V') = 3,000 000 000 000 000 000
Abscisse(X) = 1,000 000 000 000 000 000
Abscisse(Y) = 3,317 759 999 999 999 999

(on peut évidemment arrondir cette dernière valeur à 3,317 76) et pour des positions voisines

Abscisse(X) = 0,964 285 714 285 714 286
Abscisse(Y) = 3,317 320 073 871 749 866
et

Abscisse(X) = 1,035 714 285 714 285 714
Abscisse(Y) = 3,317 318 324 712 173 499

On a donc pour le maximum x = 0,2 et y = 3,317 76/3 = 1,105 92. Le calcul donne

$$P'(X) = 5X^4 + 4X^3 - 6X^2 - 4X + 1 = (X+1)^2 (X-1)(5X-1)$$

qui a bien pour racine X = 1/5 = 0,2 et on a alors

$$P\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1+5-50-250+625+3125}{5^5} = \frac{3456}{5^5} = \frac{3456 \times 32}{10^5} = 1{,}105\ 92.$$

En utilisant les mêmes idées, mais deux axes de coordonnées (O, U, V) et un axe "des temps" (Ot, Ut), on peut construire les courbes paramétrées d'équation x = f(t), y = g(t) où f et g sont des fractions rationnelles. On trouvera dans l'annexe 4 la représentation obtenue pour la courbe $x = t - t^2$, $y = t^3$.

7. Conclusion

Il est évident que tout ce que nous venons de présenter se fait plus facilement avec un grapheur ou un système de calcul formel. Il semble néanmoins intéressant de montrer que la séparation entre analyse et géométrie n'est pas un mur étanche : certains problèmes de géométrie se ramènent à une étude de fonction et, comme nous le montrons ici sur un exemple, certains problèmes d'analyse peuvent se résoudre géométriquement. En outre, les outils mathématiques utilisés sont élémentaires : théorème de Thalès pour la géométrie, manipulations algébriques sur les polynômes (ou suites récurrentes, mais elles ne sont pas indispensables) pour l'analyse. Ceci peut donc se faire dès la classe de seconde.

On peut remarquer plus précisément que l'on construit des représentations graphiques de fonctions comme des lieux géométriques. Ceci peut sembler surprenant dans notre enseignement où les lieux géométriques sont des droites, des cercles ou, à la rigueur, des coniques (7).

Mais ceci ne fait que renouer avec une tradition ancestrale et, malheureusement, oubliée dans notre enseignement : les grecs et leurs successeurs avaient conçu des instruments autres que la règle et le compas (systèmes articulés, à glissières...) pour construire des courbes "mécaniques" permettant de résoudre certains problèmes classiques tel que trisection de l'angle (conchoïde de Nicomède), double moyenne proportionnelle... Souvent la réalisation pratique posait des problèmes tels que frottement, longueur limité des tiges... On en était alors réduit à construire point par point la courbe.

Un logiciel tel que *Cabri-Géomètre* permet la simulation de ces instruments et donne automatiquement un tracé continu de la courbe. On pourrait donc modifier maintenant notre enseignement pour faire redécouvrir les méthodes initiales de résolution de ces problèmes qui ont fait les mathématiques.

Terminons en faisant remarquer combien les courbes fournies par le constructeur (8) sont différentes de celles qu'un

(7) Daniel Lacombe rappelle qu'il fut un temps où sévissait dans les classes préparatoires à Saint Cyr "l'axiome de Saint Cyr" s'énonçant "Tous les lieux géométriques sont des droites ou des cercles" et dont la "preuve" irréfutable était "Ce sont les seuls lieux géométriques au programme du concours".

(8) On trouvera dans l'Annexe 5 la représentation de la même courbe fournie par le constructeur et celle que l'on trouve dans un vieux manuel scolaire.

enseignant tracerait au tableau après une étude de fonction. En effet, on donne habituellement comme définition de la représentation graphique d'une fonction f l'ensemble des points de coordonnées (x,f(x)) dans un certain repère et on commence par apprendre aux élèves, en général sur des fonctions polynomiales simples, à déterminer un nombre fini de points de la forme précédente et à faire passer "au mieux" une courbe par ces points. Néanmoins, on constate que très vite on abandonne cette méthode, mais aussi la définition (9) : la représentation graphique n'est plus alors qu'une courbe résumant visuellement les informations obtenues par l'étude de la fonction f ; le passage de cette étude à la courbe représentative est un codage d'information et la lecture de cette courbe nécessite une opération inverse de décodage.

Par contre, sur un écran d'ordinateur (en négligeant les problèmes spécifiques de l'affichage par pixels), on reste toujours proche de la démarche initiale puisqu'une courbe représentative s'obtient par "discrétisation" : on détermine un ensemble fini de points de la forme (x,f(x)) et en joignant ceux-ci en général par des segments de droite (10).

Tout ceci ne peut se faire sans un apprentissage sérieux et conscient. Il semble que ce ne soit pas actuellement le cas dans notre enseignement.

RÉFÉRENCES

[1] Roger CUPPENS : *Quelques réflexions sur le logiciel Cabri-Géomètre* (à paraître).
[2] G. V. : "Une idée... bizarre ! Représenter des fonctions sur un seul axe", *Cabriole, n°* 2 (novembre 1992) p. 3.

(9) Elle mènerait à de sérieuses difficultés, par exemple : comment faire "tenir" dans une feuille de papier la fonction exponentielle ?, pour quelles valeurs négatives, une fonction logarithme est-elle discernable de l'axe des x ?, etc.

(10) Une telle démarche est bien entendu absurde si les points obtenus ne sont pas "suffisamment proches".

ANNEXE 1 – Le texte de d'Alembert

786 EQU EQU

on prendra d'abord 15 degrés pour chaque heure, on prendra le quart des minutes de temps, on en fera des degrés; le quart des ſecondes, on en fera des minutes; le quart des tierces de temps, l'on en fera des ſecondes de degrés.

Ces regles aiſées à retenir & à pratiquer, ſe peuvent faire ſans le ſecours des tables; cependant on trouvera des tables propres à faire ces converſions de temps en parties de l'*équateur*, & des parties de l'*équateur* en temps, dans la *connoiſſance des temps*, &c. L'opération ſe réduit à multiplier par 15 le temps qu'on veut réduire en parties du cercle, ou à diviſer par 15 les parties de l'*équateur* qu'il s'agit de convertir en temps.

La converſion du temps en parties de l'*équateur* eſt différente de la converſion en temps ſolaire moyen dans laquelle on prend 360° 59′ 8″ pour vingt-quatre heures, ou 15° 2′ 27″ $\frac{8}{10}$ pour chaque heure; c'eſt le nombre des parties de l'*équateur* qui paſſe par le méridien pendant la durée des heures ſolaires, marquées par une pendule du moyen mouvement; quand cette pendule a fini ſes vingt-quatre heures, il a paſſé, non ſeulement 360^d de l'*équateur*, mais encore les 59′ 8″ que le ſoleil a parcourues en ſens contraire, & qui doivent paſſer par le méridien pour que le ſoleil y arrive. (*M. DE LALANDE.*)

ÉQUATION. *Conſtruction & uſage d'une machine pour trouver les racines de quelque équation que ce puiſſe être.* (*Algebre. Machines.*) M. Paſcal s'eſt fait une réputation dans le monde pour avoir inventé ſa machine arithmétique. Celle dont je vais donner la deſcription n'eſt pas moins ingénieuſe; & on peut l'appliquer à toutes les *équations* de quelque degré qu'elles ſoient. Avant que d'en donner la conſtruction, il convient d'expoſer en peu de mots la théorie ſur laquelle elle eſt fondée : elle ſuppoſe, dans ceux qui liront cet article, quelque connoiſſance de l'Algebre.

Soit l'*équation* à réſoudre $a + bx + cxx + dxx$, &c. $= 0$.

Tirez ſur la ligne ZZ priſe pour baſe dans la *fig. 1* ou *2* de la *pl. I. d'Algebre, des planches, ſupplément*, les perpendiculaires SS & RR, éloignées l'une de l'autre de telle diſtance qu'il vous plaira. Prenez enſuite ſur la ligne SS de l'une ou de l'autre figure les parties OA, AB, BC, CD, &c. proportionnelles aux coefficiens a, b, c, d, &c. de l'*équation*, obſervant de prendre chacune de ces lignes de bas en haut, à compter de l'extrémité de la derniere lorſque le coefficient qu'elle doit repréſenter eſt poſitif, & dans un ſens contraire lorſqu'il eſt négatif. Cela fait, tirez par l'extrémité de la derniere des lignes OA, AB, BC, &c. ſavoir, par D, la ligne DC, parallele à la baſe ZZ, & par le point C, où DC coupe RR, cC, & parallélement à SS, & à telle diſtance qu'il vous plaira MM; par le point où Cc coupe MM, la ligne kb parallele à DC; par le point b, où la derniere coupe RR, la ligne bB; par le point où celle-ci coupe MM, la parallele à DC, & enfin par le point a, où bB coupe MM, la, & par le point a, où la coupe RR, la ligne aA. Suppoſons maintenant que les lignes SS, RR, Cc, repréſentent trois regles avec des rainures telles qu'on le voit *figure 3*, que vous fixerez dans leurs places reſpectives SS, RR & Cc ſur un plan ou chaſſis de grandeur ſuffiſante.

Soient Bb, Aa, d'autres regles de même forme, qui ſe meuvent ſur les centres B, A, &c. leſquels ſe meuvent eux-mêmes en haut & en bas le long de la regle SS, mais de maniere qu'on puiſſe placer les centres B & A l'un ſur l'autre, ou ſur C, ſi l'occaſion le requiert, & les arrêter avec des écroues; ſavoir, le centre A en A, le centre B en B, &c. Soient kb & la, d'autres regles mobiles, comme les premieres, & diſpoſées de façon qu'elles ſe meuvent toujours parallélement les unes aux autres, & à la ligne Dc & MM, une autre regle de pareille forme. On aſſemblera les regles Kb & MM avec la regle fixe Cc au moyen d'une pointe coulante qui paſſe par le point q, où leurs rainures ſe coupent. On aſſemblera de même les regles Kb, Bb, la & Aa enſemble, & avec MM & RR, avec de pareilles pointes qui les traverſent dans les points b, r, a & s. La derniere de ces pointes doit être faite de maniere à pouvoir porter un crayon. Je dis maintenant que ſi l'on avance ou recule la regle MM de SS, en ſorte qu'elle lui soit toujours parallele, le crayon s décrira la courbe qu'on demande; que les distances à compter du point O où le crayon coupera la base ZZ, à droite de SS, marqueront les racines positives de l'*équation*; celles qui seront à gauche, les racines négatives; & les endroits où il approchera de la base sans la toucher, les racines impossibles ou imaginaires. Ces distances doivent être prises sur une échelle, sur laquelle la ligne DC sera prise pour l'unité.

Démonstration. Puisque les lignes OA, AB, BC, &c. sont proportionnelles aux coefficiens a, b, c, &c. Supposons que la premiere OA soit égale au premier coefficient a, ou à telle de ces parties qu'on voudra, n, par exemple, seroit $\frac{a}{n}$; alors pour conserver la proportion ci-dessus, la suivante AB sera égale à $\frac{b}{n}$, Bc à $\frac{c}{n}$ & cD à $\frac{d}{n}$, &c. Si l'on nomme OQ ou son égale DPx, pour lors Dc étant prise égale à l'unité, Pc sera égale à $1-x$; & comme Dc est égale à $\frac{d}{n}$, on aura, à cause des triangles semblables, DCc & Pqc, cette proportion $1 : 1-x :: \frac{d}{n} : \frac{d-dx}{n} = Pq$ ou DK: mais $KB = BC + CD - DK$, c'est-à-dire, à $\frac{c}{n} + \frac{d-d-dx}{n\ \ n}$; savoir à $\frac{c+dx}{n}$. Les mêmes triangles semblables donnent $Kb : qb :: KB : qr$, c'est-à-dire, $1 : 1-x :: \frac{c+dx}{n} : \frac{c+dx-cx-dxx}{n} = qr$ ou Kl: mais $Al = AD - DK - Kl$, ou $\frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{d'}{n} + \frac{d-dx}{n} - \frac{c+dx-cx-dxx}{n}$ ou à $\frac{b+cx+dxx}{n}$. Les mêmes triangles donnent encore $la : ra :: Al : rs$, ou $1 : 1-x :: \frac{b+cx+dxx}{n} : \frac{b+cx+dxx-bx-cxx-dxxx}{n} = rs$. Or, Qs, qui par la figure est égale à $QP - Pq - qr - rs = \frac{a+b+c+d-d-dx}{n} - \frac{c+dx-cx-dxx}{n} \frac{b+cx+dxx-bx-cxx-dxxx}{n}$ savoir à $\frac{a+bx+cxx+dxxx}{n}$; & par conséquent, lorsque $Qs = 0$, c'est-à-dire, lorsque la courbe décrite par S coupe la base,

$\frac{a+bx+cxx+dx^3}{n} = 0$, ou à $\frac{a+bx+cxx+dxxx}{n}$, qui par l'*équation* même est égale à 0. Qs, dans ces circonstances, sera donc aussi égale à $a+bx+cxx+dxxx$, & par conséquent toute valeur de x ou de OQ, qui rend $a+bx+cxx+dxxx=0$, rend pareillement Qs égale à zéro. Or, toute valeur de x qui rend $a+bx+cxx+dxxx=0$, est une racine de l'*équation* proposée $a+bx+cxx+dxxx=0$, dont la courbe coupera la base ZZ pour chaque racine réelle de cette *équation*, soit positive ou négative, & ne la touchera point lorsqu'elle sera imaginaire, comme le savent ceux qui connoissent les propriétés des courbes. C. Q. F. D.

Cette démonstration est applicable à toute autre *équation* que l'on voudra.

Nota. Pour avoir les racines négatives, on placera les regles à gauche de SS *figure* 2, où elles sont marquées par les mêmes lettres que dans la premiere figure. Par exemple, on posera la regle Cc de c ou q, la regle Bb de b ou r, la regle aA de n ou s, vers la gauche, en sorte que les centres A, B, des deux dernieres se trouvent sur la ligne fixe SS.

Il n'est pas nécessaire que la courbe soit décrite avec exactitude, ni même qu'elle tombe sur le plan, excepté lorsqu'elle coupe la base, & par conséquent on ne risque rien à faire les lignes OA, AB, &c. fort longues. Mais les regles fixes OD & Tc, doivent être si près l'une de l'autre, que leur distance Dc ou OT, étant prise pour l'unité, la base OT qui s'étend à droite jusqu'à l'extrémité du plan, puisse contenir toutes les racines positives, & à gauche toutes les négatives.

Il y a encore une chose à observer: c'est que si l'on a une *équation* comme celle-ci $xxx - Sxx + 1200x + 9000 = 0$, dont les coefficiens S, 1200 & 9000 sont différens l'un de l'autre, qu'il seroit difficile de les prendre sur la ligne OD, on peut les réduire de la maniere suivante: c'est de mettre dans l'*équation* à la place de chaque x, $10x$, $20x$, ou $100x$. Je suppose qu'on mette $20x$; pour lors, au lieu de xxx, on aura $8000xxx$, au lieu de $Sxx - 2000xx$, &c., & l'*équation*

Ggggg 2

ſera changée en celle-ci $8000\, xxx - 2000\, xxx + 24000\, x + 9000 = 0$. Diviſant chaque terme par 100, on aura cette autre $8\, xxx - 2\, xx + 24\, x + 9 = 0$, dont la réduction ſera plus aiſée. Màis on ſe ſouviendra pour lors, que faiſant x 20 fois plus petit qu'il n'eſt, les racines que vous trouverez ſeront pareillement vingt fois plus petites, & qu'il faudra par conſéquent les multiplier par 20 pour qu'elles aient leur juſte valeur.

Voici quelques obſervations ſur l'application de ces regles, qui peuvent avoir leur utilité.

1°. Les racines d'une *équation* peuvent être de trois ſortes, poſitives, négatives & impoſſibles ou imaginaires.

2°. Toute *équation* contient autant de racines qu'elle a de degrés.

3°. Les racines imaginaires ſont toujours au nombre de deux.

Par exemple, ſi une *équation* a une racine imaginaire comme celle-ci $a = b\sqrt{-1}$, elle en aura une autre; ſavoir, $a - b\sqrt{1}$, qui la ſuit toujours. Il ſuit de là que toute *équation* qui a des racines imaginaires, en contient 2, 4, 6, &c.; c'eſt-à-dire, qu'elles ſont toujours en nombre pair. Toutes les fois que la courbe, que les regles décrivent, approche de la baſe ſans la couper, c'eſt une marque qu'il y a deux racines impoſſibles; de ſorte que ſi elle en approche trois fois, l'*équation* contient ſix racines imaginaires. C'eſt tout ce que ces regles peuvent faire par rapport à ces ſortes de racines; elles marquent leur nombre, & non leur nature. J'enſeignerai plus bas le moyen de connoître celle-ci. Puis donc que les racines imaginaires ſont toujours en nombre pair, & que leur nombre eſt égal aux degrés de l'*équation*, il s'enſuit:

4°. Que toute *équation* dont le nombre des degrés eſt impair, doit contenir au moins une racine réelle.

5°. Que toute *équation* dont le premier & le dernier termes après avoir été tranſpoſés, ont des ſignes contraires, contient au moins une racine réelle. Lorſque cela arrive, & que le nombre de ſes dimenſions eſt pair, de même que celui des racines impoſſibles, celui des racines réelle doit l'être pareillement.

6°. Que ſi l'on diviſe une *équation* par l'inconnue, moins une de ſes racines, on la réduira à une dimenſion plus bas; comme toute *équation* contient autant de racines qu'elle a de degrés, il s'enſuit encore:

7°. Que retranchant le nombre des racines imaginaires de celui de ſes racines, je veux dire, du nombre de ſes dimenſions, le reſtant ſera celui des racines réelles.

8°. Après avoir trouvé, par le moyen des regles, les racines réelles, faites la quantité inconnue x égale à chacune: tranſpoſez les termes d'un côté: multipliez les *équations* les unes par les autres, & diviſez l'*équation* propoſée par le produit qui en réſultera. Faites le quotient égal à zéro, & vous aurez une *équation* qui renfermera toutes les racines impoſſibles, ſans en avoir aucune de réelle. On trouvera enſuite les racines impoſſibles par la méthode qu'enſeigne M. de Bougainville, dans ſon *traité du calcul intégral*, dans les cinquieme & ſixieme chapitres de ſon introduction. C'eſt la meilleure que je connoiſſe.

Elle conſiſte à partager l'*équation* donnée en deux autres du même nombre de dimenſions, mais qui ne contiennent que des racines réelles que vous trouverez par le moyen des regles, ou autrement, au moyen de quoi vous aurez toutes les racines impoſſibles de votre *équation*.

Comme peu de gens connoiſſent cette méthode, il convient de la donner ici.

L'auteur commence par donner la démonſtration des deux propoſitions ſuivantes.

Prop. 1. Lorſqu'une quantité eſt égale à zéro, & compoſée de pluſieurs termes, dont quelques-uns ſont réels, & les autres multipliés par $\sqrt{-1}$, la ſomme de tous les termes réels eſt égale à zéro; & celle de tous ceux qui ſont multipliés par $\sqrt{-1}$, égale pareillement à zéro. C'eſt le ſoixante-neuvieme article de ſon *Introduction*.

Prop. 2. Lorſqu'une *équation* ne contient que des racines imaginaires, on peut toujours ſuppoſer la quantité inconnue égale à $m+n\sqrt{-1}$, dans laquelle m & n ſont des quantités réelles. C'eſt le huitieme article de la même introduction.

Par conſéquent, pour trouver les racines d'une *équation* telle que celle dont il s'agit, il faut mettre à la place de chaque inconnue, x; par exemples, $m+n\sqrt{-1}$, & l'on aura une nouvelle *équation* qui contiendra des termes réels & les termes multipliés par $\sqrt{-1}$, dont le premier & le dernier ſont égaux à zéro par la propoſition 1. Faites-le donc, & vous aurez deux *équations* dont il vous ſera facile de découvrir les deux quantités m & n, de même que celle de x, qui par la deuxieme propoſition eſt égale à $m+n\sqrt{-1}$.

Voici un exemple qui fera comprendre ce que j'ai dit dans la premiere partie de cet article. Suppoſez que les racines réelles, découvertes par le moyen des regles dont j'ai parlé, ſoient a, b — c, &c. Faites $x=a$, $x=b$, $x=-c$, &c. Tranſpoſez les termes, & vous aurez $x-a=0$, $x-b=0$, $x+c=0$, &c. multipliez ces dernieres *équations* les unes par les autres, diviſez l'*équation* donnée par leur produit, & procédez comme j'ai dit ci-deſſus.

9°. Le plus grand coefficient négatif d'une *équation* quelconque, conſidéré comme poſitif, & augmenté de l'unité, excede toujours la plus grande racine poſitive de l'*équation*. Par conſéquent,

10°. Si en place de la quantité inconnue x de l'*équation*, vous mettez le coefficient, pris comme poſitif & augmenté de l'unité, moins x, toutes les racines deviendront poſitives. Dans ce cas, vous n'aurez beſoin que des regles de la *figure 1*, dont les centres ſont à leurs extrémités, & elles vous ſuffiront pour tous les cas poſſibles ; car vous devez avoir obſervé que les centres de celles de la deuxieme figure ſont autrement diſpoſés.

11°. Si après avoir rendu toutes les racines de votre *équation* poſitive, vous voulez vous éviter la peine de tranſporter la regle MM à ſa droite de RR; ce qui eſt ſujet à quelque inconvénient, je veux dire, ſi vous voulez que toutes les racines de votre *équation* ſe trouvent entre O & T, ou entre zéro & l'unité, au lieu de la quantité inconnue x de la derniere *équation*, mettez x, multipliée par le plus grand coefficient négatif, conſidéré comme poſitif & augmenté de l'unité. Par exemple, ſi le plus grand coefficient négatif de l'*équation*, eſt -9, metrez $10\,x$ à la place de chaque x, & vous aurez une nouvelle *équation*, dont toutes les racines ſe trouveront ſur la ligne OT, ſans qu'il ſoit beſoin de la prolonger, car elles ſeront moindres que l'unité, je veux dire, que DC ou OT; mais après avoir ainſi trouvé les racines, il faut les multiplier par le coefficient augmenté de l'unité, c'eſt-à-dire, dans l'exemple ci-deſſus, par 10, parce qu'ayant mis $10\,x$ pour x, on rend chaque racine dix fois plus petite qu'elle n'étoit.

Ces propoſitions ſont reçues de tous les algébriques, & n'ont pas beſoin d'être démontrées.

Voici la deſcription d'une machine pour régler le mouvement des regles dont j'ai parlé : elle n'eſt que pour les *équations* du deuxieme degré ; mais on peut également l'employer pour toutes les autres.

ABCD, *figure 4*, eſt un chaſſis de fer ou d'acier, compoſé de quatre barres de fer aſſemblées par leurs extrémités, qui forment un parallélogramme rectangle de douze pouces de long ſur huit de large, aux quatre coins duquel ſont des appuis *EF*, *GH*, *IK*, & *LM*, ſur leſquels il porte. Sur le côté *A*, eſt un coulant *N*, qu'on peut arrêter avec une vis dans tel endroit qu'on veut, & ſur lequel la traverſe *NO* tourne ſur ſon centre. Son autre extrêmité tient par le moyen d'une vis avec ſon écroue à la traverſe *PQ*, qui eſt pareillement arrêtée ſur le chaſſis aux endroits *P* & *Q*, mais de maniere qu'on peut l'approcher ou l'éloigner à volonté de l'extrêmité *A*. Cette traverſe eſt repréſentée par la ligne *RR* de la premiere figure. Les quatre appuis *EF*, *GH*, *IK*, *LM*, portent trois traverſans *ST*, *UX* & *YZ*, ſur le premier deſquels eſt une boite coulante *o*, qui ſert de centre au traverſant *a b*. Le ſecond & le troiſieme, ſavoir, *UX* & *YZ*, ſont pareillement garnis de deux noix coulantes *e* & *f*, qu'on arrête où l'on veut par le moyen d'une vis, & auxquelles la ſoie *e f* eſt attachée. Les trois traverſans *ST*, *UX*, *A*, ou plutôt la ligne tracée sur celui d'en haut représente la ligne *SS* de la *figure 1*, & la soie *ef*, la base *ZZ* de la même figure.

g h i k est un autre parallélogramme environ deux fois plus long que le premier, dont les côtés *g k* & *h i* coulent dans des supports attachés par des vis au chassis *ABCD*, dont trois sont marqués par les lettres *l*, *m*, *n*, & ont des dents triangulaires par dessous, depuis *g* jusqu'à *d*, & depuis *h* jusqu'à *o*, lesquelles s'engrainent avec celles des deux roues *s* & *t* de même diametre, dont l'axe *pr* est soutenu dans deux endroits, savoir, *u*, & un autre qu'on ne peut voir dans la figure. Ces dents servent à régler le mouvement des traversans *gk* & *hi*, lorsqu'on fait mouvoir la machine; au moyen de quoi, les barres *n x* & *y z*, qui coulent dans deux pieces 1 & 2 sont toujours paralleles. Elles sont représentées par la ligne *MM* de la premiere figure. Celle de dessous *nx* est garnie d'une pointe 3, dont l'extrêmité supérieure passe dans la rainure de la barre 4, 5, & l'inférieure par celle de l'alidade *NO*. Sur la barre de dessus *y z*, est attachée une pointe perpendiculaire 6, 7, dont on peut ôter la pointe pour y mettre un crayon; cette pointe représente le point *s* & la premiere 3, le point *r* de la premiere figure. Sur la barre 4, 5 est un boulon rivé 8, qui est placé directement au dessus de la rainure de la barre *P Q*, & qui représente *t e*, le point *a* de la premiere figure. Les deux traversans 9, 10, 11, & 12, coulent dans les supports 13, 14, 15 & 16, sont garnis de dents triangulaires, qui engrainent avec celles des roues 17 & 18, dont l'axe est marqué par les nombres, 19, 20. Ces roues reglent le mouvement des barres, & font que celle qui est marquée par les chiffres 4, 5, se meut toujours parallélement; elle est représentée par la ligne *l a* de la premiere figure. Les coulans *e*, *f*, *c*, *N* & *R*, étant arrêtés avec des vis dans les endroits convenables selon les coefficiens de l'*équation*, ainsi qu'on le verra dans l'article suivant, en avançant ou reculant la barre *gh*, on fera mouvoir la machine, & la pointe 6, 7 décrira une courbe qui sera le lieu de l'*équation*. Les endroits où elle passera sous la soie *ef*, à compter de la ligne ponctuée, qui est marquée sur la traverse *UX*, indiquera les racines réelles; & le nombre de fois qu'elle approchera & s'éloignera de la même soie sans passer dessous, marquera celui des racines imaginaires. Au dessus des montans *EF*, *GH*, *IK* & *LM*, sont de petites pieces 21, 22 & 23, qui empêchent les barres qui coulent dessous de sortir de leurs places. Voici maintenant la maniere de rectifier la machine pour une *équation* donnée.

Arrêtez les noix *e f*, auxquelles la soie est attachée à égales distances des soutiens *EF* & *LM*; avancez ensuite la noix *c*, qui porte l'extrêmité de la barre *a b*, de sorte qu'elle soit plus éloignée du soutien *EF*, que l'endroit où vous avez arrêté la noix *e*, d'un nombre de divisions prises sur une échelle de parties égales, égal au terme connu de l'*équation*, s'il est positif, & plus près s'il est négatif; & arrêtez-la dans cet endroit. Faites ensuite couler la noix *N*, qui porte la barre *NO*, l'éloignant ou l'approchant du soutien *EF*, plus que ne l'est la noix *c*, d'un nombre de divisions prises sur la même échelle égal au coefficient de l'*équation*, je veux dire, celui où la quantité inconnue n'a qu'une dimension, plus loin si le coefficient est positif, & plus près s'il est négatif. Faites ensuite couler la noix *R*, qui fixe l'autre extrêmité de la barre *NO*, jusqu'à ce qu'elle soit plus éloignée d'une ligne tirée du soutien *EF* au soutien *LM*, je veux dire, du côté *D* du chassis, que la noix *N*, d'autant de divisions que le coefficient du terme de l'*équation*, où l'inconnue à deux dimensions l'indique, plus loin s'il est positif, & plus près s'il est négatif. Pour cet effet, on doit graduer le côté *A* du chassis, les barres *ST*, *UX*, *YZ*, & le traversant *PQ*, à commencer du front *D*. Ces gradations sont marquées différemment sur la machine, mais d'une maniere moins commode. Si l'on observe les endroits où la pointe, où le crayon 6, 7, coupe la soie *ef*, à commencer de la ligne ponctuée marquée sur la traverse *U X*; & qu'on les mesure sur une échelle, sur laquelle la distance du traversant *P Q*, prise depuis une ligne tirée du milieu de l'extrêmité *A* de *E F* à *G H* repréſente l'unité (on peut en voir la raiſon dans la démonſtration ci-deſſus, où *D c* ou *OT*, *figure 1*, qui marque la diſtance de cette ligne *P Q* de la barre *A*, eſt priſe pour l'unité), on aura les racines que l'on cherche. Si l'on ôte la ſoie *e f*, & qu'on mette un carton ſur la machine, ſur les deux traverſans ſupérieurs *U X* & *Y Z*, après avoir tracé deſſus une ligne qui repréſente la ſoie *e f*, & mis un crayon en place de la pointe 7; ce dernier décrira une courbe, qui, avec la ligne droite dont je viens de parler, conſtruira l'*équation* donnée. Plus les coefficiens ſeront grands (on peut les augmenter autant qu'on veut ſans changer les racines, en les multipliant par tel nombre qu'on voudra), plus les angles, que la courbe & la ligne formeront, ſeront grands; ce qui eſt avantageux dans la conſtruction des *équations*. Comme il paroît par la démonſtration précédente, qu'en augmentant les barres de cette machine, on peut l'employer généralement pour toutes les *équations* de quelque degré qu'elles puiſſent être, on peut l'appeller, à juſte titre, un *conſtructeur univerſel d'équations. (V)*

ÉQUATIONS DÉTERMINÉES. (*Algebre.*) Je me bornerai dans cet article à expoſer ce qui a été fait juſqu'ici ſur la ſolution générale des *équations*, dont on n'avoit pas parlé dans ce *Dictionnaire*, parce que lorſque l'*article* ÉQUATION fut imprimé, les analyſtes ne s'étoient pas encore occupés de cet objet, comme ils l'ont fait depuis.

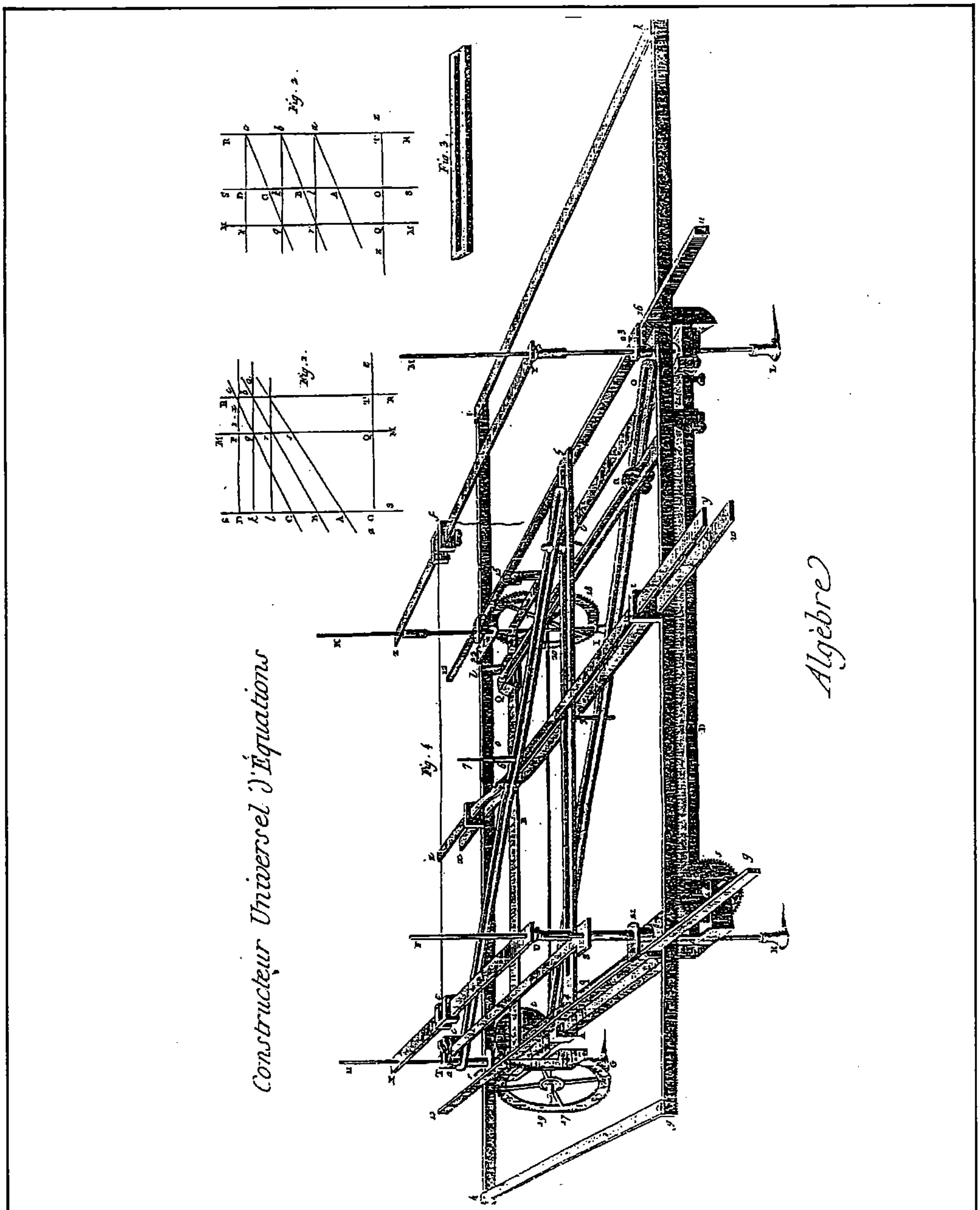
Le premier qui ait fait quelques pas dans cette recherche, eſt le célebre Tchirſnaus, géometre Allemand, à qui l'on doit la découverte des cauſtiques. Il propoſa une méthode pour faire diſparoître autant de termes qu'on voudroit d'une *équation* propoſée par le moyen d'une ſubſtitution; & il trouva que ſi on vouloit la réduire à deux termes, le premier & le dernier, & faire diſparoître les intermédiaires, on feroit dépendre la ſolution de la propoſée, de celle d'une *équation* $Y^n + A = 0$, *n* étant le degré de la propoſée, & *A* dépendant d'une *équation* du degré $n - 1$; $n - 2$ .... 2. 1.

M. Euler & M. Bezout, l'un dans le tome XI des *mémoires de Pétersbourg*, l'autre dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pour l'année 1765, ont pris une autre méthode. Ils ont ſuppoſé que la racine d'une *équation* du degré *n*, étoit de la forme $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$... le nombre des *A*, *B*, &c. étant $n - i$; & ils ont trouvé que l'on avoit *A* par une *équation* auſſi du degré $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$... 2. 1.

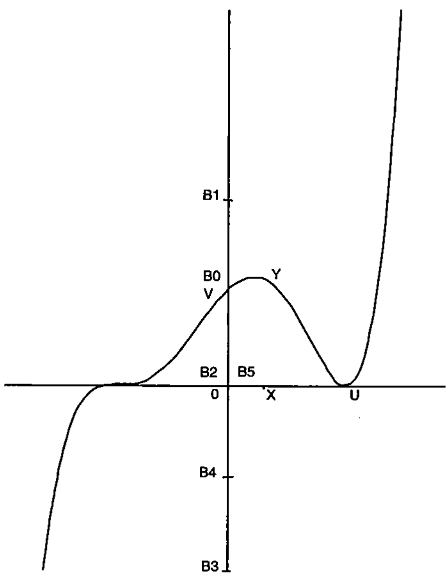
La ſolution d'une *équation* du 5ᵉ. degré ſe trouvoit donc réduite à celle d'une *équation* du vingt-quatrieme. Et quoique (*Voyez* les *recherches* de M. de la Grange & de M. de Wandermonde, ſur cet objet) cette *équation* ſoit réductible à une du ſixieme, l'*équation* du cinquieme degré n'eſt pas rabaiſſée par ce moyen, & celle du ſixieme le feroit encore moins.

Il reſte donc ici deux objets à conſidérer; l'un, la poſſibilité de parvenir à cet abaiſſement, auquel les *équations* ſemblent ſe refuſer; l'autre, les moyens de rendre praticables les calculs immenſes où cette méthode générale doit néceſſairement conduire.

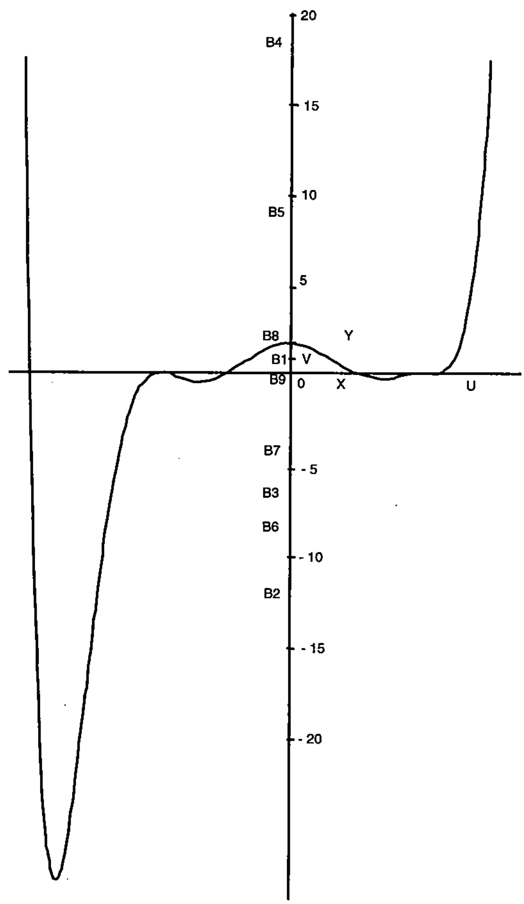
MM. Waring & Wandermonde ſe ſont occupés avec beaucoup de ſuccès du ſecond objet. On ſait que le ſecond terme d'une *équation* eſt égal à la ſomme des racines; le troiſieme à celle de leurs produits deux à deux, & ainſi de ſuite. On ſait auſſi que ces fonctions qui ſont connues, puiſqu'elles ſont les coefficiens de la propoſée, étant données, on peut en tirer la valeur d'une fonction quelconque des racines, pourvu que toutes y entrent d'une maniere ſemblable; mais les formules des coefficiens de la propoſée qui expriment ces fonctions ſemblables de racines, ſont difficiles à exprimer ſous une forme générale & commode, lorſque le nombre des racines ou les expoſans de ces fonctions ſont des quantités indéterminées. Si les fonctions ſemblables de toutes les racines ſont rationnelles, les fonctions des coefficiens de la propoſée le ſont auſſi: mais ſi elles ſont irrationnelles; ſi au lieu de fonctions ſemblables de toutes les racines, on cherche des fonctions ſemblables de deux, de trois racines ſeule-


Constructeur Universel d'Équations
Algèbre

ANNEXE 2

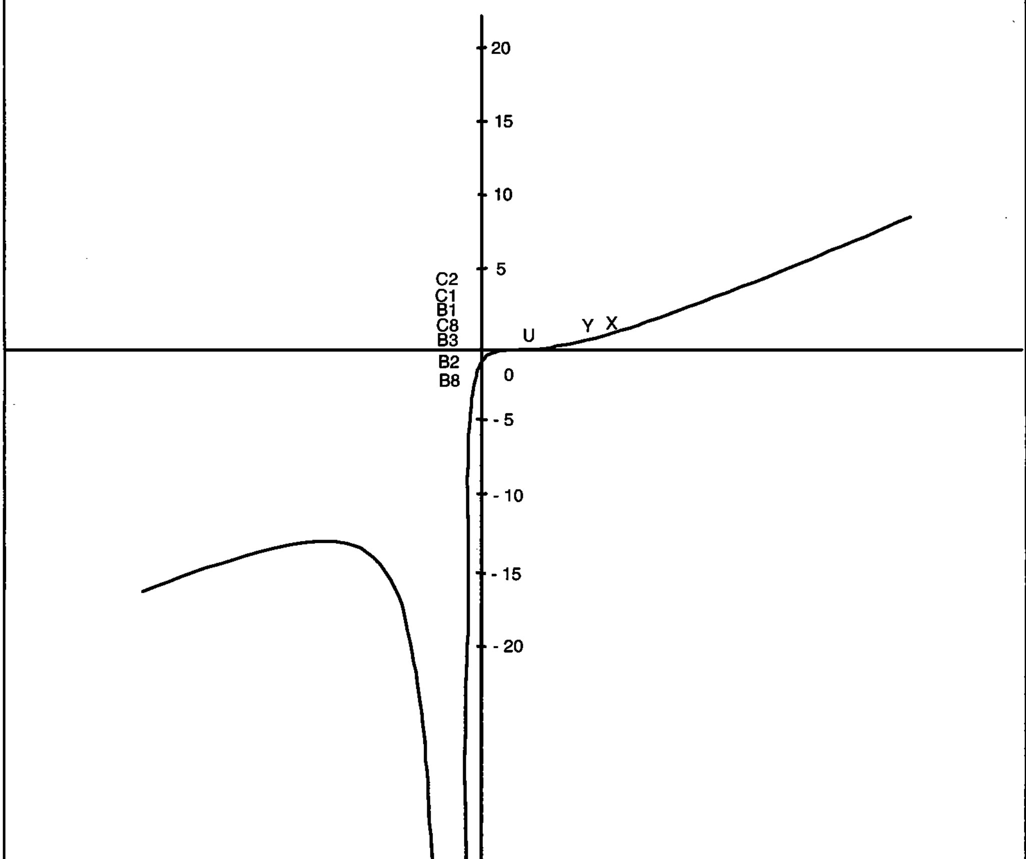


L'équation
X^5 + X^4 – 2 X^3 – 2 X^2 + X
+ 1 = 0
a une racine triple en –1 et une racine double en +1



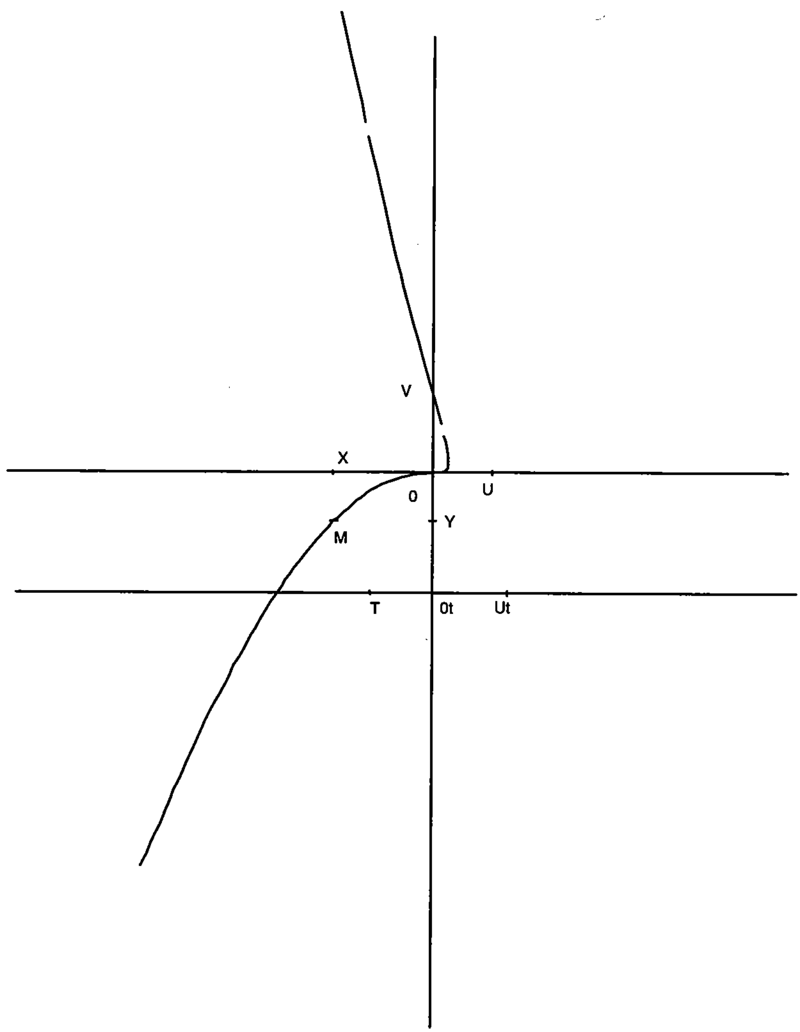
Les racines de l'équation
4 X^8 + 4 X^7 – 17 X^6 – 9 X^5
+ 24 X^4 + 6 X^3 – 13 X^2 – X + 2 = 0
sont : 1 (triple), –1 (double), ± 1/2 et –2

ANNEXE 3



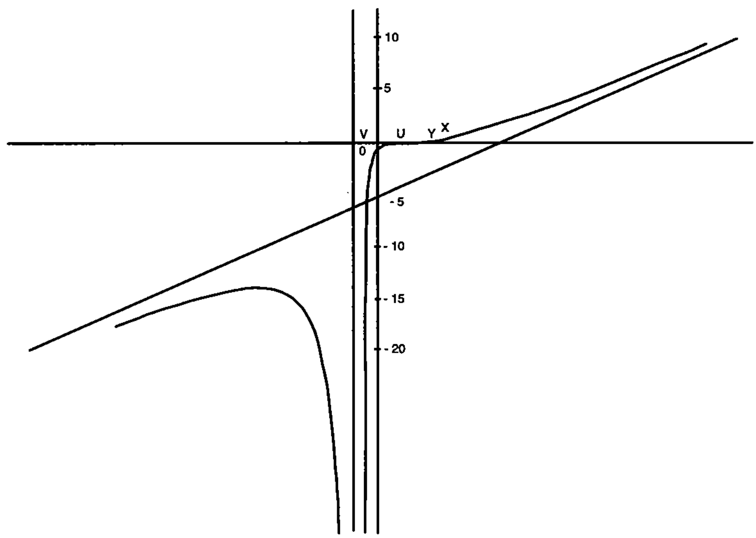
Courbe représentative de (x – 1)^3 / (x + 1)^2

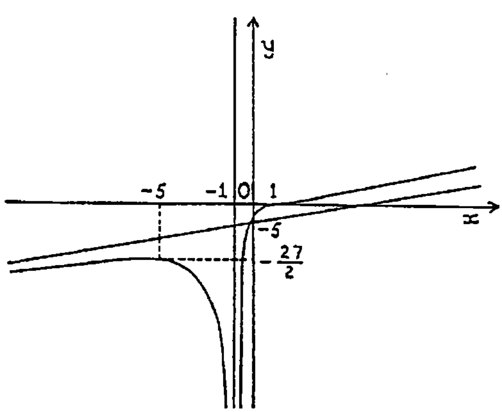
ANNEXE 4



Courbe d'équation $x = t - t^2,\ y = t^3$

ANNEXE 5





Comparaison de la courbe représentative de l'annexe 3 avec celle fournie dans le manuel *Mathématiques M.P.C. et Spéciales B* de Léonce Lesieur, publié en 1964 par la librairie Armand Colin.