LES DROITES D'ÉQUATION y = ax

Michèle MUNIGLIA
Irem de Lorraine

à P. HACHEL

Traditionnellement, l'enseignement des mathématiques — notamment au collège — est bien réparti entre un apprentissage de la géométrie d'une part, et un apprentissage de l'algèbre d'autre part. Cette juxtaposition du "numérique" et du "géométrique" est d'ailleurs le plus souvent mise en œuvre au niveau des emplois du temps, qui se répartissent généralement, au collège, en deux heures d'algèbre et deux heures de géométrie hebdomadaires.

Même si l'un sert à l'autre, il n'est pas rare que cela se fasse avec un décalage dans le temps assez important pour que les élèves aient du mal à voir que numérique et géométrique sont des alliés naturels... Et l'on se prend parfois à rêver de séquences idéales permettant d'abolir les barrières...

La proportionnalité est un excellent exemple pour illustrer ce problème. En effet, en 6ème et 5ème son étude est d'abord essentiellement centrée sur l'aspect *numérique* : après avoir vu échelles, pourcentages et quatrième proportionnelle, l'aboutissement se concrétise sous la forme des *tableaux de proportionnalité*, qu'un élève devra savoir manipuler tant au niveau du remplissage de cases vides qu'au niveau de la découverte du coefficient de proportionnalité. Ainsi l'enseignement de 5ème pourra être considéré comme accompli si les élèves sont capables de compléter un tableau du type suivant :

× ...	11	...	6,6	4,4
	7	2,1	...	...

En 4ème et 3ème, c'est l'autre aspect classique de la proportionnalité, cette fois *géométrique*, qui apparait à propos des droites y = ax. Mais depuis la réforme (qui a fait abandonner l'outil vectoriel), cet aspect géométrique ne peut plus donner lieu à une véritable théorisation mathématique. De ce fait il est souvent passé à la trappe... Au mieux, on l'étudiera sous l'aspect *fonctionnel*, dans le cadre de la *gestion de données*, c'est-à-dire qu'à partir du tableau de proportionnalité de 5ème on passera à un *tableau de valeurs*, puis à sa représentation graphique, pour conclure sur l'observation de l'alignement des points obtenus. Constat qui permet de contourner facilement l'interdiction d'outils de type vecteurs ou l'absence du théorème de Thalès et de la tangente, dont on ne dispose pas encore en classe de quatrième.

L'objectif de cet article et de la séquence qu'il décrit est de montrer une approche différente de la proportionnalité où numérique et géométrique vont cohabiter pour faciliter la compréhension de la notion d'équation de droite. La démarche pédagogique qui sous-tend la série d'activités proposées vise essentiellement à éviter deux écueils ! Le premier au niveau *numérique*, en faisant un travail qui tienne compte des obstacles observés en 5ème dès que les tableaux de nombres se complexifient (c'est le cas par exemple si l'on ajoute sur la première ligne du tableau précédent des nombres comme 1/3 ; 1,375 ou 7/8 : il est tout à fait fréquent que les élèves, même s'ils ont rempli correctement les premières colonnes ne sachent plus donner les réponses). Le deuxième au niveau *géométrique*, en tentant de ne pas tomber dans le piège du constat pur et simple d'alignement à partir d'un tableau de valeurs, que j'ai évoqué tout à l'heure.

Cette approche donc, sous forme d'une longue séquence destinée aux élèves de 4ème, se fixe un triple objectif :

1) surmonter les difficultés *numériques*,

2) explorer la situation *géométrique* de l'alignement de points dans un repère,

3) synthétiser ces deux aspects sous la forme d'*équations de droites*.

Je me propose d'en exposer ici la stratégie de façon détaillée, tout en invitant les lecteurs plus particulièrement intéressés à se reporter (dans [1]) à l'activité intitulée "les droites y = ax".

65 Que peut-on dire des triangles rectangles hachurés ?

....

....

Marque sur la figure les *égalités d'angles*, puis calcule :

$\widehat{ABP} = \widehat{HBK} + \widehat{ABH} + \widehat{KBP}$

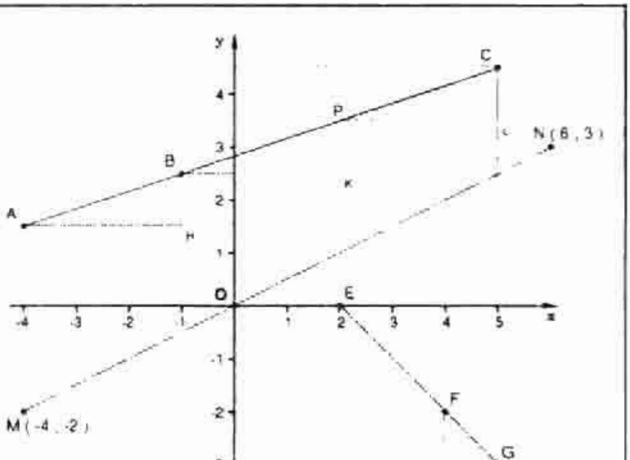
$\widehat{ABP} = \ldots + \ldots + \ldots$

$\widehat{ABP} = \ldots + \ldots = \ldots$

Que peut-on dire des points A, B, C ?

....

Colorie sur la figure des triangles rectangles égaux qui montrent que E, F, G sont alignés, puis fais de même pour M, O et N *(attention, dans ce cas, il te faut cinq triangles !)*



I — Activités d'apprentissage

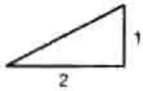
L'activité sur les droites d'équation y = ax constitue le troisième chapitre d'un fichier couvrant tout le programme de quatrième, elle vient à la suite de deux thèmes : le premier a permis de travailler sur les *triangles rectangles* et les *quadrillages*, le deuxième est consacré au *théorème de Pythagore*. L'étude des droites que le fichier propose ensuite repose sur les triangles rectangles, avec un jeu sur le quadrillage et les repères, si bien que le premier thème seul constitue un pré requis.

Dans un premier temps, la manipulation sera presque exclusivement géométrique et c'est de cette manipulation géométrique que naîtra l'idée d'un *lien possible* entre les coordonnées des points d'une même droite.

Ainsi dans l'exercice 65, où l'on travaille dans un repère, les points A , B , P et C sont les sommets de triangles rectangles hachurés sur la figure. Ces triangles ayant leurs côtés de l'angle droit égaux sont "égaux" et donc les angles correspondants sont égaux. Il en résulte que l'angle ABP est la somme d'un angle droit et de deux angles complémentaires : c'est un angle plat. Les points A , B , P sont alignés. Un raisonnement analogue, *qui restera implicite*, montrerait que B , P , C sont alignés et donc que A, B, C sont alignés.

Cet exercice amène à l'idée que l'alignement des points est lié à l'*existence de triangles rectangles égaux* qui sous-tendent la droite ainsi constituée. Il en irait de même pour les deux autres alignements de la figure :

— les points E, F et G nécessitent (pour prouver leur alignement) la construction de trois triangles rectangles isocèles de côté unité suggérés par le triangle de sommets F et G déjà tracé. Un point intermédiaire jouant le rôle de P dans la première partie de l'exercice sera créé par l'élève *sans autre explication que le dessin*.

— les points M , O , N demandent le franchissement d'une étape intermédiaire supplémentaire. Il n'y a en effet plus d'aide au niveau du dessin. La seule indication donnée est écrite : il faut *cinq* triangles. L'idée de ces triangles 

viendra d'un rapide calcul sur les coordonnées des points extrêmes qui ont la bonne idée d'être compatibles avec les coordonnées du point O .

L'objectif est alors de rendre la recherche de triangles rectangles égaux quasi automatique. C'est notamment le but de l'exercice 66 (cf. page suivante) où l'on revient au quadrillage et où, dans un ensemble de points qui sont des nœuds de quadrillage, on cherche les groupes d'au moins trois points alignés. La justification de l'alignement passe par la découverte de triangles rectangles égaux ; la difficulté est variable selon les groupes de points auxquels on s'intéresse. Ainsi des groupes de point tels que E, D, C, ou S, P, L, ou encore A, Q, N sont facilement gérés (deux triangles rectangles suffisent à prouver l'alignement). Pour les autres groupes de points, le passage par des points intermédiaires est indispensable. Une autre difficulté : la précision du tracé. En effet, les points Q, R et K, pour peu que la mine du crayon soit un peu trop épaisse, donnent le sentiment qu'il y a alignement. Il faut alors faire avec soin la recherche des triangles : force est alors de constater que cela ne marche pas ...

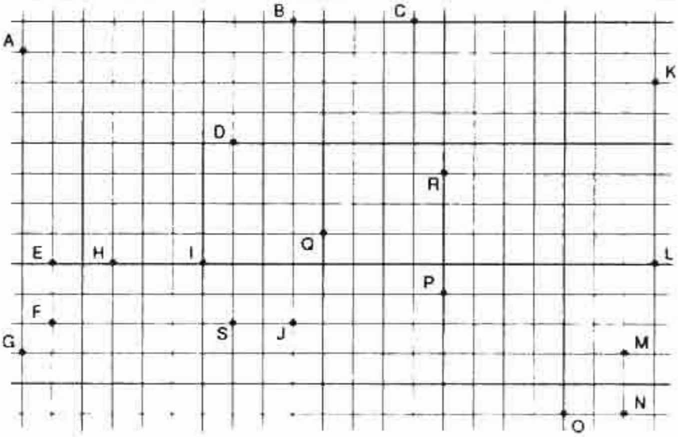
L'importance des triangles rectangles a fait son chemin, mais seuls (pour l'instant) les triangles rectangles correspondant à des nœuds de quadrillage ont été utilisés, ce qui peut laisser penser aux élèves que tous les problèmes de droites se résoudront par la découverte de triangles rectangles à côtés entiers.

66

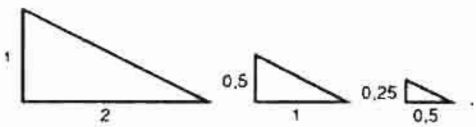
Voici 19 points donnés sur le quadrillage.

Cherche toutes les façons possibles de réunir certains de ces points en groupes d'*au moins trois points alignés.*
(exemple : G, F, H, ...)

Chaque fois que tu auras trouvé une droite, trace-la et colorie des triangles *rectangles égaux* (comme dans l'exercice précédent) qui montrent que les points sont bien alignés.



L'exercice 67 qui conjugue repère et quadrillage va permettre "d'affiner" les tracés. Les nœuds de quadrillage introduisent des triangles dont les côtés ne sont plus obligatoirement des nombres entiers. Ainsi la droite (0A) déterminée par O et par A(2;3) passe par le nœud de coordonnées (1;1,5) et passe aussi par le point "rouge" (0,5;0,75) : on obtient ainsi trois "familles" de triangles de plus en plus petits permettant de sous-tendre la droite. De la même façon, la droite (OC) pourra être sous-tendue par des triangles :



L'intérêt de l'exercice 67 réside aussi dans le fait que l'on découvre des points et que l'on s'intéresse aux points que l'on découvre. On quitte un peu les *triangles rectangles* pour

67

Place les points suivants dans le repère ci-contre :

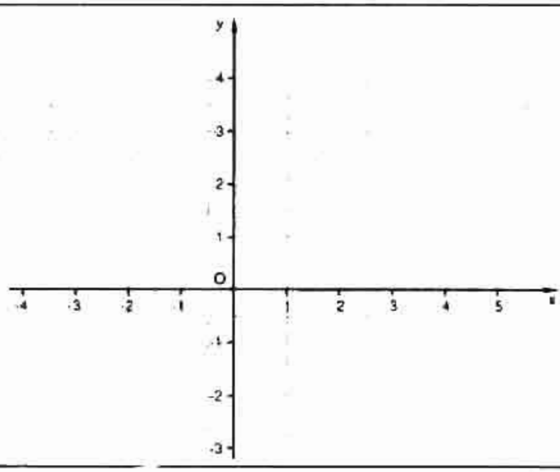
A (2 ; 3) , B (2,5 ; 1) ,

C (-2 ; 1) , D (6 ; -1,5) .

Trace soigneusement les droites OA , OB , OC et OD.

Indique par des points noirs tous les points du quadrillage par lesquels passent ces droites *(justifie la réponse en coloriant légèrement des triangles rectangles convenables).*

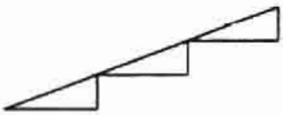
Indique en rouge les points qui sont des *milieux* de segments du quadrillage et par lesquels te semblent passer les droites.



s'attacher de plus près *aux points*. Ainsi pour les droites (OC) et (OD) l'accent mis sur les points peut faire naître des remarques concernant les *signes des coordonnées*. Sur ces droites, l'abscisse et l'ordonnée d'un point ne sont pas de même signe : on peut ainsi faire pressentir l'existence de deux familles de droites :

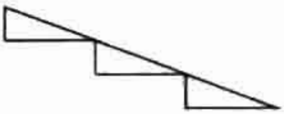
— celles de type (OA) ou (OB) pour lesquelles les points ont des coordonnées de même signe, et pour lesquelles les triangles correspondent à

un schéma de type



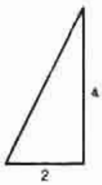
de ce fait elle peuvent être regardées comme des droites "montantes" ;

— celles de type (OC) ou (OD) avec des triangles



peuvent être regardées comme des droites "descendantes".

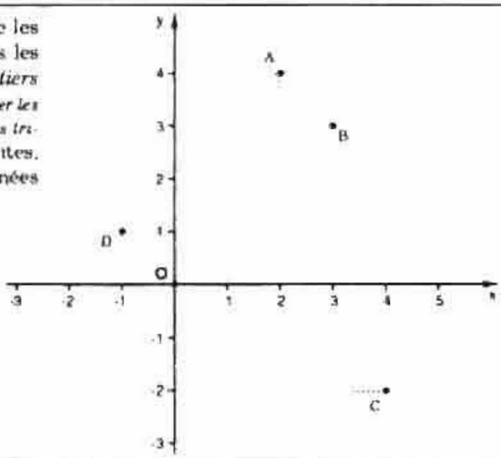
A ce niveau de la progression, l'aspect numérique de la proportionnalité n'a pas été explicité mais une première approche s'est faite par le biais de la recherche de triangles plus petits permettant la détermination de nouveaux points. Le fonctionnement implicite de la proportionnalité est ici un fonctionnement "horizontal" que nous allons détailler à propos de l'exercice 68. En effet, cet exercice permet le réinvestissement immédiat de l'activité précédente avec un prolongement numérique explicité sous forme de *tableaux de valeurs*. Pour cela on revient au repère sans l'aide du quadrillage. A partir de points à coordonnées entières placés dans ce repère, on peut trouver des droites pour lesquelles il faudra détecter d'autres points à coordonnées entières. Ainsi la droite (OA) passant par A(2;4) est sous-tendue sans problème par un triangle :



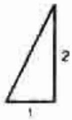
qui ne conduit pas à de nouveaux points. Il faut

68 Nous avons placé les points A, B, C et D. Trace les quatre droites OA, OB, OC, OD. Cherche tous les points dont les coordonnées sont des *nombres entiers* et qui sont sur l'une ou l'autre de ces droites. *(tu peux tracer les parallèles aux axes qui te semblent nécessaires, puis colorier des triangles rectangles convenables)* Pour chacune des quatre droites, complète le tableau ci-dessous en indiquant les coordonnées de tous les points entiers que tu as trouvés :

OA :	x	2	...	...	...	...	...
	y	4	...	...	...	...	...
OB :	x	3	...	...	...	...	...
	y	3	...	...	...	...	...
OC :	x	4	...	...	...	...	...
	y	-2	...	...	...	...	...
OD :	x	-1	...	...	...	...	...
	y	1	...	...	...	...	...



donc obtenir un autre triangle plus petit que l'on pourra découvrir grâce aux tracés de parallèles aux axes recréant un quadrillage. On obtiendra de cette façon un triangle :



conduisant aux points A'(1;2) et A"(–1;–2) .

On peut revenir ici sur l'idée du fonctionnement "horizontal" de la proportionnalité évoqué à la fin de l'exercice précédent. En effet, le jeu avec les triangles traduit un travail de proportionnalité de type " ÷ 2 " et non de type " × 2" . C'est-à-dire :

$$\begin{array}{ccc} 2 & \longrightarrow & 1 \\ & \div 2 & \\ 4 & \longrightarrow & 2 \end{array}$$

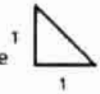
et non :

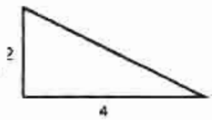
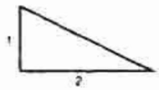
$$\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ \downarrow & \times 2 & \downarrow \\ 4 & & 2 \end{array}$$

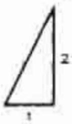
Le fonctionnement pour (OB) se fera selon le modèle :

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 2 \\ & \div 3 & & \times 2 & \\ 3 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 2 \end{array}$$

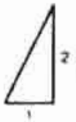
qui conduira aux points B' (2;2) ; B'_1(1;1) ; B_2(–1;–1) ; B'_2(–2;–2) en reportant des triangles de type  autant de fois qu'il est nécessaire.

La deuxième bissectrice (OD) est sous-tendue par des triangles de type  qui ressemblent aux triangles de (OB) , mais ils correspondent à une droite "descendante" qui donne des points dont les coordonnées ne sont pas de même signe (et dans ce cas particulier : elles sont *opposées*).

Le cas de la droite (OC) est intéressant à regarder de plus près. Définie par le point C de coordonnées (4;–2) , elle conduit d'abord au triangle  , puis par division au triangle  qui, répété autant de fois que le dessin le permet, conduit aux points (2;–1) et (–2;1) ; et ceci par simple lecture graphique.

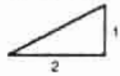
Un deuxième point numérique important peut être mis en évidence à partir de cet exercice. En effet, la multiplication liée à la proportionnalité s'effectue par *additions successives*. : reprenons le cas de la droite (OA) pour laquelle le tableau de valeurs est incomplet. Si l'on décide d'imaginer d'autres points, la démarche consiste (en A) à placer un nouveau triangle de type  qui conduit aux opérations : 2+1 = 3 (en abscisse) et 4+2 = 6 (en ordonnée) ; puis : 3+1 = 4 et 6+2 = 8 , etc., etc.

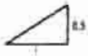
Ainsi, le tableau de valeurs de (OA) une fois complété, la *multiplication deviendra assez naturelle*.

Le triangle 

qui signifie que "une augmentation de 1 en abscisse conduit à une augmentation de 2 en ordonnée" permettra d'évoluer vers le " × 2 " ... (Noter au passage que, grâce au point $(-1;-2)$ on déduira facilement l'égalité : $(-1) \times 2 = -2$).

Le procédé est encore plus justifié pour la droite (OC), dès que l'on se propose de compléter le tableau de valeurs. Pour obtenir un point supplémentaire à partir de C, l'adjonction d'un triangle conduit à : $4+2 = 6$ (en abscisse) et $-2 - 1 = -3$ (en ordonnée). Mais il est clair qu'ici *le passage à la multiplication ne s'impose pas*, et notamment lorsque les coefficients directeurs sont négatifs. Il faut donc trouver le moyen de forcer l'élève à abandonner cette "régression vers l'addition" pour se tourner vers un facteur multiplicatif.

C'est le projet de l'exercice 69 où l'on retrouve quadrillage et repère. Cinq droites sont tracées et des nœuds de quadrillage correspondant à des valeurs entières sont donnés. Des points, définis par leurs coordonnées, sont ou ne sont pas situés sur les droites proposées. Le but de l'exercice est de déterminer à quelle droite ils appartiennent. Les neuf premiers points se placent sans problème sur le schéma et l'on peut "voir" directement si le point est sur l'une des droites. Cependant, on peut s'assurer de la présence effective du point sur la droite en jouant sur les triangles. Ainsi pour le point $(1;0,5)$: il est sur D_3 car le triangle 

peut aisément être remplacé par le triangle 

Le travail de réduction de triangles, suivi éventuellement de mise "bout à bout", permet de régler facilement le cas de ces neuf premiers points. A partir du dixième point — et c'est l'endroit de la *bascule* didactique — il n'est plus possible de placer le point sur le schéma. Ainsi pour le point (7 ; 3,5), il est tout à fait possible d'imaginer la juxtaposition de sept triangles de type 

conduisant à :

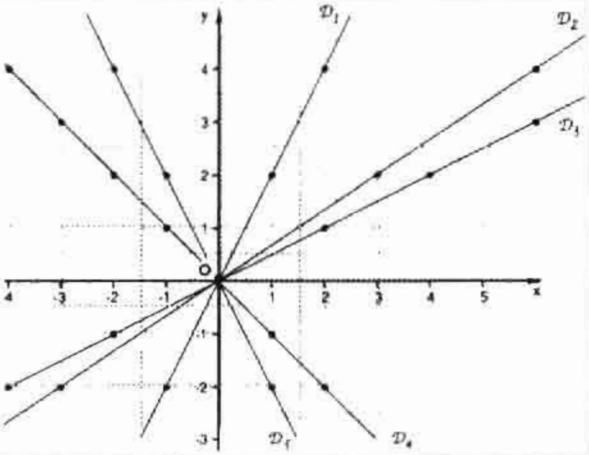
$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$$

et à :

$$0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 = 3,5 ,$$

69 Nous avons tracé cinq droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$ et $\mathcal{D}_5$. Parmi les points ci-dessous *(donnés par leurs coordonnées)*, certains sont sur l'une des cinq droites. Indique la droite, si c'est le cas :

(1 ; 0,5)	(1,5 ; 3)	(-1,5 ; 3) ......
(-2,5; 2,5)	(-3 ; -1,5)	(-1,5 ; -1) ......
(-0,5 ; -1)	(-3 ; 1,5)	(-3 ; 3) ......
(7 ; 3,5)	(7,5 ; 5)	(3 ; 5,5) ......
(-3 ; -6)	(-5 ; 5,5)	(-5 ; -2,5) ......
(-4,5 ; 3)	(-4 ; -8)	(3 ; -6,5) ......
(10 ;-10)	(8 ; 4)	(9 ; 6) ......
(10 ; 10)	(9 ; 15)	(8 ; 17) ......
(9,5 ; 19)	(-1 ; 5)	(-2 ; 6) ......
(-5 ; -10)	(-8 ; 16)	(-24 ; -12) ......



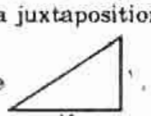
ce qui permet de conclure que (7 ; 3,5) est sur la droite D_3. Mais il est clair que la manipulation devient lourde et que l'évolution vers la multiplication verticale va devoir s'imposer. Les quelques points découverts sur D_3 : (2;1) ; (4;2) ; (6;3) ; (1;0,5) ; (7;3,5) peuvent laisser penser, à ce stade de la progression, que la droite D_3 n'est rien d'autre qu'une "machine à multiplier" par 0,5 . Autrement dit : " pour qu'un point soit sur D_3, il suffit que l'ordonnée soit la moitié de l'abscisse " !

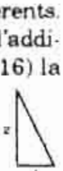
Qu'en est-il des points à coordonnées négatives ? Dès le début de l'exercice, (–3;–1,5) est élément de D_3 grâce à l'utilisation des triangles. On peut donc s'être rendu compte que, sur cette droite, les points ont des coordonnées de même signe. Dès lors (–24;–12), qui remplit les deux conditions précédentes, est sur D_3, ainsi que (–5;–2,5) ...

De la même façon, D_1 sera la "machine à multiplier par 2", c'est-à-dire que sur cette droite les points ont des coordonnées de même signe et (si l'on oublie les signes) l'ordonnée est le double de l'abscisse. Chemin faisant, la multiplication d'un nombre négatif par un nombre positif s'installe ... Par exemple, pour le point (–4;–8), dont la position va résulter de la juxtaposition de quatre triangles de type 

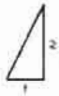
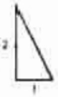
et des calculs : " (–1)+(–1)+(–1)+(–1) = –4 " et " (–2)+(–2)+(–2)+(–2) = –8 " , on arrive à " (–4) x 2 = –8 " par le fait que D_1 n'est autre que la machine à multiplier par 2 .

Il faut quand même noter que tous les problèmes de multiplication par un nombre positif ne sont pas résolus à cet endroit. En effet, si les choses paraissent naturelles pour des droites "faciles" de type D_1 et D_3, il n'en est pas de même pour D_2 dont l'équation est : y = 2/3 x .

Le coefficient fractionnaire 2/3 n'est pas naturel et le point (7,5 ; 5) continuera le plus souvent à être obtenu par la juxtaposition mentale de 5 triangles de type  .

Reste alors la difficulté des droites à pente négative. Les exercices précédents ont déjà permis de noter que sur ces droites les points ont des coordonnées de signes différents. A cet endroit encore, la "régression vers l'addition" peut fonctionner. Ainsi pour (–8;16) la juxtaposition de huit triangles de type 

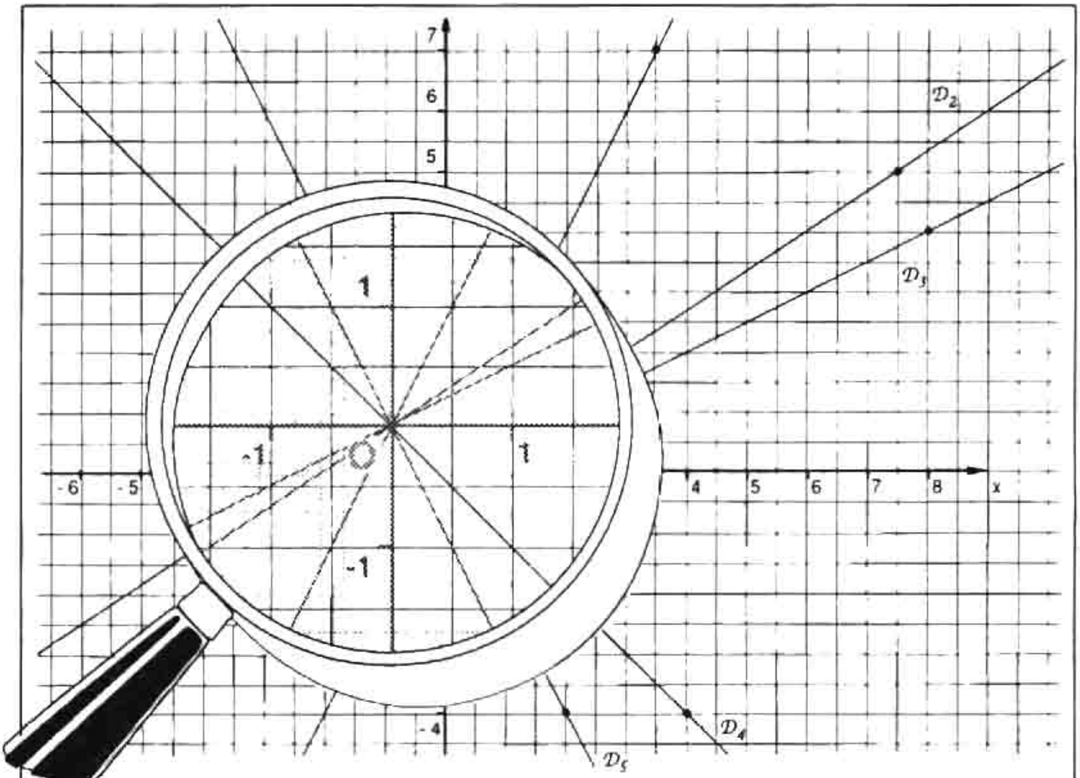
conduit à " (–1) + (–1) + ... + (–1) = –8 " et à " 2 + 2 + ... + 2 = 16 ".

Mais il semble bien, qu'à ce moment-là, *un autre mécanisme* se mette en place. En effet, on peut rapprocher les triangles  et 

qui, à "l'inclinaison près", ont les mêmes effets sur abscisses et ordonnées ; d'où l'idée qu'il s'agit de machines à multiplier par le même nombre *au signe près* : D_6 est alors la "machine à multiplier par –2".

Il faut aussi s'intéresser à la droite D_4. En ce qui concerne l'exercice 69, on peut se débrouiller sans recourir à la multiplication. C'est en effet une droite que l'on a déjà rencontrée et pour laquelle les points ont des coordonnées opposées : donc (10;–10) est élément de cette droite.

La multiplication par –1 sous-jacente peut ne pas être formulée à cet endroit, mais il ne sera pas possible d'en faire l'économie et les exercices 70 et 71 permettront cette formalisation qui joue un rôle majeur dans la multiplication des relatifs.



70 Nous avons redessiné ci-dessus les 5 droites de l'*exercice 69* et nous avons grossi le voisinage du point origine. Marque soigneusement sur la figure les points du quadrillage qui sont sur les droites (travaille sur les *petits carreaux* pour les points qui apparaissent à l'intérieur de la loupe). Pour chaque droite, relève les coordonnées de 5 points et complète les tableaux ci-dessous *(choisis à chaque fois deux points extérieurs à la loupe et trois qui sont à l'intérieur)* :

$\mathcal{D}_1$	x	...	...	...	...	...
	y	...	...	...	...	...
$\mathcal{D}_2$	x	...	...	...	...	...
	y	...	...	...	...	...
$\mathcal{D}_3$	x	...	...	...	...	...
	y	...	...	...	...	...
$\mathcal{D}_4$	x	...	...	...	...	...
	y	...	...	...	...	...
$\mathcal{D}_5$	x	...	...	...	...	...
	y	...	...	...	...	...

71 Tu as sans doute remarqué que tous les points du premier tableau vérifient : $y = 2 \times x$. Trouve des relations semblables vérifiées par les nombres des quatre autres tableaux :

$\mathcal{D}_2$: $y = \ldots\ldots x$, $\mathcal{D}_3$: $y = \ldots\ldots x$,

$\mathcal{D}_4$: $y = \ldots\ldots x$, $\mathcal{D}_5$: $y = \ldots\ldots x$.

En t'aidant de ces relations *et de la figure*, complète en cherchant les valeurs de y :

$\mathcal{D}_1$	x	3	2	2	3	4
	y	...	...	...	...	...
$\mathcal{D}_2$	x	3	2	2	3	4
	y	...	...	...	...	...
$\mathcal{D}_3$	x	3	2	2	3	4
	y	...	...	...	...	...
$\mathcal{D}_4$	x	3	2	2	3	4
	y	...	...	...	...	...
$\mathcal{D}_5$	x	3	2	2	3	4
	y	...	...	...	...	...

En jouant avec repère et quadrillage, les triangles de référence à côtés entiers ont pu être diminués et l'on a pu atteindre de cette façon des facteurs multiplicatifs décimaux du type " ...,5 " et même du type " ...,25 " ou " ...,75 ". Pour faire sentir que ce n'est pas seulement vrai pour ces points particuliers, l'exercice 70 (cf. page précédente) introduit la loupe dont le but essentiel est de jouer avec le changement d'échelle.

Les droites choisies sont les mêmes que dans l'exercice 69 donc les triangles rectangles découverts dans cet exercice vont se reproduire à l'intérieur de la loupe avec les petits carreaux.

Ainsi le triangle caractéristique  de D_1

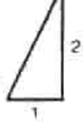
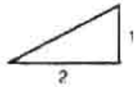
deviendra à l'intérieur  ce qui permettra de faire apparaître dans le tableau de valeurs des points tels que (0,1 ; 0,2) ou (0,2 ; 0,4) . Même si, ici encore, l'exercice induit un *fonctionnement horizontal* (on effectue

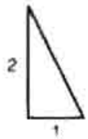
$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 0.1 \\ & \div 10 & \\ 2 & \longrightarrow & 0.2 \end{array}$$

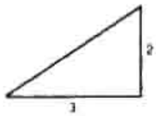
), l'écriture des coordonnées de points situés à l'intérieur de la loupe dans le tableau permet de vérifier que, pour eux aussi, la multiplication verticale par 2 fonctionne bien. D'où le saut à l'équation proprement dite dans l'exercice 71 ...

Cette équation apparaît en fait comme le résumé mathématique de la "machine à multiplier" : « Si c'est vrai pour beaucoup de points (et peut-être pour tous !) il devient agréable et fonctionnel de résumer cela par une formule ». D_1, D_2 et D_5 ne posent pas de problèmes. Restent D_3 et D_4 ...

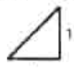
Pour ce qui est de D_3, si 2/3 n'a pas été découvert par le biais des activités précédentes, on peut penser qu'il le sera par la découverte implicite du lien entre *facteur multiplicatif vertical* et *triangle caractéristique*.

Ainsi :  $\rightarrow \times 2$;  $\rightarrow \times (1/2)$

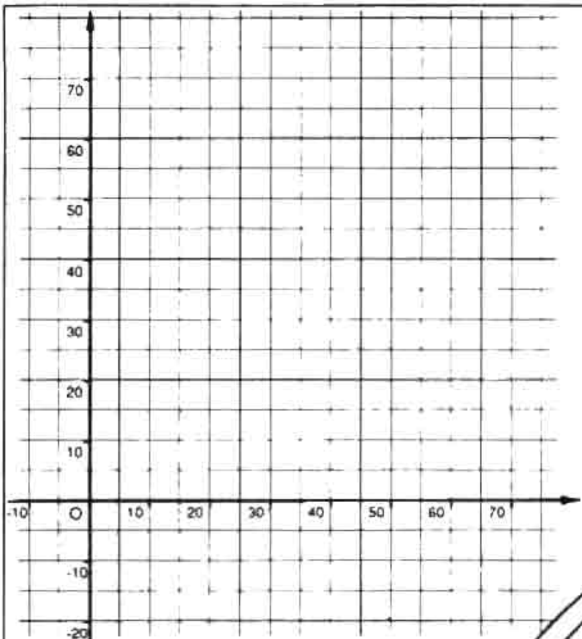
 $\rightarrow \times (-2)$;

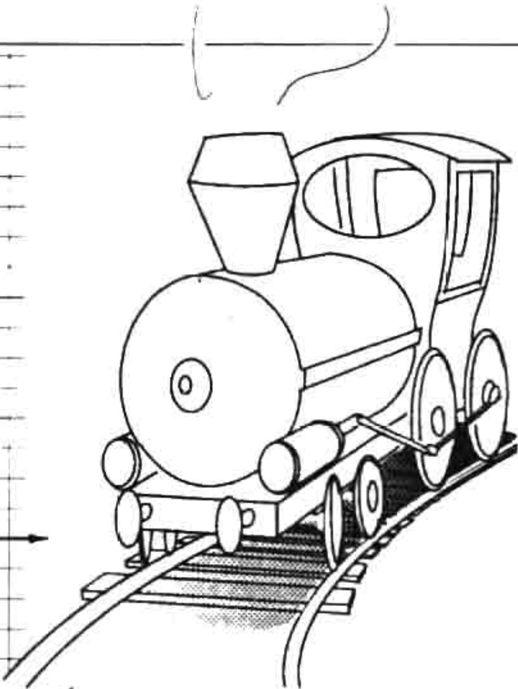
d'où :  $\rightarrow \times (2/3)$.

On peut aussi avoir recours à un travail de 5ème : "je passe de 3 à 2 en multipliant par 2/3 ". Pour clôturer l'exercice 71, il reste la difficulté de l'équation de la droite D_4. Jusque là, compte tenu de son caractère particulier, il n'y avait aucune obligation à déterminer un facteur multiplicatif et la réponse la plus souvent obtenue est " y = – x ".

Si l'on insiste pour obtenir une multiplication, le rapprochement est fait avec le triangle  qui induit : " y = x = 1 × x ", et donc, du fait qu'il s'agit cette fois d'une droite descendante : " y = (–1) × x ".

Autre point important de cet exercice : le remplissage du tableau de valeurs dans lequel on fixe les valeurs de x . Les valeurs positives avec pentes positives ne posent évidemment aucun problème ; mais quand le calcul fait apparaître un ou deux nombres négatifs, les élèves peuvent avoir recours au schéma pour déter-





72 Un (petit) train roule à 30 km/h. Il passe à la gare de *Latour de Carol* à midi. A quelle distance de cette station (en km) est-il 10 mn plus tard ? 20 mn plus tard ? etc. Complète :

apr s 10 mn de trajet le train a parcouru ....

apr s 20 mn de trajet le train a parcouru ....

apr s 30 mn de trajet le train a parcouru ....

apr s 40 mn de trajet le train a parcouru ....

Dans le tableau ci-dessous **x** désigne le *temps écoulé* et **y** désigne la *distance parcourue*, complète ce tableau :

x (mn)	10	20	30	40	50	60
y (km)	...	...	...	...	...	...

Pour toutes les valeurs (**x** ; **y**) de ce tableau, place le point correspondant dans le repère du haut, puis trace la droite passant par ces points.

Choisis *cinq autres valeurs quelconques* du temps écoulé **x**, et complète :

x (mn)	...	...	...	...	...
y (km)	...	...	...	...	...

73 Le train express roule à 90 km/h. Il passe à *Latour de Carol* à minuit. A quelle distance de cette station (en km) est-il 10 mn plus tard ? 20 mn plus tard ? etc. Complète :

apr s 10 mn de trajet le train a parcouru ....

apr s 20 mn de trajet le train a parcouru ....

apr s 30 mn de trajet le train a parcouru ....

apr s 40 mn de trajet le train a parcouru ....

Dans le tableau ci-dessous **x** désigne le *temps écoulé* et **y** désigne la *distance parcourue*, complète ce tableau :

x (mn)	10	20	30	40	50	60
y (km)	...	...	...	...	...	...

Lorsque c'est possible, place dans le repère les points correspondant aux (**x** ; **y**) de ce tableau, puis trace la droite passant par ces points.

Choisis *cinq autres valeurs quelconques* du temps écoulé **x**, et complète :

x (mn)	...	...	...	...	...
y (km)	...	...	...	...	...

miner le signe du résultat : ainsi sur D_1, D_2, D_3, les valeurs négatives ont des images négatives alors que sur D_4 et D_5 les valeurs négatives ont des images positives.

La séquence d'apprentissage proprement dite se termine sur les exercices 72 et 73 (cf. page précédente). Ils ont deux objectifs : le premier est le passage à la continuité (quelques points permettent de tracer une droite, qui permet à son tour de découvrir d'autres points), le deuxième est l'utilisation des droites dans le cadre d'un problème dit "concret".

Tous les exercices que nous venons de voir constituent la *phase d'apprentissage* au sens suivant : il s'agit de la découverte d'une situation nouvelle, la notion *d'équation de droites*, qui présente deux aspects, l'un *géométrique* et l'autre *numérique* ; aspects qui se condensent sur un aspect *algébrique* : l'équation. Cette phase est conclue par une page dite "de savoir et savoir faire" qu'il faut regarder comme une deuxième "bascule" et que l'on pourrait appeler la phase d'*institutionnalisation*. Il faut bien comprendre en effet la stratégie mise en œuvre jusqu'ici, notamment au niveau numérique où elle était destinée à surmonter les obstacles dus à la multiplication. Maintenant *un renversement doit se produire* : d'objet second, la notion d'équation va devenir l'objet premier ... C'est à une utilisation systématique dans ce sens qu'amènent les exercices de la deuxième partie.

II — Activités d'applications

Pour une description complète des exercices de cette deuxième partie, je renverrai directement le lecteur au fichier "Géométrie Quatrième" (cf. [1]), et je me contenterai ici d'en commenter les grandes lignes. On retrouve évidemment :

1) les difficultés *numériques* à deux niveaux :

a) les fractions,

b) les relatifs.

2) les difficultés liées au *formalisme de l'équation* avec :

a) des travaux sur la *signification* de la pente : montante, descendante, très montante, peu descendante, etc., etc.

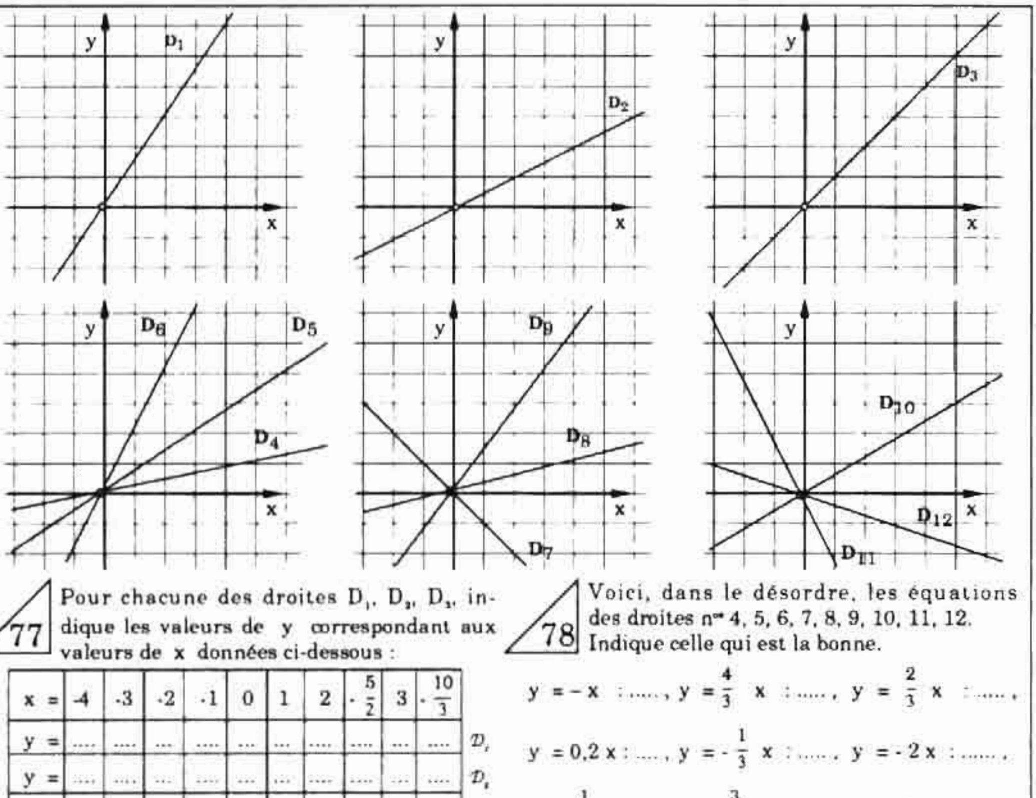
b) les "aller-retour" nécessaires, soit pour trouver l'équation d'une droite donnée, soit pour construire la droite à partir de son équation.

1.a) *les fractions :* Je prendrai comme exemple l'exercice 77 : les tableaux de valeurs à compléter obligent à multiplier par $3/2$, par $1/2$.

L'utilisation des règles de multiplication n'est pas automatique. Le passage au nombre décimal par le biais de la calculette est le plus souvent utilisé. C'est pourquoi quand il s'agit d'effectuer $(10/3) \times (1/2)$ (pour lequel la calculette ne donne pas le résultat exact) un retour aux règles de calcul devient nécessaire.

Un autre aspect du calcul sur les fractions ne peut être contourné : la division. En effet, dans les exercices 82 et 83 l'utilisation systématique de l'équation passe par la *connaissance de l'ordonnée* qui doit permettre le *calcul de l'abscisse*.

Il est possible au départ de gérer les équations du type : " $(3/2)\,x = 1$ " ; " $(3/2)\,x = 2$ " ; " $(3/2)\,x = 12$ ", mais il devient rapidement indispensable de trouver une "autre" formule. Ainsi " $y = (3/2)\,x$ " donnera " $x = (2/3)\,y$ " grâce à l'introduction de l'*inverse*.



77 Pour chacune des droites D_1, D_2, D_3, indique les valeurs de y correspondant aux valeurs de x données ci-dessous :

x =	-4	-3	-2	-1	0	1	2	$-\frac{5}{2}$	3	$-\frac{10}{3}$	
y =	....	....	...	....	...	...	....	....	...	....	$\mathcal{D}_1$
y =	....	....	...	....	...	...	....	....	...	....	$\mathcal{D}_2$
y =	....	....	...	....	...	...	....	....	...	....	$\mathcal{D}_3$

78 Voici, dans le désordre, les équations des droites n^{os} 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Indique celle qui est la bonne.

$y = -x$: ....., $y = \frac{4}{3}$ x : ....., $y = \frac{2}{3}$ x : .....,

$y = 0{,}2\,x$: ....., $y = -\frac{1}{3}$ x : ....., $y = -2\,x$: .....,

$y = \frac{1}{4}$ x : ....., $y = \frac{3}{5}$ x : ....., $y = 2\,x$: .....

82 Pour chacune des douze droites D_1, D_2, ... , D_{12}, trouve les *abscisses* x des points tels que : y = 1 , y = 2 , y = 12.

	y = 1	y = 2	y = 12		y = 1	y = 2	y = 12
$\mathcal{D}_1$	......	.....	......	$\mathcal{D}_7$	......	......	......
$\mathcal{D}_2$	...	...	...	$\mathcal{D}_8$		..	....
$\mathcal{D}_3$	......		..	$\mathcal{D}_9$			
$\mathcal{D}_4$	..	..	..	$\mathcal{D}_{10}$	..	..	..
$\mathcal{D}_5$	......	....	....	$\mathcal{D}_{11}$	.....	......	.....
$\mathcal{D}_6$	.....	..	....	$\mathcal{D}_{12}$		...	..

83 Pour chacune des douze droites D_1, D_2, ... , D_{12}, trouve les *abscisses* x des points tels que : y = – 1 , y = – 2 , y = 1/2 .

	y = -1	y = -2	y = 1/2		y = -1	y = -2	y = 1/2
$\mathcal{D}_1$	...	.....	......	$\mathcal{D}_7$	...	...	...
$\mathcal{D}_2$	..	..	..	$\mathcal{D}_8$			
$\mathcal{D}_3$				$\mathcal{D}_9$			
$\mathcal{D}_4$	..		...	$\mathcal{D}_{10}$			
$\mathcal{D}_5$	...	.....	.....	$\mathcal{D}_{11}$	....	...	...
$\mathcal{D}_6$		..	...	$\mathcal{D}_{12}$			...

1.b) *les relatifs :* Aucune règle n'a été jusqu'à présent formalisée, l'apprentissage de la multiplication des relatifs résidant essentiellement dans l'acceptation de " $(-1) \times x = -x$ " (qui permet toutes les combinatoires utiles au niveau numérique) et dans la possibilité du retour au dessin qui entérine à la fois la multiplication des relatifs et l'usage de l'équation comme "machine à multiplier".

Ainsi dans le tableau 77 (cf. page précédente), le remplissage des colonnes correspondant à un nombre négatif conduit à des calculs de type $(-4) \times (1/2)$. La droite D_1 d'équation $y = (1/2)x$ donne des points à coordonnées de même signe, donc tous les résultats sont négatifs et le calcul s'effectuera sur les valeurs absolues, ce qui correspond bien au fait que :
$(-4) \times (1/2) = (-1) \times [\,4 \times (1/2)\,] = -2.$

Le calcul sur les relatifs constitue une difficulté supplémentaire (et non nulle !) dans l'étude de ce chapitre. Vous avez pu voir dans le détail de la première partie que c'est un obstacle qu'il faut surmonter à tous moments et cela sans en faire un véritable objectif pédagogique risquant de concurrencer la stratégie fondamentale d'acquisition de la proportionnalité. Il n'en demeure pas moins que, chemin faisant, cet apprentissage secondaire s'installe et qu'il peut être totalement réalisé grâce à la deuxième partie du chapitre.

Un autre choix de stratégie aurait pu être fait au départ. Pour éviter cette difficulté, on aurait pu traiter la première partie uniquement sur des demi-droites du quadrant n°1, avec pour objectif la mise en relation de la *multiplication* avec le *triangle rectangle caractéristique*, étude qui aurait pu se prolonger par l'introduction des autres demi-droites. Elles auraient constitué alors le *support de la multiplication* des relatifs. Il semble toutefois que le choix fait n'est pas mauvais, car dans l'ensemble "cela marche" ; et on peut (peut-être) y voir le côté ouvert de l'activité en ce sens qu'elle permet la découverte d'une notion numérique nouvelle grâce au support géométrique... devenu une "image mentale" facile à réinvestir.

85 Nous avons partagé le plan en huit secteurs. Indique le secteur auquel appartient chacun des points donnés ci-dessous.

A (3 ; 1) : .... B (1 ; 3) : .... C (2 ; 6) : ....

D (3 ; 9) : .... E (-3 ; 2) : .... F (-1 ; -3) : ....

G (0,5;1,5) : .... H (-3 ; -1) : .... I (-6 ;-2) : ....

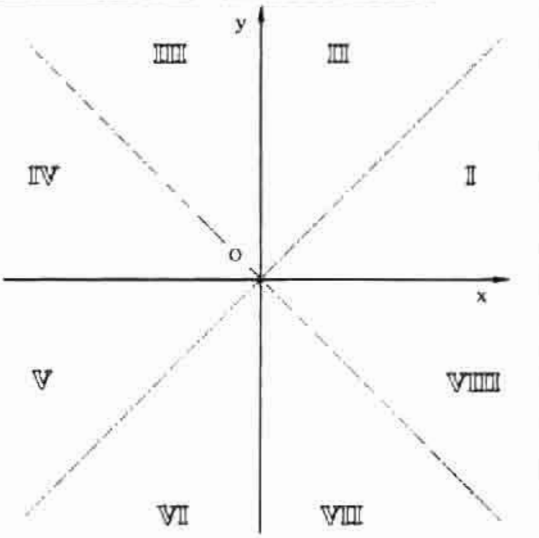
J (3 ; -1) : .... K (0,5 ; -1,5) : .... L (6 ; -2) : ....

Ces points déterminent-ils des droites particulières ? Si oui, précise leurs équations :

les points .... sont sur la droite y = ...

les points .... sont sur la droite y = ...

les points .... sont sur la droite y = ...



86 Nous avons partagé le demi-plan supérieur en 6 secteurs. Indique le secteur auquel appartient chacun des points :

A (7 ; 8) : .... B (-1 ; 10) : .... C (-6 ; 1) : ....

D (3,5 ; 4) : .... E (-3 ; 30) : .... F (14 ;15) : ....

G $(1 ; \frac{8}{7})$: .... H $(-\frac{1}{10} ; 1)$: .... I $(-2 ; \frac{1}{3})$: ....

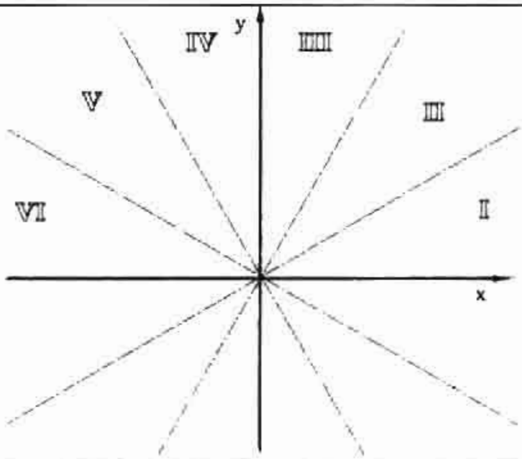
J $(-3 ; \frac{1}{2})$: .... K $(-\frac{2}{5} ; 4)$: .... L $(-5 ; \frac{5}{6})$: ....

Ces points déterminent-ils des droites particulières ? Si oui, précise leurs équations :

les points .... *sont sur la droite* y = ...

les points .... *sont sur la droite* y = ...

les points .... *sont sur la droite* y = ...

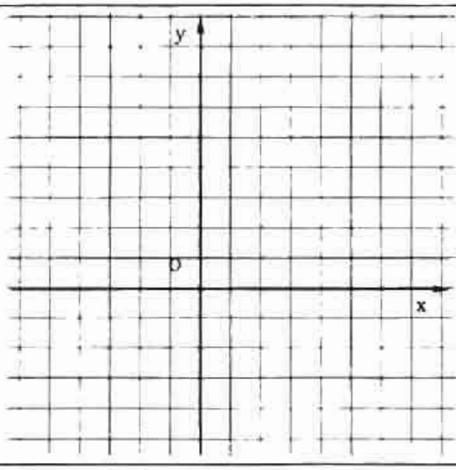


89 Voici 4 points A, B, C, D. Nous voulons tracer OA, OB, OC, OD. *(ces points ne sont pas sur la figure, car l'unité est égale à un carreau)*

Trouve dans chaque cas l'*équation de la droite*, ainsi que 2 points de celle-ci appartenant à la figure.

A (12 ; 24)	B (-56 ; 49)	C (128 ;-192)	D (-81 ;-54)
OA y = ... x	*OB* y = ... x	*OC* y = ... x	*OD* y = ... x
(..... ; .....)	(..... ; .....)	(..... ; .....)	(..... ; .....)
(..... ; .....)	(..... ; .....)	(..... ; .....)	(..... ; .....)

Trace enfin les droites OA, OB, OC, OD.



2.a) travaux sur la *signification* de la pente : je ne prendrai que l'exemple des exercices 85 et 86 qui se passent de commentaires.

2.b) *des "aller-retour" nécessaires pour trouver l'équation :*

— à partir de droites tracées (trouver les triangles rectangles) comme dans l'exercice 78 ;

— à partir d'un point donné (exercice 89) qui peut donner lieu à différentes stratégies selon le niveau des élèves : ainsi pour la droite passant par le point de coordonnées (12 ; 24), on peut noter que :

- on passe de x à y en multipliant par 2 ,
- on passe de y à x en multipliant par 1/2 ,
- on peut trouver directement la pente à l'aide de la règle : c'est 24/12 .

Mais il convient aussi de savoir construire une droite d'équation donnée en passant en revue tous ses éléments fondamentaux :

– importance du triangle rectangle fondamental, avec notamment l'exercice 88,

[On notera au passage l'introduction du coefficient $\sqrt{2}$ comme pente d'une droite... A ce niveau de la séquence cela ne constitue plus qu'une difficulté supplémentaire minime. On peut évidemment saisir cette occasion pour mettre en place l'idée d'approximation du tracé ; mais il n'est pas non plus inutile de considérer une écriture de ce genre comme un premier pas vers une "littéralisation" du coefficient a dans l'équation...]

– utilisation du point de coordonnées (1 ; a) avec l'exercice 87 qui en fait la recherche systématique, avec possibilité de l'utiliser ou, dans le cas contraire, de revenir à des valeurs entières plus intéressantes.

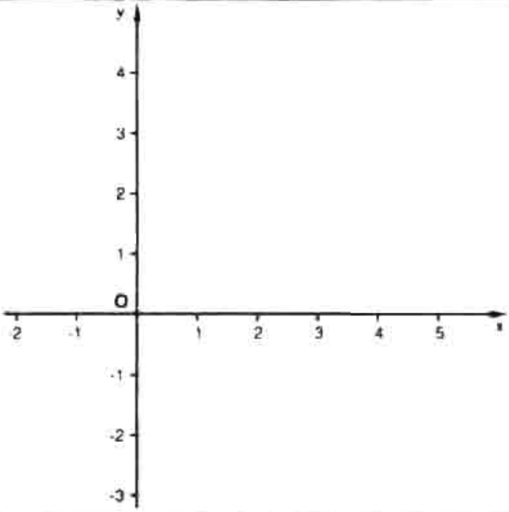
88

a) Dans le tableau ci-dessous, complète les coordonnées manquantes, puis trace chacune des droites.

$\mathcal{D}_1 : y = \frac{5}{6}x$	$\mathcal{D}_2 : y = \frac{9}{4}x$	$\mathcal{D}_3 : y = -3x$	$\mathcal{D}_4 : y = -\frac{4}{3}x$
(1 ; .....)	(1 ; .....)	(1 ; .....)	(1 ; .....)
(-1 ; .....)	(-1 ; .....)	(-2 ; .....)	(-3 ; .....)
(3 ; .....)	(2 ; .....)	(..... ; 1,5)	(..... ; -4)

b) recommence avec les droites suivantes :

$\mathcal{D}_5 : y = -\frac{7}{8}x$	$\mathcal{D}_6 : y = \frac{9}{6}x$	$\mathcal{D}_7 : y = \sqrt{2}\,x$	$\mathcal{D}_8 : y = \frac{12}{15}x$
(1 ; .....)	(1 ; .....)	(1 ; .....)	(1 ; .....)
(-1 ; .....)	(-1 ; .....)	(-2 ; .....)	(-3 ; .....)
(..... ; 7)	(..... ; 8)	(..... ; 2)	(..... ; -4)



87

Nous avons dessiné la droite $\mathcal{D}$ d'équation :

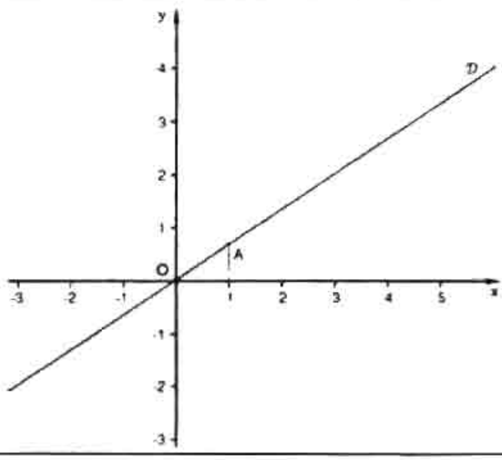
$$y = \frac{2}{3}x.$$

a) Marque tous les points de $\mathcal{D}$ qui ont des *coordonnées entières*. Cite deux points de $\mathcal{D}$ à *coordonnées entières* et qui ne sont pas visibles sur la figure :

(....... ; ....) (....... ; ....)

b) Pour chaque équation ci-dessous, indique l'*ordonnée* du point de la droite qui a pour abscisse $x = 1$; trouve un point à *coordonnées entières* situé sur cette droite, puis *trace-la* dans le repère ci-contre.

$\mathcal{D}_1 : y = 3x$	$\mathcal{D}_2 : y = \frac{4}{5}x$	$\mathcal{D}_3 : y = -2x$	$\mathcal{D}_4 : y = -\frac{2}{3}x$
(1 ; .....)	(1 ; .....)	(1 ; .....)	(1 ; .....)
(.... ; ....)	(..... ; .....)	(..... ; .....)	(..... ; .....)



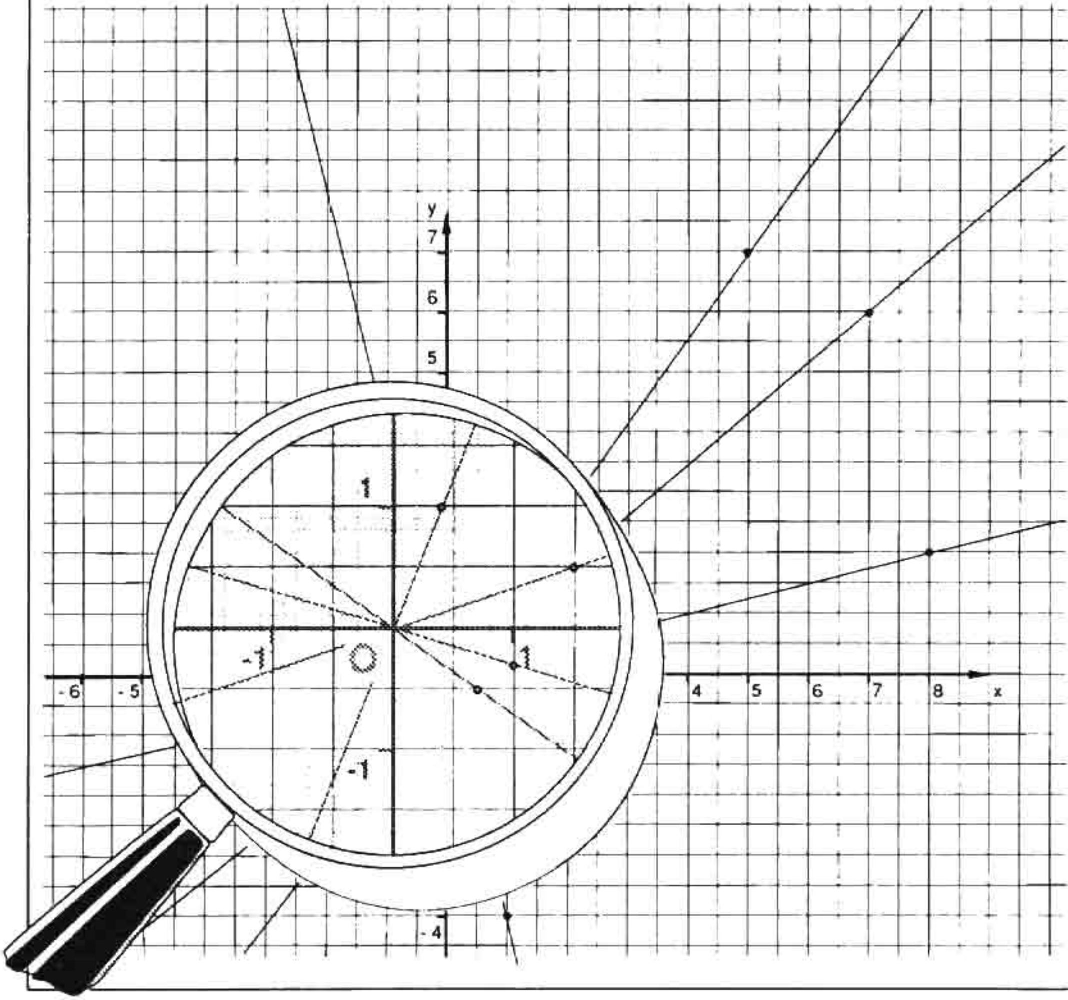
96 *La figure ci-dessous est incomplète : les droites visibles en dehors de la loupe n'apparaissent pas à l'intérieur de celle-ci ; inversement, la loupe fait apercevoir des droites qui ne sont pas prolongées au reste du repère ...* Complète le dessin en traçant en *bleu* les segments qui manquent dans la loupe et en traçant en *rouge* les prolongements des droites visibles dans la loupe. Dans chaque cas, donne un nom aux droites que tu considères et détermine leur équation :

....

....

....

....



La deuxième partie se termine sur l'exercice 96 (cf. page précédente). C'est encore la loupe. Une lecture trop rapide pourrait laisser penser qu'il s'agit d'un mauvais *remake* de l'exercice 70, mais l'activité est beaucoup plus complexe puisque droites extérieures et intérieures ne sont plus les mêmes. Cet exercice exige une très bonne synthèse et une très bonne maîtrise des points développés.

En effet, le passage droite extérieure / droite intérieure reste simple : le nœud de quadrillage extérieur se replace à l'intérieur et la droite passe en plus par l'origine : la détermination de la pente se fait en même temps. En revanche le passage droite intérieure / droite extérieure nécessite deux points car on ne dispose pas de l'origine. D'autre part, la plupart des nœuds de quadrillage intérieurs ne peuvent se transposer à l'extérieur directement et nécessitent une acquisition réelle de l'équation.

On peut donc mesurer sur ce seul exercice l'importance du chemin que l'on demande à l'élève de parcourir ... : calcul fractionnaire, calcul sur les nombres relatifs, calcul littéral, passage d'une situation géométrique à une formalisation algébrique, traduction graphique d'une équation du premier degré, etc., etc.

J'espère avoir montré comment la prise en compte de tous ces objectifs pouvait donner naissance à une séquence pédagogique fondées sur des activités ; activités pensées en termes de réactions de l'élève et gérées par le maître dans le sens d'une véritable progression. Ces exigences conduisent notamment à donner de l'importance à des démarches auxquelles il n'est pas toujours possible de songer à l'avance, comme celle qui résulte du renversement du calcul en matière de proportionnalité (passage de la vision "horizontale" à la vision "verticale"), ou même comme celle que j'ai appelée ici la "régression vers l'addition" et qui semble pourtant un passage indispensable à la plupart des enfants, car ils ont besoin d'une sécurisation en matière de multiplication ...

C'est là un des aspects qui me semblent les plus intéressants à dégager à partir de la stratégie adoptée, de même que celui qui touche à l'introduction simultanée des règles de multiplication entre nombres relatifs. Comme on l'aura noté, celle-ci est permise par une synthèse entre les aspects numérique et géométrique du chapitre concernant les équations de droites du type " y = ax ", et l'expérience montre qu'il est loin d'être gratuit ou inutile d'offrir aux élèves une façon supplémentaire de se "raccrocher à un dessin" pour vérifier ou retrouver des règles de calcul ...

C'est certainement là, en définitive, le résultat essentiel d'une pareille approche des équations de droites. On a sans doute trop tendance aujourd'hui — dans une stratégie globale des mathématiques au collège que l'on s'ingénie à orienter vers l'acquisition du "concept de fonction" — à ramener ce chapitre à une simple "gestion des données" introduisant aux "fonctions linéaires". De ce fait, l'aspect géométrique est souvent relégué au second plan. Peut-être la séquence précédente permettra-t-elle d'ouvrir un débat utile sur ce sujet...

[1] "Géométrie Quatrième", fichier d'activités pour l'élève. Irem de Lorraine.